

مثال کلاسیک بازبهنجارش

احسان ابراهیمیان

۱ مقدمه

پس از فرمولبندی مکانیک کوانتمی و نسبیّت خاص، تلاشهای بسیاری برای یکپارچه سازی این دو چارچوب نظری صورت پذیرفت. نظریه میدانهای کوانتمی برای سازگار کردن این دو چارچوب، نویدبخش بود. در نظریه میدانهای کوانتمی، واحدهای سازنده ماده، به جای ذرات جایگزیده با تکانه و مکان تقریباً مشخص، میدانها هستند. در این تصویر، الکترون و فوتون هر دو برانگیختگیهای میدان الکترون و میدان الکترومغناطیس هستند و برای محاسبه برهمکنش فوتون با الکترون، باید اثر میدان الکترومغناطیسی روی میدان الکترونی یا برعکس را محاسبه کرد. این محاسبات بر مبنای نظریه اختلال کوانتمی انجام می شوند و طبیعتاً اولین محاسبه ها، مربوط به مرتبه اول اختلال بودند و با دقت خوبی نتایج آزمایش را توصیف می کردند. اما نتیجه محاسبات مرتبه بعدی اختلال، که اغلب شامل محاسبه ای مشابه برهمکنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی تولید شده توسط خودش بود^۱، به جای این که تصحیح کوچکی بر مقادیر محاسبه جمله مرتبه اول باشد، واگرا می شد. این اولین مانع نظری جدی در برابر نظریه میدانهای کوانتمی بود اما در نیمه قرن بیستم، فاینمن^۲ و شویینگر^۳ و توموناگا^۴ توانستند با روش هایی این بی نهایت ها را رفع کرده و نظریه میدانهای کوانتمی را به یک نظریه با قدرت پیش بینی تبدیل کنند که سازگاری نتایج آن با آزمایش بیشتر از هر نظریه دیگری در فیزیک بود. نام این روش رفع بی نهایت بازبهنجارش^۵ بود.

محاسبات بازبهنجارش در نظریه میدانهای کوانتمی جزئیات فراوانی دارد که سادگی مفهومی آن را پنهان می کند. نیاز به بازبهنجارش ناشی از این واقعیت است که رابطه بین مشاهده پذیرها در آزمایش با پارامترهای فرمالیسم ریاضی مسئله مستقیم نیست و ترکیبی از پارامترهای حاضر در فرمالیسم ریاضی، در آزمایش اندازه گرفته می شوند. به خصوص وقتی برهمکنش بین اجزای مسئله را لحاظ کنیم این موضوع ضرورت بیشتری پیدا می کند. البته ارتباط غیر مستقیم نتیجه آزمایش با پارامترهای ریاضی مسئله، تقریباً همیشه در فیزیک رخ می دهد، اما آنچه بازبهنجارش را متفاوت می کند، ظاهر شدن بی نهایت ها است. بی نهایت ها معمولاً به دلیل ساده سازی در مدل سازی ریاضی به وجود می آید: فرض این که ما طبیعت را تا فواصل بی نهایت کوچک می شناسیم. رفع کردن این بی نهایت ها معمولاً با رها کردن این فرض و تغییر دادن نظریه در طول مشخصی مثل r انجام می شود که این طول در آزمایشگاه غیر قابل دسترس است و دقت های آزمایشگاهی نمی تواند آن را اندازه بگیرد. این

¹self-interaction

²Richard Feynman

³Julian Schwinger

⁴Shin'ichiro Tomonaga

⁵renormalization

طول، جمل ما نسبت به جهان زیر مقیاس r را کمی می کند.

محاسبه کلاسیک جرم الکترون تمام عناصر مهم بازبهنجارش را در خود دارد از طرفی پیچیدگی بسیار زیاد محاسبات نظریه میدان کوانتومی را هم در خود ندارد بنابر این هسته اصلی بازبهنجارش را نشان می دهد. اکنون یک طرح نسبتاً انتزاعی و قدم به قدم از فرایند کلی بازبهنجارش رسم می کنیم که ممکن است در ابتدا چندان روشن به نظر نرسد، اما در بخش بعد با مثال جرم الکترون، مصداقی از هر قدم را خواهیم دید. طرح بازبهنجارش به صورت زیر است:

۱ هر نظریه فیزیکی یک فرمالیسم ریاضی است که مجموعه ای از پارامترهای آزادی مثل $p_1, p_2, \dots$ را شامل می شود.

