

تمرینهای فصل ۱

تمرینهای ۱.۱

۱. داریم $f'(x) = 3x^2 - 2$ و $g'(x) = 2x + 1$. روشن است که این توابع دارای شرایط قضیهٔ کشی هستند. فرمول کشی را برای این توابع می‌نویسیم. داریم

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{-1 - 0}{1 + 1} = \frac{3x^2 - 2}{2x + 1}$$

با حل کردن این معادله نسبت به x ، به دست می‌آوریم $x = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{6}$. ملاحظه می‌کنیم که $C = \frac{-1 + \sqrt{19}}{6}$ در بازهٔ $(0, 1)$ واقع است و در فرمول کشی صدق می‌کند.

۲. داریم $f'(x) = 2x$ و $g'(x) = \frac{1}{x}$. توابع f و g در شرایط قضیهٔ کشی صدق می‌کنند. فرمول کشی برای این توابع عبارت‌اند از

$$\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{4 - 1}{\ln 2 - 0} = \frac{2x}{1/x}$$

با حل کردن این معادله نسبت به x ، داریم $(2 \ln 2)x^2 = 3$ یا $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2 \ln 2}}$. جواب $C = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2 \ln 2}}$ در بازهٔ $(1, 2)$ واقع است و در فرمول کشی صدق می‌کند.

۳. عبارت داده شده به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. دستور هسپیتال را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{6}$$

۴. با به کار بستن دستور هوییتال، به دست می آوریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$$

۵. دستور هوییتال را به کار می بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x}}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} = 0$$

۶. دستور هوییتال را سه بار به کار می بریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

۷. چون $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \sin x) = 2 \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x) = 1 \neq 0$ ، پس عبارت داده شده مبهم نیست و در نتیجه دستور هوییتال قابل اجرا نیست. این حد برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 + 1}{1 + 0} = \frac{2}{1} = 2$$

۸. این عبارت به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. دستور هوییتال را به کار می بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

۹. دستور هوییتال را به کار می بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{\ln(1+x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1 - e^x)}{-x}$$

این عبارت نیز به صورت $\frac{0}{0}$ است. در نتیجه یک بار دیگر دستور هوییتال را به کار می بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1 - e^x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) + (1+x)(-e^x)}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

۱۰. بنا به دستور هوییتال، داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln 2)2^x - (\ln 3)3^x}{1} = \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3}$$

۱۱. دستور هوییتال قابل اجرا است:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

۱۲. دستور هوییتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/\sqrt{1-x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

۱۳. این عبارت به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. دستور هوییتال را چهار بار به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{24x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{24} = +\infty \end{aligned}$$

۱۴. دستور هوییتال را برای صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

۱۵. دستور هوییتال را به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x/(2+e^x)}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3(2+e^x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۱۶. این عبارت به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. با به کار بستن دستور هوییتال، داریم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6 \sec^2 3x \operatorname{tg} 3x}$$

اگر دستور هوییتال را مجدداً به کار ببریم به نتیجه‌ای نمی‌رسیم. ولی اگر ابتدا بنویسیم

$$\frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$

و سپس دستور هوییتال را به کار ببریم، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \cos^2 2x \sin 2x}{-2 \cos x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(\cos 2x \sin 2x)}{2 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin 4x}{2 \sin 2x} \end{aligned}$$

این عبارت نیز به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. دستور هوییتال را مجدداً به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin 4x}{2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos 4x}{2 \cos 2x} = \frac{-4}{-2} = 2$$

۱۷. بنابه تعریف مشتق، داریم

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^{-x}} \end{aligned}$$

این عبارت به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. دستور هوییتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/x^2}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{-x}} = 0$$

۱۸. با استفاده از تعریف مشتق، داریم

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$$

با به کار بستن قاعده هوییتال، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

تمرینهای ۲.۱

۱. این عبارت به صورت مبهم $\infty - \infty$ است. ابتدا مخرجها را مشترک می‌کنیم و سپس دستور هوییتال را به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-e^x} + \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1-e^x}{x-xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-e^x}{1-e^x-xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^x}{-e^x-e^x-xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

.۲

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

۳. این عبارت به صورت مبهم 0° است. قرار می‌دهیم $y = (\sqrt{x})^x$ و از طرفین لگاریتم می‌گیریم. داریم

$$\ln y = x \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} x \ln x = \frac{\ln x}{2x^{-1}}$$

حال دستور هوییتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{2x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-2/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-2} = 0$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$

۴. می‌نویسیم $y = x^{1/(1-x)}$. در نتیجه $\ln y = \frac{1}{1-x} \ln x = \frac{\ln x}{1-x}$. حال دستور هوییتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1} y = e^{-1} = \frac{1}{e}$

.۵

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)e^{-x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x e^{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

۶. می‌نویسیم $y = \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$. در نتیجه

$$\ln y = \sin x \ln \left(\frac{1}{x^2} \right) = \frac{-\ln x^2}{1/\sin x}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln x^2}{1/\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x/x^2}{-\cos x/\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$

۷. می نویسیم $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ در نتیجه $\ln y = \operatorname{tg} x \ln \sin x$ و

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cotg x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x / \sin x}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\sin x \cos x = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$

۸. قرار می دهیم $y = (1 + \sin x)^{1/x}$ در نتیجه $\ln y = \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$ حال دستور هوپیتال را به کار می بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^1 = e$

۹. می نویسیم

$$\frac{3^{x^2}}{x^x} = \frac{e^{x^2 \ln 3}}{e^{x \ln x}} = e^{(x^2 \ln 3 - x \ln x)} = e^{x(x \ln 3 - \ln x)}$$

حال داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x^2}}{x^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x(x \ln 3 - \ln x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x(x \ln 3 - \ln x)} = \infty$$

۱۰. قرار می دهیم $y = x^{\ln x}$ پس $\ln y = \ln x \ln x$ در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = \infty$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \infty$

تمرینهای ۳.۱

۱.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} t^{2/3} - \frac{3}{2} \right) = \infty \quad (\text{وجود ندارد})$$

در نتیجه $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ واگراست.

۲.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{1} \right] = \frac{1}{1}$$

بنابراین انتگرال داده شده همگرا و مقدار آن برابر $\frac{1}{1}$ است.

۳.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^t = 1$$

بنابراین انتگرال داده شده همگرا و مقدار آن برابر ۱ است.

۴.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{1+x} = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |x+1|]_1^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln |t+1| - \ln 2) = \infty \quad (\text{وجود ندارد})$$

در نتیجه انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}$ واگراست.

۵. می نویسیم

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$$

برای محاسبه این انتگرال از جانشینی $u = 1 + x^2$ ، $du = 2x dx$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u} \right) + c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + c$$

بنابراین

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} \right]_1^t = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

۶. ابتدا می‌نویسیم

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-x^2} dx$$

برای محاسبه انتگرال فوق از جانشینی $u = -x^2$ و $du = -2x dx$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + c = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

در نتیجه

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^t = \frac{1}{2} \quad (\text{چرا؟})$$

۷. بنابه تعریف داریم

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} \end{aligned}$$

حال داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \int \frac{du}{u^2 + 2^2} \quad (u=x+1) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{2} + c = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x+1}{2} + c \end{aligned}$$

در نتیجه با محاسبه حدهای فوق، انتگرال ناسره مورد نظر برابر با $\frac{\pi}{4}$ به دست می آید.
۸. این انتگرال واگراست (چرا؟)

۹.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x-1}{3} \right]_t^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x-1}{3} \right]_0^t \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (\text{چرا؟})$$

۱۰. ابتدا انتگرال نامعین $\int x e^{-x} dx$ را به روش انتگرالگیری جزء به جزء پیدا می کنیم. نتیجه

می گیریم که $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c$. حال داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-t e^{-t} - e^{-t}) = 1 \end{aligned} \quad (\text{چرا؟})$$

۱۱

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 - 0 \right] = \infty \end{aligned}$$

در نتیجه انتگرال ناسره داده شده واگراست.

۱۲. ابتدا $\int e^{-x} \cos x dx$ را به روش جزء به جزء پیدا می کنیم. قرار می دهیم $u = e^{-x}$

در نتیجه $v = \int \cos x dx = \sin x$ ، $dv = \cos x dx$ ، $du = -e^{-x} dx$

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x - \int -e^{-x} \sin x \, dx$$

با اعمال مجدد روش انتگرالگیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx$$

در نتیجه

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx$$

یا

$$2 \int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} (\sin x - \cos x)$$

و بنابراین

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x)$$

حال، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} \cos x \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} \right] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۳. روشن است که

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c & , \quad x \neq -1 \text{ اگر} \\ \ln |x| + c & , \quad x = -1 \text{ اگر} \end{cases}$$

پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} \int_{\cdot}^{\infty} x^n dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\cdot}^t x^n dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_{\cdot}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} - \frac{1}{n+1} \right] \\ &= \begin{cases} \infty & , \text{ اگر } x > -1 \\ -\frac{1}{n+1} & , \text{ اگر } x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

حالت $x = -1$:

$$\begin{aligned} \int_{\cdot}^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\cdot}^t \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |x|]_{\cdot}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \cdot) \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به نتایج به دست آمده در دو حالت بالا، انتگرال داده شده به ازای $x < -1$ همگرا، با مقدار $-\frac{1}{x+1}$ ، و به ازای $x \geq -1$ واگراست.

۱۴. در اینجا نیز مانند تمرین ۱۳ دو حالت $x \neq -1$ و $x = -1$ را در نظر بگیرید. محاسبات نتیجه خواهند داد که انتگرال داده شده به ازای $x < -1$ همگرا، با مقدار $\frac{1}{n+1} (-1)^{n+1}$ ، و به ازای $x \geq -1$ واگراست (جزئیات را نشان دهید).

۱۵. به عنوان مثال تابع $f(x) = x$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-t}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t^2 \right) = 0$$

در حالی که

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \int_{-\infty}^{\cdot} x dx + \int_{\cdot}^{\infty} x dx$$

واگراست، زیرا

$$\begin{aligned} \int_{\cdot}^{\infty} x dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\cdot}^t x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\cdot}^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} t^2 - \cdot \right] = \infty \end{aligned}$$

۱۶

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_b^t f(x)dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\int_t^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \right] + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_b^a f(x)dx + \int_a^t f(x)dx \right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\int_t^a f(x)dx \right] + \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_a^t f(x)dx \right] \\
 &= \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx
 \end{aligned}$$

این مطلب نشان می‌دهد که تعریف انتگرال ناسره به صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

به انتخاب a بستگی ندارد.

تمرینهای ۴.۱

۱.

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{\sqrt{4-x}}}^{\sqrt{4-x}} \frac{dx}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \int_{\frac{1}{\sqrt{4-x}}}^t (4-x)^{-\frac{3}{2}} dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \left[2(4-x)^{-\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{\sqrt{4-x}}}^t = \lim_{t \rightarrow 4^-} \left[\frac{2}{\sqrt{4-t}} - 1 \right] \\
 &= \infty \text{ (وجود ندارد)}
 \end{aligned}$$

در نتیجه انتگرال داده شده واگراست.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \int_0^t (4-x)^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \left[-2(4-x)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow 4^-} \left[-2\sqrt{4-t} + 2\sqrt{4} \right] \\ &= 0 + 2\sqrt{4} = 2\sqrt{4} \end{aligned}$$

بنابراین انتگرال داده شده به $2\sqrt{4}$ همگراست.

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^3 (x-2)^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \quad (\text{چرا؟})$$

۴. تابع $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ در $x = 2$ ناپیوسته و در بقیه نقاط بازه $[0, 2]$ پیوسته است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\sin^{-1} \frac{t}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

بنابراین انتگرال داده شده به $\frac{\pi}{2}$ همگراست.

۵. تابع $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است. پس

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sec x \, dx = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_{\frac{\pi}{3}}^t \sec x \, dx$$

چگونگی محاسبه $\int \sec x \, dx$ را یادآوری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx \\ &= \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

زیرا $\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x$ مشتق عبارت $\sec x + \operatorname{tg} x$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sec x \, dx &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\ln |\sec x + \operatorname{tg} x|]_{\frac{\pi}{3}}^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\ln |\sec t + \operatorname{tg} t| - \ln (2 + \sqrt{3})] \\ &= \infty \quad (\text{وجود ندارد}) \end{aligned}$$

در نتیجه انتگرال داده شده واگراست.

۶. این انتگرال ناسره واگراست (چرا؟).

۷. تابع $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ در $x = 3$ ناپیوستگی (نامتناهی) دارد. چون عدد ۳ در بازه $(0, 4)$ واقع است، بنا به تعریف می‌نویسیم

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2} \, dx = \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$$

حال انتگرال اول طرف راست تساوی فوق را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} &= \lim_{t \rightarrow 3^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{t \rightarrow 3^-} \left[\frac{-1}{x-3} \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^-} \left(\frac{-1}{t-3} - \frac{1}{3} \right) = \infty \quad (\text{وجود ندارد}) \end{aligned}$$

در نتیجه $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$ ، و بنابراین $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$ ، واگراست. توجه کنید که قضیهٔ اساسی حساب

دیفرانسیل و انتگرال برای محاسبه $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$ قابل اجرا نیست زیرا تابع $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ در بازهٔ

[۰,۴] پیوسته نیست. در واقع اگر به اشتباه قضیهٔ اساسی را به کار ببریم، به دست می‌آوریم

$$\int_{-1}^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = \left[\frac{-1}{x-3} \right]_{-1}^4 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

که به روشنی جوابی نادرست است، زیرا تابع $\frac{1}{(x-3)^2}$ لایهیچگاه منفی نیست. ۸. تابع $y = \frac{1}{(x+1)^3}$ در $x = -1$ ناپیوستگی (نامتناهی) دارد. به روشی مشابه حل تمرین ۷ نتیجه بگیرید که انتگرال داده شده واگراست.

۹. ابتدا $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$ را به روش تجزیه به کسرهای ساده پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-x-2} &= \int \frac{dx}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} [\ln |x-2| - \ln |x+1|] + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

حال چون تابع $y = \frac{1}{x^2-x-1}$ در $x = 2$ متعلق به بازهٔ $(0,4)$ ناپیوستگی (نامتناهی) دارد، می‌نویسیم

$$\int_{-1}^4 \frac{dx}{x^2-x-2} = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2-x-2} + \int_2^4 \frac{dx}{x^2-x-2}$$

چون

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2-x-2} &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_{-1}^t \frac{dx}{x^2-x-2} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \right]_{-1}^t \\ &= \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\ln \left| \frac{t-2}{t+1} \right| - \ln 2 \right] = \infty \quad (\text{وجود ندارد}) \end{aligned}$$

در نتیجه انتگرال داده شده واگراست.

۱۰. تابع $y = \frac{1}{(x^2-1)^2}$ در $x = 1$ ناپیوستگی (نامتناهی) دارد. پس

$$\int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2-1)^2} dx + \int_1^2 \frac{x dx}{(x^2-1)^2}$$

چون

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2-1)^2} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{x dx}{(x^2-1)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{2(x^2-1)} \right]_0^t \quad (u=x^2-1 \text{ جانشینی}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{2(t^2-1)} - \frac{1}{2} \right] = \infty \quad (\text{وجود ندارد}) \end{aligned}$$

پس انتگرال داده شده واگراست.

تمرینهای ۵.۱

۱. مقادیر مشتقات اول تا سوم تابع $f(x)$ در $x = 4$ را در جدول زیر قرار می دهیم.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(4)$
۰	$x^{\frac{1}{2}}$	۲
۱	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{4}$
۲	$-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{32}$
۳	$\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$	$\frac{3}{256}$

همچنین $f^{(3)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{5}{2}}$ و $f^{(3)}(4) = -\frac{15}{16}4^{-\frac{5}{2}}$ بنابراین

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x} = f(4) + \frac{f'(4)}{1!} (x-4) + \frac{f''(4)}{2!} (x-4)^2 \\
 &\quad + \frac{f^{(3)}(4)}{3!} (x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(z)}{4!} (x-4)^4 \\
 &= 2 + \frac{1}{4} (x-4) - \frac{1}{64} (x-4)^2 + \frac{1}{512} (x-4)^3 - \frac{5}{128} z^{-\frac{5}{2}} (x-4)^4
 \end{aligned}$$

که در آن z بین ۴ و x است.

۲. مقدار $f(x) = \sin x^2$ و مقادیر مشتقهای اول تا سوم آن در $x = 0$ برابرند با $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 0$ ، $f''(0) = 2$ و همچنین $f^{(3)}(0) = 0$.

$$f^{(4)}(z) = -12 \sin z^2 - 48 z^2 \cos z^2 + 16 z^4 \sin z^2$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x^2 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(z)}{4!} x^4 \\
 &= x^2 + \frac{f^{(4)}(z)}{4!} x^4
 \end{aligned}$$

که در آن z بین ۰ و x است.

۳.

$f(x) = e^{-x^2}$	$f(1) = e^{-1}$
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$	$f'(1) = -2e^{-1}$
$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$	$f''(1) = 2e^{-1}$
$f^{(3)}(x) = 12xe^{-x^2} - 8x^3 e^{-x^2}$	$f^{(3)}(1) = 4e^{-1}$
$f^{(4)}(x) = (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2}$	

بنابراین

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{-x^2} = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!} (x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(z)}{4!} (x-1)^4 \\
 &= e^{-1} - 2e^{-1}(x-1) + e^{-1}(x-1)^2 + \frac{2}{3} e^{-1} (x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(z)}{24} (x-1)^4
 \end{aligned}$$

که در آن $f^{(4)}(z) = (12 - 48z^2 + 16z^4) e^{-z^2}$ و z بین ۱ و x است.

۴. مقدار $f(x) = \operatorname{tg} x$ و مقادیر مشتقهای اول تا چهارم آن در $x = \frac{\pi}{4}$ به ترتیب برابرند با ۱، ۲، ۴، ۱۶ و ۸۰. همچنین $f^{(5)}(z) = 16 \sec^2 z \operatorname{tg}^2 z + 88 \sec^4 z \operatorname{tg} z + 16 \sec^6 z$ در نتیجه

$$f(x) = \operatorname{tg} x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{f^{(5)}(z)}{120}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$$

که در آن z بین $\frac{\pi}{4}$ و x است.

۵. جدول مشتقهای اول تا ششم $f(x) = e^{2x}$ را تشکیل می‌دهیم.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
۰	e^{2x}	e^2
۱	$2e^{2x}$	$2e^2$
۲	$4e^{2x}$	$4e^2$
۳	$8e^{2x}$	$8e^2$
۴	$16e^{2x}$	$16e^2$
۵	$32e^{2x}$	$32e^2$
۶	$64e^{2x}$	$f^{(6)}(z) = 64e^{2z}$

بنابراین

$$f(x) = e^{2x} = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^2(x-1)^3 + \frac{2}{3}e^2(x-1)^4 + \frac{4}{15}e^2(x-1)^5 + \frac{4}{45}e^{2z}(x-1)^6$$

که در آن z بین ۱ و x است.

۶. مقدار $f(x) = \ln \cos x$ و مقادیر مشتقهای اول و دوم آن در $x = 0$ به ترتیب عبارت‌اند از ۰، ۰ و -۱. همچنین $f^{(3)}(z) = -2 \sec^2 z \operatorname{tg} z$

در نتیجه

$$\begin{aligned} f(x) = \ln \cos x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(z)}{3!}x^3 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\sec^2 z \operatorname{tg} z x^3 \end{aligned}$$

که در آن z بین 0 و x است.

۷. جواب $f(x) = \sin^{-1}x = x + \frac{f^{(3)}(z)}{6} x^3$ که در آن $f^{(3)}(z) = (1-z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(1-z^2)^{-\frac{5}{2}}$ و z بین 0 و x است.

۸. به آسانی می‌توان نشان داد که

$$f^{(3)}(z) = \sec z \operatorname{tg}^2 z + 5 \sec^3 z \operatorname{tg} z \text{ و } f''(0) = 1, f'(0) = 0, f(0) = 1$$

بنابراین

$$f(x) = \sec x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(z) x^3$$

که در آن z بین 0 و x است.

۹. داریم $f(0) = 1$. حال $f'(0)$ و $f''(0)$ را با استفاده از تعریف مشتق محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \quad (\text{هوپیتال}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه $f'(0) = 0$. حال چون به ازای هر $x \neq 0$ ، $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f''(0) &= g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(0) - f'(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} \quad (\text{هویتال}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{6}x^2
 \end{aligned}$$

۱۰. داریم $f(0) = 0$ حال

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^{1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/x^2}{-\frac{2}{x^3} e^{1/x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \frac{x}{e^{1/x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

چون به ازای $x \neq 0$ ، $f'(x) = 2x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$ ،

$$\begin{aligned}
 f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 e^{-1/x^2} - 0}{x} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^{1/x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^{-3}}{-2x^{-2} e^{1/x^2}} \quad (\text{هویتال}) \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2}}{e^{1/x^2}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^{-3}}{-2x^{-2} e^{1/x^2}} \quad (\text{هویتال}) \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\
 &= 0 + 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

۱۱. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
۰	$x^2 - x - 2$	-2
۱	$2x - 1$	-1
۲	۲	۲
۳	۰	۰
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
n	۰	۰

بنابراین

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^n$$

$$= -2 - x + x^2 + 0 + \dots + 0 = -2 - x + x^2$$

که همان تابع داده شده است. از این نتیجه تعجب نمی‌کنیم، زیرا $f(x)$ خود یک چند جمله‌ای است.

۱۲. مشابه تمرین ۱۱ حل می‌شود و $P_n(x) = 4 + 3x + x^5$ بدست می‌آید.

۱۳. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
۰	$(x+1)^{-1}$	۱
۱	$(-1)(x+1)^{-2}$	-1
۲	$(-1)(-2)(x+1)^{-3}$	۲!
۳	$(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$	-۳!
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
n	$(-1)^n n! (x+1)^{-(n+1)}$	$(-1)^n n!$

بنابراین

$$P_n(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n$$

۱۴. با قرار دادن $2x$ به جای x در تمرین ۱۳، یا با محاسبه مستقیم مشابه تمرین ۱۳، به دست می آوریم.

$$p_n(x) = 1 - 2x + 2^2x^2 - \dots + (-1)^n 2^n x^n$$

۱۵. می توانیم بنویسیم

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

حال با توجه به مثال ۱. ۵. ۶، چند جمله ای n ام تیلور $\ln(1+x)$ در $x=0$ برابر است با

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (x \geq 1)$$

همچنین با قرار دادن $-x$ به جای x در فرمول بالا، یا با محاسبه مستقیم، چند جمله ای تیلور $\ln(1-x)$ در $x=0$ برابر با

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n}$$

به دست می آید. بنابراین چند جمله ای تیلور $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ عبارت اند از

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \dots + [(-1)^{n-1} + 1] \frac{x^n}{n} \\ &= 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{2n-1}x^{n-1}) \end{aligned}$$

۱۶. مشتقهای $f(x) = \cos x$ در دسته های چهارتایی تکرار می شوند:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f^{(4)}(x) = \cos x \\ f'(x) = -\sin x & f^{(5)}(x) = -\sin x \\ f''(x) = -\cos x & f^{(6)}(x) = -\cos x \\ f^{(3)}(x) = \sin x & f^{(7)}(x) = \sin x \end{array}$$

و به همین ترتیب، $f^{(2k-1)}(x) = (-1)^k \sin x$ و $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ بنا بر این $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ و $f^{(2k-1)}(0) = 0$ یعنی مشتقهای مرتبه فرد f در $x=0$ برابر با صفر و مشتقهای مرتبه زوج آن بین ۱ و -۱ متناوب هستند. در نتیجه ضریب x^{2k-1} در هر چند جمله ای

تیلور f برابر صفر است، و بنابراین به ازای هر x و هر n داریم $p_{2n}(x) = p_{2n-1}(x)$. بنابراین،

$$\begin{aligned} p_{2n-1}(x) &= p_{2n}(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

۱۷. چند جمله‌ای n ام مک لورن e^x برابر است با

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

با قرار دادن $-x$ به جای x در این فرمول، چند جمله‌ای مک لورن e^{-x} به صورت

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

به دست می‌آید. محاسبه مستقیم چند جمله‌ای n ام تیلور $f(x) = e^x$ نیز ساده است.

۱۸. داریم $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. چون چند جمله‌ایهای n ام مک لورن e^x و e^{-x} به ترتیب عبارت‌اند از

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad \text{و} \quad 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

پس چند جمله‌ای n ام مک لورن $\cosh x$ عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{1}{2} \left(2 + 2 \frac{x^2}{2!} + \dots + 2 \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

۱۹. با قرار دادن $3x$ به جای x در چند جمله‌ای n ام مک لورن e^x ، یا با محاسبه مستقیم، چند جمله‌ای مورد نظر به دست می‌آید:

$$p_n(x) = 1 + 3x + \frac{3^2}{2!} x^2 + \dots + \frac{3^n}{n!} x^n$$

۲۰. اگر $f(x) = e^x$ آنگاه $f\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}}$. چون $f^{(n+1)}(z) = e^z$ پس

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1}$$

که در آن z بین ۰ و x است. حال اگر $\frac{1}{4} < z < ۰$ آنگاه $۰ < e^z < ۲$ و در نتیجه

$$\left| r_n\left(\frac{1}{4}\right) \right| = \left| \frac{e^z}{(n+1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right| < \frac{1}{4^{n+1}(n+1)!}$$

محاسبه نشان می‌دهد که اگر $n \geq 4$ آنگاه $0.001 \leq \left| r_n\left(\frac{1}{4}\right) \right| \leq 0.001$. بنابراین $e^{\frac{1}{4}} \approx p_4\left(\frac{1}{4}\right)$ ولی با استفاده از $p_4(x)$ برای e^x داریم

$$p_4\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{633}{384} \approx 1/64843$$

بنابراین $e^{\frac{1}{4}} \approx 1/64843$ تقریب خواسته شده است.

۲۱. اگر $f(x) = e^{3x}$ آنگاه $f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$. در نتیجه فرمول تیلور با باقیمانده (در $x=0$) برای x^{3n} عبارت‌اند از

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{3^2}{2!} x^2 + \dots + \frac{3^n}{n!} x^n + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} e^{3z} x^{n+1}$$

که در آن z بین ۰ و x است. حال اگر $\frac{1}{4} < z < ۰$ آنگاه $۰ < e^{3z} < ۲^3$ و در نتیجه

$$\left| r_n\left(\frac{1}{4}\right) \right| = \left| \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} e^{3z} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right| < \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}$$

محاسبه نشان می‌دهد که اگر $n \geq 7$ آنگاه $0.001 > \left| r_n\left(\frac{1}{4}\right) \right|$. پس $e^{\frac{3}{4}} = f\left(\frac{1}{4}\right) \approx p_7\left(\frac{1}{4}\right)$ ولی

$$\begin{aligned} p_7\left(\frac{1}{4}\right) &= 1 + 3\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{27}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{81}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{243}{120}\left(\frac{1}{4}\right)^5 \\ &\quad + \frac{729}{720}\left(\frac{1}{4}\right)^6 + \frac{2187}{5040}\left(\frac{1}{4}\right)^7 \\ &= 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{27}{128} + \frac{81}{1280} + \frac{81}{5120} + \frac{243}{71680} \end{aligned}$$

بنابراین $e^{\frac{3}{4}} \approx 4/4805$ تقریب مورد نظر است.

۲۲. مانند مسأله نمونه‌ای ۱. ۵. ۱۷، برای تابع $f(x) = \sin x$ ، داریم

$$|f^{(n+1)}(z)| = |\cos z| \leq 1 \quad \text{یا} \quad |f^{(n+1)}(z)| = |\sin z| \leq 1$$

بنابراین

$$\left| r_n \left(\frac{\pi}{10} \right) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^{n+1}$$

محاسبه نشان می‌دهد که اگر $n \geq 3$ آنگاه $|r_n(\frac{\pi}{10})| < 0/001$. پس $\sin \frac{\pi}{10} \approx p_r(\frac{\pi}{10})$ ولی،
باتوجه به حل تمرین ۱۹،

$$p_r\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0/30884$$

در نتیجه $\sin \frac{\pi}{10} \approx 0/30884$ تقریب خواسته شده است و تا دو رقم اعشار دقیق است.

۲۳. با توجه به حل تمرین ۱۹، برای $f(x) = \cos x$ ، داریم

$$|f^{(n+1)}(z)| = |\sin z| \leq 1 \quad \text{یا} \quad |f^{(n+1)}(z)| = |\cos z| \leq 1$$

در نتیجه

$$\left| r_n \left(\frac{\sqrt{\pi}}{36} \right) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{36} \right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{36} \right)^{n+1}$$

محاسبه نشان می‌دهد که اگر $n \geq 3$ آنگاه $|r_n(\frac{\sqrt{\pi}}{36})| \leq 0/001$. پس $\cos \frac{\sqrt{\pi}}{36} \approx p_r(\frac{\sqrt{\pi}}{36})$ ولی،
باتوجه به حل تمرین ۱۹،

$$P_2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{36}\right) = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{36}\right)^2 \approx 0.8136$$

در نتیجه ۰/۸۱۳۶ تقریب خواسته شده برای $\cos \frac{\sqrt{\pi}}{36}$ است.

تمرینهای فصل ۲

تمرینهای ۱.۲

۱. صورت و مخارج کسر را بر n تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

پس این دنباله همگراست و حد آن $\frac{1}{3}$ است.

۲. صورت و مخارج کسر را بر n^2 تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7-4n^2}{3+2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{n^2}-4}{\frac{3}{n^2}+2} = \frac{0-4}{0+2} = -2$$

پس این دنباله همگرا و حد آن -2 است.

۳. دنباله داده شده یک دنباله ثابت است و در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-5) = -5$$

پس این دنباله همگرا و حد آن -5 است.

۴. ابتدا می‌نویسیم

$$\frac{(2n-1)(3n+1)}{n^2+1} = \frac{6n^2 - n - 1}{n^2 + 1}$$

حال صورت و مخرج این کسر را بر n^2 تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - n - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0 - 0 - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

پس دنباله داده شده همگرا و حد آن صفر است.

۵. صورت و مخرج کسر را بر $n > 0$ تقسیم می‌کنیم و سپس قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 9}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n} \sqrt{n^2 + 9}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{9}{n^2}}} = \frac{0}{\sqrt{1 + 0}} = 0.$$

پس دنباله داده شده به صفر همگراست.

