



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید. جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی $۶۹۵۰/۷۳$ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شماره گزینه درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینه شماره ۳ درست است باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

				۳
--	--	--	--	---

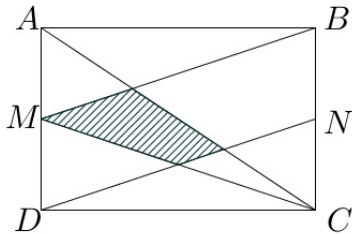
لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به علاوه به هیچ وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. سینا می‌خواهد برای دوره کردن کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایه آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همه کتاب‌ها را مطالعه کند؟

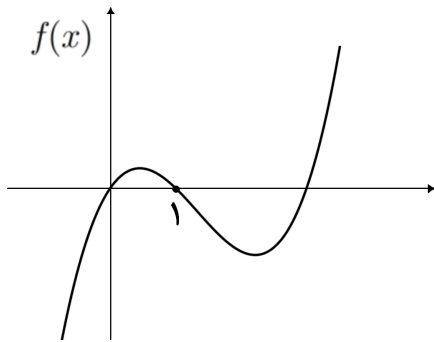
۲. x و y دو عدد حقیقی هستند که $x + y = ۶$ و $x^۲ + y^۲ = ۴۰$ مقدار $x^۶ + y^۶$ چه قدر است؟



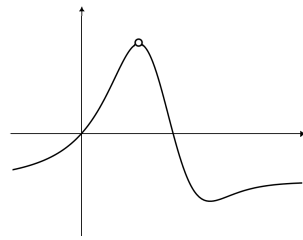
آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور



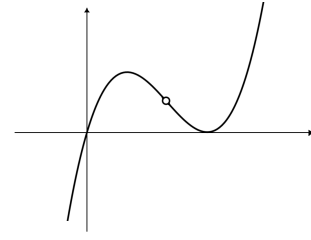
۳. در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل $ABCD$ هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشورخورده است؟



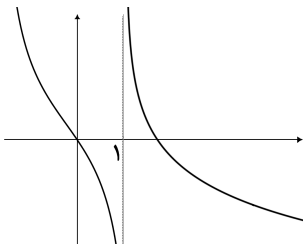
۴. فرض کنید نمودار تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل روبه‌رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودارهای همه گزینه‌ها در نقطه $x=1$ تعریف نشده هستند.)



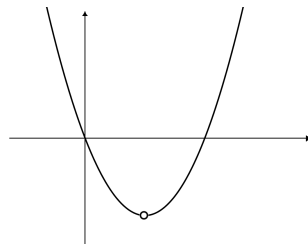
(۲)



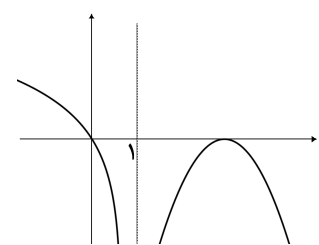
(۱)



(۵)



(۴)



(۳)

۵. یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه دست کم سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۶ (۵) بی‌نهایت

۶. در مثلث ABC نقطه D روی ضلع BC به گونه‌ای قرار گرفته که زاویه‌های \widehat{BAD} ، \widehat{CAD} و \widehat{ABC} با هم برابرند و طول پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چه قدر است؟

(۵) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{2}$



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۷. دنباله a_0, a_1, a_2, \dots از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 13^{a_n} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

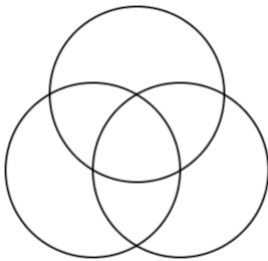
رقم یکان a_{1392} چه عددی است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹ (۵)

۸. در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟

$$a = 100!, \quad b = 2^{100}, \quad c = 2^{2^{2^2}}$$

- ۱ (۱) $b < a < c$ ۲ (۲) $a < b < c$ ۳ (۳) $c < a < b$ ۴ (۴) $b < c < a$ ۵ (۵) $a < c < b$



۹. می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیه درون شکل روبه‌رو را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته‌باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک نقطه اشتراک دارند همسایه نیستند). این کار به چند طریق ممکن است؟

۱۰. وزارت راه و ترابری آزادراهی به طول $524288 = 2^{19}$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژه بلندمدت این آزادراه را مجهز به چراغ‌های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ‌ترین قطعه‌هایی از آزادراه که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک‌ترین قطعه به زاهدان انتخاب شده و در نقطه وسط آن یک چراغ نصب می‌شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می‌شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

