

# لگاریتم

معادله لگاریتمی-مثلثاتی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱۱۲م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

## توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت [AvaEducation16.blog.ir](http://AvaEducation16.blog.ir) در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی ██████████ آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی ██████████ آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت  نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  -  بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  -  ساده جهت تثبیت مطالب
  -  متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب
  -  سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

## ۱ مسئله

حاصل معادله لگاریتمی-مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$$

## ۲ روش حل مسئله

😊 **پاسخ:** توجه شود لگاریتم اول سینوس در مبنای کسینوس و لگاریتم دوم کسینوس در مبنای سینوس است. برای حل این مسئله باید یکی از روابط مهم مربوط به لگاریتمها مرور شود.

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b} = \frac{\ln a}{\ln b} \quad (۱)$$

مقادیر  $a$  و  $b$  نامنفی بوده و در ضمن  $b \neq 1$  است. با این توصیف رابطه داده شده با همین فرمول ساده می شود:

$$\begin{aligned} \log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x &= \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x} + \frac{\ln \cos x}{\ln \sin x} \\ &= \frac{(\ln \sin x)^2 + (\ln \cos x)^2}{(\ln \cos x)(\ln \sin x)} \\ \Rightarrow \frac{(\ln \sin x)^2 + (\ln \cos x)^2}{(\ln \cos x)(\ln \sin x)} &= 2 \end{aligned}$$

رابطه فوق به صورت زیر قابل نمایش است:

$$(\ln \sin x)^2 + (\ln \cos x)^2 - 2(\ln \cos x)(\ln \sin x) = 0 \quad (۲)$$

رابطه (۲) یک مربع کامل است. می توان آن را به فرم زیر نشان داد:

$$(\ln \sin x - \ln \cos x)^2 = 0 \quad (۳)$$

واضح است رابطه (۳) به معنای آن است که  $\ln \sin x - \ln \cos x = 0$ . برای ادامه حل این مسئله که بیشتر یک معادله مثلثاتی است تا یک معادله لگاریتمی دو راه حل پیشنهاد می شود.

## ۱.۲ راه حل اول

در روش اول از خاصیت تفاضل لگاریتمها استفاده می شود.

$$\ln \sin x - \ln \cos x = 0, \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{\sin x}{\cos x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \tan x = e^0 = 1$$

معادله تبدیل به یک رابطه مثلثاتی خالص  $\tan x = 1$  شده است. دوره تناوب تانژانت برابر با  $\pi$  رادیان است. در نتیجه جواب کلی معادله  $\tan x = 1$  به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}, \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اما باید توجه داشت که به ازای  $k$ های فرد، مقدار  $\sin x$  یا  $\cos x$  منفی می‌شوند و در دامنه لگاریتم وجود ندارند. پس باید تنها  $k$ های زوج به عنوان جواب نهایی مورد نظر باشند.

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

یا

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

همواره در تعیین جواب نهایی به دامنه توابع معادله باید دقت شود. 💡

## ۲.۲ راه حل دوم

در روش دوم حل معادله مثلثاتی مدنظر قرار می‌گیرد.

$$\ln \sin x - \ln \cos x = 0, \quad \Rightarrow \quad \ln \sin x = \ln \cos x$$

با توجه به آنکه دو لگاریتم با هم برابرند، پس باید عبارت مورد لگاریتم هم با هم برابر باشند.

$$\sin x = \cos x$$

رابطه فوق را هم می‌توان به توان دوم رساند و حل کرد و هم می‌توان از تبدیل نسبت‌های مثلثاتی به همدیگر به کمک تبدیل زاویه استفاده کرد.

$$\sin x = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

معادله فوق یک رابطه مثلثاتی خالص است. دوره تناوب سینوس برابر با  $2\pi$  رادیان است. در نتیجه جواب کلی معادله به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x, \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

با توضیح ارائه شده در راه حل اول و لزوم توجه به دامنه پاسخ‌ها، جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود:


$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

### ۳ مثال‌های مرتبط

رابطه (۱) هسته مرکزی حل مسائل مربوط به لگاریتم در پایه‌های مختلف است. با دانستن این رابطه و کمی مثلثات می‌توان برخی مسائل مشابه را به سادگی حل کرد.

#### مثال ۱

$$\log_{\cos x} \sin x = 2, \Rightarrow x = ?$$

در مثال فوق چون فقط از یک لگاریتم استفاده شده می‌توان نوشت: 

$$\sin x = \cos^2 x$$

از این به بعد باید از تبدیلات مثلثاتی استفاده شود:

$$\sin x = 1 - \sin^2 x, \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \Rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$


جواب با علامتی منفی قابل قبول نیست، چون اندازه سینوس بیشتر از یک می‌شود:

$$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \Rightarrow x = 2k\pi + \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow x = 2k\pi + 0.666, k \in \mathbb{Z}$$

مقدار 0.666 رادیان با ماشین حساب تعیین شده و معادل زاویه  $38.2^\circ$  می‌باشد. در این زاویه هم سینوس و هم کسینوس مثبت بوده و دامنه تابع در تمام جواب‌های بدست آمده نقض نمی‌شود.

#### مثال ۲

$$\log_{\cos x} \sin 2x + \log_{\sin 2x} \cos x = 2, \Rightarrow x = ?$$

این مسئله مشابه سوال اول همین فایل است. اگر همان روش دنبال شود، رابطه زیر بدست می‌آید: 

$$\ln \sin 2x - \ln \cos x = 0, \Rightarrow \sin 2x = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

جواب کلی مسئله فوق به صورت زیر است:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x, \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

در عبارت فوق  $k = 3n, 3n + 1, 3n + 2$  باید بررسی شوند.

$$k = 3n, \Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}, \Rightarrow \cos x > 0, \sin 2x > 0 \quad \checkmark$$

$$k = 3n + 1, \Rightarrow x = 2n\pi + \frac{5\pi}{6}, \Rightarrow \cos x < 0, \quad \times$$

$$k = 3n + 2, \Rightarrow x = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}, \Rightarrow \cos x = 0, \quad \times$$

در پاسخ‌های بدست آمده به جز پاسخ اول، دامنه نقض می‌شود. در نتیجه نمی‌توانند به عنوان جواب مسئله در نظر گرفته شوند. در نهایت پاسخ این مسئله به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

💡 در معادلات مثلثاتی که جواب به صورت  $x = \frac{2k\pi}{N} + \alpha$  باشد، تعداد جواب‌های غیر تکراری  $N$  تا است. در نتیجه در موارد نیاز به بررسی مجاز بودن جواب‌ها در دامنه کافیست  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  بررسی شوند.

آنکه می‌تواند، انجام می‌دهد، آنکه  
نمی‌تواند انتقاد می‌کند.

جرج برنارد شاو



 [AvaEducation16.blog.ir](http://AvaEducation16.blog.ir)

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.facebook.com/AvaEducation16)

  0935 210 4321

 [AvaEducation16@gmail.com](mailto:AvaEducation16@gmail.com)