دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
دانشکده مهندسی زراعی و عمران روستایی
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم

محاسبات عددی
Numerical Methods

دکتر روح اله فرهادی

هدف:

آشنایی با روشها و الگوریتم های حل عددی

طرح درس

منابع

نیکوکار، م. ۱۴۰۱. محاسبات عددی، انتشارات گسترش علوم پایه.

مهری، ب.، نخعی، ر. ۱۳۹۹. محاسبات عددی، انتشارات آییژ.

Salgado, A.J. and Wise, S.M., 2023. Classical Numerical Analysis: A Comprehensive Course. Cambridge University Press.

Burden, R. 2016. Numerical Analysis, 10th Edition, Cengage Learning, Boston, MA, USA.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

فصل اول: خطاها

برای تعیین جواب یا جوابهای یک مسئله واقعی باید مدل ریاضی آن را بسازیم و پس از تعیین راه حلی مناسب برای رسیدن به جواب، با انجام محاسبات لازم جواب را به دست آوریم. در این فرایند خطاهایی پیش می آید که انواع متفاوت دارند. آشنایی با منشاء این خطاها ، نحوه بروز آنها و کنترل آنها موضوع این فصل است.

اهداف کلی

۱) شناخت منابع خطا و تشخیص آنها در هر مسئله

۲) بررسی منابع خطا و راه های کمینه سازی آنها

۳) شناخت انواع خطاها و رابطه آنها با دقت یک تقریب

۴) جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات عددی

۵) شناخت روش های محاسبه پایدار و ناپایدار

۶) محاسبه مقدار تقریبی فرمول ها و توابع.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

منابع اصلی خطا

الف) خطای مدل

این خطا شامل صرف نظر کردن ها، چشم پوشی ها و ساده نویسی ها جهت تعیین مدل ریاضی مسئله است.

ب) خطای داده ها یا خطای اولیه

این خطا به هنگام اندازه گیری و برآورد مفروضات مسئله پیش می آید.

پ) خطای نمایش اعداد (خطای گرد کردن)

نمایش اعشاری اکثر اعداد با تعدادی متناهی رقم امکان پذیر نیست. از این رو، انتخاب تعدادی متناهی از ارقام بسط یک عدد سبب این خطا می شود.

ت) خطای عملیات حسابی

حاصل بعضی اعمال بر دو عامل عددی دارای تعداد نامتناهی رقم است و انتخاب تعدادی متناهی از این ارقام سبب این خطا می شود.

ث) خطای روش

روش های عددی عموما تکراری هستند و تقریبی از جواب دقیق را به دست می دهند. دقت این تقریب به نوع روش و مرحله توقف آن بستگی دارد.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

انواع خطا

معمولا تقریب هایی از یک مجهول در دست است ولازم است دقت این تقریب ها و رفتار آنها مورد بررسی قرار گیرد.

تعریف

اگر a تقریبی از A باشد و قرار دهیم $e(a)=|A-a|$ آنگاه $e(a)$ را خطای مطلق a نامند.

توجه : هرگاه a یک مقدار تقریبی برای عدد A باشد در آن صورت می‌نویسیم :

$$a \simeq A$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

مثال

۱- فرض کنید $a_n = \frac{n+1}{n}$. خطای a_n بعنوان تقریبی از عدد ۱ چقدر است؟

$$e(a_n) = \left|1 - \frac{n+1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

مشاهده می شود که هر چه n بزرگتر اختیار شود $\frac{1}{n}$ کوچکتر خواهد و در نتیجه a_n به یک نزدیکتر خواهد شد. اگر بخواهیم خطای a_n از، مثلا ، ۰/۰۰۱ کوچکتر باشد کافی است قرار دهیم:

$$\frac{1}{n} < 0/001$$

که از آن نتیجه می شود $n > 1000$ اولین n که در نامساوی اخیرصدق می کند ۱۰۰۱است که به ازای آن

$$a_n = \frac{1002}{1001} = 1/000999$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

اما همیشه وضع به گونه ای نیست که عدد A را داشته باشیم. معمولا A،مجهول است و یا حتی در حالت معلوم بودن $e(a)$ به راحتی قابل بیان نیست.

می دانیم که ۱٫۴۱ تقریبی از $\sqrt{۲}$ است. خطای مطلق ۱٫۴۱ چیست؟ اگر بسط اعشاری $\sqrt{۲}$ را، با استفاده از یک ماشین حساب، بنویسیم یعنی:

$$\sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳...$$

خواهیم داشت

$$e(۱٫۴۱) = \left|\sqrt{۲} - ۱٫۴۱\right| = \sqrt{۲} - ۱٫۴۱$$

$$e(۱٫۴۱) = ۰/۰۰۴۲۱۳۵۶۲...$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

مشاهده می شود که $e(۱٫۴۱)$به سادگی قابل بیان نیست و همان $\sqrt{۲}-۱٫۴۱$ بیان ساده تر و دقیقتری از آن است. حال فرض کنید که حدود $\sqrt{۲}$ را بدانیم، مثلا، بدانیم که

$$۱٫۴۱۴ < \sqrt{۲} < ۱٫۴۱۵$$

در این صورت:

تقریب نقصانی

تقریب اضافی یا بزرگتر

$$۰٫۰۰۴ < \sqrt{۲} - ۱٫۴۱ < ۰٫۰۰۵$$

بنابراین،

$$e(۱٫۴۱) < ۰٫۰۰۵$$

بدیهی است که ۰٫۰۰۵ یک کران بالا برای خطای ۱٫۴۱ است.

در اکثر روش های عددی حدود جواب ، یعنی کران بالا و پایینی برای جواب، قابل محاسبه است.

خطای مطلق حدی

خطای مطلق حدیِ یک عدد تقریبی a عددی است که از خطای مطلق آن کوچکتر نباشد و آن را با e_a نشان می‌دهیم، بنابراین

$$e(a) \leq e_a$$

توجه : e_a منحصر به فرد نیست در حالی که $e(a)$ منحصر به فرد است.

برای $A = \frac{۲}{۳}$ یک تقریب اضافی، یک تقریب نقصانی، خطای مطلق این تقریبها و یک خطای مطلق حدی را به دست آورید.

الف) $A = \frac{۲}{۳}, \quad a = ۰٫۶۷ \quad , e(a) = \left|\frac{۲}{۳} - \frac{۶۷}{۱۰۰}\right| = \frac{۱}{۳۰۰} \quad , e_a = ۰٫۰۰۴$

$a = ۰٫۶۷$ یک تقریب اضافی A است.

ب) $A = \frac{۲}{۳}, \quad a = ۰٫۶۶ \quad , e(a) = \left|\frac{۲}{۳} - \frac{۶۶}{۱۰۰}\right| = \frac{۲}{۳۰۰}, \quad e_a = ۰٫۰۱$

$a = ۰٫۶۶$ یک تقریب نقصانی A است.

توجه : هرگاه e_a خطای مطلق حدی a به عنوان تقریبی از عدد A باشد، آن گاه

$$|A - a| \leq e_a$$

بنابراین

$$a - e_a \leq A \leq a + e_a$$

بنا بر قرارداد، نامساوی اخیر را منحصراً به صورت زیر می‌نویسیم :

$$A = a \pm e_a$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

حال این سوال مطرح است که

«آیا خطای مطلق یک تقریب ، دقت آن تقریب را کاملا مشخص می کند؟»

✓ ب) دو ماشین نویس را در نظر بگیرید که یکی در تایپ دو صفحه ده کلمه و دیگری درتایپ ۲۰ صفحه ده کلمه غلط تایپ کرده است. دقت کدام ماشین نویس بیشتر بوده است؟

از مثالهای فوق چنین بر می آید که آنچـــه دقت یک تقریب را معین می کند خطا در واحد کمیت است که هر چه کوچکتـــــر باشد تقریب بهتر (دقیقتر) است.