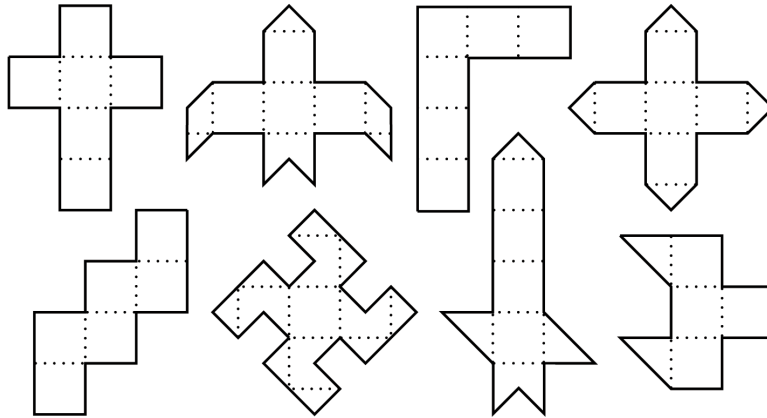
۱۱. چوپانی گوسفند گرسنه خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف‌های همه قسمت‌هایی از چراگاه که به آن دسترسی دارد را می‌خورد. ناحیه‌ای از چراگاه که گوسفند علف‌های آن را خورده است، کدام شکل نمی‌تواند باشد؟





آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱۲. با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خط‌چین‌ها می‌توان یک مکعب ساخت؟



۱۳. کوچک‌ترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت است، چند عامل اول دارد؟

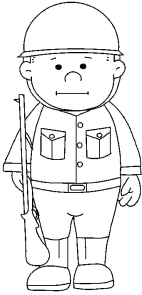
۱۴. در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www.mathysc.ir) کیفیت آزمون مرحله اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از «خیلی خوب بود»، «عالی بود»، و «به‌تر از این نمی‌شد!». پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، درصد گزینه‌ها به ترتیب دقیقاً برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است و پس از آن این نسبت‌ها به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تبدیل می‌شود. به غیر از عباس چند نفر در نظر سنجی شرکت کرده‌اند؟

۱۵. چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^2 - pq + q^2 = 37^2$.

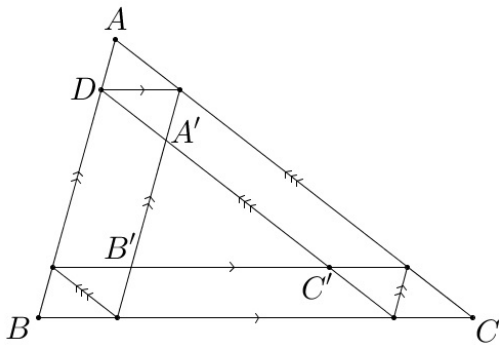
۱۶. «ضربین حساب» ماشینی است که از یک صفحه نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین حساب بلافاصله عدد صفحه نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحه نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $5^{1392} \times 3^{1435} \times 2^{2014}$ دست‌کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین حساب به ۷۲۹ دست یافت، زیرا $729 = 9 \times 9 \times 9$).



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور



۱۷. در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲ تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بیند اگر روی خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بیند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم.)



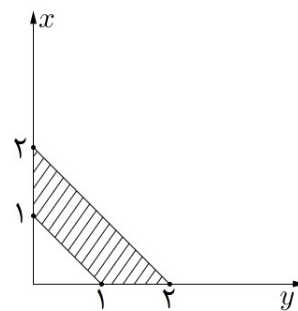
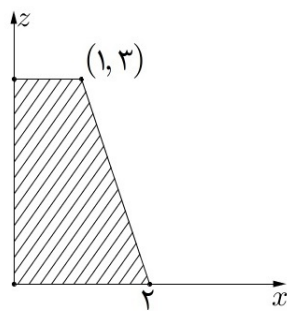
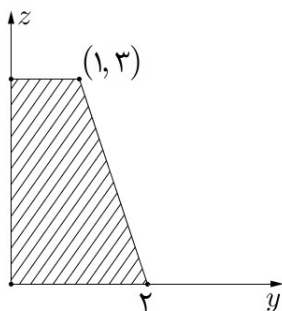
۱۸. مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟

۱۹. مجموعه S را مجموعه همه اعداد حقیقی مثل a می‌گیریم که برای آن‌ها اعداد حقیقی x و y موجود باشند، به گونه‌ای که

$$a(a-1) + x(x-1) + y(y-1) = \frac{3}{4}$$

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چه قدر است؟

۲۰. تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحه مختصات به شکل‌های زیر است. مجموع مربع‌های طول قطرهای این چهارضلعی چه قدر است؟





آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۲۱. چند چهارتایی مرتب (x, y, z, t) از اعداد حقیقی یافت می شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy + yz + zx = t^2 & (1) \\ yz + zt + ty = x^2 & (2) \\ zt + tx + xz = y^2 & (3) \\ tx + xy + yt = z^2 & (4) \end{cases}$$

(۵) بی نهایت

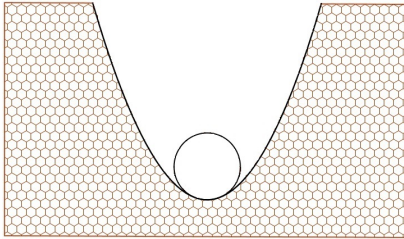
۲۲. تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیۀ شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیۀ، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ نمکستان های شرقی، غربی، شمالی و جنوبی به صورت زیر بوده است، (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟

	شکرستان	ن. شرقی	ن. غربی	ن. شمالی	ن. جنوبی	از	
شکرستان	×	۳	۱	۰	۲		(۱) شکرستان
ن. شرقی	۰	×	۲	۰	۱		(۲) نمکستان شرقی
ن. غربی	۱	۰	×	۳	۰		(۳) نمکستان غربی
ن. شمالی	۲	۰	۱	×	۱		(۴) نمکستان شمالی
ن. جنوبی	۲	۰	۰	۲	×		(۵) نمکستان جنوبی

۲۳. طول اضلاع AB ، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب ۲ و ۴ و $\sqrt{7}$ است. خطی که وسطهای AB و AC را به هم وصل می کند با خطی که از B موازی با نیمساز A رسم می شود در نقطه D برخورد می کند. طول AD چه قدر است؟

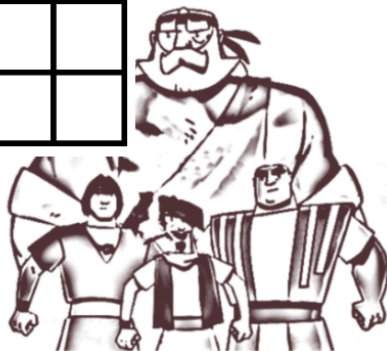
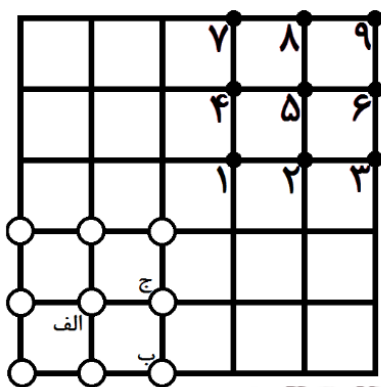


آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور



۲۴. وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لوله انتقال گازی را در آن قرار دهد. سطح مقطع لوله دایره و سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی است. (سهمی نمودار یک چندجمله‌ای درجه دوم است.) اگر عرض و عمق کانال برابر ۱ متر باشد، قطر بزرگ‌ترین لوله‌ای که می‌توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین‌ترین نقطه کانال تماس داشته باشد، چند سانتی‌متر است؟

۲۵. پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایره توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایره توپر نمایش داده شده برود، به نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطه ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد.) در این صورت میل‌های الف و ب و ج به ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟



- (۱) ۲، ۳، ۵
- (۲) ۸، ۷، ۵
- (۳) ۸، ۷، ۹
- (۴) ۴، ۷، ۵
- (۵) نمی‌توان تعیین کرد.



باشگاه دانش پژوهان جوان

نام: _____
 نام خانوادگی: _____
 کد ملی: _____
 شماره صندلی: _____
 استان: _____
 منطقه: _____
 پرونده: _____
 شهرستان: _____
 حوزه امتحانی: _____

نام: _____
 نام خانوادگی: _____
 کد ملی: _____
 تلفن همراه: _____

مطابق توضیحات
دفترچه تکمیل شود.
کد دفترچه
۴

از نوشتن اعداد به صورت انگلیسی جدا خودداری نمایید.

	یکان	دهگان	صدگان	هزارگان	دههزارگان		یکان	دهگان	صدگان	هزارگان	دههزارگان
۱	۰	۸	۶	۱		۱۴	۲				
۲	۰	۲	۵	۳	۶	۱۵					
۳	۸					۱۶	۷	۲			
۴	۴					۱۷			۳		
۵	۲					۱۸					
۶	۳					۱۹					
۷	۲					۲۰			۲		
۸	۱					۲۱					
۹	۴	۸				۲۲					
۱۰	۰	۴	۰	۳	۲	۲۳					
۱۱	۵					۲۴			۲		
۱۲	۵					۲۵					
۱۳	۶					۲۶					