۶. ابتدا $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ را محاسبه می‌کنیم. به این منظور صورت و مخرج کسر را بر n^2 تقسیم

می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2 + 4n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3/n}{1 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه بنابه قضیه ۲.۱.۲، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، و در نتیجه دنباله داده شده به صفر همگراست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{1}{1.0} \right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1.0^n} = 1 + 0 = 1. \quad ۷$$

در نتیجه دنباله داده شده همگرا و حد آن ۱ است.

۸. این دنباله به صورت $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$ است که بین ۰ و ۲ نوسان می‌کند. پس حد آن وجود ندارد و در نتیجه واگراست.

۹. این دنباله به ۴ همگراست.

۱۰. صورت و مخرج کسر را بر \sqrt{n} تقسیم می‌کنیم و از $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ و قضیه‌های دیگر حدی

استفاده می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

یعنی دنباله داده شده به ۱ همگراست.

۱۱. عبارت داده شده را در کسر $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ضرب می‌کنیم: داریم

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

حال صورت و مخرج این کسر را بر \sqrt{n} تقسیم می‌کنیم و از قضیه‌های حدی استفاده می‌کنیم.

داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{0}{1+1} = 0 \end{aligned}$$

پس دنباله داده شده به صفر همگراست.

۱۲. مشابه تمرین ۱۱ عمل می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که دنباله داده شده به $\frac{1}{4}$ همگراست.

۱۳. ابتدا می‌نویسیم

$$\frac{2^{n+1}}{5^{n+2}} = \frac{2^{n+1}}{5^{n+1} \times 25} = \frac{1}{25} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

بنابر مثال ۲.۱.۹، با $r = \frac{2}{5} < 1$ ، داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$. بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n+2}} = \frac{1}{25} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = \frac{1}{25} \times 0 = 0$$

در نتیجه دنباله داده شده به صفر همگراست.

۱۴. دنباله داده شده به صورت ... $(-۲۵, ۱۶, -۹, ۴, -۱)$ است و به حدی چون L میل نمی‌کند. پس این دنباله واگراست.

۱۵. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. چون $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ دستور هوییتال را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ و دنباله داده شده به صفر همگراست.

۱۶. فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{e^x}{x}$. با استفاده از دستور هوییتال، داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$

بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n} = \infty$ و دنباله داده شده واگراست.

۱۷. ابتدا می‌نویسیم

$$\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{1/3}$$

حال قرار می‌دهیم $t = 3n$ و از مثال ۱۰.۱.۲ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{1/3} \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{1/3} = e^{1/3} \end{aligned}$$

در نتیجه دنباله داده شده همگرا و حد آن $e^{1/3}$ است.

۱۸. مشابه حل تمرین ۱۷ قرار می‌دهیم $t = \frac{n}{2}$ و مثال ۱۰.۱.۲ را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

بنابراین دنباله داده شده به e^2 همگراست.

۱۹. فرض می‌کنیم که $t = 1 + \frac{1}{n}$. در نتیجه $a_n = \frac{1-t^2}{1-t}$. روشن است که $t \rightarrow 1$ اگر و تنها اگر $n \rightarrow \infty$. بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t^2}{1-t} = \lim_{t \rightarrow 1} (1+t) = 2$$

در نتیجه دنباله داده شده به ۲ همگراست.

۲۰. بنابر مثال ۱۵.۱.۲، داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1$. همچنین $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

حال بنابر قضیه ۶.۱.۲ (۳)، حد دنباله داده شده برابر است با

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} \frac{n-1}{n+1} = (1)(1) = 1$$

۲۱. صورت و مخرج کسر را بر $n > 0$ تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم. حد دنباله داده شده برابر با $\frac{1}{4}$ به دست می‌آید.

۲۲. داریم $\left| \frac{\sin^2 n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$ یا

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ ، بنابر قضیه ساندویچ، حد دنباله داده شده برابر است با

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$$

۲۳. این دنباله به صفر همگراست.

۲۴. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^n} = 0$ ، بنابر قضیه ۶.۱.۲ (۳)،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ne^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e^n} = 0 \cdot 0 = 0$$

در نتیجه دنباله داده شده به صفر همگراست.

۲۵. فرض می‌کنیم $f(x) = e^{-x}$. چون بنابر مثال ۹.۱.۲، $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x} = \infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$$

در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n} = 0$ و دنباله داده شده به صفر همگراست.

۲۶. فرض می‌کنیم $g(x) = e^x$ و $a_n = \frac{1}{n}$ چون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ، بنابر قضیه ۵.۱.۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = g(0) = e^0 = 1 \quad (\text{ب})$$

۲۷. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{x}{e^x}$ بنابر دستور هوییتال داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0$

۲۸. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و دستور هوییتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$

۲۹. این تمرین را می‌توانیم با استفاده از مثال ۱۵.۱.۲ و مسأله نمونه‌ای ۱۶.۱.۲ و قضیه حدی ۱.۲.۱ (۳) به صورت زیر حل کنیم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2} \cdot \sqrt[k]{k} = (1)(1) = 1$$

حال این تمرین را با استفاده از قضیه ۵.۱.۲ حل می‌کنیم، ابتدا می‌نویسیم

$$\sqrt[k]{2k} = (2k)^{1/k} = e^{\frac{1}{k} \ln(2k)}$$

حال فرض می‌کنیم $g(x) = e^x$ و $a_k = \frac{\ln(2k)}{k}$ بنابر دستور هوییتال داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

پس $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ و از آنجا که تابع g در 0 پیوسته است، بنابر قضیه ۲.۱.۵ (ب)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\sqrt{k}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(\sqrt{k})}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(a_k) \\ &= g(0) = e^0 = 1 \end{aligned}$$

۳۰. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} e^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} [e^x]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}} \right) = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

۳۱. مانند حل تمرین ۳۰ عمل می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln x]_{1+\frac{1}{n}}^{2-\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln \left(2 - \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \ln 2 \end{aligned}$$

زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$ و تابع $g(x) = \ln x$ در $x = 2$ پیوسته است (قضیه ۲.۱.۵ (ب) را به کار برده‌ایم).

۳۲. فرض می‌کنیم

$$f(x) = \left(1 + \frac{0.5}{x} \right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{2 \cdot x} \right)^{2 \cdot x} \right]^{\frac{1}{2}}$$

حال قرار می‌دهیم $t = 20x$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ را به کار می‌بریم. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right]^{\frac{1}{20}} = e^{\frac{1}{20}} = e^{0.05}$$

در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.05}{n}\right)^n = e^{0.05}$

۳۳. جمله‌های این دنباله عبارت‌اند از

$$\frac{2}{1!}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \dots$$

یا $\dots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots, 2, 2$. ملاحظه می‌کنیم که این دنباله ظاهراً نافزایشی است. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم که به ازای هر $n \geq 1$ ، $a_n \geq a_{n+1}$ ، یعنی

$$\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

که معادل است با نامساوی $n! \geq 2^n(n+1)$ یا $n! \geq 2^n \cdot 2 \cdot n!$ یا $(n+1) \cdot n! \geq 2^n \cdot 2 \cdot n!$ یا $n+1 \geq 2$ که به ازای هر $n \geq 1$ برقرار است. در نتیجه دنباله داده شده یکنوا نافزایشی است. همچنین چون به ازای هر $n \geq 1$

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} \leq 2$$

پس دنباله داده شده کراندار نیز هست و در نتیجه بنابر قضیه ۲.۱.۲، همگراست.

۳۴. برای بررسی یکنوا بودن این دنباله، فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{3x-1}{4x+5}$ چون

$$f'(x) = \frac{19}{(4x+5)^2} > 0$$

پس دنباله داده شده افزایشی است. همچنین چون به ازای هر $n \geq 1$ ، $3n-1 < 4n+5$ ، پس

$$\frac{3n-1}{4n+5} < 1$$

بنابراین دنباله داده شده یکنوا و کراندار است و بنابر قضیه ۲.۱.۲ همگراست.

۳۵. روشن است که

$$0 < \frac{e^n}{1+e^n} < 1$$

در نتیجه دنباله داده شده کراندار است. با نوشتن چند جمله اول این دنباله، حدس می‌زنیم که افزایشی است. برای اثبات این مطلب مانند حل تمرین ۳۴ عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \text{ حال چون}$$

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

پس تابع f در نتیجه دنباله داده شده افزایشی است. البته می‌توانیم بگوییم که به ازای $n \geq 1$

$$\frac{e^n}{1+e^n} < \frac{e^{n+1}}{1+e^{n+1}}$$

اگر و تنها اگر

$$e^n(1+e^{n+1}) < e^{n+1}(1+e^n)$$

$$1+e^{n+1} < e(1+e^n) \quad \text{یا}$$

$$1+e^{n+1} < e+e^{n+1} \quad \text{یا}$$

یا $e < 1$ که گزاره‌ای درست است. حال از این مطلب نتیجه بگیریم که دنباله داده افزایشی است. در صورت از قضیه ۲. ۱. ۲۷ نتیجه می‌گیریم که دنباله (یکنوا و کراندار) داده شده همگراست. ۳۶. روشن است که به ازای هر $n \geq 1$,

$$0 < \frac{e^n}{1+e^{2n}} < 1$$

در نتیجه دنباله داده شده کراندار است. با نوشتن چند جمله اول این دنباله، حدس می‌زنیم که کاهشی است. برای اثبات این مطلب مشابه تمرین ۳۵ می‌توانیم به دو روش عمل کنیم. در روش اول فرض می‌کنیم که

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

در نتیجه

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{2x} - 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} < 0.$$

و دنباله داده شده کاهشی است. اثبات کاهشی بودن این دنباله به روش دوم را به عهده شما می‌گذاریم. بنابراین دنباله داده شده یکنوا و کراندار بوده و در نتیجه همگراست.

۳۷. روشن است که چون به ازای هر $n \geq 1$ ، $n < 2^n$ ، پس $\frac{n}{2^n} < 1$ و در نتیجه دنباله داده شده کراندار است. بانوشتن چند جمله اول این دنباله، حدس می‌زنیم که غیرافزایشی است. برای اثبات این مطلب می‌توانید از مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{2^x}$ استفاده کنید یا نشان دهید که به ازای هر $n \geq 1$ ، $\frac{n}{2^n} \geq \frac{n+1}{2^{n+1}}$. این نامساوی معادل است با $2^n(n+1) \geq 2^{n+1}n$ یا $2n \geq n+1$ که به ازای $n \geq 1$ همواره درست است. در نتیجه دنباله داده شده یکنوا و کراندار است. از این رو، بنابر قضیه ۲.۱.۲، این دنباله همگراست.

۳۸. روشن است که چون به ازای $n \geq 1$ ، $1 + \frac{1}{n} \leq 2$ ، پس

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \geq 4$$

یعنی دنباله داده شده کراندار است. همچنین، چون $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1}$ ، پس

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2$$

و در نتیجه دنباله داده شده کاهشی است. بنابراین این دنباله یکنوا و کراندار بوده و در نتیجه همگراست.

۳۹. روشن است که به ازای هر $n \geq 1$ ، $2 - \frac{1}{n} < 2$ و در نتیجه دنباله داده شده کراندار است. این دنباله افزایشی است. زیرا

$$2 - \frac{1}{n} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

معادل است با $-\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{n+1}$ یا $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ که به ازای هر $n \geq 1$ درست است. در نتیجه نشان داده‌ایم که دنباله داده شده یکنوا و کراندار است. بنابراین دنباله داده شده همگراست.

۴۰. فرض می‌کنیم $f(x) = \lg \frac{\pi}{2x+1}$ در نتیجه

$$f'(x) = \frac{-2\pi}{(2x+1)^2} \sec^2 \frac{\pi}{2x+1} < 0.$$

در نتیجه تابع f و بنابراین دنباله داده شده یکنوا کاهشی است. همچنین چون به ازای هر $n \geq 1$,

$$\text{tg } \frac{\pi}{2n+1} \leq \text{tg } \frac{\pi}{3} < 2 \quad \text{پس } \frac{\pi}{2n+1} \leq \frac{\pi}{3}$$

در نتیجه، دنباله داده شده یکنوا و کراندار است و بنابراین همگراست.

تمرینهای ۲.۲

۱. سری داده شده عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$$

پس $s_1 = 1$ ، $s_2 = 1 + 1 = 2$ ، $s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$ و به همین ترتیب $s_n = n$. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ ، پس سری داده شده واگراست. (البته چون $a_n = 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$ ، پس بنابر آزمون واگرایی نیز می توان گفت که این سری واگراست).

۲. داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

پس $s_1 = 1$ ، $s_2 = 1 + 2 = 3$ ، $s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ و به همین ترتیب

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$ و سری داده شده واگراست. (البته چون $a_n = n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \neq 0$ ، بنابر آزمون واگرایی نیز می توان گفت که سری داده شده واگراست).
۳. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}} = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \dots + \frac{3}{4^{n-1}} + \dots$$

پس $s_1 = 3$ ، $s_2 = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ ، $s_3 = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{63}{16}$ ، و به طور کلی، بنابر فرمولی که در اثبات قضیه ۱۲.۲.۲ برای s_n پیدا کردیم،

$$S_n = 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 4 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (1)$$

در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] = 4 - 0 = 4$$

بنابراین سری داده شده همگرا و مجموع آن ۴ است.

متذکر می‌شویم که در اینجا $a_n = \frac{3}{4^{n-1}}$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4^{n-1}} = 0$$

و چون این سری یک سری هندسی با $a=3$ و $r=\frac{3}{4} < 1$ است، همگرا بوده و مجموع آن برابر است با

$$S = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4 \quad (2)$$

که با جواب به دست آمده در بالا مطابقت دارد.

۴. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} 3^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \dots$$

در نتیجه $S_1 = \frac{1}{3}$ ، $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ ، $S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{19}{24}$ ، چون

$$a_n = 2^{-n} 3^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

سری داده شده یک سری هندسی با $a = \frac{1}{3}$ و $r = \frac{2}{3}$ است. در نتیجه

$$S_n = \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \quad (۳)$$

$$= \frac{2}{3} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right]$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right] = \infty$$

در نتیجه سری داده شده واگراست (البته چون $r > 1$ ، بنابر قضیهٔ سریهای هندسی نیز می‌توان گفت که این سری واگراست).

۵. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

پس $S_1 = 1$ ، $S_2 = 1 - 1 = 0$ و $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$ به همین ترتیب

$$S_n = \begin{cases} 0 & , \text{ زوج } n \\ 1 & , \text{ فرد } n \end{cases}$$

چون دنبالهٔ مجموعهای جزئی یعنی (S_n) بین ۱ و ۰ نوسان می‌کند، $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ وجود ندارد و

در نتیجه سری داده شده واگراست. البته چون

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & , \text{ زوج } n \\ -1 & , \text{ فرد } n \end{cases}$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ؛ در واقع این حد وجود ندارد. در نتیجه بنابر آزمون واگرایی نیز می‌توان گفت

که سری داده شده واگراست.

۶. داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{n}{n+1} + \dots$$

$$S_1 = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} = -\ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = -\ln 3, S_1 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

پس
و

$$S_2 = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} = -\ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4$$

و به همین ترتیب، با توجه به این مطلب که $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ داریم،

$$S_n = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{n}{n+1}$$

$$= (0 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \dots + (\ln(n-1) - \ln n) + (\ln n - \ln(n+1))$$

$$= 0 - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$$

حال چون $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = -\infty$ سری داده شده واگراست. توجه کنید که در این

تمرین چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n}{n+1} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \ln 1 = 0$$

آزمون واگرایی به کار نمی آید.

$$۷. \text{ چون } \frac{2}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5}$$

در نتیجه

$$S_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{4}{9}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{13} \right) = \frac{6}{13}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \right]$$

به همین ترتیب

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{2n}{4n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2} \quad \text{چون}$$

سری داده شده به $\frac{1}{2}$ همگراست.

۸. داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \dots$$

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{پس}$$

$$S_2 = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{26}{27}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{4^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

به همین ترتیب $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1$$

بنابراین سری داده شده همگرا و مجموع آن ۱ است.
۹. چون بنابر مثال ۹.۱.۲،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{5} \right)^n = 0$$

آزمون واگرایی به کار نمی‌آید. یعنی با استفاده از این آزمون نمی‌توان گفت که سری داده شده واگراست یا همگراست. البته این سری عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n = -\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots$$

که یک سری هندسی با $a = -\frac{1}{5}$ و $r = -\frac{1}{5}$ است که همگراست و مجموع آن عبارت است از

$$S = \frac{-\frac{1}{5}}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{6}{5}} = -\frac{1}{6}$$

۱۰. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 \neq 0$ ، به یقین می توان گفت که سری داده شده واگراست.

۱۱. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \neq 0$$

در نتیجه، سری داده شده واگراست.

۱۲. چون $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+1) = \infty$ ، بنا به دستور هوییتال داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty$$

در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(n+1)} \neq 0$ و سری داده شده واگراست.

۱۳. چون به ازای هر عدد طبیعی n ، $\sin n\pi = 0$ ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$$

پس نمی توان گفت که سری داده شده واگراست یا همگراست. البته چون

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$$

پس در واقع سری داده شده همگراست و مجموع آن صفر است.

۱۴. اگر $x \rightarrow \infty$ آنگاه $t = \frac{1}{x}$ به صفر میل می کند. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1 \neq 0$ و در نتیجه سری داده شده واگراست.

۱۵. چون $\sqrt{2} > 1$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n = \infty$ ؛ پس این حد مخالف صفر است. در نتیجه بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۱۶. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ و بنابر پیوسته بودن تابع لگاریتمی در $x=1$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = \ln 1 = 0$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1 \cdot 0 = 0$$

در نتیجه آزمون واگرایی به کار نمی‌آید و نمی‌توان گفت که سری داده شده واگراست.

۱۷. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5(\frac{3}{\sqrt{5}})^n = 5(\frac{3}{\sqrt{5}}) + 5(\frac{3}{\sqrt{5}})^2 + \dots$$

که یک سری هندسی با $a = \frac{15}{\sqrt{5}}$ و $r = \frac{3}{\sqrt{5}}$ است. چون $r < 1$ ، این سری هندسی همگراست و مجموع آن برابر است با

$$S = a \frac{1}{1-r} = \frac{\frac{15}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{3}{\sqrt{5}}} = \frac{15}{4}$$

۱۸. این سری به صورت زیر است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\sqrt{5}}{3})^n = \frac{\sqrt{5}}{3} + (\frac{\sqrt{5}}{3})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{3})^3 + \dots$$

که یک سری هندسی با $a = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$ است. چون $r > 1$ ، سری داده شده واگراست.

۱۹. این سری مجموع دوسری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ است. سری اول عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

که یک سری هندسی با $a = \frac{1}{4}$ و $r = \frac{1}{4}$ است. در نتیجه این سری همگراست و مجموع آن برابر است با

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

همچنین در مثال ۵.۲.۲ نشان دادیم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

در نتیجه، بنابر قضیه ۲۱.۲.۲ (الف)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

۲۰. در حل تمرین ۱۹ دیدیم که سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ همگراست. از آنجا که سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، بنابر قضیه ۲۴.۲.۲ (الف)، سری داده شده واگراست.

۲۱. داریم

$$\frac{2^n + 5^n}{2^n 5^n} = \frac{2^n}{2^n 5^n} + \frac{5^n}{2^n 5^n} = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n}$$

در سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ ، $a = 1$ و $r = \frac{1}{5}$. پس این سری همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

به همین ترتیب

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^n 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{5}{4} + 2 = \frac{13}{4}$$

۲۲. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{5^n}{2^{n+2}} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{2}\right)^n$$

که بنابر مثال ۹.۱.۲ این حد وجود ندارد. در نتیجه بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۲۳. می‌نویسیم

$$0/9990000 = 0/9 + 0/09 + 0/009 + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots$$

که یک سری هندسی با $a = 0/9$ و $r = 0/1$ است. چون $r < 1$ ، این سری همگراست و مجموع آن برابر است با

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{0/9}{1-0/1} = \frac{0/9}{0/9} = 1$$

در نتیجه $0/999\dots = 1$.

۲۴. می‌نویسیم

$$0/7272720000 = 0/72 + 0/0072 + 0000 + \frac{72}{100^n} + \dots$$

که یک سری هندسی با $a = 0/72$ و $r = \frac{1}{100}$ است. مجموع این سری هندسی همگرا برابر است با

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{0/72}{1-0/01} = \frac{0/72}{0/99} = \frac{8}{11}$$

۲۵. چون $0/999\dots = 1 + 0/999\dots = 1 + 0/999\dots = 1 + 1 = 2$ پس

۲۶. می‌نویسیم $0/2727\dots = 12 + 0/02727\dots = 12 + 0/027 + \dots$ حال

$$0/02727\dots = 0/027 + 0/00027 + \dots$$

که یک سری هندسی با $a = 0.027$ و $r = 0.01$ است. در نتیجه

$$0.02727... = \frac{0.027}{1 - 0.01} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}$$

$$12.02727... = 12 + \frac{3}{110} = \frac{1323}{110}$$

۲۷ می نویسیم $2.056123123... = 2.056 + 0.00123123... = 2.056 + \frac{123}{99900}$

$$0.00123123... = 0.00123 + 0.000000123 + \dots$$

که یک سری هندسی با $a = 0.00123$ و $r = 0.001$ است. در نتیجه مجموع این سری همگرا برابر است با

$$\frac{a}{1-r} = \frac{0.00123}{1-0.001} = \frac{123}{99900} = \frac{41}{33300}$$

بنابراین عدد داده شده برابر است با

$$2 + \frac{56}{100} + \frac{41}{33300} = \frac{85289}{33300}$$

$$0.0521000... = \frac{521}{10000}$$

۲۹. سری داده شده عبارت است از

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

که یک سری هندسی با $a = 1$ و $r = -t$ است. چون بنا به فرض مسأله $|t| < 1$ ، $|r| = |-t| = |t| < 1$ ، سری داده شده همگراست و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t}$$

۳۰. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

که یک سری هندسی با $a=1$ و $r=-t^2$ است. چون بنا به فرض مسأله، $-1 < t < 1$ و در نتیجه $t^2 < 1$ ، پس $|r| = t^2 < 1$. در نتیجه سری داده شده همگراست و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2}$$

تمرینهای ۳.۲

۱. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. تابع f به ازای $x \geq 1$ مثبت است و چون $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} < 0$.

پس f کاهشی نیز هست. همچنین، چون به ازای $x \geq 1$ ، $f'(x)$ وجود دارد، f پیوسته است. حال

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t (x+1)^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x+1} \right]_1^t \\ &= -\frac{1}{t+1} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4} \right] = -\frac{1}{t+1} \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

یعنی $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگراست. در نتیجه بنا بر آزمون انتگرال، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

نیز همگراست.

همگرایی این سری را می‌توان با مقایسه با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ نیز ثابت کرد. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ که

یک سری p با $p=2 > 1$ است، همگراست. چون به ازای $n \geq 1$ ، $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n+1)^2}$ ، بنا بر آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که سری داده شده نیز همگراست.

۲. فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{1}{(3+2x)^2}$ و مانند حل تمرین ۱، آزمون انتگرال را به کار می‌بریم. البته این سری را می‌توانیم با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، p که همگراست مقایسه کنیم. چون به ازای $n \geq 1$ ، $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(3+2n)^2}$ ، سری داده شده نیز همگراست.

۳. این سری را با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ مقایسه می‌کنیم. این سری یک سری p با $p = \frac{3}{2} > 1$ است و

در نتیجه همگراست. چون به ازای $n \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+2}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۴. این سری را با سری (همساز) واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مقایسه می‌کنیم. توجه می‌کنیم که چون به ازای $n \geq 1$ ، $\frac{1}{4n+5} < \frac{1}{n}$ ، آزمون مقایسه اول به کار نمی‌آید. ولی چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{4n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{n} = 4 \neq 0.$$

بنابر آزمون مقایسه حدی، سری داده شده نیز واگراست.

حال با استفاده از آزمون انتگرال نیز این سری را حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{1}{4x+5}$. به آسانی بررسی می‌شود که تابع f در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند. چون

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{4x+5} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} \ln(4x+5) \right]_1^t \\ &= \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln(4t+5) - \ln 9) = \infty \end{aligned}$$

بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده نیز واگراست.

۵. می‌خواهیم آزمون انتگرال را به کار ببریم. فرض کنیم $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. تابع f به ازای $x > 1$ مثبت است. چون به ازای $x \geq 3$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0.$$

تابع f در بازه $[3, \infty)$ کاهشی است. همچنین، چون $f'(x)$ در بازه $(3, \infty)$ وجود دارد، f در این بازه پیوسته نیز هست. در نتیجه f در بازه $(3, \infty)$ در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند. چون

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_2^t \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[(\ln t)^2 - (\ln 2)^2 \right] = \infty \end{aligned}$$

در محاسبه این انتگرال از جانشینی $u = \ln x$ استفاده شده است. بنابر آزمون انتگرال، سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

همگرایی یا واگرایی آن مؤثر نیست، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ نیز واگراست.

۶. فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. تابع f به ازای $x \geq 2$ مثبت است. با مشتقگیری از f

ملاحظه می‌کنیم که f به ازای $x \geq 2$ پیوسته و کاهشی است. چون

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\ln x} \right]_2^t \quad (u = \ln x \text{ جانشینی}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{\ln t} - \sqrt{\ln 2}) = \infty \end{aligned}$$

در نتیجه، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده واگراست.

۷. سری داده شده را با سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ مقایسه می‌کنیم. چون قدرنسبت سری دوم یعنی

$$r = \frac{1}{e} \text{ کوچکتر از } 1 \text{ است، این سری همگراست. حال از آنجا که به ازای } n \geq 1,$$

$$\frac{1}{e^{n+1}} \leq \frac{1}{e^n}$$

بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۸. فرض کنیم $f(x) = \frac{\arctg x}{1+x^2}$ روشن است که به ازای $x \geq 1$ ، $f(x)$ مثبت است. همچنین

داریم

$$f'(x) = \frac{1 - 2x(\operatorname{arctg} x)}{(1+x^2)^2}$$

به ازای $x \geq 1$ ، $\operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{4}$ ، پس $2x(\operatorname{arctg} x) \geq \frac{\pi}{2}$ یا $-2x(\operatorname{arctg} x) \leq -\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه $f'(x) < 0$ ، $x \geq 1$ و تابع f کاهشی است. به علاوه، چون به ازای $x \geq 1$ ، $f'(x)$ وجود دارد، f پیوسته است. حال با جانشینی $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ ، $u = \operatorname{arctg} x$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right]_1^t \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

یعنی $\int_1^{\infty} f(x) dx$ وجود دارد و در نتیجه، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده همگراست. چون ۹.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} = 1$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$. از آنجا که سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، بنابر آزمون مقایسه حدی، سری داده شده نیز واگراست.

۱۰. فرض کنیم $f(x) = xe^{-x}$. روشن است که به ازای $x \geq 1$ ، $f(x)$ مثبت است. با مشتقگیری از f ملاحظه می‌کنیم که f در $(1, \infty)$ پیوسته و کاهشی است. بنابراین تابع f در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند. حال به روش انتگرالگیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t xe^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-x}(x+1)]_1^t \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t+1}{e^t} - \frac{2}{e} \right) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1}{e^t} + \frac{2}{e} \\ &= 0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e} \quad (\text{دستور هوییتال به کار رفته است}) \end{aligned}$$

در نتیجه، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده همگراست.

۱۱. روشن است که به ازای $n \geq 1$ ، $\frac{1}{n^3 n} \leq \frac{1}{3^n}$. از آنجا که سری هندسی $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۱۲. به ازای $n \geq 1$ ، $\frac{n}{e^n} < \frac{n}{10^n}$. چون بنابر حل تمرین ۱۰، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۱۳. این سری را با سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ مقایسه می‌کنیم. می‌دانیم که سری اخیر همگراست (چرا؟). حال چون $1 \leq \cos n \leq -1$ ، به ازای $n \geq 3$

$$\frac{3 + \cos n}{n^2 + 4} \leq \frac{4}{n^2 + 4} < \frac{4}{n^2}$$

در نتیجه، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۱۴. این سری را با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ که یک سری p با $p=5 > 1$ و در نتیجه همگراست، مقایسه می‌کنیم. چون به ازای $n \geq 1$

$$\frac{1}{n^5 + n^2 + 3} < \frac{1}{n^5}$$

سری داده شده نیز همگراست.

۱۵. این سری را با سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

مقایسه می‌کنیم. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4}{n^2} = 1 \neq 0.$$

و از آنجا که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ همگراست (چرا؟) بنابر آزمون مقایسه حدی، سری داده شده نیز همگراست.

۱۶. با نگهداشتن $3n^5$ در صورت و n^8 در مخرج جمله عمومی سری داده شده، کسر $\frac{3n^5}{n^8} = \frac{3}{n^3}$ به دست می آید. پس سری داده شده را با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ مقایسه می کنیم. چون سری اخیر یک سری p با $p = 3 > 1$ است، همگراست. حال، چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 2n^2 + 2}{n^8 - n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 2n^2 + 2}{n^8 - n^2 + 2} = 3 \neq 0.$$

بنابر آزمون مقایسه حدی، سری داده شده نیز همگراست.
۱۷. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

از آنجا که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست (چرا؟)، بنابر آزمون مقایسه حدی، سری داده شده نیز همگراست.

۱۸. آزمون انتگرال را برای $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ به کار می بریم. نشان دهید که تابع f در شرایط آزمون انتگرال صدق می کند. حال داریم

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{1}{x(\ln x)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{\frac{1}{2}}^t \quad (u = \ln x \text{ جانشینی}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

یعنی $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x) dx$ همگراست. در نتیجه بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده نیز همگراست.

۱۹. این سری را با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^3}}$ مقایسه می‌کنیم. سری اخیر همگراست (چرا؟). حال چون به ازای $n \geq 1$,

$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{\sqrt{n^3}}$$

سری داده شده نیز همگراست.

توجه کنید که آزمون مقایسه حدی را نیز می‌توان به کار برد. بنابر دستور هوپیتال، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{2\sqrt{x}}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه، بنابر آزمون مقایسه حدی، سری داده شده همگراست.

۲۰. با توجه به راهنمایی تمرین ۱۹، به ازای $n \geq 2$ داریم $\ln n \leq 2\sqrt{n}$ و در نتیجه $(\ln n)^4 \leq 4n$.

پس

$$\frac{1}{(\ln n)^4} \geq \frac{1}{4n}$$

حال چون سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ، و در نتیجه سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n}$ واگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز واگراست.