هرگاه در اندازه‌گیری دو طول برحسب سانتیمتر داشته باشیم :

$$L_1 = ۲۳۵/۸ \pm ۰/۱$$

$$L_2 = ۳/۲ \pm ۰/۱$$

علیرغم اینکه خطای مطلق حدی در هر دو مورد با هم برابرند ولی اندازه‌گیری اول بهتر از اندازه‌گیری دوم است زیرا در محاسبه L_1 طول بزرگتری اندازه‌گیری شده است، لذا در اندازه‌گیری L_1 دقت بیشتری انجام گرفته است. بنابراین آنچه دقت یک تقریب را مشخص می‌کند، خطا در واحد آن کمیت است.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

خطای نسبی

اگر a تقریبی از عدد مخالف صفر A باشد خطای نسبی a را با $\delta(a)$ نشان می دهیم و آن عبارت است از خطا در واحد کمیت، یعنی،

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{A}$$

همانطور که دیده می شود ، A که معمولامقدار آن معلوم نیست، هم در صورت و هم در مخرج کسر موجود است، لذا می توان یک کران بالا برای آن به دست آورد.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم

اکثر اعداد دارای بی نهایت رقم اعشار هستند. ضمنا، می دانیم که وسایل محاسباتی از نظر نگهداری این ارقام محدودیت دارند. از این رو، باید تعدادی متناهی از ارقام اعشاری را انتخاب کنیم که به نوع وسیله محاسباتی، قدرت آن و دقت لازم بستگی دارد. این کار به دو روش انجام می گیرد:

قطع کردن

گرد کردن

در این روش، با توجه به تعداد ارقامی که می توانیم یا می خواهیم نگهـــــداری کنیم. ارقام اعشار عدد را از رقم معینی قطع می کنیم. مثلا اعداد زیر تا دو رقم اعشار (یا تا D ۲) قطع شده اند.

$$\pi = ۳/۱۴\,(۲D)\quad, e = ۲/۷۱\,(۲D)\quad, \frac{۵}{۳} = ۱/۶۶\,(۲D)$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264 33...$$

$$e = 2.7182818284590452353602874 71...$$

$$\frac{5}{3} = 1.6666666666...$$

e is sometimes called Euler's number, after the Swiss mathematician Leonhard Euler. Alternatively, e can be called Napier's constant after John Napier.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

روش گرد کردن

در این روش با توجه به مقدار اولین رقم ناخواسته، تقریبی از عدد را بدست می آوریم. مثلا در گرد کردن تا دو رقم اعشار :

اگر اولین رقم ناخواسته بزرگتر از ۵ باشد یک واحد به رقـــــم قبل از آن اضافه و عدد را قطع می کنیم، و اگر اولین رقم ناخواسته کمتر از ۵ باشد عدد را بدون تغییر قطع می کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

$$۲/۳۴۷۶ = ۲/۳۵\,(۲D)\,,۳/۷۸۳۰ = ۳/۷۸\,(۲D)$$

اما، وقتی اولین رقم ناخواسته ۵ باشد به گونه دیگری عمل می کنیم.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

گرد کردن تا n رقم اعشار

به طور کلی اگر $A \neq ۰$ دارای بسط اعشاری زیر باشد

$$A = a_۱ a_۲ \dots a_m / b_۱ b_۲ \dots b_n b_{n+۱} \dots$$

و بخواهیم گرد شده A را تا n رقم اعشار به دست می آوریم چنین عمل می کنیم:

I. اگر $b_{n+۱} > ۵$ یک واحد به b_n اضافه و عدد را از $b_{n+۱}$ قطع می کنیم

II. اگر $b_{n+۱} < ۵$ عدد را از $b_{n+۱}$ قطع می کنیم.

III. اگر $b_{n+۱} = ۵$ و بعد از این رقم، رقم مخالف صفر وجود داشته باشد. مانند (I) عمل و یک واحد به b_n اضافه می کنیم.

IV. اگر $b_{n+۱} = ۵$ و بعد از این رقم، رقم دیگری نباشد، یا فقط صفر باشد، در صورتی که b_n فرد باشد مانند (I) و در غیر اینصورت مانند (II) عمل می کنیم.

$۳/۶۸۵۰۰۰۱۰۶ = ۲/۶۹ (۲D)$

(اولین رقم ناخواسته ۵ است و بعد از آن رقم مخالف صفر وجود دارد)

$۱۷/۸۳۵ = ۱۷/۸۴ (۲D)$

$۲/۴۶۵ = ۲/۴۶ (۲D)$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

مثال

$$\frac{۲}{۳} = ۰/\overline{۶} = ۰/۶۶۷ (۳D)$$

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷ = ۱/۴۱۴ (۳D)$$

$$۳/۹۹ = ۴/۰ (۱D)$$

اگر a گرد شده $\frac{۲}{۳}$ و b قطع شده دو رقم اعشار آن باشند داریم:

$$a = ۰/۶۷ \quad , \quad \left|\frac{۲}{۳} - a\right| = \frac{۱}{۳۰۰}$$

$$b = ۰/۶۶ \quad , \quad \left|\frac{۲}{۳} - b\right| = \frac{۲}{۳۰۰}$$

یعنی، خطای قطع کردن تا دو برابر خطای گرد کردن است. در عمل بیشتر از گرد کردن استفاده می شود. (هر چند قطع کردن ساده تر است و در اکثر ماشین حسابها از آن استفاده می شود).

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

خطای گرد کردن:

اگر a گرد شده A تا n رقم اعشار باشد، با توجه به نحوه گرد کردن داریم:

$$|A - a| \leq ۵ \times ۱۰^{-(n+۱)}$$

or

$$|A - a| \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-n}$$

نامساوی بالا نشان می دهد که هر چه n بزرگتر باشد a به A نزدیکتر خواهد بود، به همین دلیل است که هر وقت دقت زیاد مورد نظر باشد از دقت مضاعف استفاده می شود.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

نمایش علمی اعداد

فرض کنید A عددی مخالف صفر باشد . آنگاه A را می توان به صورت:

$$A = a \times ۱۰^{b}$$

نوشت که در آن b عددی صحیح است و $۱ \leq |a| < ۱۰$

در این صورت می گوییم A بصورت علمی نمایش داده شده است. در این نمایش a را مانتیس و b را نمای عدد A می نامند.

این نمایش را نمایش ممیز سیار نیز می نامند (با تغییر نما، ممیز در بین ارقام a تغییر محل می دهد).

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

ارقام با معنا (significant figures)

ارقام معنی‌دار یا ارقام بامعنا اعدادی هستند که نشان دهنده ی میزان دقت، در اندازه‌گیری یا محاسبات می‌باشند.

در ریاضیات اعداد زیر با هم مساوی اند. ۷,۴, ۷,۴۰, ۷,۴۰۰

اما در مهندسی که با اندازه گیری سر و کـــــار دارند، چنین نیست.

اگر گفته شود طولــــی را اندازه گرفتیم و نتیجـــــه اندازه گیری ۷/۴۰ متر بوده است. این گفته بدان معناست که وسیله اندازه گیری دقتی تا حد سانتیمتر داشته و حداکثر خطا ۰/۵ سانتیمتر است.

اگر نتیجه اندازه گیری ۷/۴۰۰ متر بود معلوم مــــی شد که واحد اندازه گیری دقتی درحد میلیمتر داشته و حداکثر خطا ۰/۵ میلیمتر بوده است. از این رو ، صفرهای جلــوی این عدد را، که نشانه دقت اندازه گیری هستند، صفرهای بامعنا می گویند.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

قوانین ارقام بامعنا

۱. همه اعداد غیر صفر با معنی اند: ۷۲، ۵۸

۲. صفرهای میانی (صفرهای مابین دو عدد غیرصفر) بامعنی اند: ۴۰۸, ۷.۰۳۰۱

۳. صفرهای ابتدایی (صفرهای سمت چپ اعداد غیرصفر) بامعنی نیستند. این صفرها فقط برای تعیین جایگاه اعشار به کار می روند: ۰.۰۰۳۲ ,۰.۰۰۰۶

۴. صفرهای انتهایی (صفرهای انتهای اعداد) به دسته های زیر تقسیم می شوند:

   ۱. صفرهای انتهایی بعد از ممیز اعشار همیشه بامعنی اند: ۴۵.۰۰, ۲.۵۷۰۰

   ۲. صفرهای انتهایی قبل از ممیز اعشار (بعد از اعداد غیرصفر) همیشه بامعنی اند: ۲۶۰۰.۵۵

   ۳. صفرهای انتهایی در اعداد بدون ممیز مبهم اند و باید با استفاده از نمادگذاری علمی از این کار جلوگیری کرد.