۲ به کمک فرمالیسم ریاضی و پارامترهای آزاد مسئله، می توان مشاهده پذیری چون O_i را محاسبه کنیم، رابطه آن با پارامترهای نظریه معمولاً چیزی شبیه این است:

$$O_i = p_i + f(\{p_j\}, r) \quad (1)$$

در اینجا f تابعی از پارامترهای نظریه، $\{p_j\}$ است اما یک پارامتر کوچک، r نیز وجود دارد. معمولاً زمانی که r به سمت صفر میل کند تابع f واگرا می شود بنابر این نقش ناصفر نگه داشتن r این است که f را متناهی نگه دارد. به r قاعده مندساز^۶ می گویند. فرایند تغییر نظریه به نحوی که تابع متناهی چون f ظاهر شود نیز، قاعده مندسازی^۷ نام دارد.

۳ در نهایت با انجام آزمایش می توان مقدار O_i را اندازه گرفت. اگر مقدار آن برابر P_i باشد آنگاه می توان پارامترهای نظریه را پیدا کرد. نکته مهم اینجا است که پارامترهای نظریه در عمل به مقدار r وابسته خواهند بود. در نهایت باید ارتباط مشاهده پذیرها با r به گونه ای باشد که تغییر مقدار r باعث تغییر مقدار مشاهده پذیر نشود. این نکته شاید اینجا بدیهی به نظر برسد اما در نظریه میدان های کوانتومی این قید بسیار مهمی است و اطلاعات زیادی درباره نظریه به ما می دهد.

۲ جرم الکترون

در قدم ۱ باید یک فرمالیسم ریاضی با پارامترهای آزاد معرفی کنیم. فرمالیسم ریاضی ما بر مبنای معرفی کنش و کمینه کردن آن است. با معرفی کنش غیر نسبیتی برای الکترون و همچنین میدان های الکترومغناطیسی و کمینه کردن این کنش، معادلات حرکت به دست می آیند. در نتیجه برای مرحله اول، نظریه یک الکترون و میدان الکترومغناطیسی را با کنش زیر فرمول بندی می کنیم:

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + e(A_i \dot{x}^i - \phi) + L_{EM}[\phi, A_i] \right), \quad (2)$$

که x مکان الکترون و ϕ و A پتانسیل های الکترومغناطیسی هستند. در اینجا L_{EM} لاگرانژی میدان الکترومغناطیسی است:

$$L_{EM} = \frac{1}{2} \int d^3x (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 / \mu_0^2). \quad (3)$$

^۶regulator

^۷regularization

پارامترهای آزاد نظریه ما را e و m_0 در نظر می‌گیریم. وردش گرفتن از معادلات بالا نسبت به مکان الکترون ما را به معادلات حرکت الکترون و نیروی لورنتس می‌رساند:

$$m_0 \ddot{\mathbf{x}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

در صورتی که بار الکتریکی الکترون، e ، برابر با صفر باشد، آنگاه نسبت نیروی وارد بر الکترون تقسیم بر شتاب آن برابر m_0 خواهد بود که این ثابت یکی از پارامترهای نظریه است و می‌توان آن را در آزمایشگاه اندازه گرفت. بدون در نظر گرفتن برهم کنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی، باید m_0 را برابر مقدار اندازه گیری شده جرم الکترون در آزمایشگاه، یعنی m_e ، قرار دهیم.