۲۱. چون $e = 2 \ln e = 2 \ln e^2 = \ln 9 > \ln e^2 = 2$ ، به ازای $n \geq 9$ ، $\ln n > 2$. از این رو به ازای $n > 9$ ،

$$\frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{2^n}$$

حال چون سری هندسی $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ و در نتیجه سری داده شده نیز همگراست.

۲۲. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0.$$

این حد را به صورت زیر محاسبه کرده ایم: فرض می‌کنیم $y = x^{\frac{1}{x}}$. پس $\ln y = \frac{1}{x} \ln x$. حال بنابه دستور هوپیتال داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

پس $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0 = 1$ و در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. از این رو، بنابر آزمون مقایسه حدی، چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، سری داده شده نیز واگراست.

۲۳. چون $\frac{(2n)^2}{(2n^2)^2} = \frac{2}{n^2}$ ، سری داده شده را با سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ مقایسه می‌کنیم. از آنجا که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+1)^2}{(2n^2+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2n+1)^2}{(2n^2+1)^2} = 2 \neq 0.$$

بنابر آزمون مقایسه حدی، سری داده شده نیز همگراست.

۲۴. چون به ازای $n \geq 1$ ، $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ و از آنجا که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۲۵. چون $\cos n$ بین ۱ و -۱ است، به ازای $n \geq 1$ داریم $3^n - \cos n > 2^n$. از این رو به ازای $n \geq 1$ ، $\frac{1}{3^n - \cos n} < \frac{1}{2^n}$. حال چون سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۲۶. چون $\frac{5n}{n \cdot 3^n} = \frac{5}{3^n}$ ، سری داده شده را با سری هندسی همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ مقایسه می‌کنیم. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n+3}{n \cdot 3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{n} = 5 \neq 0.$$

بنابر آزمون مقایسه حدی، سری داده شده همگراست.

۲۷. چون به ازای $n \geq 1$ ، $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست (چرا؟)، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۲۸. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ یک سری p با $p = \frac{1}{2} < 1$ است، واگراست. حال به ازای $n \geq 1$ داریم

$$\frac{|\operatorname{cosec} n|}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

پس بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز واگراست.

۲۹. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ همگراست (چرا؟) و به ازای $n \geq 1$,

$$\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۳۰. فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$. در این صورت اگر $x \geq 2$ آنگاه

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)^p + p(\ln x)^{p-1}}{x^2(\ln x)^{2p}} < 0.$$

بنابراین تابع f به ازای $x \geq 3$ مثبت، کاهشی، و پیوسته است. اگر $p \neq 1$ آنگاه

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^p} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{(p-1)(\ln x)^{p-1}} \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{(p-1)(\ln t)^{p-1}} + \frac{-1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}} \right] \end{aligned}$$

چون به ازای $p > 1$ ، $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{(p-1)(\ln t)^{p-1}} = 0$ و به ازای $p < 1$ ،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{(p-1)(\ln t)^{p-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln t)^{1-p}}{1-p} = \infty$$

پس $\int_2^{\infty} f(x) dx$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p < 1$ واگراست. در نتیجه بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده، به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p < 1$ واگراست. حال فرض کنیم $p = 1$. در این صورت داریم

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln(\ln x)]_2^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)] = \infty$$

یعنی سری داده شده به ازای $p = 1$ نیز واگراست.

تمرینهای ۴.۲

۱. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ و به ازای هر $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2(n+1)+1} < \frac{1}{2n+1}$$

دنباله $(\frac{1}{2n+1})$ کاهشی است و در نتیجه بنابر آزمون سریهای متناوب، سری داده شده همگراست.

۲. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n+1} = \frac{2}{5} \neq 0$ ، بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۳. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2+3n+5} = 0$ و به ازای $n \geq 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+2}{(n+1)^2+3(n+1)+5}}{\frac{n+2}{n^2+3n+5}} = \frac{n^2+6n^2+14n+15}{n^2+7n^2+19n+18} < 1$$

دنباله $(\frac{2n+1}{5n+1})$ کاهشی است و در نتیجه بنابر آزمون سریهای متناوب، سری داده شده همگراست.

۴. داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ روشن است که به ازای هر $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = a_n$$

در نتیجه سری داده شده بنابر آزمون سریهای متناوب همگراست.

۵. فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ بنابه دستور هوییتال، داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} = \infty$ و در نتیجه سری داده شده واگراست.

۶. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{e^x}{x^4}$ و با چهاربار به کار بردن دستور هوییتال نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4} = \infty$. در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^4} \neq 0$ و سری داده شده واگراست.

۷. فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. بنابه دستور هوییتال، داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

همچنین چون به ازای $x \geq 3$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0.$$

پس به ازای $x \geq 3$ ، $f(x)$ کاهشی است. یعنی به ازای هر $n \geq 3$ ، دنباله $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ کاهشی است. در نتیجه، بنابر آزمون سریهای متناوب، سری $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ و بنابراین سری داده شده همگراست.

۸. به آسانی دیده می‌شود که $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{2n+5}} = 0$ ، حال فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+5}}$ داریم

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{2x+5}) - \sqrt[3]{x}}{(2x+5)^2} = \frac{5 - 4x}{3(2x+5)^2}$$

که به ازای $x \geq 2$ منفی است. در نتیجه دنباله $\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{2n+5}}\right)$ کاهشی است. بنابراین سری متناوب $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{2n+5}}$ در نتیجه سری داده شده همگراست.

۹. قرار می‌دهیم $f(x) = \frac{1+4^x}{1+3^x}$. بنابه دستور هوییتال داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+4^x}{1+3^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln 4) 4^x}{(\ln 3) 3^x} \\ &= \frac{\ln 4}{\ln 3} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \infty \end{aligned}$$

در نتیجه سری داده شده واگراست.

۱۰. چون بنابه دستور هوییتال

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln 3) 3^x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln 3)^2 3^x}{2} = \infty\end{aligned}$$

سری داده شده واگراست.

۱۱. به آسانی می‌توان نشان داد که سری متناوب داده شده همگراست. بنابه قضیه ۶.۴.۲، مجموع این سری با خطای کمتر از ۰/۰۱ برابر S_n است اگر $a_{n+1} < 0/01$ ، یعنی اگر

$$a_{n+1} = \frac{1}{[\gamma(n+1)]!} = \frac{1}{(2n+2)!} < 0/01$$

اگر قرار دهیم $n=2$ آنگاه $a_3 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} = 0/001 < 0/01$ و در نتیجه تقریب خواسته شده برابر است با

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} \approx S_2 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \approx 0/4583$$

۱۲. سری متناوب داده شده همگراست. مجموع آن با خطای کمتر از ۰/۰۱ برابر با S_n است اگر

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^5} < 0/01$$

اگر قرار دهیم $n=2$ ، تقریب خواسته شده برابر است با

$$S_2 = \frac{1}{1^5} - \frac{1}{2^5} = 1 - \frac{1}{32} \approx 0/96875$$

۱۳. تقریب خواسته شده برابر است با S_n اگر

$$a_{n+1} = \frac{1}{10^{n+1} + 1} < 0/01$$

که معادل است با

$$10^{n+1} > 799 \quad \text{یا} \quad \frac{10^{n+1} + 1}{1} > 100$$

اگر قرار دهیم $n=2$ تقریب موردنظر برابر است با

$$S_7 = \frac{\wedge}{10+1} - \frac{\wedge}{100+1} \approx 0/648$$

۱۴. در اینجا تقریب خواسته شده برابر با S_n است اگر

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{5^n} < 0/01$$

اگر قرار دهیم $n=3$ تقریب موردنظر برابر است با

$$S_3 = \frac{2}{5} - \frac{3}{25} + \frac{4}{125} \approx 0/312$$

تمرینهای ۵.۲

۱. با استفاده از آزمون انتگرال می توان نشان داد که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$$

واگراست. از طرفی بنابر آزمون سریهای متناوب، سری متناوب داده شده همگراست. در نتیجه سری داده شده همگرای مشروط است.

۲. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n(3n+4)}{3^{n+1}(3n+1)} = \frac{1}{3} < 1$$

بنابر آزمون نسبت، سری داده شده همگرای مطلق است.

۳. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n5^{n+1}3^{n+1}}{(n+1)5^n 3^{n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{3(n+1)} = \frac{5}{3} > 1 \end{aligned}$$

در نتیجه، بنابر آزمون نسبت، سری داده شده واگراست.

۴. در اینجا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3} < 1$$

و در نتیجه، بنابر آزمون نسبت، سری داده شده همگرای مطلق است.

۵. چون

$$\left| \frac{\sin n}{n^2+1} \right| = \frac{|\sin n|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست (چرا؟)، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده همگرای مطلق است.

۶. بنابر حل تمرین ۳۰ از بخش ۳.۲، یا به طور مستقیم با استفاده از آزمون انتگرال، سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ همگراست. در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است.

۷. فرض می‌کنیم که $y = \frac{1}{x} = x^{-\frac{1}{x}}$. در نتیجه $\ln y = -\frac{1}{x} \ln x$. چون، بنابه دستور هویتال،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \ln x = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

پس $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \neq 0$. در نتیجه، بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۸. قرار می‌دهیم $y = (\ln x)^{-\frac{1}{x}}$ و مشابه حل تمرین ۷ عمل می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{-\frac{1}{x}} = 1 \neq 0$. در نتیجه، بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۹. چون به ازای $n \geq 1$ ، $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{n^2+2n} < \frac{1}{n^2}$ ، و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ نیز همگراست. یعنی سری داده شده همگرای مطلق است.

۱۰. آزمون نسبت را به کار می‌بریم. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)(2n+4)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+5} = \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است.

۱۱. چون

$$\left| \frac{\cos n}{n^3} \right| = \frac{|\cos n|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ همگراست (چرا؟)، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده همگرای مطلق است.

۱۲. آزمون نسبت را به کار می‌بریم. چون

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\sqrt[n+2]} \cdot \frac{\sqrt[n+1]}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n+2]} = \infty \end{aligned}$$

سری داده شده واگراست.

۱۳. چون به ازای هر عدد طبیعی n ، $\sin \pi n = 0$ ، سری داده شده یک سری صفر است و در نتیجه همگرا (ی مطلق) است.

۱۴. چون به ازای هر $n \geq 1$ ، $|1 - 2 \sin n| \leq 3$ ،

$$\left| (-1)^n \frac{1 - 2 \sin n}{n^3} \right| \leq \frac{3}{n^3}$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3}$ همگراست (چرا؟)، سری داده شده همگرای مطلق است.
۱۵. در اینجا داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به نتیجه ۱۷.۵.۲، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ ،

۱۶. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{\sqrt[n+2]} \cdot \frac{n^n}{x^{\sqrt[n+2]}}}{(n+1)^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{\sqrt[n+2]} n^n}{(n+1)^n (n+1)} \right| \\ &= x^{\sqrt[n+2]} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \right] \end{aligned}$$

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = e^{-1}$$

و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = 0$$

و در نتیجه به ازای هر x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$$

بنابراین، با توجه به نتیجه ۱۷.۵.۲، به ازای هر x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n^n} = 0$$

۱۷. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot \gamma^n}{\gamma^{n+1} \cdot x^n} \right| = \frac{|x|}{\gamma}$$

بنابر نتیجه ۱۷.۵.۲، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\gamma^n} = 0$ اگر داشته باشیم

$$|x| < \gamma \quad \text{یا} \quad \frac{|x|}{\gamma} < 1$$

۱۸. چون

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^\gamma}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^\gamma} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^\gamma}{(n+1)^\gamma} = 0 < 1 \end{aligned}$$

بنابر نتیجه ۱۷.۵.۲، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\gamma}{n!} = 0$

تمرینهای فصل ۳

تمرینهای ۱.۳

۱. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+5} \cdot \frac{n+4}{x^n} \right| = |x|$$

در نتیجه سری داده شده همگرا (ی مطلق) است اگر $|x| < 1$ و واگراست اگر $|x| > 1$. یعنی شعاع همگرایی این سری برابر با $r=1$ است. همگرایی سری را به ازای مقادیر $x = \pm 1$ می‌آزماییم. اگر $x=1$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

که از حذف سه جمله اول سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به دست می‌آید. در نتیجه، چون سری همساز واگراست، این سری نیز واگراست. اگر $x=-1$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+4}$$

که از حذف سه جمله اول سری همساز متناوب به دست می‌آید و در نتیجه همگراست. بنابراین بازه همگرایی این سری داده شده برابر با $(-1, 1)$ است.

۲. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^n} \right| = |x|$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|x| < 1$ و واگراست اگر $|x| > 1$. یعنی شعاع همگرایی آن برابر با $r=1$ است. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر انتهایی یعنی $x = \pm 1$

می‌آزماییم. اگر $x = 1$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

که یک سری p با $p = 2 > 1$ و در نتیجه همگراست. اگر $x = -1$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

چون سری قدر مطلقهای جمله‌های این سری یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، این سری همگرا (ی مطلق) است. بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-1, 1)$ است.
۳. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2 x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 |x|}{n^2 \cdot 3} = \frac{|x|}{3}$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $\frac{|x|}{3} < 1$ یا $|x| < 3$ و واگراست اگر $|x| > 3$. پس شعاع همگرایی این سری برابر است با $r = 3$. حال همگرایی این سری را به ازای $x = \pm 3$ می‌آزماییم. با قرار دادن این مقادیر x در سری توانی داده شده، سریهای

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

به دست می‌آیند. چون جمله‌های عمومی این دو سری به صفر میل نمی‌کنند، هر دو سری واگرا هستند. بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-3, 3)$ است.
۴. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1} \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot 3^n}{x^n} \right| = \frac{|x|}{3}$$

پس سری داده شده همگرای مطلق است اگر $\frac{|x|}{3} < 1$ یا $|x| < 3$ و واگراست اگر $|x| > 3$. در نتیجه شعاع همگرایی این سری توانی برابر با $r = 3$ است. حال مقادیر $x = 3$ و $x = -3$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x = 3$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

که واگراست (چرا؟). اگر $x = -3$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

که بنابر آزمون سریهای متناوب همگراست. بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-۳, ۳)$ است.

۵. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{x^n} \right| = |x|$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|x| < ۱$ و واگراست اگر $|x| > ۱$. یعنی شعاع همگرایی این سری برابر با $r = ۱$ است. حال همگرایی سری را به ازای $x = \pm ۱$ می‌آزماییم. اگر $x = ۱$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

که بنابر آزمون سریهای متناوب همگراست. اگر $x = -۱$ در نظر بگیریم، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

که واگراست (چرا؟). در نتیجه بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $[-۱, ۱)$ است.

۶. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{x^{2(n+1)}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{x^{2n}} \right| = |x^2| = x^2$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|x^2| < ۱$ یا $-۱ < x < ۱$ و واگراست اگر $|x^2| > ۱$ یا $|x| > ۱$. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر انتهایی $x = \pm ۱$ می‌آزماییم. اگر $x = ۱$ یا $x = -۱$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

که سری همساز متناوب است و در نتیجه همگراست. بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر است با $[-۱, ۱)$.

۷. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{1 \cdot \dots \cdot n+1} \cdot \frac{1 \cdot \dots \cdot n}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x}{1 \cdot \dots} \right| = \infty$$

سری توانی داده شده به ازای $x = ۰$ همگرا و در غیر این صورت واگراست.

۸. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{x^{n+2}}{\sqrt{(n+1)-1}} \cdot \frac{\sqrt{n-1}}{x^{n+1}} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} |x| = |x|$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|x| < 1$ و واگراست اگر $|x| > 1$. حال مقادیر $x = \pm 1$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x = 1$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}}$$

که بنابر آزمون سریهای متناوب همگراست. اگر $x = -1$ آنگاه

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} x^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} (-1) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

چون به ازای هر $n \geq 1$ ، $\frac{1}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ و در نتیجه سری $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ نیز واگراست. بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $[-1, 1)$ است.

۹. در اینجا داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{\sqrt{(n+1)+1}}}{(-4)^{n+1}} \cdot \frac{(-4)^n}{x^{\sqrt{n+1}}} \right| = \frac{x^2}{4}$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $\frac{x^2}{4} < 1$ یا $x^2 < 4$ که معادل است با $-2 < x < 2$ ، و واگراست اگر $|x| > 2$. پس شعاع همگرایی این سری برابر است با $r = 2$. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر $x = \pm 2$ می‌آزماییم. اگر $x = 2$ یا $x = -2$ آنگاه به ترتیب سریهای زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\sqrt{n+1}}}{(-4)^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n+1}}}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\sqrt{n+1}}}{(-4)^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\sqrt{n+1}}}{(-4)^n} = - \sum_{n=0}^{\infty} 2 \end{aligned}$$

این دو سری واگرا هستند زیرا حد جمله عمومی آنها صفر نیست. در نتیجه بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-2, 2)$ است.

۱۰. آزمون ریشه را به کار می‌بریم. به ازای هر x داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n x^n}{n^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n} = 0 < 1$$

در نتیجه سری توانی داده شده به ازای هر مقدار x همگرا (ی مطلق) است. یعنی بازه همگرایی این سری برابر با $(-\infty, \infty)$ است.

۱۱. آزمون نسبت را به کار می‌بریم. چون

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{[2(n+1)]!}}{x^{2n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n)!}{(2n+2)!} x^2 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} x^2 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = 0 < 1 \end{aligned}$$

سری توانی داده شده به ازای هر x همگرا (ی مطلق) است. یعنی بازه همگرایی آن برابر با $(-\infty, \infty)$ است.

۱۲. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} x \right| = 0 < 1$$

سری داده شده به ازای هر x همگرای مطلق است. یعنی بازه همگرایی این سری $(-\infty, \infty)$ است.

۱۳. در اینجا داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)} (x-2)^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{x^{2n} (x-2)^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{9(n+1)}{n+2} (x-2) \right| \\ &= 9|x-2| \end{aligned}$$

در نتیجه سری توانی داده شده همگرای مطلق است اگر $|x-2| < 1/9$ یا $|x-2| < 1/9$ که معادل است با $19/9 < x < 17/9$ ، و واگراست اگر $|x-2| > 1/9$. بنابراین شعاع همگرایی این سری برابر است با $r = 1/9$. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر انتهایی $x = 17/9$ و $x = 19/9$ می‌آزماییم.

اگر $x = \frac{19}{9}$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} (x-2)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} \cdot 3^{-2n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

که واگراست (چرا؟). اگر $x = \frac{17}{9}$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} (x-2)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

که همگراست (چرا؟). بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(\frac{9}{9} و \frac{17}{9})$ است.
۱۴. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+2}}{(n+1) 3^{n+2}} \cdot \frac{n \cdot 3^{n+2}}{2^n \cdot x^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n}{3(n+1)} x \right| = \frac{2}{3} |x|$$

سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|x| < \frac{3}{2}$ یا $|x| < \frac{3}{2}$ و واگراست اگر $|x| > \frac{3}{2}$. در نتیجه شعاع همگرایی این سری برابر با $r = \frac{3}{2}$ است. حال مقادیر $x = \pm \frac{3}{2}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x = \frac{3}{2}$ آنگاه

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^{n+2}} x^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^{n+2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot n \cdot 3^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n} \end{aligned}$$

که واگراست. اگر $x = -\frac{3}{2}$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{6n}$ به دست می‌آید که، بنابر آزمون سریهای متناوب، همگراست. در نتیجه بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-\frac{3}{2} و \frac{3}{2})$ است.

۱۵. در اینجا داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 (x+4)^{n+1}}{2^2(n+1)} \cdot \frac{2^{2n}}{n^2 (x+4)^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{x+4}{8} \right| \\ &= \frac{|x+4|}{8} \end{aligned}$$

در نتیجه سری داده شده همگرایی مطلق است اگر $|x + 4| < 1$ یا $|x + 4| < 8$ که معادل است با $4 < x < 12$ ، و واگراست اگر $|x + 4| > 8$. بنابراین شعاع همگرایی این سری برابر با $r = 8$ است. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر انتهایی $x = 4$ و $x = -12$ می‌آزماییم. اگر $x = 4$ یا $x = -12$ آنگاه به ترتیب سریهای زیر را داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x+4)^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 1^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x+4)^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (-1)^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n^2$$

چون حد جمله عمومی هر دو سری ناصفر است، هر دو واگرا هستند. بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(4, 12)$ است.

۱۶. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(n+1) \cdot x^{n+1}}{\ln n \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{\ln n} x \right| = |x|$$

زیرا بنابه دستور هوییتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

در نتیجه سری داده شده همگرایی مطلق است اگر $|x| < 1$ و واگراست اگر $|x| > 1$. حال مقادیر $x = \pm 1$ را در نظر می‌گیریم. اگر این مقادیر را در سری قرار دهیم سریهای

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n$$

به دست می‌آیند که هر دو واگرا هستند (چرا؟). بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده $(-1, 1)$ است.

۱۷. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(n+1) \cdot (x-e)^{n+1}}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{\ln n \cdot (x-e)n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{|x-e|}{e}$$

$$= \frac{|x-e|}{e}$$

سری داده شده به ازای $1 < \frac{|x-e|}{e} < e$ یا $|x-e| < e$ که معادل است با $2e < x < 0$ همگرایی مطلق است و به ازای $|x-e| > e$ واگراست. پس شعاع همگرایی سری برابر با $r = e$ است. حال مقادیر $x = 2e$ و $x = 0$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x = 2e$ آنگاه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n \cdot e^n}{e^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \ln n$$

و اگر $x = 0$ آنگاه سری توانی داده شده به صورت $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln n$ به دست می‌آید. این دو سری واگرا هستند (چرا؟). در نتیجه بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(0, 2e)$ است. ۱۸. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(n+1) \cdot x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{\ln n \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = |x|$$

در نتیجه این سری همگرایی مطلق است اگر $|x| < 1$ و واگراست اگر $|x| > 1$. به ازای $x = 1$ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 x^n}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2}{n^2}$$

که، با مقایسه با سری همگرایی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ ، همگراست (تمرین ۱۹ از بخش ۳.۲ را ببینید). به همین ترتیب، با قراردادن $x = -1$ در سری توانی داده شده، سری همگرایی $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ به دست می‌آید (چرا این سری همگراست؟) بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر با $[-1, 1]$ است.

۱۹. چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 6^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 6^n}{(2x-1)^n} \right| = \frac{|2x-1|}{6}$$

سری داده شده همگرایی مطلق است اگر $6 > |2x-1|$ یا $\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2}$ و واگراست اگر $6 < |2x-1|$. شعاع همگرایی این سری $r = 3$ است. حال مقادیر $x = \frac{7}{2}$ و $x = \frac{5}{2}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x = \frac{7}{2}$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-1)^n}{n \cdot 6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6^n}{n \cdot 6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

که همگراست (چرا؟). اگر $x = -\frac{5}{4}$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-1)^n}{n \cdot 6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

که واگراست. در نتیجه بازه همگرایی سری توانی داده شده برابر است با $[-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}]$.
۲۰. آزمون ریشه را به کار می‌بریم. چون بنابر مثال ۹.۱.۲ و حل آن، اگر $x \neq \pm 1$ آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x^{n^2}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = \begin{cases} 0 & , |x| < 1 \text{ اگر} \\ \infty & , |x| > 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

پس، بنابر آزمون ریشه، سری داده شده به ازای $|x| < 1$ همگرای مطلق است و اگر $|x| > 1$ واگراست. اگر مقادیر $x = \pm 1$ را در سری قرار دهیم. سری $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ به دست می‌آید که واگراست. بنابراین بازه همگرایی سری توانی داده شده (۱ و -۱) است.

تمرینهای ۲.۳

۱. فرض کنیم

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^n + \dots \end{aligned}$$

با مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از این سری، داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{4}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{n}{n+1} x^{n-1} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} x^{n-1} \\ \int_0^x f(t) dt &= x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} \end{aligned}$$

۲. در اینجا

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma+1}} x^{n+1} = x + \frac{1}{1+1} x^{\gamma} + \frac{1}{2^{\gamma+1}} x^{\gamma+1} + \dots$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\gamma}{1+1} x + \frac{\gamma}{2^{\gamma+1}} x^{\gamma} + \dots + \frac{n+1}{n^{\gamma+1}} x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^{\gamma+1}} x^n$$

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} + \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} + \dots + \frac{1}{n^{\gamma+1}} \cdot \frac{1}{n+\gamma} x^{n+\gamma} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\gamma}}{(n^{\gamma+1})(n+\gamma)}$$

۳. با مشتگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از سری

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$

داریم

$$f'(x) = 2 + 2 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$$

$$\int^x f(t) dt = x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n+1} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}$$

۴.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} x^n$$

$$= 5x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \dots + \frac{5}{n}x^n + \dots$$

$$f'(x) = 5 + \frac{5}{2} \cdot 2x + \frac{5}{3} \cdot 3x^2 + \dots + \frac{5}{n} \cdot n x^{n-1} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 5n x^{n-1}$$

۵. می دانیم که به ازای هر x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \dots$$

همچنین $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ در نتیجه، با استفاده از دو سری بالا، داریم

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1+1}{2} + \frac{x-x}{2} + \frac{\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{2!}x^2}{2} + \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{3!}x^3}{2} \\ &\quad + \dots + \frac{\frac{1}{n!}x^n + \frac{(-1)^n}{n!}x^n}{2} + \dots \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

۶. مانند حل تمرین ۵ عمل می‌کنیم. در اینجا به دست می‌آوریم

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

۷. با استفاده از سری نمایشگر e^x نتیجه می‌گیریم که

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{1}{2!}x + \dots + \frac{1}{n!}x^{n-1} + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n-1}$$

چون وقتی x به صفر میل می‌کند، سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n-1}$ نیز به صفر میل می‌کند، پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 + 0 = 1$$

۸. (الف) چون اگر $|x| < 1$ آنگاه

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

با قراردادن $-t^r$ به جای x در این سری، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t^r} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{rn} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{rn} \\ &= 1 - t^r + t^{2r} - \dots + (-1)^n t^{rn} + \dots \end{aligned}$$

بنابراین اگر $| -t^r | < 1$ یا $-1 < t < 1$ - آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{t^r}{1+t^r} &= t^r - t^{2r} + t^{3r} - \dots + (-1)^n t^{rn} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{r(n+1)} \end{aligned}$$

(ب) بنابر قضیه انتگرالگیری سریهای توانی، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^r}{1+t^r} dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{r(n+1)} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^{r(n+1)} dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{r(n+1)} t^{r(n+1)} \end{aligned}$$

حال با قراردادن $x = \frac{1}{r}$ در این سری، نتیجه می‌گیریم که

$$\int_0^{\frac{1}{r}} \frac{t^r}{1+t^r} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{r(n+1)} \left(\frac{1}{r}\right)^{r(n+1)}$$

۹. با قراردادن t^r به جای x در سری

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{1+t^6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{6n}$$

حال با استفاده از قضیه انتگرالگیری سریهای توانی، داریم

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^6} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6n+1} x^{6n+1}$$

با قراردادن $x = \frac{1}{3}$ در این سری، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+x^6} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{6n+1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^9} - \dots \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+x^6} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{153.09} = \frac{51.02}{153.09} \approx 0.33326$$

۱۰. با توجه به حل مسأله نمونه‌ای ۳.۲.۱۱، داریم

$$\operatorname{tg}^{-1} t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

در نتیجه

$$\frac{\operatorname{tg}^{-1} t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} t^{2n} = 1 - \frac{1}{3} t^2 + \dots$$

حال با انتگرالگیری جمله به جمله از این سری، داریم

$$\int_0^x \frac{\operatorname{tg}^{-1} t}{t} dt = x - \frac{1}{9} x^3 + \dots$$

در نتیجه

$$\int_0^{0.1} \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x} dx \approx 0.1 - \frac{0.001}{9} = \frac{899}{9000} = 0.099$$

تمرینهای ۳.۳

۱. جدول مشتقهای $\sin x$ در $x = \frac{\pi}{6}$ را تشکیل می‌دهیم:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$
۰	$\sin x$	$\frac{1}{2}$
۱	$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲	$-\sin x$	$-\frac{1}{2}$
۳	$-\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
۴	$\sin x$	$\frac{1}{2}$

و به طور کلی داریم

$$f^{(4n)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, f^{(4n+1)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(4n+2)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, f^{(4n+3)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{1!} f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2!} f''\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

که نمایش فشرده آن عبارت است از

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n+1} \right]$$

برای اینکه نشان دهیم به ازای هر x ، مجموع این سری برابر با مقدار $f(x)$ است. نشان می‌دهیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. با توجه به اینکه $|\sin \alpha| \leq 1$ و $|\cos \alpha| \leq 1$ ، برای هر مقدار z بین x و $\frac{\pi}{6}$ داریم

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1} \right| \leq \left| \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

حال با استفاده از تذکر ۳.۳، ۴.۳ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$$

و در نتیجه به ازای هر x ، $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ داریم.

$f(x) = \cos x$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$f'(x) = -\sin x$	$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f''(x) = -\cos x$	$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
$f^{(3)}(x) = \sin x$	$f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

و به طور کلی داریم

$f^{(2n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$f^{(2n+1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f^{(2n+2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$f^{(2n+3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

بنابراین، با توجه به فرمول سری تیلور در $x = \frac{\pi}{3}$ ، داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

اثبات $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n |x| = 0$ مشابه اثبات آن در حل تمرین ۱ است.

۳. داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= 2e^{2x} & f'(0) &= 2 \\ f''(x) &= 2^2 e^{2x} & f''(0) &= 2^2 \end{aligned}$$

و به طور کلی $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$ و $f^{(n)}(0) = 2^n$. بنابراین، با جایگذاری در فرمول سری تیلور در $x = 0$ ، داریم

$$f(x) = e^{2x} = 1 + 2x + \frac{2^2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{3!} x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

برای اثبات اینکه سری به دست آمده به ازای هر x نمایشگر e^{2x} است، نشان می‌دهیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} e^{2z}}{(n+1)!} x^{n+1} \end{aligned}$$

که در آن z بین x و 0 است. مانند مثال ۳.۳.۶، می‌توان نشان داد که این حد صفر است. ۴. روشن است که به ازای هر n ، $f^{(n)}(x) = e^x$ و در نتیجه $f^{(n)}(-2) = e^{-2}$. بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-2)}{n!} (x+2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2}}{n!} (x+2)^n \end{aligned}$$

۵. چون $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ داریم

$$x^2 e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$$

برای تعیین شعاع همگرایی، از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

در نتیجه سری به دست آمده به ازای هر x همگراست. یعنی شعاع همگرایی این سری ∞ است.