۱.
1200
مبهم

۲.
1.2×10^3
دو رقم بامعنا

۳.
1.20×10^3
سه رقم بامعنا

۴.
1.200×10^3
چهار رقم بامعنا

Trailing zeros for a whole number that ends with a decimal point are significant.

For example, a value written as 320. shows the decimal point, which indicates that the 0 to the right of the 2 was measured; therefore, the value has a total of three significant figures. If the decimal point was not written, then 320 would have only two significant figures. In general, any confusion this may cause can be avoided by writing values such as these in scientific notation.

مثال

الف) اگر $A = ۲۱۳٫۷۶$ آنگاه $\mathbf{A} = ۲/۱۳۷۶\times۱۰^{۲}$ و تعداد ارقام بامعنای A پنج است

ب) اگر $A = ۰٫۰۰۷۲۶$ آنگاه $\mathbf{A} = ۷٫۲۶\times۱۰^{۳}$ و A دارای ۳ رقم با معناست.

پ) اگر $I = ۲۰۰۰.$ متر آنگاه $\mathbf{I} = ۲/۰۰۰\times۱۰^{۳}$ متر و I دارای ۴ رقم با معناست.

ت) اگر d =78 کیلو متر آنگاه $\mathbf{d} = ۷/۸\times۱۰^{۴}$ متر و d دارای دورقم با معناست.

$$\frac{۲۲}{۷} = ۳٫۱۴\,(۳\mathrm{S}) \quad ,\pi = ۳٫۱۴۲\,(۴\mathrm{S}) \quad ,\sqrt{۳} = ۲\,(۱\mathrm{S}) \quad ,۱٫۹۹ = ۲٫۰\,(۲\mathrm{S})$$

خطای چهار عمل اصلی

الف. خطای حاصل جمع

هرگاه a و b تقریب‌هایی از A و B و این اعداد همگی مثبت باشند و e_a و e_b به ترتیب خطاهای مطلق حدی a و b باشند و هرگاه e_c خطای مطلق حدی عدد $C = A + B$ باشد، در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_b$$

ب. خطای تفاضل

با مفروضات قسمت «الف» هرگاه $C = A - B$ در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_b$$

یعنی $e_a + e_b$ یک کران بالا برای خطای مطلق حدی C (در هر دو حالت) است.

مثال هرگاه اعداد $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵}$ را تا سه رقم اعشارگرد کنیم، مطلوبست محاسبه $\sqrt{۱۷} \pm \sqrt{۵}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل : داریم :

$$\sqrt{۱۷} = ۴٫۱۲۳ + e_۱, \quad \sqrt{۵} = ۲٫۲۳۶ + e_۲$$

منظور از $e_۱$ و $e_۲$ خطای مرتکب شده در نمایش $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵}$ می‌باشد.چون اعداد تا سه رقم اعشارگرد شده‌اند، پس

$$e_۱ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}, \quad e_۲ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

داریم :

$$\sqrt{۱۷} + \sqrt{۵} = (۴٫۱۲۳ + ۲٫۲۳۶) + e_۳ = ۶٫۳۵۹ + e_۳$$

و چون $e_۳ \le e_۱ + e_۲$ لذا $e_۳ \le ۱۰^{-۳}$.در نتیجه

$$۶٫۳۵۹ - ۱۰^{-۳} \le \sqrt{۱۷} + \sqrt{۵} \le ۶٫۳۵۹ + ۱۰^{-۳}$$

همچنین $\sqrt{۱۷} - \sqrt{۵} = ۱٫۸۸۷ + e_۴$ که در اینجا نیز

$$e_۴ \le e_۱ + e_۲ \le ۱۰^{-۳}$$

بنابراین

$$۱٫۸۸۷ - ۱۰^{-۳} \le \sqrt{۱۷} - \sqrt{۵} \le ۱٫۸۸۷ + ۱۰^{-۳}$$

پ. خطای حاصل ضرب

با مفروضات قسمت «الف» هرگاه $C = AB$ در این صورت $e_c \le ae_b + be_a$

مثال:

مقدار $\pi\sqrt{۲}$ را با چهار رقم اعشار محاسبه نموده و حداکثر خطای این حاصل ضرب را نیز به دست آورید.

$$\pi = ۳٫۱۴۱۶ + e_۱$$

$$e_۱ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}, \quad e_۲ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲ + e_۲$$

$$\pi\sqrt{۲} = (۳٫۱۴۱۶ \times ۱٫۴۱۴۲) + e_۳$$

$$e_۳ \le ۳٫۱۴۱۶e_۲ + ۱٫۴۱۴۲e_۱$$

$$e_۳ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}(۳٫۱۴۱۶ + ۱٫۴۱۴۲)$$

$$e_۳ \le ۰٫۵ \times ۱۰^{-۴}(۴٫۵۵۵۸) = ۲٫۲۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\pi\sqrt{۲} = ۴٫۴۴۲۹ + e'_۳$$

$$e'_۳ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_۳$$

$$e'_۳ \le ۰٫۵ \times ۱۰^{-۴} + ۲٫۲۷۷۹ \times ۱۰^{-۴} = ۲٫۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$

$$۴٫۴۴۲۹ - ۲٫۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴} \le \pi\sqrt{۲} \le ۴٫۴۴۲۹ + ۲٫۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$

$$۴٫۴۴۲۶ \le \pi\sqrt{۲} \le ۴٫۴۴۳۲$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

حداکثر خطا در حاصل ضرب سه عدد تقریبی:

هرگاه a و b و c تقریب‌هایی از A و B و C بوده و این اعداد همگی مثبت باشند، رابطه زیر برای خطای مطلق حدی حاصل ضرب abc به عنوان تقریبی از مقدار ABC بیان می‌شود:

$$e_{abc} \leq abe_c + ace_b + bce_a$$

توجّه: در عمل تقسیم معمولاً به گونه‌ای عمل می‌شود که تقسیم تبدیل به عمل ضرب گردد

مثال: هرگاه اعداد را تا سه رقم اعشارگرد کنیم، عبارت $\frac{\pi}{۳\sqrt{۵}}$ را محاسبه نموده و یک خطای مطلق حدی برای این محاسبه بیان نمایید.

$$x = \pi.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{\sqrt{۵}} = \pi.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۵}.\sqrt{۵}$$

$$= \pi.\frac{۱}{۳}.(۰/۲)\sqrt{۵} = (۰/۲)\pi\frac{۱}{۳}\sqrt{۵}$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

$$\pi = ۳/۱۴۲ + e_\pi \quad , \quad e_\pi \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

$$\sqrt{۵} = ۲/۲۳۶ + e_{\sqrt{۵}} \quad , \quad e_{\sqrt{۵}} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳ + e_{\frac{۱}{۳}} \quad , \quad e_{\frac{۱}{۳}} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

$$x = (۰/۲)۳/۱۴۲ \times ۲/۲۳۶ \times ۰/۳۳۳ + e_x$$

$$x = ۰/۴۶۸ + e'_x$$

$$\Rightarrow \quad e'_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} + e_x$$

$$e_x \leq ۰/۲[۲/۲۳۶ \times ۰/۳۳۳ e_\pi + ۳/۱۴۲ \times ۰/۳۳۳ e_{\sqrt{۵}} + ۳/۱۴۲ \times ۲/۲۳۶ e_{\frac{۱}{۳}}]$$

$$e_x \leq ۰/۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} \times ۸/۸۱۶$$

$$e_x \leq ۸/۸۱۶ \times ۱۰^{-۴}$$

$$e'_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} + ۸/۸۱۶ \times ۱۰^{-۴}$$

$$e'_x \leq ۱/۳۸۲ \times ۱۰^{-۳}$$

28

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

خطای محاسبه فرمول ها

هرگاه تابعی n متغیره به صورت $w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ داشته باشیم و بخواهیم مقدار این تابع را در نقاط $A_i = a_i + e_{a_i}$ برای $i = 1, \cdots, n$ حساب کنیم، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(A_1, A_2, \cdots, A_n) = f(a_1, a_2, \cdots, a_n) + e_f$$

$$e_f \leq e_{a_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}|_{\mathrm{a}} + e_{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}|_{\mathrm{a}} + \cdots + e_{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{\mathrm{a}}$$

مثال حجم کره‌ای به شعاع $\frac{5}{3}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای این محاسبه را به دست آورید.اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = xyz^3$$

