

لگاریتم

سری عددی

دکتر یوسف کوهمسکن

ریاضی ۱۱م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده 🧐 جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 - ساده 🧐 جهت تثبیت مطالب
 - متوسط 🧐 جهت تمرین بیشتر مطالب
 - سخت 🧐 جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

مقدار عددی عبارت زیر را تعیین کنید.

$$\left(\sum_{n=1}^{20} \log_{5^n} 3^{n^2} \right) \times \left(\sum_{n=1}^{100} \log_{9^n} 25^n \right) \times \left(\sum_{n=1}^{98} \log_{2^{n(n+1)(n+2)}} 16^n \right) = ?$$

۲ روش حل مسئله



پاسخ: هر کدام از پرانتزها مجزا محاسبه می‌شوند. توجه به نکته زیر در حل مسائل مربوط به لگاریتم ضروری است.

💡 به شرط آنکه $a, b > 0, a \neq 1$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

اکنون هر کدام از سری‌ها محاسبه می‌شوند. جمله اول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} \log_{5^n} 3^{n^2} &= \sum_{n=1}^{20} \frac{\log 3^{n^2}}{\log 5^n} \\ &= \sum_{n=1}^{20} \frac{n^2 \log 3}{n \log 5} \\ &= \sum_{n=1}^{20} n \frac{\log 3}{\log 5} \\ &= \sum_{n=1}^{20} n \log_5 3 \\ &= \log_5 3 \sum_{n=1}^{20} n \\ &= \log_5 3 \left(\frac{20(20+1)}{2} \right) \\ &= 210 \log_5 3 \end{aligned}$$

در رابطه فوق از نکته زیر استفاده شد.

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$$
💡

جمله دوم به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{100} \log_{9^n} 25^n &= \sum_{n=1}^{100} \frac{\log 25^n}{\log 9^n} \\
 &= \sum_{n=1}^{100} \frac{\log 5^{2n}}{\log 3^{2n}} \\
 &= \sum_{n=1}^{100} \frac{2n \log 5}{2n \log 3} \\
 &= \sum_{n=1}^{100} \frac{\log 5}{\log 3} \\
 &= \log_3 5 \sum_{n=1}^{100} 1 \\
 &= 100 \log_3 5
 \end{aligned}$$

در رابطه فوق از نکته زیر استفاده شد.

$$\sum_{n=1}^N 1 = N \quad \text{💡}$$

در نهایت مقدار جمله سوم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{98} \log_{2^{n(n+1)(n+2)}} 16^n &= \sum_{n=1}^{98} \frac{\log 16^n}{\log 2^{n(n+1)(n+2)}} \\
 &= \sum_{n=1}^{98} \frac{4n \log 2}{n(n+1)(n+2) \log 2} \\
 &= \sum_{n=1}^{98} \frac{4}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \sum_{n=1}^{98} \left(\frac{4}{n+1} - \frac{4}{n+2} \right) \\
 &= \frac{4}{1+1} - \frac{4}{98+2} \\
 &= 2 - \frac{4}{100}
 \end{aligned}$$

در رابطه فوق از نکته زیر استفاده شد.

💡 در سری‌های تلسکوپی که قبلاً در همین دسته از فایل‌های @AvaEducation16 📩 ارائه شده است

به طور کامل توضیح داده شد که

$$\sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1}$$

با ضرب سه جمله بدست آمده، پاسخ نهایی مسئله تعیین می‌شود:

$$\left(\sum_{n=1}^{20} \log_{5^n} 3^{n^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{100} \log_{9^n} 25^n \right) \left(\sum_{n=1}^{98} \log_{2^{n(n+1)(n+2)}} 16^n \right) = (210 \log_5 3)(100 \log_3 5) \left(2 - \frac{4}{100} \right) = 41160$$

هر چیزی که ذهن انسان بتواند تصور
و باور کند، می‌تواند به آن دست پیدا
کند.

ناپلئون هیل



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

  0935 210 4321

 AvaEducation16@gmail.com