۶. با قراردادن $-2x$ به جای x در $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!}$$

در نتیجه

$$x e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$$

برای پیدا کردن شعاع همگرایی، آزمون نسبت را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n x^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

و در نتیجه شعاع همگرایی این سری ∞ است.

۷. با قراردادن $\frac{x}{2}$ به جای x در سری $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ و ضرب کردن آن در $\frac{1}{2}$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

حال شعاع همگرایی این سری را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{(-1)^n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2} \right| = \frac{|x|}{2}$$

در نتیجه سری فوق همگرای مطلق است اگر $\frac{|x|}{2} < 1$ یا $|x| < 2$ ، یعنی شعاع همگرایی آن برابر با $r = 2$ است.

۸. با قراردادن $2x$ به جای x در سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

حال چون

$$\ln(1-2x) = \int_0^x \frac{-2dt}{1-2t},$$

بنابراین قضیه انتگرالگیری سریهای توانی،

$$\begin{aligned} \ln(1-2x) &= \int_0^x (-2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n) dt \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2^{n+1}}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

حال شعاع همگرایی سری به دست آمده را تعیین می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-2^{n+2} x^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{-2^{n+1} x^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2(n+1)x}{n+2} \right| = 2|x|$$

در نتیجه این سری همگرایی مطلق است اگر $2|x| < 1$ یا $|x| < \frac{1}{2}$. بنابراین شعاع همگرایی سری فوق برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۹. با قراردادن $2x$ به جای x در سری $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ ، داریم

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

بنابراین سری نمایشگر $\cos^2 x$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

حال چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)-1} x^{2(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n-1} x^{2n}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = 0 < 1$$

شعاع همگرایی سری به دست آمده است ∞ است.

۱۰. چون به ازای هر x داریم

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

در نتیجه اگر $x \neq 0$ آنگاه

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

از آنجا که به ازای $x=0$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1$ ، پس

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

برای تعیین شعاع همگرایی این سری، آزمون نسبت را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{[(2(n+1)+1)!]} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| = 0 < 1$$

در نتیجه شعاع همگرایی سری به دست آمده ∞ است.

تمرینهای ۴.۳

۱. قضیه دو جمله‌ای را با $k = \frac{1}{p}$ به کار می‌بریم. داریم

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots \\
 &\quad + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 3!}x^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n
 \end{aligned}$$

شعاع همگرایی این سری $r = 1$ به دست می‌آید.
 ۲. با قراردادن $-x^3$ به جای x در سری

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1-x^3} &= 1 + \frac{1}{2}(-x^3) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}(-x^3)^n \\
 &= 1 - \frac{1}{2}x^3 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^{3n}
 \end{aligned}$$

شعاع همگرایی این سری برابر با $r = 1$ به دست می‌آید.
 ۳. با توجه به مسئله نمونه‌ای ۳، ۴، ۳، داریم

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^n + \dots$$

با قراردادن $-x^2$ به جای x در این سری، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \dots$$

که در آن $|x| < 1$

۴. با به کار بردن قضیهٔ دو جمله‌ای با $k = -\frac{\Delta}{\delta}$ ، داریم

$$\begin{aligned} (1+x)^{-\frac{\Delta}{\delta}} &= 1 - \frac{\Delta}{\delta}x + \frac{-\frac{\Delta}{\delta}(-\frac{\Delta}{\delta}-1)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{\Delta}{\delta}(-\frac{\Delta}{\delta}-2)}{3!}x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{-\frac{\Delta}{\delta}(-\frac{\Delta}{\delta}-1)\dots(-\frac{\Delta}{\delta}-n+1)}{n!}x^n + \dots \\ &= 1 - \frac{\Delta}{\delta}x + \frac{(-\frac{\Delta}{\delta})(-\frac{1\Delta}{\delta})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{\Delta}{\delta})(-\frac{1\Delta}{\delta})(-\frac{2\Delta}{\delta})}{3!}x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{(-\frac{\Delta}{\delta})(-\frac{1\Delta}{\delta})\dots(-\frac{\Delta n - \Delta}{\delta})}{n!}x^n + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta \cdot 1\Delta \cdot \dots \cdot (\Delta n + \Delta)}{\delta^n \cdot n!} x^n \end{aligned}$$

که در آن $|x| < 1$

۵. بنابر حل تمرین ۳ فوق، داریم

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} \quad (|x| < 1)$$

در نتیجه

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n+1}$$

که در آن $|x| < 1$

۶. بنابر مسألهٔ نمونه‌ای ۳.۴.۳، داریم

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n$$

در نتیجه

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{n+2}$$

که در آن $|x| < 1$

۷. بنابر حل تمرین ۱، داریم

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n$$

با قراردادن $-t^3$ به جای x در سری فوق، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \sqrt{1-t^3} &= 1 + \frac{1}{2}(-t^3) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!} (-t^3)^n \\ &= 1 - \frac{1}{2}t^3 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!} t^{3n} \end{aligned}$$

از این رو، بنا بر قضیه انتگرالگیری سریهای توانی، داریم

$$\int_x^x \sqrt{1-t^3} dt = x - \frac{1}{8}x^3 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n! (3n+1)} x^{3n+1}$$

که در آن $|x| < 1$.

۸. می‌نویسیم $\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27+1} = 3 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}}$ حال، چون بنابر مثال ۲.۴.۳، به ازای

$|x| < 1$ داریم

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2 \cdot 2!} x^2 + \dots$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 3 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}} &\approx 3 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{27} \right) - \frac{2}{3^2 \cdot 2!} \left(\frac{1}{27} \right)^2 \right] \\ &= 3 \left(1 + \frac{1}{81} - \frac{1}{6561} \right) \approx 3.03 \end{aligned}$$

تمرینهای فصل ۴

تمرینهای ۱.۴

۱.

$$4\vec{a} + 5\vec{b} = (8, -12) + (5, 20) = (13, 8)$$

$$4\vec{a} - 5\vec{b} = (8, -12) - (5, 20) = (3, -32)$$

۲.

$$4\vec{a} + 5\vec{b} = (4, 8, 4) + (0, 5, 5\sqrt{2})$$

$$= (4, 13, 4 + 5\sqrt{2})$$

$$4\vec{a} - 5\vec{b} = (4, 8, 4) - (0, 5, 5\sqrt{2})$$

$$= (4, 3, 4 - 5\sqrt{2})$$

۳.

$$4\vec{a} + 5\vec{b} = (20\vec{i} - 8\vec{j}) + (15\vec{i} + 5\sqrt{2}\vec{j})$$

$$= 35\vec{i} + (5\sqrt{2} - 8)\vec{j}$$

$$4\vec{a} - 5\vec{b} = (20\vec{i} - 8\vec{j}) - (15\vec{i} + 5\sqrt{2}\vec{j})$$

$$= 5\vec{i} - (8 + 5\sqrt{2})\vec{j}$$

۴.

$$4\vec{a} + 5\vec{b} = (32\vec{i} + 4\vec{j}) + (5\vec{i} - 10\vec{k})$$

$$= 37\vec{i} + 4\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$4\vec{a} - 5\vec{b} = (32\vec{i} + 4\vec{j}) - (5\vec{i} - 10\vec{k})$$

$$= 27\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k}$$

۵. بردار نمایشگر \overline{PQ} برابر است با $(4, 4) = (-4, 0, 0) - (0, 0, 0)$.

پس اندازه آن برابر است با $\sqrt{۱۶+۱۶} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$

۶. بردار نمایشگر \overline{PQ} برابر است با $(-۲, -۱, -۲) = (-۱-۱, ۱-۲, -۲-۰)$.
در نتیجه اندازه آن برابر است با

$$\sqrt{(-۲)^2 + (-۱)^2 + (-۲)^2} = \sqrt{۴+۱+۴} = \sqrt{۹} = ۳$$

۷. چون $|\vec{a}| = \sqrt{۱+۱+۱} = \sqrt{۳}$ ، بردار واحد هم جهت با \vec{a} عبارت است از

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{۳}} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{۳}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{۳}} \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{۳}} \vec{k}$$

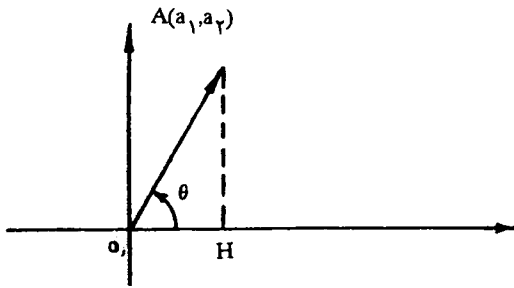
۸. داریم

$$|\vec{b}| = \sqrt{۷^2 + (۱۲\sqrt{۲})^2 + (-۱۲\sqrt{۲})^2} \\ = \sqrt{۴۹ + ۲۸۸ + ۲۸۸} = \sqrt{۶۲۵} = ۲۵$$

در نتیجه بردار واحد هم جهت با \vec{b} برابر است با

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{1}{۲۵} \vec{b} = \frac{۷}{۲۵} \vec{i} + \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۲۵} \vec{j} - \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۲۵} \vec{k}$$

۹. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم



اگر $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ، آنگاه با توجه به مثلث قائم الزاویه OAH ، داریم

، پس $a_2 = AH = OA \sin \theta = |\vec{a}| \sin \theta$ و $a_1 = OH = OA \cos \theta = |\vec{a}| \cos \theta$

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \\ = |\vec{a}| \cos \theta \vec{i} + |\vec{a}| \sin \theta \vec{j} \\ = |\vec{a}| (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

۱۰. اگر \vec{u} یک بردار واحد باشد، آنگاه $|\vec{u}| = ۱$. بنابراین تمرین ۹، داریم

$$\vec{u} = |\vec{u}| (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

تمرینهای ۲.۴

۱.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2-3-4}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+9+16}} = \frac{-5}{\sqrt{18}}$$

۲.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-2-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2+16+3}\sqrt{2+3+4}} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{3\sqrt{21}}$$

۳. چون

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 1, -1) \cdot (3, 7, 13) = 6 + 7 - 13 = 0.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (2, 1, -1) \cdot (20, -29, 11) = 40 - 29 - 11 = 0.$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (3, 7, 13) \cdot (20, -29, 11) = 60 - 203 + 143 = 0.$$

پس \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} دو به دو بر هم عمود هستند.

$$۴. چون $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+4} = 3$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2+0+0 = 2$$$

$$\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{2}{9} (2, 1, -1) = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{9}\right)$$

۵. داریم $\vec{i} \cdot \vec{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$ و $\vec{j} \cdot \vec{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$ و $\vec{i} \cdot \vec{k} = (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$.۶. چون $|\cos \theta| \leq 1$ ، پس

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ||\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

۷. اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ، آنگاه بنابر نامساوی کوشی - شوارتس، داریم

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

۸. با قراردادن $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ در نامساوی تمرین ۷، داریم $(a_1 + a_2 + a_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(3)$ و

در نتیجه

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) && \text{۹. داریم} \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\
 &\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 && \text{(کوشی - شوارتس)} \\
 &= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2
 \end{aligned}$$

در نتیجه $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

$$\begin{aligned}
 |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} && \text{۱۰. چون} \\
 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\
 |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2
 \end{aligned}$$

در نتیجه $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$

$$\begin{aligned}
 |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 && \text{۱۱. چون} \\
 |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2
 \end{aligned}$$

پس $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$

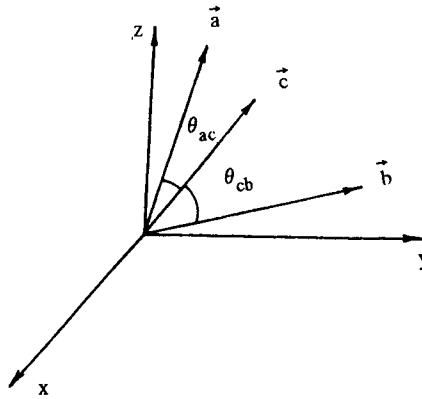
۱۲. اگر \vec{a} و \vec{b} دو ضلع یک متوازی الاضلاع باشند، آنگاه با توجه به شکل ۴.۲.۴ متن کتاب $|\vec{a} + \vec{b}|$ و $|\vec{a} - \vec{b}|$ اندازه دو قطر این متوازی الاضلاع هستند. چون $4\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2$ پس $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ اگر و تنها اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ یعنی اگر و تنها اگر \vec{a} و \vec{b} بر هم عمود باشند.

۱۳. داریم

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2
 \end{aligned}$$

۱۴. فرض کنیم \vec{a} و \vec{b} دو ضلع یک لوزی باشند. در این صورت $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ دو قطر آن هستند (شکل ۴.۲.۴ متن کتاب را ببینید)، چون $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ، پس $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$ در نتیجه دو قطر لوزی بر هم عمود هستند.

۱۵. فرض کنیم θ_{ac} و θ_{cb} به ترتیب زاویه بین \vec{a} و \vec{c} و زاویه بین \vec{c} و \vec{b} باشند (شکل ۲.۱.۴ را ببینید).



شکل ۲.۱.۴

چون

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot (|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}) \\
 &= |\vec{b}| \vec{a} \cdot \vec{a} + |\vec{a}| \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{b}| |\vec{a}|^2 + |\vec{a}| \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}| (|\vec{a}| |\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b})
 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| (|\vec{a}| \vec{b} + |\vec{a}| |\vec{b}|)$ داریم

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_{ac} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{|\vec{a}| (|\vec{a}| |\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{c}|} \\
 &= \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{c}|} \\
 \cos \theta_{cb} &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{|\vec{b}| (|\vec{a}| \vec{b} + |\vec{a}| |\vec{b}|)}{|\vec{b}| |\vec{c}|} \\
 &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{c}|} \\
 &= \cos \theta_{ac}
 \end{aligned}$$

چون θ_{ac} و θ_{cb} در بازه $[0, \pi]$ قرار دارند، پس $\theta_{ac} = \theta_{cb}$.

۱۶. داریم

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{a_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_3^2}{|\vec{a}|^2} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 1\end{aligned}$$

تمرینهای ۳.۴

.۱

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\end{aligned}$$

$$\hat{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (-1, -3, 4) \cdot (1, -1, 1) = -1 + 3 + 4 = 6$$

.۲

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\end{aligned}$$

$$\hat{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (1, 1, -1) \cdot (-1, 2, -1) = -1 + 2 + 1 = 2$$

.۳

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 12 \\ 3 & 4 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= -96\hat{i} + 72\hat{j}\end{aligned}$$

$$\hat{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{16}\right) \cdot (-96, 72, 0) = -12 - 6 + 0 = -18$$

.۴

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & 12 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\hat{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \hat{c} \cdot \vec{0} = 0$$

۵. چون $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta_{ab}$ پس

$$\sin \theta_{ab} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}|}{|\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}| |\vec{i} - \vec{k}|}$$

$$= \frac{\sqrt{1+4+1}}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+0+1}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$$

۶. به آسانی دیده می شود که

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

پس اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ آنگاه

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= - \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \vec{j} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \vec{k} = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

۷. فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ، $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ داریم

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (b_2 c_3 - c_2 b_3) \vec{i} - (b_1 c_3 - c_1 b_3) \vec{j} + (b_1 c_2 - c_1 b_2) \vec{k}$$

مؤلفه اول $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ برابر است با

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_1 b_3 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - c_1 b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_1 c_3 - a_3 c_1 b_3 - a_3 c_1 b_2 + a_2 b_1 c_2$$

و مؤلفه اول $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ برابر است با

$$(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1 = a_2 c_2 b_1 + a_3 c_3 b_1 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1$$

که همان مؤلفه اول $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ است. به همین ترتیب می توان نشان داد که مؤلفه های دوم و سوم این دو بردار یکسان هستند.

۸. داریم

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) &= (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a} - (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} \\
 &= (\vec{a} \times \vec{a}) + (\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{b}) \\
 &= (\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{b} \times \vec{a}) \\
 &= 2(\vec{b} \times \vec{a}) = 2\vec{b} \times \vec{a}
 \end{aligned}$$

۹. فرض کنیم $\vec{a} = (1, 0, 0)$ ، $\vec{b} = (0, 1, 0)$ و $\vec{c} = (1, 1, 0)$. در این صورت

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}, \vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$$

ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

۱۰. با توجه به تمرین ۷، داریم

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \\
 &+ (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} = 0.
 \end{aligned}$$

زیرا $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$.۱۱. (الف) بردار $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ عمود بر صفحه داده شده است. چون $\vec{PQ} = (-1, 4, -3)$ و $\vec{PR} = (2, -3, -1)$ پس

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -13\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$$

(ب) مساحت مثلث PQR برابر است با

$$\frac{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{169 + 49 + 25}}{2} = \frac{\sqrt{243}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

۱۲. با توجه به مسأله نمونه‌ای ۱۱.۳.۴، چون

$$\vec{OP} \cdot (\vec{OQ} \times \vec{OR}) = (1, -1, 2) \cdot [(0, 3, -1) \times (3, -4, 1)]$$

$$= (1, -1, 2) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 3 - 18 = -16$$

پس حجم این متوازی السطوح برابر با ۱۶ است.

تمرینهای ۴.۴

۱. معادلات پارامتری این خط عبارت اند از:

$$x = -2 + 3t, y = 1 - t, z = 5t$$

و معادلات متقارن آن به صورت زیر هستند

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{5}$$

۲. این معادلات به ترتیب عبارت اند از:

$$x = 11t, y = -13t, z = -15t$$

$$\frac{x}{11} = \frac{y}{-13} = \frac{z}{-15}$$

۳. معادلات مورد نظر به ترتیب عبارت اند از:

$$x = -3 + t, y = 6 - t, z = 2$$

$$x + 3 = \frac{y-6}{-1}, z = 2$$

۴. این معادلات به ترتیب عبارت اند از:

$$x = 2, y = 2t, z = 5 + 3t$$

$$x = 2, \frac{y}{2} = \frac{z-5}{3}$$

۵. این خط از نقطه P_1 می گذرد و با بردار $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, 8, -3)$ موازی است. در نتیجه معادلات پارامتری و متقارن آن به ترتیب عبارت اند از:

$$x = 5 - 3t, y = -2 + 8t, z = 4 - 3t$$

$$\frac{x-5}{-3} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-4}{-3}$$

۶. این خط از نقطه $P_1(-1, 1, 0)$ می گذرد و با بردار $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 4, 7)$ موازی است. بنابراین معادلات متقارن آن به صورت زیر هستند.

$$x = -1, \frac{y-1}{4} = \frac{z}{7}$$

۷. این خط موازی با بردار $\vec{a} = (4, 2, 1)$ است. پس معادلات متقارن آن به صورت زیر هستند.

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = z-2$$

۸. خطی که از دو نقطه $P_1(0, 0, 5)$ ، $P_2(1, -1, 4)$ می‌گذرد با بردار $\vec{P_1P_2} = (1, -1, -1)$ موازی است. خط $\vec{a} = (7, 4, 3)$ با بردار $\frac{x}{7} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+9}{3}$ موازی است. چون

$$\vec{a} \cdot \vec{P_1P_2} = (7, 4, 3) \cdot (1, -1, -1) = 7 - 4 - 3 = 0.$$

این دو خط بر هم عمود هستند.

۹. بردار $\vec{a} = (-3, 8, -3)$ موازی با خط داده شده در تمرین ۵ است. چون

$$\vec{a} \cdot \vec{P_1P_2} = (-3, 8, -3) \cdot (5, 0, -4) = (-15, 0, 12) = (0, 2, -8)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{P_1P_2} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 8 & -3 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= -58\hat{i} - 24\hat{j} - 6\hat{k} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{P_1P_2}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{3364 + 576 + 36}}{\sqrt{9 + 64 + 9}} = \frac{\sqrt{3976}}{\sqrt{82}} = \frac{2\sqrt{499}}{\sqrt{41}}$$

۱۰. بردار $\vec{a} = (0, 1, 1)$ موازی با این خط است و نقطه $P_1(-2, -1, 0)$ روی خط

قرار دارد. چون $\vec{a} \cdot \vec{P_1P_2} = (0, 1, 1) \cdot (4, 2, 0) = 0$ داریم

$$\vec{a} \times \vec{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

در نتیجه

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{P_1P_2}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{4 + 16 + 16}}{\sqrt{0 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

۱۱. این دو خط وقتی یکدیگر را قطع می‌کنند که دستگاه سه معادله دو مجهولی

$$\begin{cases} 1 + 2t = 4 - s \\ 1 - 4t = -1 + 6s \\ 5 - t = 4 + s \end{cases}$$

دارای جواب باشد. با حل کردن دستگاه دو معادله اول نتیجه می‌گیریم که $t = 2$ و $s = -1$.

چون این مقادیر در معادله سوم نیز صدق می‌کنند، پس جواب این دستگاه هستند. با قرار دادن

$t = 2$ در معادلات پارامتری خط اول، نقطه مشترک این دو خط برابر $(5, -7, 3)$ به دست

می‌آید.

۱۲. این دو خط وقتی متقاطع هستند که دستگاه

$$\begin{cases} 3+t=4-s \\ 3+2t=3+s \\ t=-2+3s \end{cases}$$

جواب داشته باشد. با حل کردن دستگاه دو معادله اول، مقادیر $t = \frac{1}{3}$ و $s = \frac{2}{3}$ به دست می آیند. چون این مقادیر در معادله سوم صدق نمی کنند، دستگاه فوق جواب ندارد. در نتیجه دو خط داده شده متقاطع نیستند.

۱۳. بردارهای $\vec{a} = (2, -4, -1)$ و $\vec{b} = (-1, 6, 1)$ به ترتیب موازی با دو خط داده شده هستند. پس کسینوس زاویه بین این دو خط برابر است با

$$\cos \theta_{ab} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-2-24-1}{\sqrt{4+16+1}\sqrt{1+36+1}} = \frac{-27}{\sqrt{798}}$$

۱۴. بردارهای $\vec{a} = (1, 2, 1)$ و $\vec{b} = (-1, 1, 3)$ به ترتیب موازی با این دو خط هستند. پس

$$\cos \theta_{ab} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-1+2+3}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1+9}} = \frac{4}{\sqrt{66}}$$

تمرینهای ۵.۴

۱. معادله این صفحه عبارت است از $-\frac{1}{3}(z-3) - 4(x+1) + 15(y-2) = 0$ یا $-\frac{1}{3}z - 4x + 15y - 32 = 0$ یا $8x - 30y + z + 65 = 0$

۲. معادله این صفحه به صورت زیر است:

$$2x + 3y - 4z = 6\pi \quad \text{یا} \quad 2(x - \pi) + 3(y - 0) - 4(z + \pi) = 0$$

۳. داریم $\vec{P}_1 P_2 = (3, 4, 1)$ و $\vec{P}_2 P_3 = (0, 5, -1)$ و در نتیجه

$$\vec{N} = \vec{P}_1 P_2 \times \vec{P}_2 P_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 3\vec{j} + 15\vec{k}$$

پس معادله این صفحه عبارت است از $-9(x-2) + 3(y+1) + 15(z-4) = 0$ یا $9x - 3y - 15z + 39 = 0$

۴. خط داده شده با بردار $\vec{a} = (1, 1, 2)$ موازی است و از نقطه $P_1(-2, -1, -5)$ می گذرد. در نتیجه بردار $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{P}_1 P_2$ قائم بر صفحه مورد نظر است. چون $\vec{P}_1 P_2 = (-3, 0, -7)$ و در نتیجه

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

معادله این صفحه عبارت است از $0 = -7(x - 1) + (y + 1) + 3(z - 2)$ یا $2 = 7x - y - 3z$.

۵. بردار $\vec{N} = (2, 5, 9)$ که با خط داده شده موازی است، قائم بر صفحه مورد نظر است. بنابراین معادله این صفحه عبارت است از $0 = 2(x - 2) + 5(y - \frac{1}{2}) + 9(z - \frac{1}{3})$ یا $19 = 4x + 10y + 18z$.

۶. خط مورد نظر با بردار قائم $\vec{N}_\perp = (2, -3, 4)$ بر صفحه داده شده، موازی است. در نتیجه معادلات پارامتری این خط عبارتند از:

$$x = 2 + 2t, y = -1 - 3t, z = 4t$$

۷. با قرار دادن $z = 0$ در معادلات دو صفحه داده شده، نقطه $(1, 0, 0)$ از خط l به دست می‌آید. بردارهای قائم بر این دو صفحه به ترتیب عبارتند از $\vec{N}_1 = (1, 0, -1)$ و $\vec{N}_\perp = (2, -3, 4)$. خط l با بردار

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_\perp = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

موازی است. در نتیجه معادلات پارامتری l عبارتند از:

$$x = 1 - 3t, y = -6t, z = -3t$$

۸. معادلات پارامتری خط داده شده عبارتند از:

$$x = -1 + 2t, y = -3 + 3t, z = -t$$

این عبارتها را به جای x, y و z در معادله $2 = 4z - 3y + 2x$ قرار می‌دهیم و آن را نسبت به t حل می‌کنیم. داریم $2 = 4t - 3(-3 + 3t) - 2(-1 + 2t)$ و در نتیجه $t = \frac{5}{9}$. پس نقطه تلاقی این خط و صفحه برابر $(\frac{1}{9}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{9})$ است.

۹. فاصله نقطه P از صفحه داده شده برابر است با

$$h = \frac{|6 + 1 + 4 - 5|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

۱۰. دو بردار قائم بر این دو صفحه به ترتیب عبارتند از $\vec{N}_1 = (2, -3, 4)$ و $\vec{N}_\perp = (4, -6, 8)$. چون $\vec{N}_\perp = 2\vec{N}_1$ ، این دو بردار، و در نتیجه دو صفحه داده شده، موازی یکدیگر هستند.

۱۱. با حل کردن دستگاه

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$$

نقطهٔ تلاقی این سه صفحه برابر با $(1, 0, 2)$ به دست می‌آید.

تمرینهای فصل ۵

تمرینهای ۱.۵

۱. داریم

$$\begin{aligned} 3w &= v + 2u \\ &= (1, 2, 0, -1) + 2(2, 0, 1, 0) \\ &= (1, 2, 0, -1) + (4, 0, 2, 0) = (5, 2, 2, -1) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$w = \frac{1}{3}(5, 2, 2, -1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

۲.

$$\begin{aligned} |u| &= |(2, 0, 1, 0)| = \sqrt{4+0+1+0} = \sqrt{5} \\ |v| &= |(1, 2, 0, -1)| = \sqrt{1+4+0+1} = \sqrt{6} \\ |u+v| &= |(2, 0, 1, 0) + (1, 2, 0, -1)| \\ &= |(3, 2, 1, -1)| = \sqrt{9+4+1+1} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

۳. فرض کنیم $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ در این صورت

$$\begin{aligned} |cu| &= |\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n)| \\ &= |(\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)| = \sqrt{\alpha^2 a_1^2 + \alpha^2 a_2^2 + \dots + \alpha^2 a_n^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \\ &= |\alpha| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = |\alpha| |u| \end{aligned}$$

۴. فرض کنیم $cu = \theta$ و $\alpha \neq 0$. در این صورت $1/\alpha$ وجود دارد و

$$\frac{1}{\alpha}(cu) = \frac{1}{\alpha}\theta$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\alpha\right)u = \theta$$

$$-u = \theta$$

$$u = -\theta$$

تمرینهای ۲.۵

۱. بنابه تعریف تساوی دو ماتریس، داریم $2x + 1 = 2$ ، $y = y$ ، $z = 8$ ، پس اگر $x = \frac{1}{2}$ ، $z = 8$ و y هر عدد حقیقی باشد، آنگاه دو ماتریس داده شده برابر هستند.
۲. بنابر تعریف تساوی دو ماتریس، داریم $2a + 3 = a - 5$ ، $2b - 2 = b + 1$ ، $2c + 1 = 2c + 3$ ، $a = -8$ و $2d = d$. معادله $2d = d$ نشان می‌دهد که $d = 0$. معادلات $2a + 3 = a - 5$ و $2b - 2 = b + 1$ نشان می‌دهند که $a = -8$ و $b = 3$ ، با حل کردن معادلات دیگر، $c = -2$ به دست می‌آیند.
- ۳.

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & -1+3 & 3+0 \\ 0+2 & 1-1 & 2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A+3B = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 6 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3A-2B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +2 & -6 & 0 \\ -4 & +2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -9 & 9 \\ -4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A + 2(B - A) &= A + 2B - 2A = 2B - A \\
 &= 2 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

۴. داریم

$$\begin{aligned}
 2C &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

پس

$$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۵. روشن است که

$$\begin{aligned}
 2(-A + 2B) + 2D &= A \Rightarrow -2A + 6B + 2D = A \\
 \Rightarrow 2D &= A + 2A - 6B = 3A - 6B \\
 \Rightarrow D &= A - 2B
 \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & -7 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5+0 & -2+2\sqrt{2} \\ 15+0 & -6+\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -2+2\sqrt{2} \\ 15 & -6+\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ -2 \cdot 2 & -2 \cdot 1 & -2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot 1 & 0 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+1 & 1+0+0 \\ 0+1+0 & 0+0+0 & 2+1+0 \\ 0+1+0 & 0+0+0 & 3+1+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(B+C) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-6 & -4-1 \\ 0+6 & 0+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(AB)C &= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 5 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(AC)^T &= C^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^T(BC) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

۸. از معادله ماتریسی داده شده، دستگاه معادلات

$$x + 5y = 1$$

$$2x + 5y = 4$$

به دست می‌آید. چون $x = 3$ ، $y = -\frac{2}{5}$ جواب این دستگاه است، پس

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

جواب معادله ماتریسی داده شده است.

۹. داریم

$$x^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 x^2 - 3x + 7I &= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7-9+2 & 3-3+0 \\ -6+6+0 & -2+0+2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس داده شده X در معادله $X^2 - 3X + 7I = 0$ صدق می‌کند.
۱۰. داریم

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-1 & \\ & -1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-1 & \\ & -1+1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

۱۱. داریم

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+6 & \\ & -10+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3-3 & \\ & 6-5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I
 \end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$BA = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۱۲. چون $(AA^T)^T = (AT)^T A^T = AA^T$ پس AA^T متقارن است.