29

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

$$x = \frac{4}{3} = 1/3333 + e_x \quad , \quad e_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$y = \pi = 3/1416 + e_y \quad , \quad e_y \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$z = \frac{5}{3} = 1/6667 + e_z \quad , \quad e_z \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$V = (1/3333)(3/1416)(1/6667)^3 + e_V \qquad e'_V \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} + e_V$$

$$V = 19/3933 + e'_V \qquad e_V \leq e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در $(1/3333, 3/1416, 1/6667)$ محاسبه کرد.لذا

$$e_V \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}\{yz^3 + xz^3 + 3xyz^2\}$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

$$e_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵}\{۱۴/۵۴۵۳ + ۶/۱۷۳۱ + ۳۴/۹۰۷۲\}$$

$$e_V \leq ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵} + ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۰/۰۰۲۸۵$$

و در نتیجه $V = ۱۹/۳۹۳۳ \pm ۰/۰۰۲۸۵$

مثال: تقسیم.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

Taylor Polynomial and Series

Theorem:

Suppose f has n + 1 continuous derivatives on [a, b]. Let x, $x_0 \in$ [a, b]. Then

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x) \qquad f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \textit{for some } \xi = \xi(x) \textit{ between } x_0 \textit{ and } x.$$

This Equation is called the Taylor series expansion of f(x) about x_0 and $R_{n+1}(x)$ is called the remainder or the truncation error. Since in practical computation with the Taylor series only a finite number of terms can be carried out, the term truncation error generally refers to the error involved in using a finite summation to approximate the sum of an infinite series.

we should not expect to be able to explicitly determine the function ξ(x). Taylor's Theorem simply ensures that such a function exists and that its value lies between x and x_0. In fact, one of the common problems in numerical methods is to try to determine a realistic bound for the value of $f^{(n+1)}(\xi(x))$.

The infinite series obtained by taking the limit of P_n(x) as n → ∞ is called the **Taylor series** for f about x_0.

In the case $x_0 = 0$, the Taylor polynomial is often called a **Maclaurin** polynomial, and the Taylor series is often called a Maclaurin series.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

EXAMPLE: Derive the Taylor series for $f(x) = e^x$ near $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

Since $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for $k = 0, 1, \ldots,$ then

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

EXAMPLE: Derive the Maclaurin series for f(x) = sin x.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

The derivatives of $\sin x$ are

$$\begin{array}{rclrcl} f'(x) &=& \cos x, & f'(0) &=& 1, \\ f''(x) &=& -\sin x, & f''(0) &=& 0, \\ f'''(x) &=& -\cos x, & f'''(0) &=& -1, \\ \cdots &=& \cdots & \cdots &=& \cdots . \end{array}$$

Therefore,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos(\xi).$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \frac{(x\ln a)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x\ln a)^n}{n!} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \pm \ldots,\ -1 < x \le 1.$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right),\ |x| < 1.$$

$$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 \ldots\right],\ x > 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots,\ |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{2x^7}{4725} + \ldots\right),\ |x| < \pi.$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)(2n+1)} + \ldots,$$
$|x| < 1.$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)(2n+1)} + \ldots\right),$$
$|x| < 1.$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots,\ |x| \le 1.$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

خطای محاسبه توابع

محاسبه مقدار توابع در مسائل مهندسی گریز ناپذیر است. مثال هایی از این توابع عبارتند از:

$$\cos x\ ,\ \sin x\ ,\ e^x\ ,\ \arctan x\ ,\ \arccos x\ ,\ \arcsin x\ ,\ \ln x\ ,\ \log_{10} x\ ,\ \ldots$$

در این بخش می خواهیم نحوه محاسبه تقریبی از یک تابع را شرح دهیم و خطای آن را حساب کنیم.

مثال: خطای محاسبه عدد نپر را چنانچه n=3 باشد، به دست آورید.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\frac{e^\xi}{4!} \quad \text{with} \quad 0 < \xi < 1$$

$x = 1$ and $n = 3$ $\Rightarrow$ $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.66667$

$|e^\xi| \le e \le 2.8,\quad \boxed{(1/4!)(2.8) = 0.11667}$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

مثال: مقدار $e^{\frac{1}{3}}$ را با خطای کمتر از ۰/۰۰۱ به دست آورید.

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x) \qquad E_n(x) = \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!} + \frac{x^{n+۲}}{(n+۲)!} + \cdots$$

$$|E_n(x)| \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

برای محاسبه n، معمولاً از اولین جمله $E_n(x)$ استفاده می‌شود.یعنی قرار می‌دهیم :

$$E_n(x) \simeq \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

بنابراین برای محاسبهٔ $e^{۱/۳}$ با خطای کمتر از $۱۰^{-۳}$ قرار می‌دهیم

$$\frac{(\frac{۱}{۳})^{n+۱}}{(n+۱)!} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} = ۵ \times ۱۰^{-۴}.$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

$$\frac{(\frac{۱}{۳})^{n+۱}}{(n+۱)!} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} = ۵ \times ۱۰^{-۴}.$$

برای $n = ۳$ نامساوی فوق برقرار نیست، اما برای $n \geq ۴$ نامساوی برقرار است. لذا باید مقدار زیر را حساب کنیم:

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{\frac{۱}{۹}}{۲} + \frac{\frac{۱}{۲۷}}{۶} + \frac{\frac{۱}{۸۱}}{۲۴}$$

خطای محاسبه این مجموع باید چنان کوچک باشد که در مقایسه با خطای برشی، قابل اغماض یا حداکثر در حدود آن باشد.لذا لازم است قرار دهیم $\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۳ (۴D)$ و عبارت فوق را محاسبه کنیم.پس از انجام محاسبات داریم :

$$e^{۱/۳} \simeq ۱ + ۰/۳۳۳۳ + ۰/۰۵۵۶ + ۰/۰۰۶۲ + ۰/۰۰۰۵ = ۱/۳۹۵۶$$

بنابراین با ۳ رقم اعشار خواهیم داشت :

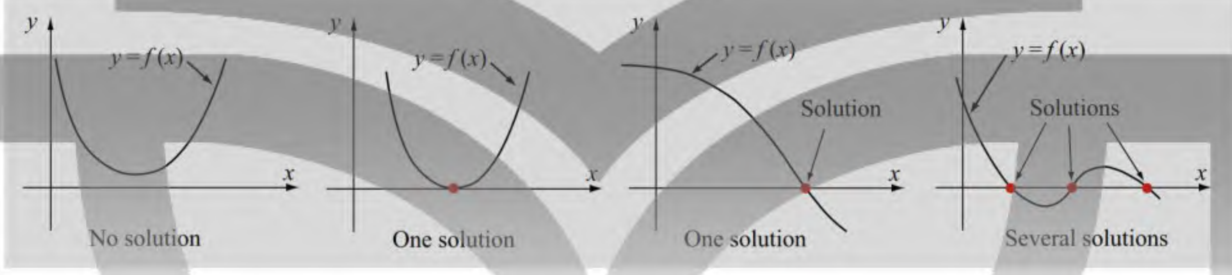
$$e^{۱/۳} \simeq ۱/۳۹۶ \ (۳D)$$

قاعده : هرگاه نتیجه یک عبارت را تا n رقم اعشار بخواهیم، محاسبات میانی را با $(n+۱)$ رقم اعشار انجام داده و نتیجه نهایی را در آخر کار با n رقم اعشار ارائه می‌نماییم.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

فصل دوم: حل عددی معادلات f(x)=0

یکی از مسائلی که اغلب در کارهای مهندسی با آن مواجه می‌شویم، حل معادله‌ای به شکل $f(x)=0$ است که در آن f یک تابع مفروض است.منظور از حل معادله $f(x)=0$، یافتن مقادیری از متغیر x است که به ازای آنها مقدار تابع صفر شود.هرگاه $f(\alpha)=0$، آن گاه α را یک ریشه معادله می‌نامیم و یا می‌گوییم α یک **صفر** تابع f است.



دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

برخی معادلات به روش های تحلیلی قابل حل نیستند مثل:

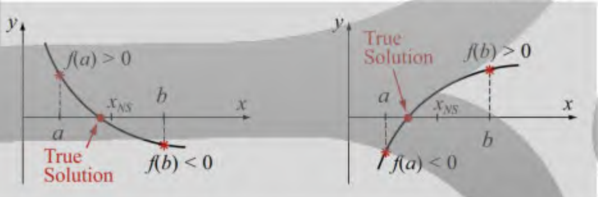
$$e^{-x}-\cos x=0$$

$$x+\cos x=0 \qquad x^2-(1-x)^5=0$$

معمولاً برای تعیین ریشه‌ای از یک معادله با دقت مورد نظر، لازم است تقریبی از آن ریشه یا فاصله کوچکی را که حاوی آن ریشه باشد، معلوم کرد.به این منظور محدودیتهای زیر را در نظر می‌گیریم :

محدودیت الف: فاصله‌ای موجود باشد که شامل ریشه باشد.

محدودیت ب: بایستی ریشه در فاصله مورد نظر یکتا باشد.



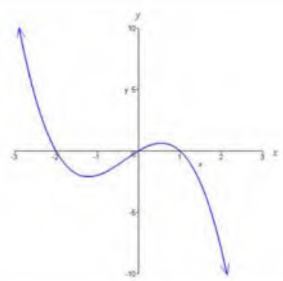
از نظر ریاضی محدودیت «الف» را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

۱- تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته است.

۲- $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامتند، یعنی $f(a)f(b)<0$.

با داشتن شرایط ۱ و ۲، محدودیت «ب» از نظر ریاضی، به صورت زیر بیان می‌شود:

۳- برای هر $x\in[a,b]$:



$$f'(x)\neq 0$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

تعیین ریشه‌ها با دقت مورد نظر

با مشخص بودن فاصله‌ای که شامل یک ریشهٔ معادله $f(x) = 0$ است، برای تعیین تقریبی از ریشهٔ مورد نظر با دقت مطلوب، دنباله‌ای از اعداد مانند x_n می‌سازیم به طوری که با افزایش n،

مقدار x_n به α نزدیک شود، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

بنابراین با توجه به تعریف حد، عددی مانند N وجود دارد که

$$x_N \simeq \alpha$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

معیارهای توقف

برای توقف محاسبهٔ x_n ها، معیارهایی وجود دارد که در این قسمت بررسی می کنیم.

الف) اگر ε عدد مفروض و کوچکی باشد، x_nها را تا جایی حساب می کنیم که $|f(x_n)|<\varepsilon$

ب) اگر $|x_n - x_{n-1}|<\varepsilon$ عملیات را متوقف و x_n را به عنوان تقریبی از α می پذیریم . به عبارت دیگر ، وقتی اختلاف دو تقریب متوالی بسیار کوچک باشد ادامهٔ روش معقول به نظر نمی آید . اگر α بسیار بزرگ یا بسیار کوچک باشد عملیات را وقتی متوقف می کنند که $\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|<\varepsilon$ ، در واقع خطای نسبی x_{n-1} از ε کوچکتر شود.

ج) گاهی خواسته می شود که پس از m تکرار (mمعلوم است)، عملیات متوقف و x_m به عنوان تقریبی از α پذیرفته شود.

روش های حل عددی معادلات

- دو بخشی
- نابجایی
- Newton–Raphson
- وتری
- روش تکرار نقطه ثابت

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

روش دو بخشی (یا روش تنصیف) Bisection method

در این روش فرض می کنیم که دو عدد a و b موجودند به قسمی که

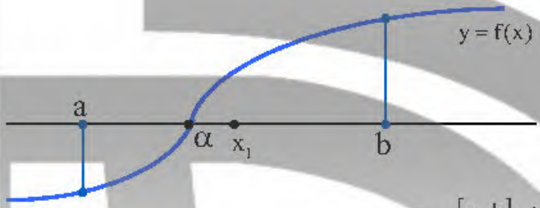
الف) تابع f در [a,b] پیوسته است

ب) $f(a)\,f(b) < 0$

ج) معادلهٔ $f(x)=0$ تنها یک ریشه در (a,b) دارد (این ریشه را α می نامیم).

با مفروضات بالا دنبالهٔ $\{x_n\}$ را چنان می سازیم که $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

برای این منظور ، مطابق شکل، بازهٔ [a,b] را به دو بخش متساوی تقسیم می کنیم . یعنی ، قرار می دهیم $x_1 = \frac{a+b}{2}$

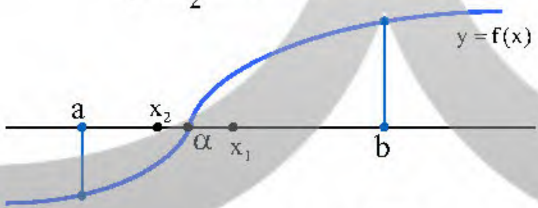


به عبارت دیگر ، x_1 را وسط بازهٔ [a,b] می گیریم تا [a,b] به دو بخش $[a, x_1]$ و $[x_1, b]$ تقسیم شود .

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

ریشه در یکی از این دو بخش قرار دارد . بخشی که α در آن قرار دارد ، اختیار و مجددا آن را به دو بخش متساوی تقسیم می کنیم. در اینجا بازهٔ $[a, x_1]$ را اختیار می کنیم و قرار می دهیم $x_2 = \frac{a + x_1}{2}$

و این عمل را همین طور ادامه می دهیم .



اما ، در حالت کلی رسم منحنی میسر نیست و می توان برای ادامهٔ کار به طریق جبری زیر عمل کرد :

۱ـ اگر $f(a)f(x_1) < 0$ آن گاه ریشه در $[a, x_1]$ است . از این رو ، می توان قرار داد $b = x_1$ و مجددا عمل را در [a,b] تکرار کرد .

۲ـ اگر $f(a)f(x_1) > 0$ آن گاه ریشه در $[x_1, b]$ است ، لذا ، می توان قرارداد $a = x_1$ و مجددا عمل را در [a,b] تکرار کرد .

۳ـ اگر $f(a)f(x_1) = 0$ آن گاه ریشه x_1 است و عمل خاتمه پیدا می کند .

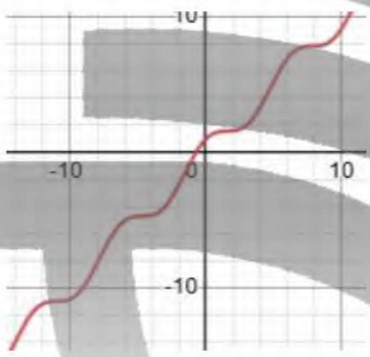
به این ترتیب دنباله ای چون $\{x_n\}$ ساخته می شود . البته عملا نمی توان بینهایت جمله از این دنباله را حساب کرد بلکه باید معیارهای توقف عملیات را بررسی کرد.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

مثال: می دانیم که معادلهٔ $x+\cos x = 0$ فقط یک ریشه در $(-1, 0)$ دارد . تقریبی از این ریشه را به روش دو بخشی حساب کنید.

ابتدا جدول محاسبات مربوط را تشکیل می دهیم. در این مثال ، $a=-1$ ، $b=0$ ، (2D) $f(a)=-0/46$ و $f(b)=1$

توجه کنید که a و b در هر سطر با توجه به سطر قبل و علامت $f(a)f(x_n)$ تعیین می شود و همواره $a < b$.



n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	-1	0	-0/5	-
2	-1	-0/5	-0/75	+
3	-0/75	-0/5	-0/625	-
4	-0/75	-0/625	0/6875	-
5	-0/75	-0/6875	-0/71875	-
6	-0/75	-0/71875	-0/734375	+
7	-0/734375	-0/71875	-0/7265625	

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

مثال: تقریبی از یک ریشهٔ معادلهٔ $3xe^x=1$ را تا سه رقم اعشار حساب کنید.

حل : معادلهٔفوق را به صورت $f(x)=3x-e^{-x}=0$ می نویسیم. واضح است که ریشه های دو معادله یکسان هستند . از آنجایی که مقادیر f در در بازهٔ (0/25,0/27) تغییر علامت می دهد و با توجه به اکیدا صعودی بودن f معادلـه تنهـا یک ریشه دارد . جدول مربوطه را تشکیل می دهیم. (4D) $f(a) = -0/0288$, $a=0/25$ $b = 0/27$, $f(b) = 0/4662$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	0/25	0/27	0/26	-
2	0/25	0/26	0/255	+
3	0/255	0/26	0/2575	+
4	0/2575	0/26	0/2588	-
5	0/2575	0/2588	0/2582	-
6	0/2575	0/2582	0/25785	

$$|f(x_n)| < ۰٫۰۰۱$$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۷	۰٫۲۶	−	۰٫۰۰۸۹
۲	۰٫۲۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۵	+	−۰٫۰۰۹۹
۳	۰٫۲۵۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۷۵	+	−۰٫۰۰۰۵

از این رو ، ریشه تا سه رقم اعشار برابر 0/258 است .