حال به قدم ۲ می‌رسیم. با بار الکتریکی ناصفر، الکترون یک میدان الکتریکی در اطراف خود ایجاد می‌کند. با توجه به این که میدان الکتریکی باعث به وجود آمدن چگالی انرژی برابر $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ می‌شود، آنگاه از روی رابطه هم ارزی جرم و انرژی اینشتین، می‌توان جرم موثر الکترون را اینگونه نوشت:

$$m_{\text{eff}} = m_0 + E_E/c^2 \quad (5)$$

که E_E انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی است. تا همینجا یک قدم به بازبهنجارش نزدیک شدیم، آنچه به عنوان جرم الکترون در آزمایشگاه اندازه می‌گیریم، m_e ، نه برابر با m_0 بلکه برابر با m_{eff} در رابطه (۵) است، بنابراین m_0 به طور مستقیم قابل اندازه گیری نیست. اما محاسبه انرژی کل مشکلی به وجود می‌آورد، نتیجه محاسبه انتگرال چگالی انرژی واگرا است:

$$E_E = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \int_0^\infty \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dR}{R^2} = \infty. \quad (6)$$

با دقت در انتگرال بالا ملاحظه می‌کنیم که واگرایی ناشی از کران پایین انتگرال است. در صورتی که مدل نقطه‌ای الکترون را با مدل گسترده‌تری جایگزین کنیم، مثلاً فرض کنیم بار الکتریکی آن روی پوسته‌ای به شعاع r قرار دارد، واگرایی بالا را قاعده‌مند کرده‌ایم:

$$E_E = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \quad (7)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$m_{\text{eff}} = m_0 + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 r}. \quad (8)$$

حال معنای قدم ۲ و قاعده‌مندی و نقش پارامتر کوچک قاعده‌مندساز، r را بهتر درک می‌کنیم. تنها کاری که برای قدم ۳ باقی می‌ماند این است که جرم اندازه گیری شده الکترون در آزمایشگاه، m_e را با m_{eff} برابر قرار دهیم. با توجه به این که مقدار r را به صورت دلخواه وارد نظریه کردیم و مقدار m_e ثابت طبیعت است، به نظر می‌رسد که مقدار پارامترهای آزاد نظریه هم باید به مقدار پارامتر دلخواه r وابسته باشد به طوری که در نهایت با تغییر r مقدار m_0 تغییر کند به طوری که m_{eff} بدون تغییر باقی بماند. این نکته شاید به نظر بدیهی برسد اما در بافتار نظریه میدان‌های کوانتومی معنای دیگری می‌یابد.

در نظریه میدان‌های کوانتومی هم، مثل مثال جرم کلاسیک الکترون، پارامتر قاعده‌مندساز r متناظر با یک طول کمینه است. این طول کمینه به نوعی وابسته به دقت‌های آزمایشگاهی ماست، به این صورت که ما شناختی از طبیعت در طول r و کوچکتر از آن نداریم و این طول قاعده‌مندساز بسیار کوچکتر از طول‌های قابل دسترس در

آزمایشگاه است. بنا بر این می توان نظریه را در آن طول ها طوری تغییر بدهیم که واگرایی رفع شده و قاعده مند شود بدون این که شکل نظریه در مقیاس های قابل دسترس برای ما، تغییری کند.^۸ قاعده مندسازی به نوعی معادل است با نرم کردن میدان های کوانتمی با مقیاس طول r ، به این معنی که مثلاً یک میدان مثل ϕ را درون کره ای به اندازه r میانگین گرفته و از مقدار میانگین آن به عنوان متغیر دینامیکی استفاده می کنیم. گویی دنیا را با عینکی نگاه می کنیم که نمی تواند طول های کوچکتر از r را ببیند. در این صورت به طور طبیعی یک مقیاس طول r به نظریه تحمیل می شود که تمام واگرایی ها را قاعده مند می کند. با توجه به این که نتیجه آزمایشات ما نباید به این مقدار r وابسته باشد، در نتیجه مقدار پارامترهای آزاد فرمالیسم باید تابع r باشد. این تابعیت پارامترهای آزاد نظریه از مقیاس دلخواه r را می توان به گونه ای دیگر بازگو کرد: اگر نظریه را با نرم شدن های متفاوتی بنگریم، پارامترهای آزاد آن نظریه تغییر می کنند. این کمابیش شبیه مطالعه گذار فاز در ترمودینامیک به کمک روش بازبهنجارش است که در آن، رفتار پارامترهای همیلتونی را با تغییر مقیاس بررسی می کنند.^۹