۱۳. چون

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس A متعامد است. همچنین

$$\begin{aligned} BB^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

در نتیجه B متعامد است. همچنین، چون

$$\begin{aligned} CC^T &= \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

C متعامد است. چون

$$\begin{aligned} DD^T &= \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4/9 + 4/9 + 1/9 & 2/9 - 4/9 + 2/9 & 4/9 - 2/9 - 2/9 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

پس D نیز متعامد است. در پایان، چون $II^T=II=I$ ، ماتریس همانی I یک ماتریس متعامد است.
 ۱۴. می‌دانیم که A متعامد است اگر و تنها اگر $AA^T=I$ ؛ یعنی اگر و تنها اگر

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس A متعامد اگر و تنها اگر $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ و $ac+bd=0$.

تمرینهای ۳.۵

۱. احکام قضیه ۹.۳.۵ برای ماتریسهای 2×2 را در مورد سطرهای آن ثابت می‌کنیم. اثبات این احکام در مورد ستونهای ماتریسهای 2×2 نیز به همین ترتیب انجام می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = a \cdot - b \cdot = 0 \quad (1)$$

(۲) فرض کنیم α یک اسکالر باشد، در این صورت

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha a d - \alpha b c = \alpha(ad - bc) \\ = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(۳) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc) = -\det A$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0 \quad (4)$$

(۵) فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و α یک اسکالر باشد. در این صورت

$$\begin{vmatrix} a+\alpha c & b+\alpha d \\ c & d \end{vmatrix} = (a+\alpha c)d - c(b+\alpha d) \\ = ad + \alpha cd - bc - \alpha cd \\ = ad - bc = \det A$$

(۶) فرض کنیم

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

در این صورت، چون

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{bmatrix}$$

پس

$$\begin{aligned} |AB| &= (a_1 b_1 + a_2 b_3)(a_3 b_2 + a_4 b_4) - (a_1 b_2 + a_2 b_4)(a_3 b_1 + a_4 b_3) \\ &= a_1 b_1 a_3 b_2 + a_2 b_3 a_3 b_4 - a_1 b_2 a_3 b_1 - a_2 b_4 a_3 b_3 \end{aligned}$$

که برابر است با

$$(a_1 a_3 - a_2 a_4) (b_1 b_2 - b_3 b_4) = |A| |B|$$

$$\begin{vmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{vmatrix} = ab - \cdot \cdot = ab \quad (۷)$$

$$(۸) \text{ فرض کنیم } A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ در این صورت}$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = |A| \quad (۹) \text{ روشن است که}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۱ \end{vmatrix} = ۱$$

$$\begin{vmatrix} ۸ & \cdot \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۸ \cdot ۱ - \cdot ۲ = ۸ \quad (۲) \text{ الف}$$

$$\begin{vmatrix} a-b & \cdot \\ ۱ & c-d \end{vmatrix} = (a-b)(c-d) \quad (ب)$$

۳. چون

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ x & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3x = 0$$

پس $x = -\frac{2}{3}$
داریم ۴.

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & x \end{vmatrix} = x^2 - 16$$

با حل کردن نامعادله $x^2 - 16 > 0$ نتیجه می‌گیریم که $x > 4$ یا $x < -4$.
چون ۵.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

پس $|A+B| = 12$ و $|AB| = 3$.
چون ۶.

$$xI - A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{bmatrix}$$

پس

$$|xI - A| = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$$

۷. با توجه به حل تمرین ۶، داریم

$$\begin{aligned} \det(xI - A) &= x^2 - (1+3)x + (-3+3) \\ &= x^2 - 4x \end{aligned}$$

ریشه‌های معادله $x^2 - 4x = 0$ عبارت‌اند از $x = 0$ و $x = 4$.

۸.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{R_1 + 2R_2}{=} \begin{vmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ = -(20 - 5) = -15$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 9 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1+R_2 \\ R_2+9R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 32 & 21 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 32 & 21 \end{vmatrix} \\ = -1(63-192) = 129$$

۹. بنابر مسأله نمونه‌ای ۱۱.۳.۴، حجم این متوازی السطوح برابر است با $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$. چون

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

پس حکم مسأله اثبات شده است.

۱۰. با توجه به حل تمرین ۹، داریم

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{(تعویض سطر اول با سطر دوم)} \quad R_1 \leftrightarrow R_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{(تعویض سطر دوم با سطر سوم)} \quad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

۱۱. اگر دترمینان داده شده را نسبت به ستون سوم بسط دهیم، عبارت مورد نظر به دست می آید.

۱۲. چون

$$ADEC \text{ مساحت} = \frac{1}{4} (EC+AD)DE = \frac{1}{4} (c_2+a_2)(c_1-a_1)$$

$$CEFB \text{ مساحت} = \frac{1}{4} (b_2+c_2)(b_1-c_1)$$

$$ADFB \text{ مساحت} = \frac{1}{4} (b_2+a_2)(b_1-a_1)$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با قدر مطلق عبارت زیر

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (c_2+a_2)(c_1-a_1) + \frac{1}{4} (b_2+c_2)(b_1-c_1) - \frac{1}{4} (b_2+a_2)(b_1-a_1) \\ &= -\frac{1}{4} (a_1c_2-a_2c_1) + \frac{1}{4} (b_1c_2-b_2c_1) + \frac{1}{4} (a_1b_2-a_2b_1) \\ &= -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{4} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{4} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

۱۳. با توجه به تمرین ۱۲، چون

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (35-16) - (14-12) + (8-15) \\ &= 19-2-7=10 \end{aligned}$$

مساحت مثلث داده شده برابر است با $\frac{10}{4} = 5$.

۱۴. مساحت این مثلث برابر است با قدر مطلق عبارت

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(1-6) - (x-3y) + (2x-y)] \\ &= \frac{1}{2} (-5-x+3y+2x-y) \\ &= \frac{1}{2} (x+2y-5) \end{aligned}$$

۱۵. با توجه به حل تمرین ۱۴، معادله خط مورد نظر عبارت است از $\frac{1}{2}(x+2y-5)=0$ یا $x+2y=5$.

۱۶. چون

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-1+2) + 2(3-5) - 3(-6+5) \\ &= 1-4+3=0. \end{aligned}$$

سه خط داده شده از یک نقطه می‌گذرند.

۱۷. داریم

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & x & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2x+5-2(2-15)+5(-1-3x) \\ &= 2x+5+26-5-15x \\ &= -13x+26 \end{aligned}$$

جواب معادله $-13x+26=0$ برابر است با $x=2$.

۱۸. داریم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & x & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ x & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (x^2 + 12) - (-16 + 12) + (-6 + 3x)$$

$$= -x^2 + 3x + 10.$$

جوابهای معادله $-x^2 + 3x + 10 = 0$ عبارت‌اند از $x = -2$ و $x = 5$.
۱۹.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 + R_1 \\ R_3 - 4R_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & -8 & -11 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ -8 & -11 & -18 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 - 5R_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 0 \\ -8 & -11 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= -7(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -11 & -18 \end{vmatrix} = 7(-18 + 11) = -49$$

۲۰. چون ستون اول دترمینان داده شده با ستون سوم آن برابر است، این دترمینان صفر است.

تمرینهای ۴.۵

۱. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right]$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازهای A برابر است با

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس الحاقی ماتریس A برابر است با ترانوادهٔ B ، یعنی

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۲. روش تحویل سطری:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{-R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

در نتیجه

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازها برابر است با

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{5} & \frac{۲}{5} \\ \frac{۱}{5} & \frac{۱}{5} \end{bmatrix}$$

۳. روشن است که هر دو عدد $\cos \theta$ و $\sin \theta$ همزمان صفر نیستند. فرض می‌کنیم $\cos \theta \neq 0$.
داریم

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \cos \theta & -\sin \theta & ۱ & ۰ \\ -\sin \theta & -\cos \theta & ۰ & ۱ \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{\cos \theta} R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -\text{tg} \theta & ۱/\cos \theta & ۰ \\ -\sin \theta & -\cos \theta & ۰ & ۱ \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 + \sin \theta R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -\text{tg} \theta & ۱/\cos \theta & ۰ \\ ۰ & -1/\cos \theta & \text{tg} \theta & ۱ \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-\cos \theta R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -\text{tg} \theta & ۱/\cos \theta & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\sin \theta & -\cos \theta \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 + \text{tg} \theta R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & \cos \theta & -\sin \theta \\ ۰ & ۱ & -\sin \theta & -\cos \theta \end{array} \right]$$

در نتیجه

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازهای A برابر است با

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۴. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2-2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & -1/3 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/9 & 2/3 & -4/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & -1/3 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right]$$

در نتیجه

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -7 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازهای A برابر است با

$$\begin{bmatrix} -7 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -7 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

۵. روش تحویل سطری:

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1
 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
 \cdot & -1 & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & 1
 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{R_4 + R_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & -1 & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & 1
 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ R_4 + R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & -1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & 1 & 1
 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{R_3 - R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & 1 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

در نتیجه

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & \cdot & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازهای A برابر است با

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

پس

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & \cdot & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۶. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1}]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 - R_2 \\ R_3 + R_2}]{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 - 3R_3 \\ R_2 + R_3}]{R_1 - 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right]$$

در نتیجه

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازهای A برابر است با

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که چون B متقارن است، ترانپوز آن با خودش برابر است.
 \forall ماتریس A وارونپذیر است اگر و تنها اگر $|A| \neq 0$. چون

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 4 \end{vmatrix} = 4 - x^2$$

پس A وارونپذیر است اگر و تنها اگر $x \neq \pm 2$. به همین ترتیب چون

$$|B| = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x(x^2 - 1) - x$$

$$= x(x^2 - 2)$$

پس B وارونپذیر است اگر و تنها اگر $x \neq 0$ ، $x \neq \pm\sqrt{2}$.
۸. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

چون یک سطر صفر در نیمه چپ ماتریس مرکب فوق به دست آمد، پس این نیمه به ماتریس همانی تبدیل نخواهد شد. بنابراین وارون A وجود ندارد.
روش دوم این است که نشان دهیم $|A| = 0$. داریم

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (2 - 3) = 0$$

در نتیجه A وارونپذیر نیست.
۹. داریم

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

حال این ماتریس را از سمت چپ به دو طرف معادله داده شده ضرب می‌کنیم. داریم

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$IX = \begin{bmatrix} 14 & 28 \\ -9 & -18 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$X = \begin{bmatrix} 14 & 28 \\ -9 & -18 \end{bmatrix}$$

۱۰. مانند تمرین قبل عمل می‌کنیم. داریم

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -11 \end{bmatrix}$$

تمرینهای ۵.۵

۱. ماتریس مرکب حاصل از ماتریس ضرایب این دستگاه و ماتریس ستونی اعداد طرف دیگر معادلات را تشکیل می‌دهیم. سپس روش حذفی گاوسی را به کار می‌بریم. داریم

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 13 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 7R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ -9 & -15 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{R_2 + 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

سطر دوم به این معنی است که $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -4$ یعنی $0 = -4$ که یک تناقض است. پس این دستگاه جوابی ندارد.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -7 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & -8 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\begin{array}{l} -R_2 \\ \frac{1}{2}R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

چون همه سطرها، بجز سطر سوم که به صفر تبدیل شده است، به کار رفته‌اند، عملیات متوقف می‌شود. دستگاه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 5 \\ x_2 - 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

که در آن x_p هر عدد طبیعی را اختیار می‌کند؛ یعنی x_p یک مجهول آزاد است. بنابراین مجموعه جوابهای این دستگاه برابر است با

$$\{(x_1, x_p, x_p) | x_1 = -2x_p + 5, x_p = 3x_p - 4, x_p \in \mathbf{R}\} = \{(-2x_p + 5, 3x_p - 4, x_p) | x_p \in \mathbf{R}\}$$

به عنوان مثال

$$x_p = -1, x_1 = 3, x_p = 1; x_p = -4, x_1 = 5, x_p = 0$$

دو جواب این دستگاه هستند.

۳.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 - R_2 \\ R_1 - R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

سطرهای اول و دوم به کار رفته‌اند و ضرایب x_p و x_p به‌جز در یک سطر به صفر تبدیل شده‌اند مشاهده می‌کنیم که سطر سوم قابل استفاده نیست. پس دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید که در آن مجهول آزاد است.

$$-x_1 + x_p = 2$$

$$2x_1 + x_p = -1$$

مجموعه جوابهای دستگاه داده شده برابر است با

$$\{(x_1, x_p, x_p) | x_p = x_1 + 2, x_p = -2x_1 - 1, x_1 \in \mathbf{R}\} = \{(x_1, x_1 + 2, -2x_1 - 1) | x_1 \in \mathbf{R}\}$$

۴.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 - R_2 \\ R_3 - R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

چون سطری بدون استفاده باقی نمانده است، عملیات متوقف می‌شود. ضرایب مجهولهای x_1 و x_p پاک کردیم، پس x_p و x_p هر دو مجهول آزاد هستند. به این ترتیب دستگاه

زیر به دست می‌آید.

$$x_1 + x_3 = 5$$

$$x_2 + x_3 = -2$$

در نتیجه، مجموعه جوابهای دستگاه داده شده برابر است با

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 5 - x_3, x_2 = -2 - x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(5 - x_3, -2 - x_3, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

به عنوان مثال

$$x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 0, x_4 = 0$$

یک جواب دستگاه داده شده است.

۵. وارون ماتریس ضرایب دستگاه را پیدا می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ -R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

پس وارون ماتریس ضرایب برابر است با

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

یعنی $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1$ جواب منحصر به فرد دستگاه داده شده است.

۶. (الف) ماتریس ضرایب این دستگاه برابر است با

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه، بنابه دستور کرامر، داریم

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5}$$

$$x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{3}{5}$$

(ب) ماتریس ضرایب این دستگاه برابر است با

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

۷. روش حذفی گاوسی را به کار می‌بریم. داریم

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & b \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a - 2b \\ 1 & 2 & b \end{array} \right]$$

این دستگاه وقتی دارای جواب است که $a - 2b = 0$. به عبارت دیگر دستگاه داده شده به ازای مقادیری از a و b جواب دارد که در معادله $a = 2b$ صدق کنند. به عنوان مثال به ازای $a = 0$ و $b = 0$ یا $a = 2$ و $b = 1$ ، دستگاه فوق دارای جواب است.

۸. مانند تمرین ۷ عمل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & a \\ 5 & 13 & 7 & b \\ 3 & 5 & 0 & c \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 7R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & a \\ -9 & -15 & 0 & b-7a \\ 3 & 5 & 0 & c \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - 2R_2 \\ R_1 - \frac{2}{3}R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\sqrt{2} & 1 & a - \frac{2}{3}c \\ 0 & 0 & 0 & b-7a-2c \\ 3 & 5 & 0 & c \end{array} \right]$$

در نتیجه این دستگاه به ازای مقادیری از a ، b و c جواب دارد که در معادله $b-7a-2c=0$ صدق کنند.

۹. داریم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 1 & 3 & -7 & c \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-2a \\ 0 & 2 & -8 & c-a \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ R_3 + 2R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & 2a-b \\ 0 & 0 & -10 & c+2b-5a \end{array} \right]$$

پس دستگاه داده شده به ازای مقادیری از a ، b و c دارای جواب است که $b-a=0$. بنابراین c هر مقداری را می‌تواند اختیار کند.

تمرینهای ۶.۵

۱. فرض کنیم

$$x_1(1, 2, 3) + x_2(1, 0, 2) + x_3(2, 2, 5) = (0, 0, 0)$$

پس دستگاه زیر را به دست می‌آوریم

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

چون درمینان ماتریس ضرایب این دستگاه برابر است با

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

این دستگاه معادلات بیش از یک جواب دارد. چون $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ یک جواب آن است، پس

جواب ناصفر نیز دارد. بنابراین مجموعه A دارای وابستگی خطی است. حال مجموعه B را می‌آزماییم. فرض کنیم

$$x_1(1, 2, 3) + x_2(1, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

در نتیجه دستگاه زیر را داریم

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$2x_1 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

از معادله دوم نتیجه می‌گیریم که $x_1 = 0$. با قرار دادن این مقدار x_1 در دو معادله دیگر به دست می‌آوریم $x_2 = 0$. پس تنها جواب این دستگاه جواب صفر است. بنابراین مجموعه B استقلال خطی دارد.

۲. با توجه به مثالهای حل شده، نتیجه می‌گیریم که به طور کلی یک مجموعه n عضوی در فضای R^n تشکیل پایه‌ای برای R^n می‌دهد اگر و تنها اگر درمینان ماتریس A که سطرهای آن بردارهای داده شده هستند، ناصفر باشد. چون

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

A پایه‌ای برای R^2 است. همچنین، چون

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

B نیز پایه‌ای برای R^2 تشکیل می‌دهد.

۳. چون این مجموعه در فضای دو بعدی R^2 دارای سه عضو است، وابستگی خطی دارد و در نتیجه نمی‌تواند پایه‌ای برای R^2 تشکیل دهد.

۴. چون

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

مجموعه داده شده پایه‌ای برای R^2 تشکیل نمی‌دهد.

۵. چون درمینان ماتریس حاصل از بردارهای داده شده، یعنی

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - (1) = -3$$

ناصفر است، مجموعه داده شده پایه‌ای برای R^3 تشکیل می‌دهد.

۶. چون

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

این مجموعه پایه‌ای برای R^3 تشکیل نمی‌دهد.

۷. ماتریس تغییر مختصات ماتریسی است که ستونهای آن بردارهای داده شده در پایه جدید هستند، یعنی

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

چون

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس لذا مختصات نقطه $(1,1)$ نسبت به پایه جدید برابرند با $x'_1 = \frac{1}{2}$ ، $x'_2 = 0$.

۸. با توجه به تمرین ۷، چون

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

پس مختصات نقطه $(-1,2)$ نسبت به پایه جدید برابرند با $x'_1 = \frac{1}{10}$ و $x'_2 = 2/5$.

۹. ماتریس تغییر مختصات و وارون آن عبارت‌اند از

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

چون

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مختصات بردار $(1, 2, 3)$ نسبت به پایه جدید برابرند با $x'_1 = -2/3$ ، $x'_2 = 1/3$ و $x'_3 = 4/3$.
 ۱۰. با توجه به تمرین ۹، چون

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

مختصات جدید نقطه $(1, 1, 1)$ عبارت‌اند از $x'_1 = 1/3$ ، $x'_2 = 1/3$ و $x'_3 = 1/3$.
 ۱۱. این مجموعه تشکیل پایه‌ای برای R^3 می‌دهد اگر

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

ولی به ازای هر مقدار x ، داریم

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \\ = -x(-x) + (x^2 - 1) = -1$$

که ناصفر است. بنابراین مجموعه داده شده به ازای هر مقدار x پایه‌ای برای R^3 تشکیل می‌دهد.
 ۱۲.

$$\begin{bmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{bmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & x \\ 0 & x \end{vmatrix} \\ = -x^3 - x^3 = -2x^3$$

مجموعه داده شده وقتی یک پایه برای R^3 است که $-2x^3 \neq 0$ ، یعنی اگر $x \neq 0$.

تمرینهای ۷.۵

۱. چون

$$\begin{aligned}
 T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) &= T \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ y_1+y_2+z_1+z_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ y_1+z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ y_2+z_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
 T \left(\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) &= T \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha y + \alpha z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \end{bmatrix} = \alpha \cdot T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

پس T یک تبدیل خطی است. حال ماتریس نمایشگر T را پیدا می‌کنیم. چون

$$T \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

ماتریس نمایشگر T برابر است با

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \end{bmatrix}$$

این مطلب درستی جواب به دست آمده را تأیید می‌کند.

$$\begin{aligned}
 T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) &= T \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}(x_1+x_2)+a_{12}(y_1+y_2)+a_{13}(z_1+z_2) \\ a_{21}(x_1+x_2)+a_{22}(y_1+y_2)+a_{23}(z_1+z_2) \\ a_{31}(x_1+x_2)+a_{32}(y_1+y_2)+a_{33}(z_1+z_2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1 \\ a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2 \\ a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23}z_2 \\ a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha x + a_{12}\alpha y + a_{13}\alpha z \\ a_{21}\alpha x + a_{22}\alpha y + a_{23}\alpha z \\ a_{31}\alpha x + a_{32}\alpha y + a_{33}\alpha z \end{bmatrix} \\
&= \alpha \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{bmatrix} = \alpha T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

پس T یک تبدیل خطی است. برای پیدا کردن ماتریس نمایشگر T ، می‌نویسیم

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس نمایشگر T برابر است با

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

۳. این تبدیل خطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+y+z \end{bmatrix}$$

۴. داریم

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)(x-2) + 2 = x^2 - 5x + 8$$

چون معادله $x^2 - 5x + 8$ هیچ ریشه‌ای در R ندارد، ماتریس A دارای مقدار ویژه‌ای در R نیست.

به همین ترتیب، داریم

$$|xI - B| = \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)$$

مقادیر ویژه این ماتریس ریشه‌های معادله $(x-2)(x-1)=0$ ، یعنی $x=1$ و $x=2$ هستند. چون

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ \cdot & x-1 & -1 \\ \cdot & \cdot & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$$

در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس A عبارت‌اند از $x=1$ و $x=2$.
۶. برای پیدا کردن فضای ویژه مربوط به $\lambda=1$ معادله

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. از این معادله دستگاه معادلات خطی

$$1x + 0y = 0$$

$$0x + 0y = 0$$

به دست می‌آید. مشاهده می‌کنیم که این دستگاه معادل است با $x=0$ و y مجهول آزاد آن است. پس فضای ویژه B متناظر با $\lambda=1$ برابر است با $\{(0,y) | y \in \mathbf{R}\}$.

برای پیدا کردن فضای ویژه متناظر با $\lambda=2$ ، معادله

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل می‌کنیم. از این معادله فضای ویژه $\lambda=2$ برابر با $\{(x,0) | x \in \mathbf{R}\}$ به دست می‌آید.

۷. مقادیر ویژه A عبارت‌اند از $\lambda=1$ (که دو بار تکرار شده است) و $\lambda=2$. برای پیدا کردن فضای متناظر با $\lambda=1$ ، معادله

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل می‌کنیم. از این معادله دستگاه معادلات خطی

$$y+z=0$$

$$z=0$$

$$z=0$$

به دست می‌آید. مشاهده می‌کنیم که $z=0$ ، $y=0$ و x مجهول آزاد این دستگاه است. در نتیجه فضای ویژه متناظر با $\lambda=1$ برابر است با $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbf{R}\}$.
برای پیدا کردن فضای ویژه متناظر با $\lambda=2$ ، معادله

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل می‌کنیم. از این معادله، دستگاه معادلات خطی

$$-x+y+z=0$$

$$-y+z=0$$

به دست می‌آید. این دستگاه با استفاده از روش حذفی گاوس، به صورت

$$-x+2z=0$$

$$-y+z=0$$

تحویل می‌یابد. در این دستگاه، z مجهول آزاد است و در نتیجه فضای ویژه متناظر با $\lambda=2$ برابر است با $\{(2z, z, z) | z \in \mathbf{R}\}$.

۸. چون

$$xI-A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{bmatrix}$$

پس

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc \\ &= x^2 - (a+d)x + (ad-bc) \\ &= x^2 - (a+d)x + \det A \end{aligned}$$

تمرینهای فصل ۶

تمرینهای ۱.۶

۱. (الف) چون $f_1(t) = \sqrt{t-1}$ در $[1, \infty)$ ، $f_2(t) = \sqrt{2-t}$ در $(-\infty, 2]$ پیوسته هستند، پس \vec{F} در اشتراک این دو بازه یعنی $[1, 2]$ پیوسته است.

$$\vec{F}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}(t-1)^{-1/2} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2-t}}(2-t)^{-1/2} \vec{j} \quad (\text{ب})$$

$$\vec{F}''(t) = -\frac{1}{4}(t-1)^{-3/2} \vec{i} - \frac{1}{4}(2-t)^{-3/2} \vec{j}$$

۲. (الف) دامنه F مجموعه اعداد حقیقی ناصفر است.

$$\vec{F}'(t) = -\frac{1}{t} \vec{i} + 3 \cos 3t \vec{j} \quad (\text{ب})$$

$$\vec{F}''(t) = -\frac{2}{t^2} \vec{i} - 9 \sin 3t \vec{j}$$

۳. (الف) دامنه \vec{F} برابر است با $\{t \in \mathbb{R} \mid t \neq \pi/2 + k\pi\}$

و \vec{F} در دامنه‌اش پیوسته است.

(ب)

$$\vec{F}'(t) = (\sec^2 t, 2t + 8, -4)$$

$$\vec{F}''(t) = (2 \sec^2 t \operatorname{tg} t, 2, 0)$$

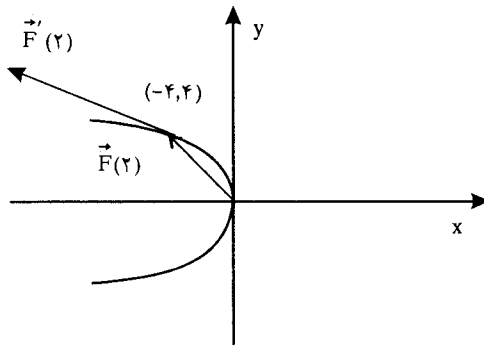
۴. (الف) این تابع در دامنه‌اش $\{t \in \mathbb{R} \mid t \neq 0\}$ پیوسته است.

(ب)

$$\vec{F}'(t) = (2te^{t^2}, \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}, 1)$$

$$\vec{F}''(t) = (2e^{2t} + 4t^2 e^{t^2}, \frac{-t^2 \sin t - 2t \cos t + 2 \sin t}{t^3}, 0)$$

۵. توابع پارامتری حاصل از $\vec{F}(t) = (-t^4/4, t^2)$ عبارت‌اند از $x = -\frac{t^4}{4}$ و $y = t^2$. با حذف t از این معادلات، معادله $y^2 = -4x$ به دست می‌آید. نمودار این معادله در صفحه xy سهمی شکل ۱.۱.۶ است.



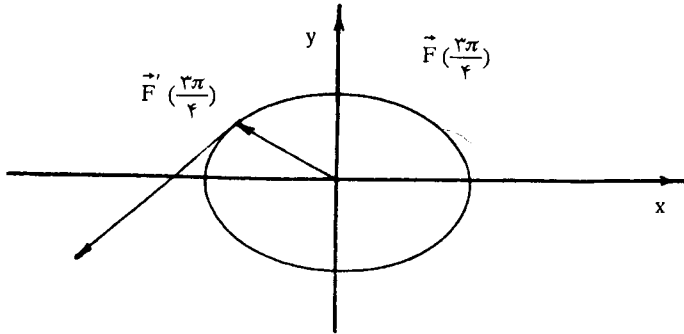
شکل ۱.۱.۶

چون $\vec{F}'(t) = (-t^3, 2t)$ و $F'(2) = (-8, 4)$ همچنین $\vec{F}(2) = (-4, 4)$ این بردارها در شکل بالا نشان داده شده‌اند. بردار $\vec{F}'(2)$ را از نقطه $(-4, 4)$ رسم کرده‌ایم تا مماس بودن آن بر نمودار نشان داده شود.

۶. توابع پارامتری حاصل از $\vec{F}(t) = 4 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}$ عبارت‌اند از $x = 4 \cos t$ و $y = 2 \sin t$. حرف t را به صورت زیر از این معادلات حذف می‌کنیم: داریم $x^2 = 16 \cos^2 t$ و $y^2 = 4 \sin^2 t$ چون $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

که معادله یک بیضی است (شکل ۲.۱.۶ را ببینید).



شکل ۲.۱.۶

حال

$$\begin{aligned}\vec{F}\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= r \cos \frac{3\pi}{4} \hat{i} + r \sin \frac{3\pi}{4} \hat{j} \\ &= -\sqrt{2} \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j}\end{aligned}$$

همچنین، چون

$$\vec{F}'(t) = -r \sin t \hat{i} + r \cos t \hat{j}$$

پس

$$\vec{F}'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -r \sin \frac{3\pi}{4} \hat{i} + r \cos \frac{3\pi}{4} \hat{j} = -\sqrt{2} \hat{i} - \sqrt{2} \hat{j}$$

این دو بردار در نمودار فوق نشان داده شده‌اند.

۷. الف) فرض کنیم $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ و $\vec{G}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$

داریم

$$\begin{aligned}\left[\lim_{t \rightarrow a} [\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] \right] &= \lim_{t \rightarrow a} [f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), f_3(t) + g_3(t)] \\ \lim_{t \rightarrow a} (f_1(t) + g_1(t)) \quad \lim_{t \rightarrow a} (f_2(t) + g_2(t)) \quad \lim_{t \rightarrow a} (f_3(t) + g_3(t)) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \lim_{t \rightarrow a} f_2(t), \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) \right) + \left(\lim_{t \rightarrow a} g_1(t), \lim_{t \rightarrow a} g_2(t), \lim_{t \rightarrow a} g_3(t) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow a} \vec{F}(t) + \lim_{t \rightarrow a} \vec{G}(t)\end{aligned}$$

(ب) اثبات این حکم مانند حکم الف است.

(ب)

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow a} f(t) \vec{F}(t) &= \lim_{t \rightarrow a} f(t) [f_{\setminus}(t), f_{\Upsilon}(t), f_{\Upsilon}(t)] \\
 &= \lim_{t \rightarrow a} [f(t)f_{\setminus}(t), f(t)f_{\Upsilon}(t), f(t)f_{\Upsilon}(t)] \\
 &= \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t)f_{\setminus}(t), \lim_{t \rightarrow a} f(t)f_{\Upsilon}(t), \lim_{t \rightarrow a} f(t)f_{\Upsilon}(t) \right] \\
 &= \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \lim_{t \rightarrow a} f_{\setminus}(t), \lim_{t \rightarrow a} f(t) \lim_{t \rightarrow a} f_{\Upsilon}(t), \lim_{t \rightarrow a} f(t) \lim_{t \rightarrow a} f_{\Upsilon}(t) \right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow a} f(t) \left(\lim_{t \rightarrow a} f_{\setminus}(t), \lim_{t \rightarrow a} f_{\Upsilon}(t), \lim_{t \rightarrow a} f_{\Upsilon}(t) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow a} f(t) \lim_{t \rightarrow a} \vec{F}(t)
 \end{aligned}$$

(ت) اثبات این حکم در قضیه ۶.۱.۶ داده شده است.

(ث) چون حد مجموع و حاصلضرب توابع حقیقی برابر با مجموع و حاصلضرب حدهای آن توابع است.