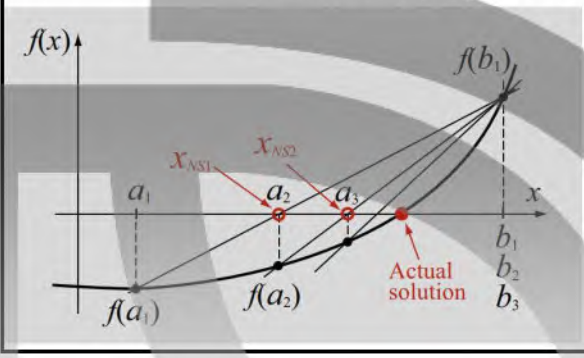
روش دو بخشی همگری تضمین دارد اما سرعت رسیدن به ریشه کند است.

روش نابجایی

The regula falsi method (also called false position and linear interpolation methods)

گرچه منحنی نمایش y=f(x) بین دو نقطهٔ b و a یک خط مستقیم نیست اما اگر این دو نقطه را با یک خط مستقیم به هم وصل کنیم محل تلاقی آن با محور x ، تقریبی از ریشه است.

✓ توجه: f در [a,b] پیوسته باشد و f(a) f(b) < 0 و معادلهٔ f(x)=0 تنها یک ریشه در (a , b) داشته باشد.



$$y - y_1 = \underbrace{\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}}_{\text{شیب خط}}(x - x_1)$$

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نقطهٔ تلاقی این خط را با محور x نقطه ای به مختصات $(x_1,0)$می گیریم در نتیجه باید داشته باشیم

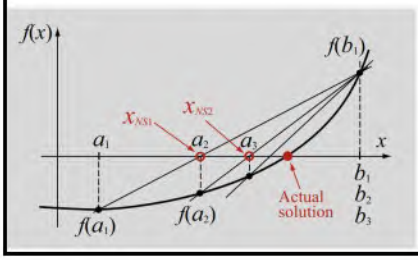
$$\frac{0 - f(a)}{x_1 - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

که پس از ساده کردن ، فرمول روش نابه جایی به دست می آید

$$\boxed{x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$

برای تعیین x_2 ، تقریبا مشابه روش دو بخشی ، سه حالت زیر را در نظر می گیریم :

۱ـ اگر $f(a)f(x_1) < 0$ آنگاه ریشه در (a,x_1)است. لذا ، در فرمول به جای b قرار می دهیم x_1) به عبارتی از سه نقطهٔ a و b وx_1 ، نقطهٔ b نابجاست) و x_2 را حساب می کنیم . به عبارت دیگر



$$x_2 = \frac{af(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)}$$

۲- اگر $f(a)f(x_1)>0$ ریشه در (x_1,b) است و x_2 از فرمول زیر حساب می شود

$$x_2=\frac{x_1f(b)-bf(x_1)}{f(b)-f(x_1)}$$

۳- اگر $f(a)f(x_1)=0$ ریشه x_1 است و مسئله حل شده است.

به این ترتیب باز هم دنباله ای از اعداد حاصل می شود که چون در بازه هایی قرار دارند که طول آنها مرتبا کوچک می شود همیشه همگراست .

مثال: تقریبی از ریشه معادله $f(x)=۳x-e^{-x}=۰$ را به روش نابجایی با سه رقم اعشار به دست آورید.این ریشه در فاصله $(۰٫۲۵,۰٫۲۷)$ قرار دارد.محاسبات را تا جایی ادامه دهید که $|f(x_n)|\geq ۲\times ۱۰^{-۴}$.

$a=۰٫۲۵$ و $b=۰٫۲۷$

$$x_۱=\frac{۰٫۲۵\times ۰٫۰۴۶۶-۰٫۲۷\times(-۰٫۰۲۸۸)}{۰٫۰۴۶۶-(-۰٫۰۲۸۸)}=۰٫۲۵۷۶$$

$f(x_۱)=-۰٫۰۰۰۱$

لذا $|f(x_۱)|=۰٫۰۰۰۱<۲\times ۱۰^{-۴}$.بنابراین $x_۱$ تقریب ریشه بوده و این تقریب با سه رقم اعشار عبارت است از :

$$\alpha\simeq ۰٫۲۵۸$$

مثال تقریبی از ریشه معادله $f(x)=x^۲-۲^x=۰$ را که در فاصله $(-۱,۰)$ قرار دارد به روش نابجایی با $۴D$ به دست آورید به طوری که $|f(x_n)|<۱۰^{-۲}$.

حل: هرگاه قرار دهیم $x_n=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$، جدول زیر را خواهیم داشت :

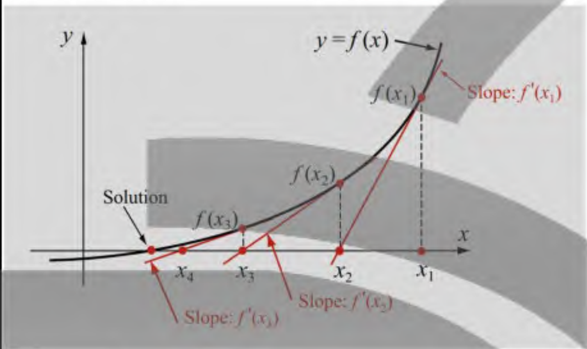
n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	-۱	۰	$-۰٫۶۶۶۶۷$	$۰٫۵$	$-۰٫۱۸۵۵۲$	$-$
۲	-۱	$-۰٫۶۶۶۶۷$	$-۰٫۷۵۶۸۸$	$۰٫۵$	$-۰٫۰۱۸۹۲$	$-$
۳	-۱	$-۰٫۷۵۶۸۸$	$-۰٫۷۶۵۷۴$	$۰٫۵$	$-۰٫۰۰۱۷۹$	$-$

چون $|f(x_۳)|=۰٫۰۰۱۷۹<۱۰^{-۲}$ پس $x_۳$ تقریب مورد نظر ریشه است.لذا با $۴D$ تقریب ریشه عبارت است از :

$$\alpha\simeq -۰٫۷۶۵۷$$

Newton–Raphson method

این روش یکی از سریعترین روش هایی است که تا کنون بررسی کرده ایم . برای به کار بردن این روش باید تخمین نسبتا نزدیکی از ریشهٔ مورد نظر در دست باشد.



$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

مثال: تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $x + \cos x = 0$ را با تقریب اولیهٔ $x0=0.7$ حساب کنید .

$$f(x) = x + \cos x$$

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + \cos x_n}{1 - \sin x_n}$$

(توجه کنید که ماشین حساب در وضعیت (MODE) رادیان باشد)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + \cos x_n}{1 - \sin x_n}$$