برای بررسی گذار فازها در سیستم های بس ذره ای، به جای کار با همیلتونی اصلی که وابسته به تمام درجات آزادی سیستم است، از یک همیلتونی میانگین گیری شده روی فضای حقیقی در مقیاس r استفاده می شود که طبیعتاً درجات آزادی دینامیکی کمتری دارد (چون چند درجه آزادی مختلف به صورت یک درجه آزادی میانگین ظاهر شده است). افزایش r در این حالت معادل رفتن به مقیاس ماکروسکوپی است. با افزایش r بعضی پارامترهای همیلتونی اهمیتشان را از دست می دهند و برخی دیگر از پارامترها مهم تر می شوند. پارامترهایی که مهم تر می شوند آنهايي هستند که تعیین می کنند فاز نهایی سیستم چیست.

چنین تقسیم بندی در نظریه میدان های کوانتمی هم وجود دارد. برخی برهمکنش ها یا ضرایب با رفتن به مقیاس ماکروسکوپی ضعیف و ضعیف تر می شوند بنا بر این نقش بسیار کمی در دنیای ماکروسکوپی بازی می کنند اما برخی دیگر با رفتن به مقیاس ماکروسکوپی کوچک باقی می ماند که معمولاً توضیح دنیای ماکروسکوپیک تنها با اتکا به این پارامترها کافی است. برای مثال فرض کنید وقتی از r های بسیار کوچک شروع کنیم، جایی که تقریباً مطمئنیم به بنیادهای میکروسکوپیکی سیستم (مثلاً اندازه اتم ها در یک مایع) رسیده ایم، آنگاه r را افزایش دهیم طوری که از مقیاس بنیادی بسیار بسیار بزرگتر باشد (اما همچنان کوچکتر از مقیاس های قابل دسترس در آزمایشگاه) آنگاه مسیر پارامترها اطلاعات مهمی در مورد رفتار ماکروسکوپیکی سیستم به دست می دهند. در حالت عادی، مقدار بسیاری از پارامترها در r های بزرگ، مستقل از مقدار آن در r ابتدایی (جایی که فیزیک میکروسکوپیکی مهم می شود) خواهد بود. برخی دیگر از پارامترها (معمولاً زیرمجموعه ای بسیار کوچکی از کل پارامترها) این چنین نیستند و تابع مقدار اولیه خودشان باقی می ماند. پارامترهای غیر وابسته به مقدار اولیه در حقیقت پارامترهای غیر حساس به فیزیک میکروسکوپی (فرابنفش) هستند. این پارامترها در مقیاس های بزرگ تنها به مقدار آن گروه از پارامترهایی وابسته خواهند بود که مقدار اولیه شان مهم بود. دقیقاً به همین دلیل اغلب اوقات فیزیک ماکروسکوپیکی را می توان تنها با چند پارامتر توصیف کرد و بیشتر جزئیات میکروسکوپیکی مایعات در چند عدد مثل گرانروی و چگالی و ... خلاصه می شوند.

^۸ روش های قاعده مندسازی در نظریه میدان های کوانتمی متنوع است و بسته به کاربردهای متفاوت، روش های متفاوتی برای تغییر نظریه وجود دارد. در نظریه میدان های کوانتمی اغلب لاگرانژی را در طول های کوچک تغییر می دهند. در مثال الکترون چون ما تصویر هندسی روشنی از الکترون داشتیم به جای تغییر لاگرانژی و سپس انجام محاسبات، مستقیماً نتیجه تغییر لاگرانژی را استفاده کردیم اما در نظریه میدان های کوانتمی باید از تغییر لاگرانژی تا محاسبه مشاهده پذیرها را به دقت دنبال کرد.

^۹ فصل ۱۴ کتاب مکانیک آماری Pathria در این باره است.