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow a} [\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)] &= \lim_{t \rightarrow a} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_{\setminus}(t) & f_{\Upsilon}(t) & f_{\Upsilon}(t) \\ g_{\setminus}(t) & g_{\Upsilon}(t) & g_{\Upsilon}(t) \end{vmatrix} \\
 &= \lim_{t \rightarrow a} \begin{vmatrix} f_{\Upsilon}(t) & f_{\Upsilon}(t) \\ g_{\Upsilon}(t) & g_{\Upsilon}(t) \end{vmatrix} \Big|_{\vec{i}} - \lim_{t \rightarrow a} \begin{vmatrix} f_{\setminus}(t) & f_{\Upsilon}(t) \\ g_{\setminus}(t) & g_{\Upsilon}(t) \end{vmatrix} \Big|_{\vec{j}} \\
 &\quad + \lim_{t \rightarrow a} \begin{vmatrix} f_{\setminus}(t) & f_{\Upsilon}(t) \\ g_{\setminus}(t) & g_{\Upsilon}(t) \end{vmatrix} \Big|_{\vec{k}} \\
 &= \begin{vmatrix} \lim_{t \rightarrow a} f_{\setminus}(t) & \lim_{t \rightarrow a} f_{\Upsilon}(t) \\ \lim_{t \rightarrow a} g_{\setminus}(t) & \lim_{t \rightarrow a} g_{\Upsilon}(t) \end{vmatrix} \Big|_{\vec{i}} - \begin{vmatrix} \lim_{t \rightarrow a} f_{\setminus}(t) & \lim_{t \rightarrow a} f_{\Upsilon}(t) \\ \lim_{t \rightarrow a} g_{\setminus}(t) & \lim_{t \rightarrow a} g_{\Upsilon}(t) \end{vmatrix} \Big|_{\vec{j}} \\
 &\quad + \begin{vmatrix} \lim_{t \rightarrow a} f_{\setminus}(t) & \lim_{t \rightarrow a} f_{\Upsilon}(t) \\ \lim_{t \rightarrow a} g_{\setminus}(t) & \lim_{t \rightarrow a} g_{\Upsilon}(t) \end{vmatrix} \Big|_{\vec{k}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lim_{t \rightarrow a} f_1(t) & \lim_{t \rightarrow a} f_2(t) & \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) \\ \lim_{t \rightarrow a} g_1(t) & \lim_{t \rightarrow a} g_2(t) & \lim_{t \rightarrow a} g_3(t) \end{vmatrix} \\
 &= \left(\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \lim_{t \rightarrow a} f_2(t), \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) \right) \times \left(\lim_{t \rightarrow a} g_1(t), \lim_{t \rightarrow a} g_2(t), \lim_{t \rightarrow a} g_3(t) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow a} \vec{F}(t) \times \lim_{t \rightarrow a} \vec{G}(t)
 \end{aligned}$$

۸. چون

$$\vec{F}'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t) \vec{i} - (e^t \sin t + e^t \cos t) \vec{k}$$

$$\vec{G}'(t) = 3\vec{i} - 2t\vec{j} + 4 \operatorname{sect} \operatorname{tg} t \vec{k}$$

پس، بنابه قضیه ۱۴.۱.۶ (ت) و (ث)، داریم

$$\begin{aligned}
 (\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t))' &= \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t) \\
 &= (e^t \cos t - e^t \sin t) \vec{i} - (e^t \sin t + e^t \cos t) \vec{k} \cdot (3t\vec{i} - 2t\vec{j} + 4 \operatorname{sect} t \vec{k}) \\
 &\quad + (e^t \cos t \vec{i} - e^t \sin t \vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 2t\vec{j} + 4 \operatorname{sect} t \operatorname{tg} t \vec{k}) \\
 &= 3te^t \cos t - 3te^t \sin t - 4e^t \operatorname{tg} t - 4e^t + 3e^t \cos t - 4e^t \operatorname{tg}^2 t \\
 &= e^t (3t \cos t - 3t \sin t - 4 \operatorname{tg} t - 4 + 3 \cos t - 4 \operatorname{tg}^2 t)
 \end{aligned}$$

این مشتق را به روش زیر نیز می‌توانیم پیدا کنیم: چون

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) &= (e^t \cos t \vec{i} - e^t \sin t \vec{k}) \cdot (3t\vec{i} - 2t\vec{j} + 4 \operatorname{sect} \vec{k}) \\
 &= 3te^t \cos t - 4e^t \operatorname{tg} t
 \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}
 [\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)]' &= 3e^t \cos t + 3te^t \cos t - 3te^t \sin t - 4e^t \operatorname{tg} t - 4e^t (1 + \operatorname{tg}^2 t) \\
 &= e^t (3 \cos t + 3t \cos t - 3t \sin t - 4 \operatorname{tg} t - 4 - 4 \operatorname{tg}^2 t)
 \end{aligned}$$

همچنین، داریم

$$[\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t) \times \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \times \vec{G}'(t)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t \cos t - e^t \sin t & 0 & -(e^t \sin t + e^t \cos t) \\ 3t & -2t & 4 \operatorname{sect} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t \cos t & 0 & -e^t \sin t \\ 3 & -2t & 4 \operatorname{sect} \operatorname{tg} t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-t^{\frac{1}{2}}e^t \sin t - t^{\frac{1}{2}}e^t \cos t)\vec{i} - (\cancel{4}e^t - \cancel{4}e^t \operatorname{tg} t + \cancel{3}te^t \sin t + \cancel{3}te^t \cos t)\vec{j} \\
&\quad + (-t^{\frac{1}{2}}e^t \cos t + t^{\frac{1}{2}}e^t \sin t)\vec{k} + (-\cancel{2}te^t \sin t)\vec{i} \\
&\quad - (\cancel{4}e^t \operatorname{tg} t + \cancel{3}e^t \sin t)\vec{j} + (-\cancel{2}te^t \cos t)\vec{k} \\
&= -te^t(t \sin t + t \cos t + \sqrt{2} \sin t)\vec{i} - e^t(4 + \sqrt{2}t \sin t + \sqrt{2}t \cos t + \sqrt{2} \sin t)\vec{j} \\
&\quad + te^t(-t \cos t + t \sin t - \sqrt{2} \cos t)\vec{k}
\end{aligned}$$

۹. این تمرین را به دو روش حل می‌کنیم.

$$\vec{F}(u(t)) = \ln \sqrt{t} \vec{i} - \cancel{4}e^{\sqrt{t}} \vec{j} + \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}} \vec{k} \quad (۱) \text{ داریم}$$

پس

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}} \vec{i} - \frac{\cancel{4}}{\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{t}} \vec{k}$$

$$\vec{F}(u) = \ln u \vec{i} - \cancel{4}e^{\sqrt{u}} \vec{j} + \frac{u-1}{u} \vec{k} \quad (۲) \text{ چون}$$

بنابه قضیه ۱۴.۱.۶ (ج)، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{F}}{dt} &= \frac{du}{dt} \frac{d\vec{F}}{du} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{u} \vec{i} - \cancel{4}e^{\sqrt{u}} \vec{j} + \frac{1}{u^2} \vec{k} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \vec{i} - \cancel{4}e^{\sqrt{t}} \vec{j} + \frac{1}{t} \vec{k} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \vec{i} - \frac{\cancel{4}}{\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{t}} \vec{k}
\end{aligned}$$

۱۰. این تمرین را نیز به دو روش حل می‌کنیم.

(۱) چون

$$\vec{F}(u(t)) = \cos^{\sqrt{t}} t \vec{i} - \sqrt{\cancel{3}} \cos t \vec{j} + \sec^{\sqrt{t}} t \vec{k}$$

پس

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = -\sqrt{\cancel{3}} \sin t \cos^{\sqrt{t}-1} t \vec{i} + \sqrt{\cancel{3}} \sin t \vec{j} + \sqrt{\cancel{3}} \sec^{\sqrt{t}} t \operatorname{tg} t \vec{k}$$

$$F(u) = u^{\sqrt{t}} \vec{i} - \sqrt{\cancel{3}} u \vec{j} + \frac{1}{u^{\sqrt{t}}} \vec{k} \quad (۲) \text{ چون}$$

پس

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{F}}{dt} &= \frac{du}{dt} \frac{d\vec{F}}{du} = -\sin t (\sqrt{u} \vec{i} - \sqrt{3} \vec{j} - \frac{1}{u} \vec{k}) \\ &= -\sin t (\sqrt{3} \cos^2 t \vec{i} - \sqrt{3} \vec{j} - \sqrt{3} \sec^2 t \vec{k}) \\ &= -\sqrt{3} \sin t \cos^2 t \vec{i} + \sqrt{3} \sin t \vec{j} + \sqrt{3} \sec^2 t \operatorname{tg} t \vec{k}\end{aligned}$$

.۱۱

$$\begin{aligned}\int (t \sqrt{3} \vec{i} - (\sqrt{3} t - 1) \vec{j} - \frac{1}{t} \vec{k}) dt &= \left(\int t \sqrt{3} dt \right) \vec{i} - \left(\int (\sqrt{3} t - 1) dt \right) \vec{j} - \left(\int \frac{1}{t} dt \right) \vec{k} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 \vec{i} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 - t \right) \vec{j} + \frac{1}{t} \vec{k} + \vec{c}\end{aligned}$$

که در آن \vec{c} یک بردار ثابت است.

۱۲. با به کار بردن روش جزء به جزء، داریم

$$\int t \cos t dt = t \sin t + \cos t \quad \text{و} \quad \int t \sin t dt = -t \cos t + \sin t$$

همچنین $\int \sqrt{3} t^2 dt = \frac{\sqrt{3}}{3} t^3$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\int (t \cos t \vec{i} + t \sin t \vec{j} + \sqrt{3} t^2 \vec{k}) dt &= (t \sin t + \cos t) \vec{i} \\ &+ (\sin t - t \cos t) \vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3} t^3 \vec{k} + \vec{c}\end{aligned}$$

که در آن \vec{c} یک بردار ثابت است.

.۱۳

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j} + t \vec{k}) dt &= (e^t \vec{i} - e^{-t} \vec{j} + t \vec{k}) \Big|_0^1 \\ &= (e \vec{i} - e^{-1} \vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} - \vec{j} + 0 \vec{k}) \\ &= (e - 1) \vec{i} - (e^{-1} - 1) \vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 [(1+t)^{\gamma/\gamma} \hat{i} - (1-t)^{\gamma/\gamma} \hat{j}] dt \\
 &= \left[\frac{\gamma}{\delta} (1+t)^{\delta/\gamma} \hat{i} - \frac{\gamma}{\delta} (1-t)^{\delta/\gamma} \hat{j} \right]_{-1}^1 \\
 &= \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \gamma^{\delta/\gamma} \hat{i} - \hat{j} \right) - \left(\hat{i} - \frac{\gamma}{\delta} \cdot \gamma^{\delta/\gamma} \hat{j} \right) \\
 &= \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{\delta} \hat{i} + \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{\delta} \hat{j}
 \end{aligned}$$

۱۵. داریم

$$\vec{F}''(t) = -\sin t \hat{i} + \cos t \hat{j}, \quad \vec{F}'(t) = \cos t \hat{i} + \sin t \hat{j}$$

مشاهده می‌کنیم که، $\vec{F}''(t) = -\vec{F}(t)$. پس به ازای هر t ، دو بردار $\vec{F}''(t)$ ، $\vec{F}(t)$ موازی با (و در خلاف جهت) یکدیگر هستند.

۱۶. داریم

$$\vec{F}''(t) = 4e^{-\gamma t} \hat{i} + 4e^{\gamma t} \hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{F}'(t) = -2e^{-\gamma t} \hat{i} + 2e^{\gamma t} \hat{k}$$

چون $\vec{F}''(t) = 4\vec{F}(t)$ ، به ازای هر t ، دو بردار $\vec{F}''(t)$ و $\vec{F}(t)$ موازی با (و در جهت) یکدیگر هستند.

۱۷. با توجه به قضیه مشتقگیری، داریم

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)) &= \vec{F}'(t) \times \vec{F}'(t) + \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t) \\
 &= \vec{0} + \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t) = \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t)
 \end{aligned}$$

۱۸. چون به ازای هر t ، $\vec{F}(t)$ موازی $\vec{F}''(t)$ است، اسکالر c وجود دارد به طوری که $\vec{F}''(t) = c\vec{F}(t)$ حال با توجه به حل تمرین ۱۷، داریم

$$\frac{d}{dt} (\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)) = \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t) = \vec{F}(t) \times c\vec{F}(t) = c(\vec{F}(t) \times \vec{F}(t)) = \vec{0}$$

در نتیجه $\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)$ یک بردار ثابت است.

۱۹. داریم $\vec{F}(t) = \int \vec{F}'(t) dt + \vec{c}$ که در آن \vec{c} یک بردار ثابت است. پس

$$\vec{F}(t) = \int (t^{\gamma} \hat{i} + (\gamma t + 1) \hat{j} + \gamma t^{\gamma} \hat{k}) dt = \frac{t^{\gamma+1}}{\gamma+1} \hat{i} + (\frac{\gamma}{2} t^2 + t) \hat{j} + \frac{\gamma}{\gamma+1} t^{\gamma+1} \hat{k} + \vec{c}$$

چون $\vec{F}(\cdot) = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ، پس $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = \vec{c}$ و در نتیجه

$$\vec{F}(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 2\right)\vec{i} + (3t^2 + t - 3)\vec{j} + (2t^4 + 1)\vec{k}$$

۲۰. داریم

$$\begin{aligned}\vec{F}'(t) &= \int \vec{F}''(t) dt = \int (6t\vec{i} - 12t^2\vec{j} + 4t^3\vec{k}) dt \\ &= 3t^2\vec{i} - 4t^3\vec{j} + t\vec{k} + \vec{c}\end{aligned}$$

چون $\vec{F}'(\cdot) = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ، $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ و در نتیجه

$$F'(t) = (3t^2 - 1)\vec{i} - (4t^3 - 2)\vec{j} + (t - 3)\vec{k}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\vec{F}(t) &= \int \vec{F}'(t) dt = \int [(3t^2 - 1)\vec{i} - (4t^3 - 2)\vec{j} + (t - 3)\vec{k}] dt \\ &= (t^3 - t)\vec{i} - (t^4 - 2t)\vec{j} + \left(\frac{t^2}{2} - 3t\right)\vec{k} + \vec{c}\end{aligned}$$

چون $\vec{F}'(\cdot) = 7\vec{i} + \vec{k}$ ، $\vec{c} = 7\vec{i} + \vec{k}$ و در نتیجه

$$\vec{F}(t) = (t^3 - t + 7)\vec{i} - (t^4 - 2t)\vec{j} + (t^2/2 - 3t + 1)\vec{k}$$

تمرینهای ۲.۶

۱. (الف) با توجه به حل مثال ۶.۲.۶ داریم $\vec{A}(t) = g\vec{j}$

$$\begin{aligned}\vec{V}(t) &= v \cdot \cos \alpha \vec{i} + (v \cdot \sin \alpha - gt)\vec{j} \\ &= 50 \cdot \cos \frac{\pi}{6} \vec{i} + (50 \cdot \sin \frac{\pi}{6} - gt)\vec{j} \\ &= 25\sqrt{3}\vec{i} + (25 - gt)\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{R}(t) &= tv \cdot \cos \alpha \vec{i} + \left(tv \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j} \\ &= 25\sqrt{3}t\vec{i} + \left(25t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}\end{aligned}$$

(ب) با توجه به حل مثال ۷.۲.۶ (ب)، داریم

$$t = \frac{2v \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{2(50) \sin \frac{\pi}{6}}{g} \approx 5.1 \text{ s}$$

(پ) با توجه به مثال ۷.۲.۶ (الف) برد موشک برابر است با

$$x = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{(500)^2 \sin^2 \frac{\pi}{6}}{g}$$

$$\approx 22070 \text{ m}$$

(ت) بنا بر مثال ۷.۲.۶ (پ) ما کسیم ارتفاع موشک برابر است با

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{(500)^2 (\sin \frac{\pi}{6})^2}{2g}$$

$$\approx 3189 \text{ m}$$

(ث) بنا بر قسمت (ث) در مثال ۷.۲.۶ بردار سرعت موشک در لحظه برخورد به زمین عبارت است از

$$\vec{V}(t) = v_0 \cos \alpha \vec{i} - v_0 \sin \alpha \vec{j}$$

$$= 500 \cos \frac{\pi}{6} \vec{i} - 500 \sin \frac{\pi}{6} \vec{j}$$

$$= 250\sqrt{3} \vec{i} - 250 \vec{j}$$

(ج) به ازای $t = 2$ ، داریم

$$\vec{R}(2) = 2(500) \cos \frac{\pi}{6} \vec{i} + (2(500) \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}g(2)^2) \vec{j}$$

$$= 500\sqrt{3} \vec{i} + (500 - 2g) \vec{j}$$

$$\vec{V}(2) = v_0 \cos \alpha \vec{i} + (v_0 \sin \alpha - gt) \vec{j}$$

$$= 500 \cos \frac{\pi}{6} \vec{i} + (500 \sin \frac{\pi}{6} - 2g) \vec{j}$$

$$= 250\sqrt{3} \vec{i} + (250 - 2g) \vec{j}$$

پس سرعت موشک در لحظه $t = 2$ برابر است با

$$|\vec{V}(2)| = \sqrt{(250)^2 \cdot 3 + (250 - 2g)^2}$$

$$\approx 490 \text{ m/s}$$

۲. این تمرین مانند تمرین ۱ حل می‌شود. جواب سئوالات مورد نظر به صورت زیر هستند:

$$\vec{V}(t) = 250 \vec{i} + (250\sqrt{3} - gt) \vec{j} \quad (\text{الف})$$

$$\vec{R}(t) = 250 t \vec{i} + (250\sqrt{3} t - \frac{1}{2}gt^2) \vec{j}$$

$$t \approx 88 \text{ s} \quad (\text{ب})$$

$$x \approx 22092 \text{ m} \quad (\text{پ})$$

$$y \approx 11046 \text{ m} \quad (\text{ت})$$

$$\vec{V}(t) = 250\hat{i} - 250\sqrt{3}\hat{j} \quad (\text{ث})$$

$$\vec{R}(2) = 500\hat{i} + (500\sqrt{3} - 2g)\hat{j} \quad (\text{ج})$$

$$\vec{V}(2) = 250\hat{i} + (250\sqrt{3} - 2g)\hat{j}$$

$$|\vec{V}(2)| \approx 483 \text{ m/s}$$

۳. بنابر حل قسمت (الف) از مثال ۷.۲.۶، بردتوپ برابر است با

$$x = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

پس

$$80 = \frac{v_0^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}}{g}$$

و در نتیجه

$$v_0 \sqrt{80g} \approx 28 \text{ m/s}$$

۴. بنابر مثال ۶.۲.۶ بردار سرعت به ازای $\alpha = 0$ برابر است با

$$\vec{V}(t) = v_0 \cos 0 \hat{i} + (v_0 \sin 0 - gt)\hat{j}$$

$$= v_0 \hat{i} - gt\hat{j}$$

پس بردار مکانی موشک برابر است با

$$\vec{R}(t) = \int \vec{V}(t) dt = v_0 t \hat{i} - \frac{1}{2}gt^2 \hat{j} + \vec{D}$$

که در آن \vec{D} بردار ثابت انتگرالگیری است. چون

$$\vec{D} = 300\hat{j}, \quad \vec{R}(0) = 300\hat{j}$$

در نتیجه

$$\vec{R}(t) = v_0 t \hat{i} + (300 - \frac{1}{2}gt^2)\hat{j}$$

و به ازای $v_0 = 600$ داریم

$$\vec{R}(t) = 600t \hat{i} + (300 - \frac{1}{2}gt^2)\hat{j}$$

مؤلفه‌های $\vec{R}(t)$ عبارت‌اند از $x = 600t$ و $y = 300 - \frac{1}{2}gt^2$ موشک وقتی به زمین برخورد

می‌کند که $y = 0$ ، یعنی $300 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$. در نتیجه پس از $t = \sqrt{\frac{600}{g}} \approx 7.08$ ثانیه

موشک به زمین می‌رسد. بنابراین، برد موشک برابر است با

$$x = 600t \approx 600(7/8) = 4680 \text{ m}$$

۵. داریم

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 32t\hat{k}$$

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = -32\hat{k}$$

$$v = |\vec{V}(t)| = \sqrt{9 + 4 + (32t)^2}$$

$$= \sqrt{13 + 1024t^2}$$

۶. در اینجا داریم

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} - 32t \vec{k}$$

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j} - 32 \vec{k}$$

$$v = |\vec{V}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + (32t)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 1024t^2}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = -e^{-t} \vec{i} - e^{-t} \vec{j} \quad .7$$

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = e^{-t} \vec{i} + e^{-t} \vec{j}$$

$$v = |\vec{V}(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{2t}} = \sqrt{2} e^t$$

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = (e^t \sin t + e^t \cos t) \vec{i} + (e^t \cos t - e^t \sin t) \vec{j} + e^t \vec{k} \quad .8$$

$$= e^t (\sin t + \cos t) \vec{i} + e^t (\cos t - \sin t) \vec{j} + e^t \vec{k}$$

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = [e^t (\sin t + \cos t) + e^t (\cos t - \sin t)] \vec{i}$$

$$+ [e^t (\cos t - \sin t) + e^t (-\sin t - \cos t)] \vec{j} + e^t \vec{k}$$

$$= 2e^t \cos t \vec{i} - 2e^t \sin t \vec{j} + e^t \vec{k}$$

همچنین

$$v = |\vec{V}(t)| = \sqrt{e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}}$$

$$= \sqrt{3} e^t$$

$$\vec{R}'(t) = \vec{V}(t) \quad , \quad \vec{V}'(t) = \vec{A}(t) \quad .9 \text{ می دانیم}$$

$$\vec{V}(t) = \int \vec{A}(t) dt$$

$$= \int (-g \vec{k}) dt = -gt \vec{k} + \vec{c}$$

که در آن \vec{D} بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ، پس $\vec{G} = \vec{0}$ و در نتیجه

$$\vec{V}(t) = -gt\vec{k}$$

$$v = |\vec{V}(t)| = \sqrt{g^2 t^2} = gt$$

همچنین، داریم

$$\vec{R}(t) = \int \vec{V}(t) dt$$

$$= \int (-gt\vec{k}) dt = -\frac{gt^2}{2}\vec{k} + \vec{D}$$

که در آن \vec{D} بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{R}_0 = \vec{0}$ ، پس $\vec{R}(t) = -\frac{gt^2}{2}\vec{k}$ و $\vec{D} = \vec{0}$.
۱۰. مانند تمرین ۹ عمل می‌کنیم. داریم

$$\vec{V}(t) = \int \vec{A}(t) dt$$

$$= \int -g\vec{k} = -gt\vec{k} + \vec{c}$$

که در آن \vec{C} بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{V}_0 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ، پس $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ و در نتیجه $\vec{V}(t) = 3\vec{i} - 2\vec{j} + (1-gt)\vec{k}$

$$v = |\vec{V}(t)| = \sqrt{9 + 4 + (1-gt)^2} = \sqrt{14 - 2gt + g^2 t^2}$$

حال، داریم

$$\vec{R}(t) = \int \vec{V}(t) dt$$

$$= \int [3\vec{i} - 2\vec{j} + (1-gt)\vec{k}] dt$$

$$= 3t\vec{i} - 2t\vec{j} + (t - \frac{gt^2}{2})\vec{k} + \vec{D}$$

که در آن \vec{D} بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{R}_0 = 5\vec{j} + 2\vec{k}$ ، پس $\vec{D} = 5\vec{j} + 2\vec{k}$ و در نتیجه

$$\vec{R}(t) = 3t\vec{i} + (5-2t)\vec{j} + (2+t - \frac{gt^2}{2})\vec{k}$$

۱۱. در اینجا

$$\begin{aligned}\vec{V}(t) &= \int \vec{A}(t) dt \\ &= \int (e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j}) dt \\ &= e^t \vec{i} - e^{-t} \vec{j} + \vec{C}\end{aligned}$$

که در آن \vec{C} بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{V}_0 = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$ ، پس $\vec{V}(t) = e^t \vec{i} - e^{-t} \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$ بنابراین $\vec{C} = \sqrt{2}\vec{k}$. و در نتیجه $\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{C}$

$$\begin{aligned}v &= |\vec{V}(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{\frac{e^{2t} + 1 + 2e^{2t}}{e^{2t}}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + e^{2t})^2}{e^{2t}}} = \frac{1 + e^{2t}}{e^t} = e^{-t} + e^t\end{aligned}$$

حال، داریم

$$\begin{aligned}\vec{R}(t) &= \int \vec{V}(t) dt \\ &= \int (e^t \vec{i} - e^{-t} \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}) dt \\ &= e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j} + \sqrt{2}t \vec{k} + \vec{D}\end{aligned}$$

که در آن \vec{D} بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{R}_0 = \vec{i} + \vec{j}$ ، پس $\vec{i} + \vec{j} = \vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k} + \vec{D}$ و در نتیجه $\vec{D} = \vec{0}$. بنابراین $\vec{R}(t) = e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j} + \sqrt{2}t \vec{k}$ داریم. ۱۲.

$$\begin{aligned}\vec{V}(t) &= \int (-\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}) dt \\ &= -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{C}\end{aligned}$$

که در آن \vec{C} بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{V}_0 = \vec{k}$ ، پس $\vec{V}_0 = \vec{k} = -\sin 0 \vec{i} + \cos 0 \vec{j} + \vec{C}$ و در نتیجه $\vec{C} = -\vec{j} + \vec{k}$ بنابراین

$$\begin{aligned}\vec{V}(t) &= -\sin t \vec{i} + (\cos t - 1)\vec{j} + \vec{k} \\ V &= |\vec{V}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + (\cos t - 1)^2 + 1} = \sqrt{3 - 2\cos t} \\ \vec{R}(t) &= \int V(t) dt\end{aligned}$$

حال، داریم

$$= \cos t \hat{i} + (\sin t - t) \hat{j} + t \hat{k} + \vec{D}$$

که در آن \vec{D} بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{R}_0 = \hat{i}$ ، پس

$$\hat{i} = \cos 0 \hat{i} + (\sin 0 - 0) \hat{j} + 0 \hat{k} + \vec{D}$$

و در نتیجه $\vec{D} = \hat{i}$. بنابراین

$$\vec{R}(t) = \cos t \hat{i} + (\sin t - t) \hat{j} + t \hat{k}$$

تمرینهای ۳.۶

۱. بنابه تعریف، داریم

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{\gamma t \hat{i} + \gamma \hat{j}}{\sqrt{4t^2 + 4}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \hat{j}$$

چون

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= \frac{\sqrt{t^2 + 1} - \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}}{t^2 + 1} \hat{i} - \frac{t}{(t^2 + 1)^{3/2}} \hat{j} \\ &= \frac{1}{(t^2 + 1)^{3/2}} \hat{i} - \frac{t}{(t^2 + 1)^{3/2}} \hat{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{T}'(t)| &= \sqrt{\frac{1}{(t^2 + 1)^3} + \frac{t^2}{(t^2 + 1)^3}} \\ &= \frac{1}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \hat{i} - \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \hat{j}$$

۲. بنابه تعریف، داریم

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{\gamma \hat{i} + \gamma t \hat{j} + t^2 \hat{k}}{\sqrt{4 + 4t^2 + t^4}} \\ &= \frac{\gamma}{t^2 + 2} \hat{i} + \frac{\gamma t}{t^2 + 2} \hat{j} + \frac{t^2}{t^2 + 2} \hat{k} \end{aligned}$$

چون

$$\vec{T}'(t) = \frac{-4t}{(t^2 + 2)^2} \hat{i} + \frac{\gamma - 2\gamma t^2}{(t^2 + 2)^2} \hat{j} + \frac{4t}{(t^2 + 2)^2} \hat{k}$$

$$|\vec{T}'(t)| = \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2+2)^4} + \frac{(4-2t^2)^2}{(t^2+2)^4} + \frac{16t^2}{(t^2+2)^4}}$$

$$= \frac{2}{t^2+2}$$

در نتیجه

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = \frac{-2t}{2+t^2} \hat{i} + \frac{2-t^2}{2+t^2} \hat{j} + \frac{2t}{2+t^2} \hat{k}$$

۳. داریم

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{2\hat{i} + (e^t - e^{-t})\hat{j}}{\sqrt{4 + (e^t - e^{-t})^2}}$$

$$= \frac{2}{e^t + e^{-t}} \hat{i} + \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \hat{j}$$

چون

$$\vec{T}'(t) = -\frac{2(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} \hat{i} + \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^3} \hat{j}$$

$$= -\frac{2(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} \hat{i} + \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2} \hat{j}$$

$$|\vec{T}'(t)| = \sqrt{\frac{4(e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^4} + \frac{16}{(e^t + e^{-t})^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4(e^t + e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^4}} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$$

در نتیجه، بردار قائم برابر است با

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = -\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \hat{i} + \frac{2}{e^t + e^{-t}} \hat{j}$$

۴. در اینجا، داریم

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{-\sin t \hat{i} - \sin t \hat{j} + \sqrt{2} \cos t \hat{k}}{\sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + 2 \cos^2 t}}$$

$$= -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \hat{i} - \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \hat{j} + \cos t \hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = \frac{-\frac{\cos t}{\sqrt{\gamma}} \hat{i} - \frac{\cos t}{\sqrt{\gamma}} \hat{j} - \sin t \hat{k}}{\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\gamma} + \frac{\cos^2 t}{\gamma} + \sin^2 t}} \\ &= -\frac{\cos t}{\sqrt{\gamma}} \hat{i} - \frac{\cos t}{\sqrt{\gamma}} \hat{j} - \sin t \hat{k}\end{aligned}$$

۵. بردار مماس برابر است با

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{\frac{1}{\gamma}(1+t)^{1/\gamma} \hat{i} - \frac{1}{\gamma}(1-t)^{1/\gamma} \hat{j} + \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \hat{k}}{\sqrt{\frac{1}{\gamma}(1+t) + \frac{1}{\gamma}(1-t) + \frac{1}{\gamma}}} \\ &= \frac{1}{\gamma}(1+t)^{1/\gamma} \hat{i} - \frac{1}{\gamma}(1-t)^{1/\gamma} \hat{j} + \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \hat{k}\end{aligned}$$

بردار قائم برابر است با

$$\begin{aligned}\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = \frac{\frac{1}{\gamma}(1+t)^{-1/\gamma} \hat{i} + \frac{1}{\gamma}(1-t)^{-1/\gamma} \hat{j}}{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2}(1+t)^{-1} + \frac{1}{\gamma^2}(1-t)^{-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{\gamma}(1-t)^{1/\gamma}}{\gamma} \hat{i} + \frac{\sqrt{\gamma}(1+t)^{1/\gamma}}{\gamma} \hat{j}\end{aligned}$$

۶.