$$x_1 = -0/73943649 \qquad (8D)$$

$$x_2 = -0/73908515 \qquad (8D)$$

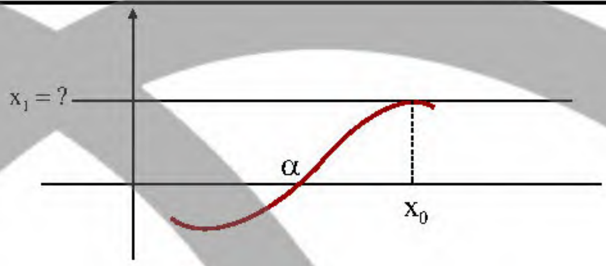
$$x_3 = -0/73908513 \qquad (8D)$$

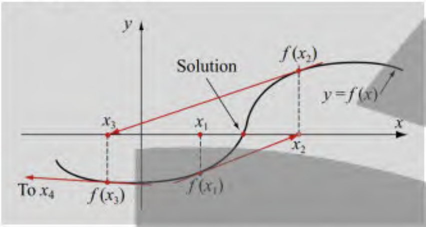
$$f(x_3) = 5/383 \times 10^{-9}$$

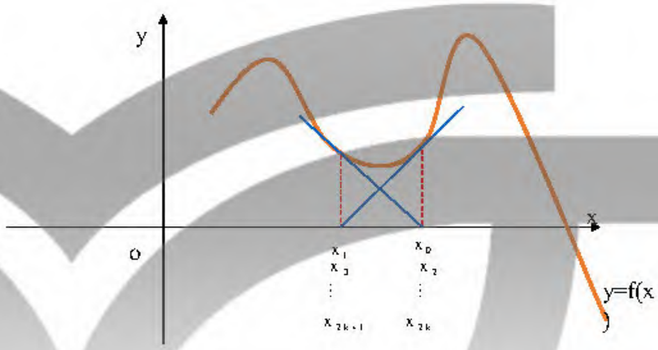
خصوصیات روش نیوتن

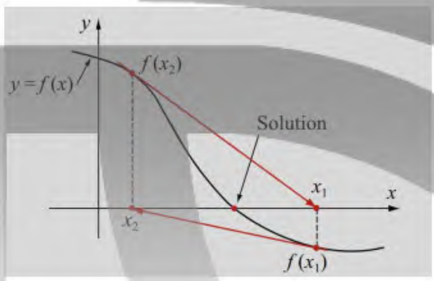
الف) اشکال اساسی روش نیوتن آن است که تخمین اولیه باید نزدیک به ریشه باشد تـا جمـلات دنبالـهٔ حاصـل از روش نیـوتن همگرا باشند . شکل های زیر واگرایی روش نیوتن و نوسان بین دو نقطه را نشان می دهند . بـرای رفـع ایـن مشـکل ابتـدا ، بـه وسیلهٔ یکی از روش های همیشه همگرا ، تقریبی نزدیک به ریشه به دست می آورند و بعد این تقریب را به عنـوان مقـدار اولیـه برای روش نیوتن استفاده می کنند.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

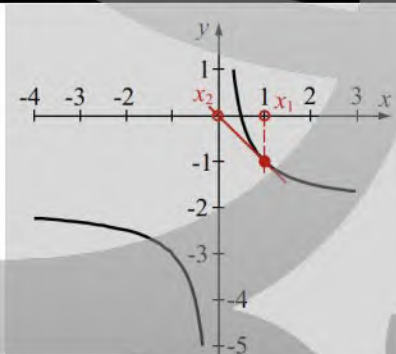


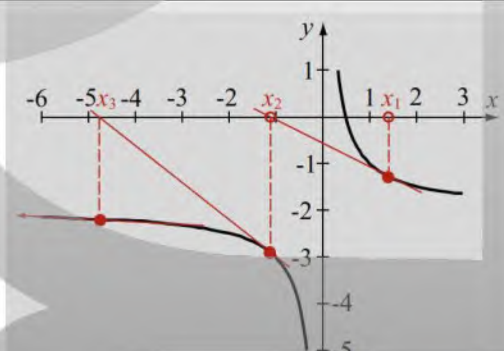






دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی





ب) اشکال دوم روش نیوتن لزوم موجود بودن $f'(x_0)$ و محاسبه آن در نقاط x_n است و این که همواره

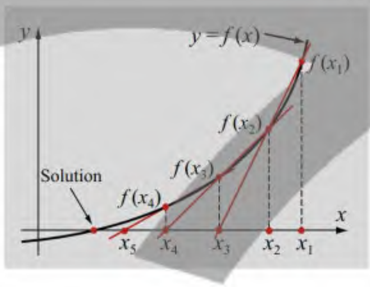
$$f'(x_n) \neq 0$$

گاهی تابع f مشتق ندارد که در نتیجه امکان استفاده از فرمول نیوتن نخواهد بود ، ویا $f'(x_0)$ و محاسبه آن پیچیده است.

ج) مزیت عمده روش نیوتن (در صورت همگرایی) سرعت همگرایی آن است که جذابیت و کاربرد آن را افزایش داده است.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

روش وتری (SECANT METHOD)



می دانیم که
$$\lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} = f'(x_n)$$

بنابر این ، اگر x مقداری نزدیک به x_n باشد ، مثلا x_{n-1} ، آن گاه

$$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \approx f'(x_n)$$

از این رو ، در فرمول نیوتن به جای $f'(x_n)$ از این رابطهٔ استفاده می کنیم و به دست می آوریم :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

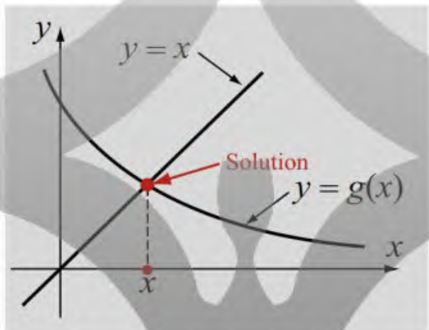
برای محاسبهٔ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به روش وتری نیاز به دو مقدار اولیهٔ داریم.

این روش سرعتی کمتر از روش نیوتن دارد ولی به مراتب سریع تر از روش دو بخشی و نابجایی است.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

روش تکرار نقطه ثابت (FIXED-POINT ITERATION METHOD)

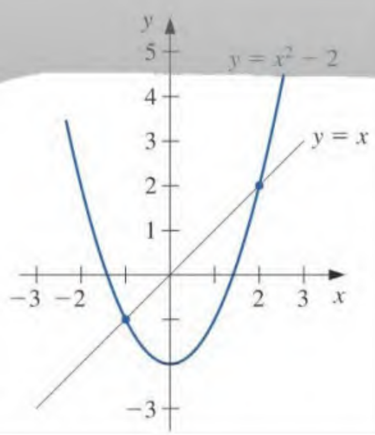
Definition: The number p is a fixed point for a given function g if g (p)= P.



Determine any fixed points of the function $g(x) = x^2 - 2$.

Solution A fixed point p for g has the property that

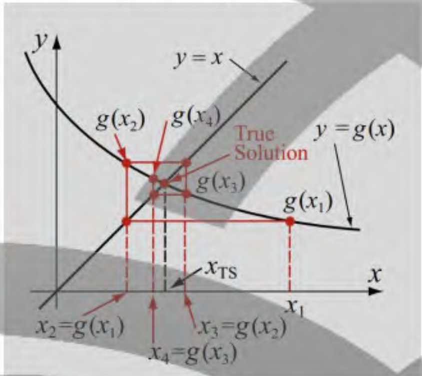
$$p = g(p) = p^2 - 2, \quad \text{which implies that} \quad 0 = p^2 - p - 2 = (p+1)(p-2).$$

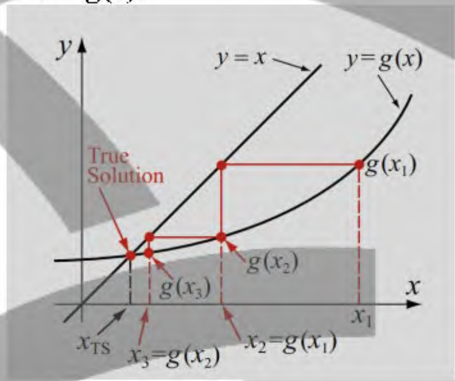


دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

Fixed-point iteration is a method for solving an equation of the form **f(x)=0**. The method is carried out by rewriting the equation in the form: $\mathbf{x = g(x)}$

$$x_{i+1} = g(x_i)$$





در این روش پس از آزمون شرایط موجود بودن ریشه برای معادله $f(x) = 0$ در فاصله $[a, b]$، معادله $f(x) = 0$ پس از دستکاریهایی به صورت $x = g(x)$ نوشته می‌شود.به طوری که α ریشهٔ هر دو معادله باشد، یعنی :

$$f(\alpha) = 0 \quad \& \quad \alpha = g(\alpha)$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

توجه معمولاً از روی یک معادله $f(x) = 0$ به صورتهای مختلفی می‌توان به شکل $x = g(x)$ رسید.