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{e^t \hat{i} - e^{-t} \hat{j} + \sqrt{\gamma} \hat{k}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + \gamma}} \\ &= \frac{e^t}{e^t + e^{-t}} \hat{i} - \frac{e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \hat{j} - \frac{\sqrt{\gamma}}{e^t + e^{-t}} \hat{k}\end{aligned}$$

همچنین، چون

$$\begin{aligned}\vec{T}'(t) &= \frac{e^t(e^t + e^{-t}) - e^t(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} \hat{i} - \frac{-e^{-t}(e^t + e^{-t}) - e^{-t}(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} \hat{j} \\ &\quad + \frac{-\sqrt{\gamma}(e^t - e^{-t})}{e^t + e^{-t}} \hat{k} \\ &= \frac{\gamma}{(e^t + e^{-t})^2} \hat{i} + \frac{\gamma}{(e^t + e^{-t})^2} \hat{j} - \frac{\sqrt{\gamma}(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})} \hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{T}'(t)| &= \sqrt{\frac{4}{(e^t + e^{-t})^4} + \frac{4}{(e^t + e^{-t})^4} + \frac{2(e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{e^t + e^{-t}} \end{aligned}$$

بنابراین، بردار قائم بر منحنی برابر است با

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = \frac{\sqrt{2}}{e^t + e^{-t}} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{e^t + e^{-t}} \vec{j} - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \vec{k}$$

۷. چون

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = a(1 - \cos t) \vec{i} + a \sin t \vec{j}$$

پس

$$\begin{aligned} v(t) = |\vec{V}(t)| &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos t} \end{aligned}$$

$$A_T = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos t} = \frac{a \sqrt{2} \sin t}{\sqrt{1 - \cos t}}$$

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j}$$

همچنین، چون

$$|\vec{A}(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = a$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A_N &= \sqrt{|\vec{A}|^2 - A_T^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \frac{2a^2 \sin^2 t}{1 - \cos t}} = a \sqrt{\frac{1 - 2 \cos t - \sin^2 t}{1 - \cos t}} \\ &= a \sqrt{\frac{1 - 2 \cos t - (1 - \cos^2 t)}{1 - \cos t}} = \frac{a \sqrt{1 - \cos t}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = -2 \sin t \vec{i} + 3 \cos t \vec{j}$$

۸. چون

$$\begin{aligned} v(t) = |\vec{V}(t)| &= \sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{5 \cos^2 t + 4} \end{aligned}$$

پس، مؤلفه مماسی شتاب برابر است با

$$A_T = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\Delta \cos^2 t + 4}$$

$$= \frac{-\Delta \sin t \cos t}{\sqrt{\Delta \cos^2 t + 4}}$$

همچنین، چون $\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = -\Delta \cos t \vec{i} - \Delta \sin t \vec{j}$

$$|A(t)| = \sqrt{\Delta^2 \cos^2 t + \Delta^2 \sin^2 t} = \sqrt{\Delta^2} = \Delta$$

بنابراین مؤلفه قائم شتاب برابر است با

$$A_N = \sqrt{|A|^2 - A_T^2}$$

$$= \sqrt{\Delta^2 - \frac{\Delta^2 \sin^2 t \cos^2 t}{\Delta \cos^2 t + 4}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Delta \cos^2 t + 4 - \Delta \sin^2 t \cos^2 t}{\Delta \cos^2 t + 4}} = \frac{4}{\sqrt{\Delta \cos^2 t + 4}}$$

۹. چون

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = 2 + t^2$$

بنابراین، مؤلفه مماسی برابر است با

$$A_T = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (2 + t^2) = 2t$$

همچنین، چون

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = \dot{x} \vec{j} + \dot{y} \vec{k}$$

$$|\vec{A}(t)| = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

پس، مؤلفه قائم شتاب برابر است با

$$A_N = \sqrt{|A|^2 - A_T^2} = \sqrt{4 + 4t^2 - 4t^2} = 2$$

۱۰. از آنجا که

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = e^t \hat{i} - e^{-t} \hat{j} + \sqrt{2} \hat{k}$$

$$\begin{aligned} |\vec{V}(t)| &= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} \\ &= e^t + e^{-t} \end{aligned}$$

پس، مؤلفه مماسی شتاب برابر است با

$$A_T = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^t + e^{-t}) = e^t - e^{-t}$$

همچنین، داریم

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = e^t \hat{i} + e^{-t} \hat{j}$$

$$|\vec{A}(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$$

بنابراین، مؤلفه قائم شتاب برابر است با

$$\begin{aligned} A_N &= \sqrt{|\vec{A}|^2 - A_T^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} - (e^t - e^{-t})^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

تمرینهای ۴.۶

۱. داریم $m = 2$ و $y'' = 0$.

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{0}{[1 + m^2]^{3/2}} = 0$$

۲. در اینجا $y' = 2x + 2$ و $y'' = 2$ پس

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{[1 + (2x + 2)^2]^{3/2}} = \frac{1}{(4x^2 + 8x + 5)^{3/2}}$$

۳. چون $y' = e^x$ و $y'' = e^x$ ،

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$$

۴. در اینجا $\dot{y} = 2x$ و $y'' = 2$ پس

$$k = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4y)^{3/2}}$$

۵. چون

$$\dot{y} = a \sin t, \quad x' = a(1 - \cos t)$$

$$y'' = a \cos t, \quad x'' = a \sin t$$

پس

$$\begin{aligned} k &= \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{3/2}} = \frac{|a^2 \cos t(1 - \cos t) - a^2 \sin^2 t|}{\left[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t\right]^{3/2}} \\ &= \frac{a^2 |\cos t - 1|}{a^2 2^{3/2} (1 - \cos t)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} a |\sin(t/2)|} \end{aligned}$$

[توجه $\cos t = 1 - 2\sin^2(t/2)$]

۶. در اینجا، داریم

$$\dot{y} = b \theta \sin \theta$$

$$x' = b \theta \cos \theta$$

$$y'' = b(\sin \theta + \theta \cos \theta)$$

$$x'' = b(\cos \theta - \theta \sin \theta)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} k &= \frac{b^2 \theta \cos \theta (\sin \theta + \theta \cos \theta) - b^2 \theta \sin \theta (\cos \theta - \theta \sin \theta)}{(b^2 \theta^2 \cos^2 \theta + b^2 \theta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{b^2 \theta^2}{(b^2 \theta^2)^{3/2}} = \frac{1}{b |\theta|} \end{aligned}$$

۷. چون $\dot{y} = -\frac{1}{2} x^{-1/2}$ و $y'' = \frac{1}{4} x x^{-3/2}$ ،

$$k = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}} = \frac{\left|\frac{1}{4} x^{-3/2}\right|}{\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{3/2}} = \frac{2}{(4x + 1)^{3/2}}$$

در نتیجه خمیدگی منحنی در نقطه $P(1, -1)$ برابر است با $k = \frac{2}{5\sqrt{5}}$

۸. چون $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ و $y'' = \frac{1}{y}$ ، به ازای هر x ،

$$k = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \frac{1/2}{(1+\frac{x^2}{4})^{3/2}}$$

$$= \frac{4}{(4+x^2)^{3/2}}$$

برای پیدا کردن مقدار k که به ازای آن مقدار k ماکسیمم است، معادله $\frac{dk}{dx} = 0$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{dk}{dx} = \frac{-12x}{(4+x^2)^{5/2}} = 0$$

به آسانی دیده می‌شود که در نقطه $(0, 0)$ مقدار k ماکسیمم است. این مقدار ماکسیمم برابر است با

$$k = \frac{4}{(4+0)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

۹. چون $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ و $y'' = -\frac{1}{x^2}$ ، پس به ازای هر x داریم

$$k = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \frac{1/x^2}{(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}$$

$$= \frac{|x|}{(x^2+1)^{3/2}}$$

برای پیدا کردن ماکسیمم k ، معادله $\frac{dk}{dx} = 0$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{dk}{dx} = \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{5/2}} = 0$$

به آسانی دیده می‌شود که به ازای $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ مقدار ماکسیمم است. این مقدار ماکسیمم برابر است با

$$k = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\frac{1}{2}+1)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

۱۰. در اینجا $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ و $y'' = e^x$ ، و در نتیجه

$$k = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$$

بنابراین، با مشتق‌گیری از K نسبت به x و پس از ساده کردن، داریم

$$\frac{dK}{dx} = \frac{e^x - \gamma e^{\gamma x}}{(1 + e^{\gamma x})^{5/2}}$$

به آسانی دیده می‌شود که به ازای $x = -\frac{\ln \gamma}{\gamma}$ مقدار k ماکسیمم است. این مقدار ماکسیمم برابر است با

$$k = \frac{e^{-\frac{\ln \gamma}{\gamma}}}{(1 + e^{-\ln \gamma})^{2/2}} = \frac{\sqrt{\gamma}/\gamma}{(1 + \frac{1}{\gamma})^{2/2}} = \frac{\gamma\sqrt{\gamma}}{9}$$

۱۱. عبارتهای زیر را داریم

$$\vec{R}(t) = e^t \sin t \vec{i} + e^t \cos t \vec{j} + t \vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = (e^t \sin t + e^t \cos t) \vec{i} + (e^t \cos t - e^t \sin t) \vec{j} + \vec{k}$$

$$\begin{aligned} |\vec{V}(t)| &= \sqrt{e^{2t} (\sin t + \cos t)^2 + e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + 1} \\ &= \sqrt{\gamma e^{2t} + 1} \end{aligned}$$

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = \gamma e^t \cos t \vec{i} - \gamma e^t \sin t \vec{j}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \vec{V} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t (\sin t + \cos t) & e^t (\cos t - \sin t) & 1 \\ \gamma e^t \cos t & -\gamma e^t \sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= \gamma e^t \sin t \vec{i} + \gamma e^t \cos t \vec{j} - \gamma e^{2t} \vec{k} \end{aligned}$$

$$|\vec{V} \times \vec{A}| = \sqrt{\gamma^2 e^{2t} \sin^2 t + \gamma^2 e^{2t} \cos^2 t + \gamma^2 e^{4t}} = \gamma e^t \sqrt{1 + e^{2t}}$$

بنابراین، انحناى منحنى برابر است با

$$k = \frac{|\vec{V} \times \vec{A}|}{|\vec{V}|^3} = \frac{\gamma e^t (1 + e^{2t})^{1/2}}{(\gamma e^{2t} + 1)^{3/2}}$$

۱۲. عبارتهای زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\vec{R}(t) &= \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \vec{k} \\ \vec{V}(t) &= \vec{R}'(t) = \cos t \vec{i} - \sin t \vec{j} + t^{-1/2} \vec{k} \\ |\vec{V}(t)| &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^{-1}} = \sqrt{1+t} \\ \vec{A}(t) &= \vec{V}'(t) = -\sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} + \frac{1}{2} t^{-3/2} \vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{V} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t & -\sin t & t^{-1/2} \\ -\sin t & -\cos t & \frac{1}{2} t^{-3/2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} t^{-3/2} \sin t + t^{-1/2} \cos t\right) \vec{i} - \left(\frac{1}{2} t^{-3/2} \cos t + t^{-1/2} \sin t\right) \vec{j} - \vec{k}$$

$$|\vec{V} \times \vec{A}| = \frac{\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t}}$$

بنابراین

$$k = \frac{|\vec{V} \times \vec{A}|}{|\vec{V}|^3} = \frac{\sqrt{t+1}/2\sqrt{t}}{(1+t)^{3/2}} = \frac{\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t}(1+t)^{3/2}}$$

۱۳. عبارتهای زیر را داریم

$$\vec{R}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} (t^2 - 1)^{2/3} \vec{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} t \vec{j} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} t^2 \vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = t(t^2 - 1)^{1/3} \vec{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} t \vec{j} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} t \vec{k}$$

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{t^2(t^2 - 1) + \frac{1}{t} t^2 + \frac{1}{t} t^2} = t^2$$

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = \frac{2t(t^2 - 1)^{-2/3}}{\sqrt{t^2 - 1}} \vec{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \vec{j} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t(t^{\gamma}-1)^{1/\gamma} & \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma}t & \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma}t \\ \frac{\gamma t^{\gamma}-1}{\sqrt{t^{\gamma}-1}} & \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} & \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{\gamma}t^{\gamma}}{\gamma\sqrt{t^{\gamma}-1}}\hat{j} - \frac{\sqrt{\gamma}t^{\gamma}}{\gamma\sqrt{t^{\gamma}-1}}\hat{k} \\ |\vec{v} \times \vec{A}| &= \frac{t^{\gamma}}{\sqrt{t^{\gamma}-1}} \\ |\vec{v} \times \vec{A}| &= \frac{t^{\gamma}}{\sqrt{t^{\gamma}-1}}\end{aligned}$$

بنابراین، انحنای منحنی برابر است با

$$k = \frac{|\vec{v} \times \vec{A}|}{|\vec{v}|^{\gamma}} = \frac{t^{\gamma}/\sqrt{t^{\gamma}-1}}{t^{\gamma}} = \frac{1}{t^{\gamma}\sqrt{t^{\gamma}-1}}$$

۱۴. در اینجا، داریم

$$\vec{R}(t) = e^t \hat{i} + e^{-t} \hat{j} + \sqrt{\gamma} t \hat{k}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = e^t \hat{i} - e^{-t} \hat{j} + \sqrt{\gamma} \hat{k}$$

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + \gamma} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^{\gamma}} = e^t + e^{-t}$$

$$\vec{A}(t) = e^t \hat{i} + e^{-t} \hat{j}$$

$$\vec{v} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{\gamma} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{\gamma} e^{-t} \hat{i} + \sqrt{\gamma} e^t \hat{j} + \gamma \hat{k}$$

$$|\vec{v} \times \vec{A}| = \sqrt{\gamma e^{-2t} + \gamma e^{2t} + \gamma} = \sqrt{\gamma} \sqrt{(e^t + e^{-t})^{\gamma}} = \sqrt{\gamma} (e^t + e^{-t})$$

بنابراین، انحنای منحنی برابر است با

$$k = \frac{|\vec{V} \times \vec{A}|}{|\vec{V}|^3} = \frac{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$$

تمرینهای فصل ۷

تمرینهای ۱.۷

۱. دامنه f برابر است با مجموعه همه نقاط (x, y) به طوری که $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ؛ یعنی $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

۲. $\{(x, y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$.

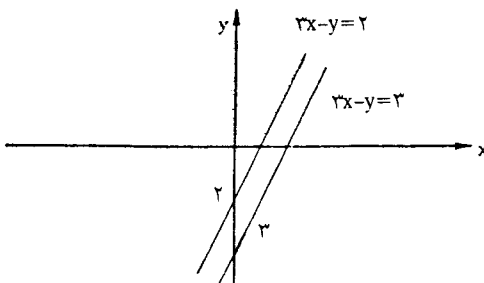
۳. دامنه این تابع مجموعه همه نقاط (x, y) است به طوری که $x^2 + y^2 - 25 \geq 0$ یا $x^2 + y^2 \geq 25$ ؛ یعنی همه نقاط واقع بر دایره $x^2 + y^2 = 25$ و خارج از این دایره.

۴. دامنه f برابر است با مجموعه همه نقاط (x, y) به طوری که $x + y \neq 0$ یا $x \neq -y$ ؛ یعنی $\{(x, y) \mid x \neq -y\}$.

۵. دامنه این تابع مجموعه همه نقاط (x, y, z) است به طوری که $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ یا $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ؛ یعنی مجموعه نقاطی که توسط کره به مرکز مبدأ و شعاع ۱ محدود می‌شوند؛ $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

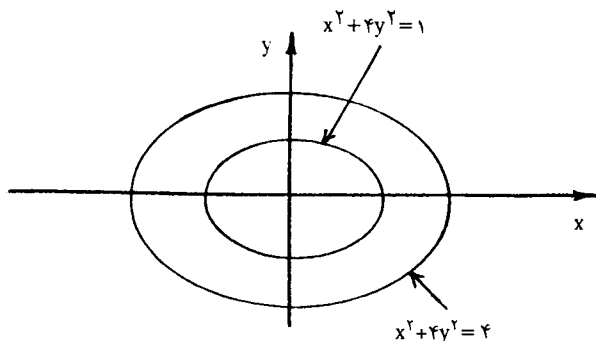
۶. $\{(x, y, z) \mid x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}$.

۷. منحنیهای تراز این تابع نمودار خطهای $c = 3x - y = c$ هستند. نمودارهای این منحنیهای تراز به ازای $c = 2, 3$ در شکل ۱.۱.۷ رسم شده‌اند.



شکل ۱.۱.۷

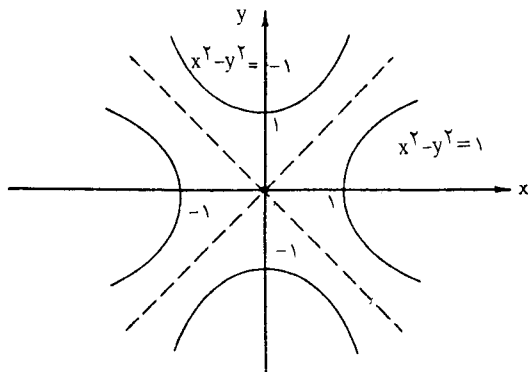
۸. معادلات منحنیهای تراز داده شده عبارت‌اند از $x^2 + 4y^2 = 1$ و $x^2 + 4y^2 = 4$. این بیضیها در شکل ۲.۱.۷ رسم شده‌اند.



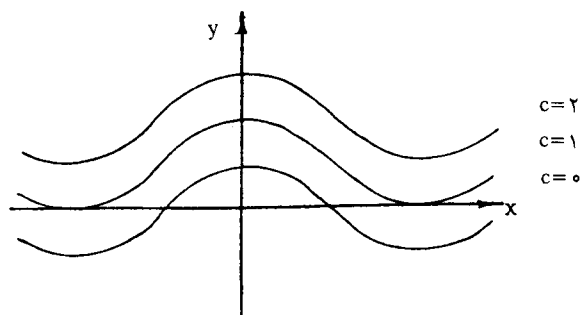
شکل ۲.۱.۷

۹. معادلات این منحنیهای تراز عبارت‌اند از $x^2 - y^2 = 0$ ، $x^2 - y^2 = 1$ و $x^2 - y^2 = -1$. منحنی اول تنها شامل نقطه $(0, 0)$ و دو منحنی دیگر هذلولی هستند. این نمودارها در شکل ۳.۱.۷ رسم شده‌اند.

۱۰. معادلات منحنیهای تراز داده شده عبارت‌اند از $2y - \cos x = 0$ ، $2y - \cos x = 1$ ، $2y - \cos x = 2$ ، یعنی $y = \frac{1}{2} \cos x$ ، $y = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2}$ ، $y = \frac{1}{2} \cos x + 1$. نمودار این توابع در شکل ۴.۱.۷ رسم شده‌اند.



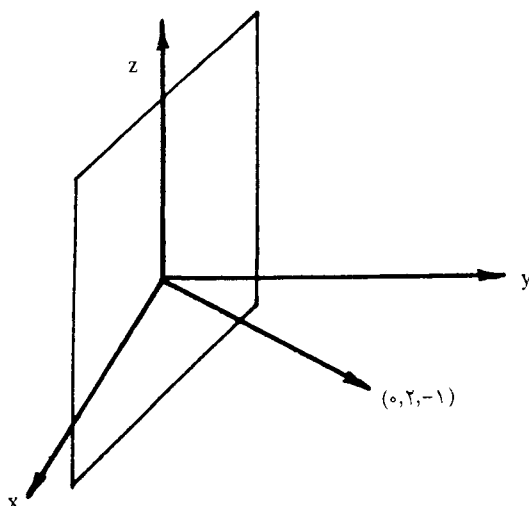
شکل ۳.۱.۷



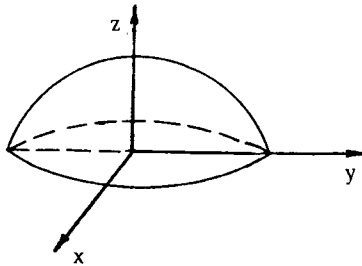
شکل ۴.۱.۷

۱۱. نمودار تابع $z = x + 2y$ یا $x + 2y - z = 0$ صفحه‌ای است که از مبدأ می‌گذرد و بر بردار $\vec{a} = (0, 2, -1)$ قائم است (شکل ۵.۱.۷ را ببینید).

۱۲. قرار می‌دهیم $z = f(x, y)$ معادله $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ را به دست می‌آوریم. اگر دو طرف این معادله را مربع کنیم، معادله $z^2 = 4 - x^2 - y^2$ یا $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ به دست می‌آید که معادله کره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است. پس نمودار $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ نیمه بالایی این کره است (شکل ۶.۱.۷ را ببینید).

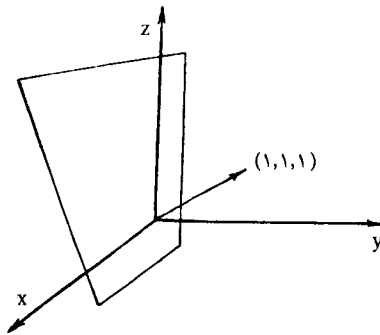


شکل ۵.۱.۷



شکل ۶.۱.۷

۱۳. سطوح تراز تابع f نمودارهای معادلات $x + y + z = c$ هستند. این سطوح صفحه‌هایی قائم بر $\vec{a} = (1, 1, 1)$ هستند (شکل ۷.۱.۷ را ببینید).



شکل ۷.۱.۷

۱۴. هر یک از این سطوح تراز نمودار معادله $x^2 + y^2 + z^2 = c$ هستند. اگر $c < 0$ ، این سطح تهی است؛ اگر $c = 0$ تنها شامل نقطه $(0, 0, 0)$ ، و اگر $c > 0$ یک کره به مرکز مبدأ و شعاع \sqrt{c} است.

۱۵. معادلات سطوح تراز این تابع به صورت $x + 2y = c$ هستند که صفحه‌های با بردار قائم $(1, 2, 0)$ هستند.

۱۶. این سطوح تراز، نمودارهای صفحه‌های $z = c$ هستند.

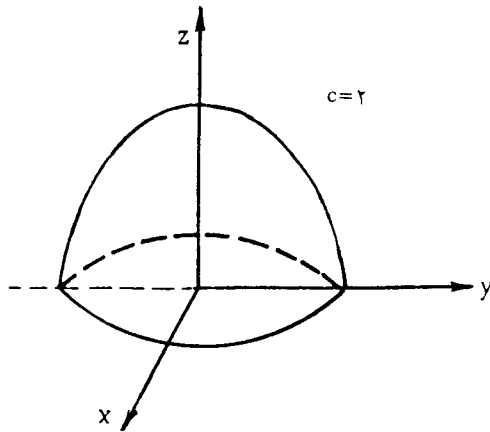
۱۷. معادله این سطوح تراز به صورت $x^2 + y^2 + z = c$ یا $x^2 + y^2 = \frac{z - c}{-1}$ است. نمودار این سطح، سهمیوار مدوری به رأس $(0, 0, c)$ است که روبه پایین باز می‌شود (معادله ۹.۱.۷ (۴))

متن کتاب را ببینید).

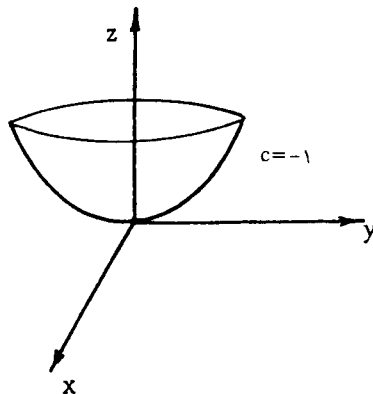
۱۸. معادلهٔ سطوح تراز این تابع به صورت $x^2 + y^2 = z - 1 - c$ یا $z - 1 - x^2 - y^2 = c$ است که معادلهٔ یک سهمیوار مدور به رأس $(0, 0, 1 + c)$ است و روبه بالا باز می‌شود (معادلهٔ ۹.۱.۷ (۴) متن کتاب را ببینید).

۱۹. معادلهٔ داده شده سهمیوار بیضوی زیر است.

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 36z$$



شکل ۸.۱.۷



شکل ۹.۱.۷

رأس این سهمیوار مبدأ مختصات است و روبه بالا باز می شود (معادله ۹.۱.۷ (۴) متن کتاب را ببینید).

۲۰. این سطح، ورق هذلولیوار

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{4^2} = 1$$

است (معادله ۹.۱.۷ (۸) متن کتاب را ببینید).

۲۱. این سطح هذلولیوار دو پارچه

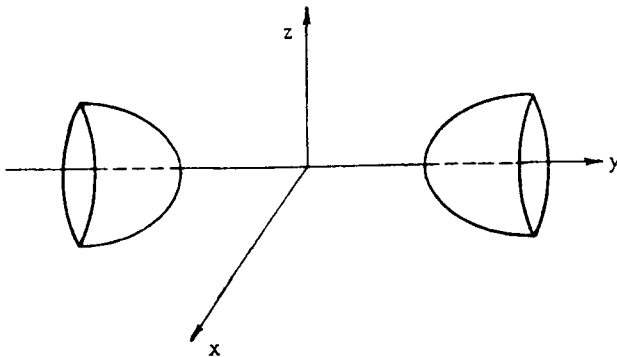
$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{12})^2} = 1$$

است. محور تقارن این هذلولیوار محور x است (معادله ۹.۱.۷ (۹) متن کتاب را ببینید).

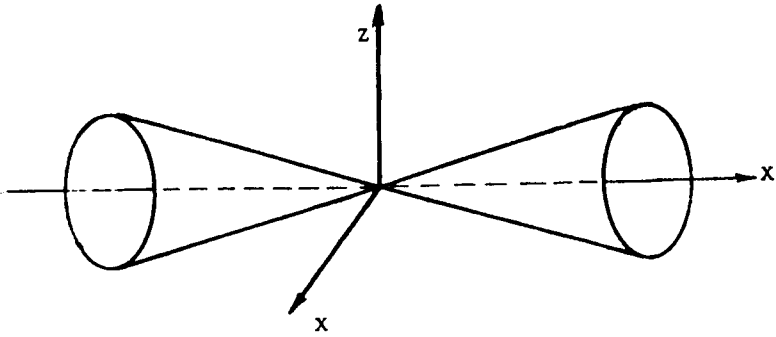
۲۲. این معادله به صورت

$$\frac{z^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{x^2}{1} = 0$$

است. نمودار آن یک مخروط دو پارچه بیضوی با محور تقارن x است (معادله ۹.۱.۷ (۳) متن کتاب را ببینید).



شکل ۱۰.۱.۷



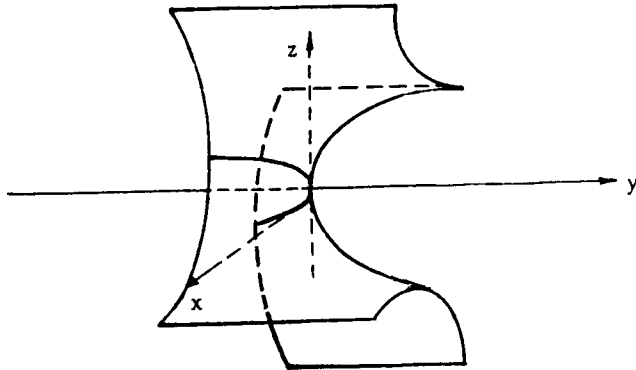
شکل ۱۱.۱.۷

۲۳. این معادله به صورت

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{6^2} = 1$$

است. نمودار این معادله یک بیضیوار است (معادله ۹.۱.۷ (۱) متن کتاب را ببینید).

۲۴. نمودار این معادله یک سهمیوار هذلولی است (معادله ۹.۱.۷ (۶) متن کتاب را ببینید).



شکل ۱۲.۱.۷

تمرینهای ۲.۷

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} \left(x + \frac{1}{y}\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} x + \lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} \frac{1}{y} \quad .1$$

$$= 2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

۲. چون $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2$ یک تابع چند جمله‌ای است، پس

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} (2x^2 - 4xy + 5y^2) = 2(1)^2 - 4(1)(-2) + 5(-2)^2 = 3.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} (x^2 + y^2) = 1 \neq 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^2 - xy + 1) = 2 \quad .3$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,0)} (x^2 + 3y - 4z^2 + 2) = 1 + 3(2) - 4(0) + 2 = 9 \quad .4$$

۵. چون $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} (x + y^2) = 0$ ، نمی‌توانیم از قضیه حدی خارج قسمت استفاده کنیم. ولی، داریم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^4}{x + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{(x + y^2)^2}{x + y^2}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} (x + y^2) = 0$$

۶. چون $\lim_{(x,y) \rightarrow (\ln^2, 0)} (2x + y^2) = 2 \ln^2$ و تابع $g(t) = e^t$ پیوسته است،

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\ln^2, 0)} e^{2x + y^2} = e^{2 \ln^2} = e \ln^2 = 4$$

۷. چون تابع $g(t) = \cos t$ پیوسته است،

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\pi/2, -\pi/2, 0)} \cos(x + y + z) = \cos \left[\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\pi/2, -\pi/2, 0)} (x + y + z) \right]$$

$$= \cos(\pi/2 - \pi/2 + 0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy = 0 \quad \text{چون ۸}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin xy}{xy} = 1$$

۹. با توجه به مثال ۱۳.۲.۷، داریم

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$$

در نتیجه

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{yx^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} y \cdot \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} = 0$$

در نتیجه

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{yx^3}{x^2 + y^2} - \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} = 0 - 0 = 0$$

۱۰. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} \frac{x^3 + 2x^2y - xy - 2y^2}{x + 2y} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} \frac{(x + 2y)(x^2 - y)}{x + 2y} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} (x^2 - y) = 4 - 1 = 5 \end{aligned}$$

۱۱. حد مورد نظر را روی خط $y = mx$ ، با $m \neq 0$ پیدا می کنیم. داریم

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m \quad (\text{روی } y = mx)$$

چون این حد به مقدار m بستگی دارد، یعنی به ازای دو مقدار متفاوت، مثلاً

$$m = 1, -1 \quad \text{یکسان نیست، پس } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y}{x} \text{ وجود ندارد.}$$

۱۲. داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 - 2y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 0}}{x^2 - 0} = 2$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 - 2y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 + y^2}{0 - 2y^2} = -\frac{1}{2}$$

چون این دو حد برابر نیستند، حد وجود ندارد.