مثال معادله $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ را در نظر بگیرید، در این صورت برای تابع $g(x)$ انتخابهای زیر وجود دارد :

الف. $g(x) = x^2 - 2$

ب. $g(x) = \sqrt{x + 2}$

پ. $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$

توجه بدیهی‌ترین صورتهای ممکن برای تبدیل معادله $f(x) = 0$ به صورت $x = g(x)$ عبارتند از :

$$x + f(x) - x = 0. \quad \Rightarrow \quad x = x - f(x)$$

$$x = x + f(x)$$

The equation $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ has a unique root in [1, 2]. There are many ways to change the equation to the fixed-point form $x = g(x)$ using simple algebraic manipulation. For example, to obtain the function g described in part (c), we can manipulate the equation $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ as follows:

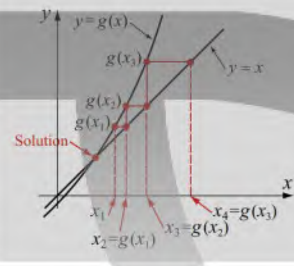
$$4x^2 = 10 - x^3, \quad \text{so} \quad x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3), \quad \text{and} \quad x = \pm\frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}.$$

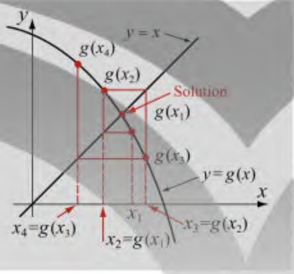
To obtain a positive solution, $g_3(x)$ is chosen. It is not important for you to derive the functions shown here, but you should verify that the fixed point of each is actually a solution to the original equation, $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

(a) $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ **(b)** $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$

(c) $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$ **(d)** $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4 + x}\right)^{1/2}$

(e) $x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$





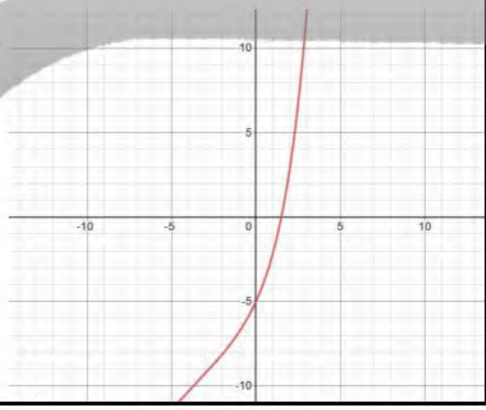
n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	−0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	−469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

شرط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده :

۱- برای $x \in [a, b]$ داشته باشیم $g(x) \in [a, b]$

۲- برای $x \in [a, b]$ داشته باشیم ۱ > $|g'(x)|$.

Example: consider the equation: $xe^{0.5x} + 1.2x - 5 = 0$



A plot of the function shows that the equation has a solution between 1 and 2. The equation can be rewritten in the form in different ways. Three possibilities are discussed next.

***Case a*:** $$x = \frac{5 - xe^{0.5x}}{1.2}$$

In this case, $g(x) = \frac{5 - xe^{0.5x}}{1.2}$ and $g'(x) = -(e^{0.5x} + 0.5xe^{0.5x})/1.2$.
The values of $g'(x)$ at points $x = 1$ and $x = 2$, which are in the neighborhood of the solution, are:

$$g'(1) = -(e^{0.5 \cdot 1} + 0.5 \cdot 1e^{0.5 \cdot 1})/1.2 = -2.0609$$

$$g'(2) = -(e^{0.5 \cdot 2} + 0.5 \cdot 2e^{0.5 \cdot 2})/1.2 = -4.5305$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

***Case b*:** $$x = \frac{5}{e^{0.5x}+1.2}$$

In this case, $g(x) = \frac{5}{e^{0.5x}+1.2}$ and $g'(x) = \frac{-5e^{0.5x}}{2(e^{0.5x}+1.2)^2}$.

The values of $g'(x)$ at points $x = 1$ and $x = 2$, which are in the neighborhood of the solution, are:

$$g'(1) = \frac{-5e^{0.5\cdot 1}}{2(e^{0.5\cdot 1}+1.2)^2} = -0.5079$$

$$g'(2) = \frac{-5e^{0.5\cdot 2}}{2(e^{0.5\cdot 2}+1.2)^2} = -0.4426$$

***Case c*:** $$x = \frac{5-1.2x}{e^{0.5x}}$$

In this case, $g(x) = \frac{5-1.2x}{e^{0.5x}}$ and $g'(x) = \frac{-3.7+0.6x}{e^{0.5x}}$.

The values of $g'(x)$ at points $x = 1$ and $x = 2$, which are in the neighborhood of the solution, are:

$$g'(1) = \frac{-3.7+0.6\cdot 1}{e^{0.5\cdot 1}} = -1.8802$$

$$g'(2) = \frac{-3.7+0.6\cdot 2}{e^{0.5\cdot 2}} = -0.9197$$

These results show that the iteration function from Case b is the one that should be used since, in this case,

$$|g'(1)| < 1 \text{ and } |g'(2)| < 1 .$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

Substituting from Case b in The Equation gives:

$$x_{i+1} = \frac{5}{e^{0.5x_i}+1.2}$$

Starting with $x_1 = 1$, the first few iterations are:

$$x_2 = \frac{5}{e^{0.5\cdot 1}+1.2} = 1.7552 \qquad x_3 = \frac{5}{e^{0.5\cdot 1.7552}+1.2} = 1.3869$$

$$x_4 = \frac{5}{e^{0.5\cdot 1.3869}+1.2} = 1.5622 \qquad x_5 = \frac{5}{e^{0.5\cdot 1.5622}+1.2} = 1.4776$$

$$x_6 = \frac{5}{e^{0.5\cdot 1.4776}+1.2} = 1.5182 \qquad x_7 = \frac{5}{e^{0.5\cdot 1.5182}+1.2} = 1.4986$$

As expected, the values calculated in the iterations are converging toward the actual solution, which is $x = 1.5050$.

On the contrary, if the function $g(x)$ from Case *a* is used in the iteration, the first few iterations are:

$$x_2 = \frac{5-1e^{0.5\cdot 1}}{1.2} = 2.7927 \qquad x_3 = \frac{5-2.7927e^{0.5\cdot 2.7927}}{1.2} = -5.2364$$

$$x_4 = \frac{5-(-5.2364)e^{0.5\cdot(-5.2364)}}{1.2} = 4.4849$$

$$x_5 = \frac{5-4.4849e^{0.5\cdot 4.4849}}{1.2} = -31.0262$$

In this case, the iterations give values that diverge from the solution.

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

مثال برای تعیین تقریب ریشه معادله $f(x) = ۳xe^x - ۱ = ۰$ که در فاصله $(۰, ۱)$ قرار دارد از روش تکرار ساده استفاده کنید. قرار دهید $x_۰ = ۰/۵$ و تقریب را با $۳D$ به دست آورید.

حل: معادله را به شکل $x = \frac{e^{-x}}{۳}$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم $g(x) = \frac{e^{-x}}{۳}$

برای نشان دادن دارا بودن شرایط ۱ و ۲ برای تابع g به صورت زیر عمل می‌کنیم، چون $x \in (۰, ۱)$

پس $۰ < x < ۱$

$$-۱ < -x < ۰$$

$$e^{-۱} < e^{-x} < e^۰$$

$$\frac{۱}{۳e} < \frac{e^{-x}}{۳} < \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۱}{۳e} < g(x) < \frac{۱}{۳}$$

چون $\frac{۱}{۳e} = ۰/۱۲$، بنابراین $۰ < ۰/۱۲ < g(x) < \frac{۱}{۳} < ۱$

لذا برای $x \in (۰, ۱)$ داریم: $g(x) \in (۰, ۱)$. در ضمن

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{۳}$$

دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی خوزستان
گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم
مدرس: دکتر روح اله فرهادی

و اگر $x \in (۰, ۱)$ خواهیم داشت:

$$|g'(x)| = \frac{e^{-x}}{۳} < \frac{e^۰}{۳} = \frac{۱}{۳} < ۱$$

بنابراین $g(x)$ مناسب است. با استفاده از $x_۰ = ۰/۵$ و از رابطه

$$x_{n+۱} = \frac{e^{-x_n}}{۳}$$

$x_۱ = ۰/۲۰۲۲ \quad (۴D)$

$x_۲ = ۰/۲۷۲۳$

$x_۳ = ۰/۲۵۳۹$

$x_۴ = ۰/۲۵۸۶$

$x_۵ = ۰/۲۵۷۴$

$x_۶ = ۰/۲۵۷۷$

$x_۷ = ۰/۲۵۷۶$

$x_۸ = ۰/۲۵۷۶$

$x_۹ = ۰/۲۵۷۶$

$$\alpha \simeq ۰/۲۵۸ \quad (۳D)$$