۱۳. چون $x^2 + y^2 \neq 0$ پس

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)(x^2 - y^2)} = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

و از آنجا که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - y^2) = 0$ ، $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ وجود ندارد.

۱۴. چون مقدار

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 - y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 - m^2x^2} = \frac{m}{1 - m^2} \quad (y = mx \text{ روی})$$

به m بستگی دارد، $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 - y^2} = 0$ وجود ندارد.

۱۵. چون این تابع یک تابع چند جمله‌ای است، در هر نقطه (x, y) پیوسته است.

۱۶. این تابع یک تابع گویاست، پس در هر نقطه از دامنه‌اش یعنی

$$\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \neq 0\} = \{(x, y) \mid x \neq \pm y\}$$

پیوسته است.

۱۷. این تابع یک تابع گویاست، پس در هر نقطه از دامنه‌اش یعنی

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \neq z^2\}$$

پیوسته است.

۱۸. تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش یعنی

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$$

پیوسته است.

۱۹. چون تابع چند جمله‌ای $h(x, y, z) = xyz - ۱$ و تابع $g(t) = \sin t$ پیوسته هستند، پس $f = gh$ در هر نقطه (x, y, z) پیوسته است.

۲۰. این تابع در نقطه‌های (x, y, z) پیوسته است اگر $e^x + e^{yx} > ۰$ یا $x > yz$

۲۱. این تابع در هر (x, y) به جز احتمالاً در $(۰, ۰)$ پیوسته است. ادعا می‌کنیم که

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده است. چون

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$$

پس اگر قرار دهیم $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} < \delta &\Rightarrow x^2 + y^2 < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

این مطلب درستی ادعای ما را ثابت می‌کند. چون $f(0, 0) = 0$ پس f در $(0, 0)$ نیز پیوسته است.
۲۲. تابع f در هر (x, y) به جز احتمالاً در $(0, 0)$ پیوسته است. چون مقدار

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m^2}{1 + m^2} \quad (\text{روی } y = mx)$$

به بستگی دارد، پس $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ وجود ندارد. در نتیجه f در $(0, 0)$ پیوسته نیست.
۲۳. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) \quad (\text{روی } y = mx) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx^2}{x^2(1 + m^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx^2}{mx^2} \cdot \frac{m}{1 + m^2} \\ &= 1 \times \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2} \end{aligned}$$

چون حد f در $(0, 0)$ روی خط $y = mx$ به مقدار m بستگی دارد، پس $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد و در نتیجه f در $(0, 0)$ پیوسته نیست.
 ۲۴. چون

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) \quad (\text{روی } y = mx) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^3 x^6}{x^{12} + m^2 x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^3 x^2}{x^4 + m^2} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) \quad (\text{روی } y = x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{12}}{x^{12} + x^{12}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

چون برای دو مسیر متفاوت $y = x$ و $y = x^2$ حدود به دست آمده برابر نیستند، $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد و در نتیجه f در $(0, 0)$ پیوسته نیست.

تمرینهای ۳.۷

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = x^{1/2} \quad .1$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \quad .2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 e^{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^2 e^{xy} \quad .3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{3u^2(u^2 + v^2) - 2u(u^2 + v^2)^2}{(u^2 + v^2)^2} \quad .4 \\ &= \frac{u^4 + 3u^2 v^2 - 2u^2 v^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{3v^2(u^2+v^2) - 2v(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2} \\ &= \frac{v^2 + 3v^2u^2 - 2vu^2}{(u^2+v^2)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + \sin x \text{ و } \frac{\partial f}{\partial x} = e^y + y \cos x \quad \Delta$$

۶. چون

$$f(t,v) = \ln\left(\frac{t+v}{t-v}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\ln(t+v) - \ln(t-v)]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t+v} - \frac{1}{t-v} \right] && \text{بنابراین} \\ &= \frac{-2v}{t^2 - v^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t+v} - \frac{-1}{t-v} \right] \\ &= \frac{t}{t^2 - v^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xe^z + e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x - ze^{-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^z - ye^x \quad \nabla$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 3r^2 \operatorname{tg} s \quad \frac{\partial f}{\partial s} = r^2 \operatorname{sec} s + \frac{1}{\sqrt{s}} e^{v^2} \quad \Lambda$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2v \sin 2u \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 2v\sqrt{s} e^{u^2} - \cos 2u$$

۹. با توجه به فرمول مشتقگیری از تابع $\sin^{-1} u$ ، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y / \sqrt{xy}}{\sqrt{1-xy}} + y \cos xy = \frac{y}{2\sqrt{xy}\sqrt{1-xy}} + y \cos xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{2\sqrt{xy}\sqrt{1-xy}} + x \cos xy\end{aligned}$$

۱۰. بنابه فرمول مشتقگیری از تابع $\text{tg}^{-1} t$ ، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1/v}{1 + \frac{u^2}{v^2}} = \frac{v}{v^2 + u^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{-u/v^2}{1 + \frac{u^2}{v^2}} = \frac{-u}{v^2 + u^2}$$

۱۱. داریم $\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln x) x^y$ ، $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$

۱۲.
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-yz^2 / (1 + xyz^2)^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + xyz^2)^2}}}$$

$$= \frac{-yz^2}{(1 + xyz^2)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + xyz^2)^2}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-xz^2}{(1 + xyz^2)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + xyz^2)^2}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-2xyz}{(1 + xyz^2)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + xyz^2)^2}}}$$

۱۳. بنابه تعریف، داریم

$$f_x(\circ, \circ) = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(h, \circ) - f(\circ, \circ)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{\frac{h^2 + \circ}{h^2 + \circ} - \circ}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{h^2}{h^2} = 1$$

$$\begin{aligned}
 f_y(\circ, \circ) &= \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(\circ, h) - f(\circ, \circ)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{\circ + h^\gamma - \circ}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{h^\gamma}{h^\gamma} = 1
 \end{aligned}$$

۱۴. بنا به تعریف، داریم

$$\begin{aligned}
 f_x(\circ, \circ) &= \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(h, \circ) - f(\circ, \circ)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{\circ - \circ}{h^\gamma + \circ} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{\circ}{h^\gamma} = \lim_{h \rightarrow \circ} \circ = \circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_y(\circ, \circ) &= \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(\circ, h) - f(\circ, \circ)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{\circ + \gamma h^\gamma - \circ}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{\circ}{\gamma h^\gamma} = \lim_{h \rightarrow \circ} \circ = \circ
 \end{aligned}$$

۱۵. بنا بر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، داریم

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\gamma}^x p(t) dt + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\gamma}^y q(t) dt \\
 &= p(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_y(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\gamma}^x p(t) dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\gamma}^y q(t) dt \\
 &= q(y)
 \end{aligned}$$

۱۶. فرض کنیم $F(t) = \int \sin t^\gamma dt$ در نتیجه $F'(t) = \sin t^\gamma$ و

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= F(t) \Big|_{\pi}^{x^\gamma + y^\gamma} \\
 &= F(x^\gamma + y^\gamma) - F(\pi)
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [F(x^2+y^2) - F(\pi)] \\ &= 2x F'(x^2+y^2) = 2x \sin(x^2+y^2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [F(x^2+y^2) - F(\pi)] \\ &= 2y F'(x^2+y^2) = 2y \sin(x^2+y^2)^2\end{aligned}$$

۱۷. مشتقهای جزئی اول f عبارت‌اند از

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - \sqrt{2}xy^2 + y^5 - 2) = 6x - \sqrt{2}y^2$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - \sqrt{2}xy^2 + y^5 - 2) = -2\sqrt{2}xy + 5y^4$$

بنابراین

$$\begin{aligned}f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (6x - \sqrt{2}y^2) = -2\sqrt{2}y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (-2\sqrt{2}xy + 5y^4) = -2\sqrt{2}y\end{aligned}$$

۱۸. داریم

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4yx^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

بنابراین، f_{yx} ، f_{xy} عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y} \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{4xy(x^2+y^2)^{-2} - 16xy^2(x^2+y^2)^{-3}}{(x^2+y^2)^4} = \frac{4(x^2y - xy^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-4yx(x^2+y^2)^{-2} + 16yx^2(x^2+y^2)^{-3}}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \frac{4(x^2y - xy^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

۱۹. مشتق‌های جزئی f_x و f_y عبارت‌اند از

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2x^2y\sqrt{z} + 3yz^2 + 2) = 2x^2 - 4xy\sqrt{z}$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2x^2y\sqrt{z} + 3yz^2 + 2) = -2x^2\sqrt{z} + 3z^2$$

بنابراین، f_{yx} و f_{xy} برابرند با

$$f_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y} (2x^2 - 4xy\sqrt{z}) = -4x\sqrt{z}$$

$$f_{yx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x} (-2x^2\sqrt{z} + 3z^2) = -4x\sqrt{z}$$

۲۰. توابع f_x و f_y برابرند با

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} (z \cos xy) = -yz \sin xy$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} (z \cos xy) = -xz \sin xy$$

بنابراین f_{yx} و f_{xy} عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y} (-yz \sin xy) \\ &= -z \sin xy - xyz \cos xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x} (-xy \sin xy) \\ &= -z \sin xy - xyz \cos xy \end{aligned}$$

۲۱. الف) چون $f(x,y) = \ln(x^r + y^r)^{1/r} = \frac{1}{r} \ln(x^r + y^r)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^r + y^r) = \frac{1}{r} \frac{rx}{x^r + y^r} = \frac{x}{x^r + y^r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^r + y^r) = \frac{y}{x^r + y^r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^r + y^r} \\ &= \frac{x^r + y^r - rx^r}{(x^r + y^r)^2} = \frac{y^r - x^r}{(x^r + y^r)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^r + y^r} \\ &= \frac{x^r + y^r - ry^r}{(x^r + y^r)^2} = \frac{x^r - y^r}{(x^r + y^r)^2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^r - x^r}{(x^r + y^r)^2} + \frac{x^r - y^r}{(x^r + y^r)^2} = 0$$

(ب) داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y/x^r}{1 + \frac{y^r}{x^r}} = \frac{-y}{x^r + y^r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + \frac{y^r}{x^r}} = \frac{x}{x^r + y^r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{x^r + y^r} \right) \\ &= \frac{-rx y}{(x^r + y^r)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

۲۲. در حل تمرین ۲۲ از بخش ۲.۷، نشان دادیم که این تابع در نقطه $(0, 0)$ ناپیوسته است. حال $f_x(0, 0)$ و $f_y(0, 0)$ را محاسبه می‌کنیم. بنابه تعریف، داریم

$$\begin{aligned}f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0 + h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = 0\end{aligned}$$

۲۳. داریم

$$x_r = \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \theta) = \cos \theta$$

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(r \cos \theta) = -r \sin \theta$$

$$y_r = \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \theta) = \sin \theta$$

$$y_\theta = \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta) = r \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} [-6(y-2x)^2 + (y-2x)^{-1/2}] \\ &= 24(y-2x) + \frac{1}{(y-2x)^{3/2}} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [(y-2x)^2 - \sqrt{y-2x}] \\ &= 2(y-2x)^2 + \frac{1}{2\sqrt{y-2x}} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} [2(y-2x)^2 - \frac{1}{2}(y-2x)^{-1/2}] \\ &= 6(y-2x) + \frac{1}{4(y-2x)^{3/2}}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 24(y-2x) + \frac{1}{(y-2x)^{3/2}} - 24(y-2x) - \frac{1}{(y-2x)^{3/2}} = 0$$

۲۶. توابع ω_x ، ω_y ، ω_z عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{\partial}{\partial x} [e^{xz} \sin yz + \ln(x^2+y^2+z^2)] \\ &= 2xe^{xz} \sin yz + \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \omega_y &= \frac{\partial}{\partial y} [e^{xz} \sin yz + \ln(x^2+y^2+z^2)] \\ &= ze^{xz} \cos yz + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \omega_z &= \frac{\partial}{\partial z} [e^{xz} \sin yz + \ln(x^2+y^2+z^2)] \\ &= ye^{xz} \cos yz + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\end{aligned}$$

بنابراین، ω_{zy} ، ω_{zx} ، ω_{zz} ، ω_{yz} ، ω_{yx} ، ω_{yy} ، ω_{xz} ، ω_{xy} ، ω_{xx} عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}
 \omega_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\gamma x e^{x^r} \sin yz + \frac{\gamma x}{x^r + y^r + z^r} \right] \\
 &= \gamma e^{x^r} \sin yz + \gamma x^r e^{x^r} \sin yz + \frac{\gamma(x^r + y^r + z^r) - \gamma x^r}{(x^r + y^r + z^r)^r} \\
 &= \gamma e^{x^r} \sin yz (1 + \gamma x^r) + \frac{\gamma(-x^r + y^r + z^r)}{(x^r + y^r + z^r)^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma x e^{x^r} \sin yz + \frac{\gamma x}{x^r + y^r + z^r} \right] \\
 &= \gamma x z e^{x^r} \cos yz - \frac{\gamma x y}{(x^r + y^r + z^r)^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{xz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma x e^{x^r} \sin yz + \frac{\gamma x}{x^r + y^r + z^r} \right] \\
 &= \gamma x y e^{x^r} \cos yz - \frac{\gamma x z}{(x^r + y^r + z^r)^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[z e^{x^r} \cos yz + \frac{\gamma y}{x^r + y^r + z^r} \right] \\
 &= -z^r e^{x^r} \sin yz - \frac{\gamma y^r}{(x^r + y^r + z^r)^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[z e^{x^r} \cos yz + \frac{\gamma y}{x^r + y^r + z^r} \right] \\
 &= \gamma x e^{x^r} \cos yz e^{x^r} - \frac{\gamma x y}{(x^r + y^r + z^r)^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{yz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[z e^{x^r} \cos yz + \frac{\gamma y}{x^r + y^r + z^r} \right] \\
 &= e^{x^r} \cos yz - y z e^{x^r} \sin yz - \frac{\gamma y z}{(x^r + y^r + z^r)^r} \\
 &= e^{x^r} \cos yz (1 - yz) - \frac{\gamma y z}{(x^r + y^r + z^r)^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[y e^{x^r} \cos yz + \frac{\gamma z}{x^r + y^r + z^r} \right] \\
 &= -y^r e^{x^r} \sin yz - \frac{\gamma z^r}{(x^r + y^r + z^r)^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{zx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ye^{xz} \cos yz + \frac{yz}{x^2+y^2+z^2} \right] \\ &= 2xye^{xz} \cos yz - \frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \omega_{zy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ye^{xz} \cos yz + \frac{yz}{x^2+y^2+z^2} \right] \\ &= e^{xz} \cos yz (1-yz) - \frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\end{aligned}$$

۲۷. داریم

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (1-x) = -1$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (1-x) = 0$$

بنابراین

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (4-y^2) = -2y \text{ و } f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (4-y^2) = 0 \text{ چون } ۲۸$$

پس

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{0 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4y^2 + 1}$$

۲۹. چون

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

پس

$$\begin{aligned}\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} &= \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

۳۰. داریم

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

بنابراین

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2} + 1 = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

۳۱. داریم

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) = 2x, u_y = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2) = -2y$$

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x} (2xy) = 2y, v_y = \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = 2x$$

چون $u_x = 2x = v_y$ و $u_y = -2y = -v_x$ ، پس u و v در معادلات کوشی صدق می‌کنند.

۳۲. چون

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) = e^x \cos y, u_y = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos y) = -e^x \sin y$$

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \sin y) = e^x \sin y, v_y = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y) = e^x \cos y$$

پس u و v در معادلات کوشی ریمان صدق می‌کنند.

۳۳. با توجه به حل مثال ۷.۳.۱۵، برای تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y - x y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

به ازای $(x, y) \neq (0, 0)$ ، داریم

$$f_x(x, y) = \frac{x^2 y + 2x^2 y^2 - y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

و در نتیجه $f_x(x, 0) = 0$. بنابراین،

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(x, h) - f_x(x, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 h + 4x^2 h^2 - h^5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + h^4)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 h^2 + 4x^2 h^4 - h^6}{(x^2 + h^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_{xy}(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = 0 \quad (y=0 \text{ روی})$$

در حالی که، بنابر حل مثال ۷.۳.۱۵، $f_{xy}(0, 0) = -1$. چون

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_{xy}(x, y) \neq f_{xy}(0, 0)$$

تابع $f_{xy}(x, 0)$ در $(0, 0)$ پیوسته نیست. از این رو، این مثال در شرایط قضیه ۷.۳.۱۶ صدق نمی‌کند و در نتیجه ناقض این قضیه نیست.
۳۴. داریم

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b \frac{\partial}{\partial t} (\sin ax \sin bt) = \sin ax \cos bt$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sin ax \sin bt) = a \cos ax \sin bt$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (b \sin ax \cos bt) = -b^2 \sin ax \sin bt$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (a \cos ax \sin bt) = -a^2 \sin ax \sin bt$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -a^2 \sin ax \sin bt = \frac{a^2}{b^2} -b^2 \sin ax \sin bt \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

۳۵. چون

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} e^{ax+bt} = be^{ax+bt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{ax+bt} = ae^{ax+bt}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} ae^{ax+bt} = a^2 e^{ax+bt}$$

پس

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= be^{ax+bt} = \frac{b}{a^2} (a^2 e^{ax+bt}) \\ &= \frac{b}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

۳۶. آهنگ تغییر T در نقطه $(1, 2)$ در جهت محور x ، یعنی روی خط $y = 2$ ، برابر است با

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(1,2)} &= 4 \cdot x(x^2 + y^2) \Big|_{(1,2)} \\ &= 4 \cdot (1)(1 + 4) = 20 \end{aligned}$$

به همین ترتیب آهنگ تغییر T در نقطه $(1, 2)$ در جهت محور y ، یعنی روی خط $x = 1$ برابر است با

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(1,2)} &= 4 \cdot y(x^2 + y^2) \Big|_{(1,2)} \\ &= 4 \cdot (2)(1 + 4) = 40 \end{aligned}$$

۳۷. آهنگهای تغییر v در نقطه $(1, -1, 1)$ در جهت‌های خواسته شده، به ترتیب برابرند با

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(2,-1,1)} &= \frac{-200x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \Big|_{(2,-1,1)} \\ &= \frac{-200(2)}{(4 + 1 + 1)^2} = -\frac{100}{9} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(2,-1,1)} = \frac{-20 \cdot y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \Big|_{(2,-1,1)}$$

$$= \frac{-20 \cdot (-1)}{6^2} = \frac{50}{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{(2,-1,1)} = \frac{-20 \cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \Big|_{(2,-1,1)}$$

$$= \frac{-20 \cdot (-1)}{6^2} = -\frac{50}{9}$$

۳۸. اثر سطح $z=f(x,y)=9-x^2-y^2$ در صفحه $x=1$ ، منحنی $z=f(1,y)=9-1-y^2+8-y^2$ است. پس $\frac{\partial z}{\partial y}$ را در $(1,2)$ پیدا می‌کنیم. داریم

$$f_x(1,2) = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = \frac{\partial}{\partial y} (9-x^2-y^2) \Big|_{(1,2)}$$

$$= -2y \Big|_{(1,2)} = -4$$

پس معادلات متقارن خط مماس مورد نظر عبارت‌اند از

$$x=1, y-2 = \frac{z-f(1,2)}{f_y(1,2)} = \frac{z-4}{-4}$$

یا

$$x=1, \quad y = \frac{z-12}{-4}$$

۳۹. منحنی C نمودار معادله

$$z=f(x,2) = \sqrt{36-9x^2-16}$$

$$= \sqrt{20-9x^2}$$

است. چون

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{36-9x^2-4y^2}$$

$$= \frac{-9x}{\sqrt{36-9x^2-4y^2}}$$

پس

$$f_x(1, 2) = \frac{-9}{\sqrt{36-9-16}} = \frac{-9}{\sqrt{11}}$$

در نتیجه معادلات خط مماس بر منحنی C عبارت‌اند از

$$y = 2, \quad x - 1 = \frac{z - f(1, 2)}{f_x(1, 2)} = \frac{z - \sqrt{11}}{-9/\sqrt{11}}$$

یا

$$y = 2, \quad x - 1 = \frac{\sqrt{11} - z - 11}{-9}$$

۴۰. الف) از معادله داده شده، با استفاده از $\frac{\partial z^n}{\partial x} = nz^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x}$ ، به طور ضمنی نسبت به x مشتق می‌گیریم. داریم $0 = 0 + 2zz_x - 0 = 0$ پس $z_x = -\frac{x}{z}$

به همین ترتیب از معادله داده شده نسبت به y مشتق می‌گیریم. داریم

$$2y + 2zz_y = 0 \Rightarrow z_y = -\frac{y}{z}$$

(ب) از معادله داده شده، به ترتیب، نسبت به x و نسبت به y مشتق می‌گیریم. داریم

$$8x - 8zz_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{x}{z}$$

$$18y - 8zz_y = 0 \Rightarrow z_y = -\frac{9y}{4z}$$

(پ) از معادله داده شده، به ترتیب، نسبت به x و y مشتق می‌گیریم. داریم

$$18x - 72zz_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{x}{4z}$$

$$18y - 72zz_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{y}{9z}$$

(ت) با مشتق‌گیری از معادله داده شده به ترتیب نسبت به x و y ، داریم

$$z_x - 2x = 0 \Rightarrow z_x = 2x$$

$$z_y - 18y = 0 \Rightarrow z_y = 18y$$

(ث) از معادله داده شده، به ترتیب، نسبت به x و y مشتق می‌گیریم. به دست می‌آوریم

$$3x^2 + 3z^2 z_x - 3yz - 3xyz_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy}$$

$$3y^2 + 3z^2 z_y - 3xz - 3xyz_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{xz - y^2}{z^2 - xy}$$

توجه کنید که در مشتقگیری از عبارت $3xyz$ از قاعده حاصلضرب استفاده شده است.

(ج) با مشتقگیری از معادله داده شده نسبت به x ، داریم

$$3(2x + 2zz_x)(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 54zz_x = 0$$

یا

$$6x(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 6zz_x(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 54zz_x = 0$$

بنابراین

$$z_x = \frac{-x(x^2 + y^2 + z^2)^2}{z(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 9z}$$

به همین ترتیب، با مشتقگیری از معادله داده شده نسبت به y به دست می‌آوریم

$$3(2y + 2zz_y)(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 54zz_y = 0$$

و در نتیجه

$$z_y = \frac{-y(x^2 + y^2 + z^2)^2}{z(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 9z}$$

تمرینهای ۴.۷

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx = (6x + 3x^2) dx \quad .1$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy \quad .2$$

$$= (3x^2 - 6y) dx + (-6x + 3y^2) dy$$

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy \quad .3$$

$$= (\lambda x^r + \gamma xy) dx + x^r dy$$

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy \quad .4$$

$$= \gamma \cos x dx + \Delta \sin y dy$$

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy \quad .5$$

$$= (\cos y + \gamma y^r \sin \gamma x) dx + (-x \sin y - \gamma y \cos \gamma x) dy$$

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy \quad .6$$

$$= (-\gamma y \cos xy \sin xy - \gamma y \sin xy \cos xy) dx$$

$$+ (-\gamma x \cos xy \sin xy - \gamma x \sin xy \cos xy) dy$$

$$= -\gamma y \sin xy \cos xy dx - \gamma x \sin xy \cos xy dy$$

$$= -\gamma y \sin \gamma xy dx - \gamma x \sin \gamma xy dy$$

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy \quad .7$$

$$= -\frac{y^r}{xy^r} dx + (\gamma y^r - \frac{\gamma xy}{xy^r}) dy$$

$$= -\frac{1}{x} dx + (\gamma y^r - \frac{\gamma}{y}) dy$$

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy \quad .8$$

$$= (\gamma x e^{\gamma y} + x^r y e^{\gamma y}) dx + (x^r e^{\gamma y} - \frac{\gamma}{y^r}) dy$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz \quad .۹$$

$$= \frac{y^2z + yz^2}{(x+y+z)^2} dx + \frac{x^2z + xz^2}{(x+y+z)^2} dy + \frac{x^2y + xy^2}{(x+y+z)^2} dz$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt \quad .۱۰$$

$$= (\gamma xz - z^2 t) dx + \gamma t^2 dy + (x^2 - \gamma xzt) dz + (\gamma y t^2 - xy^2) dt$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz \quad .۱۱$$

$$= (\gamma xy^2 z^2 - \gamma e^{-\gamma x}) dx + \gamma x^2 y^2 z^2 dy + \gamma x^2 y^2 z dz$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv \quad .۱۲$$

$$= \gamma xy^2 z t^{-1} v^0 dx + \gamma x^2 y^2 z t^{-1} v^0 dy + x^2 y^2 t^{-1} v^0 dz - x^2 y^2$$

$$z t^{-2} v^0 dt + \Delta x^2 y^2 z t^{-1} v^2 dv$$

۱۳. چون

$$dz = -\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \gamma x dx + \delta y dy$$

پس به ازای $x = ۱$ و $y = ۲$ ، $dx = -۰/۳$ و $dy = ۰/۲$ به دست می‌آوریم

$$dz = \gamma(۱)(-۰/۳) + \delta(۲)(۰/۲) = ۱/۸$$

۱۴. چون

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= (\gamma x + \delta y) dx + (\gamma x + \delta y) dy \end{aligned}$$

در نتیجه، به ازای مقادیر داده شده، مقدار dz برابر است با

$$(-۴ + \delta)(۰/۳) + (-۴ + \delta)(۰/۲) = -۱$$

۱۵. داریم

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= (2x - 9x^2y^2 + 4) dx + (-6x^2y - 6y^2) dy \end{aligned}$$

با جایگزینی مقادیر $x = -2$ ، $y = 3$ ، $dx = -0.02$ و $dy = 0.01$ در این رابطه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} df &= (-4 - 324 + 4)(-0.02) + (144 - 54)(0.01) \\ &= 6/48 + 0/9 = 7/38 \end{aligned}$$

۱۶. داریم

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= (2xz^3 - 4x^{-5}) dx + (-3z^2 + \frac{3}{y}zy^{-\frac{1}{2}}) dy + (3x^2z^2 - 6yz + 3\sqrt{y}) dz \end{aligned}$$

با جایگزینی مقادیر $x = 1$ ، $y = 3$ ، $z = 2$ ، $dx = 0.02$ ، $dy = -0.03$ و $dz = -0.04$ در این رابطه، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} df &= (16 - 4)(0.02) + (-12 + \frac{3}{\sqrt{3}})(-0.03) + (12 - 36 + 3\sqrt{3})(-0.04) \\ &\approx 0/24 + 0/3 + 0/75 = 1/29 \end{aligned}$$

۱۷. تابع $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt{y} = x^{1/2}y^{1/2}$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{1/2} dx + \frac{1}{2} x^{1/2} y^{-1/2} dy$$

با جایگزین کردن مقادیر $x = 27$ ، $y = 36$ ، $dx = -0.02$ و $dy = 0.04$ در این رابطه، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2} (27)^{-1/2} (36)^{1/2} (-0.02) + \frac{1}{2} (27)^{1/2} (36)^{-1/2} (0.04) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot 6 (-0.02) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} (0.04) \approx 0.005 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(26/98, 36/0.4) - f(27, 36) \approx 0.014$$

$$f(26/98, 36/0.4) = \sqrt[2]{26/98} \sqrt{36/0.4} \approx \sqrt[2]{27} \sqrt{36} + 0.014 \\ = 18/0.05$$

۱۸. تابع $f(x, y) = \frac{x^{2/5}}{y^4}$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ = \frac{\frac{2}{5}x^{-3/5}}{y^4} dx - \frac{4x^{2/5}}{y^5} dy$$

با جایگزینی مقادیر $x = 32$ ، $y = 2$ ، $dx = 0.01$ و $dy = 0.04$ در این رابطه، به دست می‌آوریم

$$df = \frac{2(0.01)}{5(8)(16)} - \frac{4(4)(0.04)}{32} \approx -0.02$$

بنابراین

$$\frac{(32/0.1)^{2/5}}{(1/96)^4} \approx \frac{(32)^{2/5}}{(2)^4} - 0.02 \approx 0.23$$

۱۹. حجم استوانه برابر است با $v = \pi r^2 h$. در نتیجه

$$dv = \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial h} dh \\ = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$$

به‌ازای مقادیر $r = 6$ ، $h = 15$ ، $dr = 0.2$ ، $dh = 0.3$ ، داریم

$$dv = 2\pi (6) (15) (0.2) + \pi (36) (0.3) \\ \approx 146/952$$

۲۰. حجم مکعب مستطیل به ابعاد x ، y ، z برابر است با $v = xyz$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
 dv &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\
 &= yz dx + xz dy + xy dz
 \end{aligned}$$

به ازای مقادیر $x = 9$ ، $y = 6$ ، $z = 4$ ، $dx = 0/02$ و $dy = 0/03$ و $dz = 0/01$ داریم

$$\begin{aligned}
 dv &= 6(4)(0/02) + 9(4)(-0/03) + 9(6)(0/01) \\
 &= 0/48 - 1/08 + 0/54 - 0/06
 \end{aligned}$$

تمرینهای ۵.۷

۱. بنابر صورت (الف) قاعده زنجیره‌ای، داریم

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\
 &= 2x \left[\frac{1}{2\sqrt{t}} \right] + (-12y^2)(8te^{3t^2}) \\
 &= \frac{4\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} - 12e^{6t^2} te^{3t^2} = 2 - 12te^{9t^2}
 \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\
 &= \frac{6x}{3x^2 + y^2} (2e^{2t}) + \frac{3y^2}{3x^2 + y^2} \left(\frac{2}{3} t^{-1/3} \right) \\
 &= \frac{6e^{2t}(2e^{2t})}{3e^{4t} + t^2} + \frac{3t^{2/3}}{3e^{4t} + t^2} \left(\frac{2}{3} t^{-1/3} \right) \\
 &= \frac{12e^{4t}}{3e^{4t} + t^2} + \frac{2t}{3e^{4t} + t^2} = \frac{12e^{4t} + 2t}{3e^{4t} + t^2}
 \end{aligned}$$

۳.

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\
 &= (\cos x - 2xy \sin x^2 y) (6t^2) + (-x^2 \sin x^2 y) (0) \\
 &= 6t^2 \cos 2t^2 - 120t^2 \sin 20t^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x-y}} \frac{1}{t} + \frac{-1}{2\sqrt{3x-y}} (-2t) \\ &= \frac{3}{2t\sqrt{3\ln t+t^2-2}} + \frac{t}{\sqrt{3\ln t+t^2-2}} = \frac{3+2t^2}{2t\sqrt{3\ln t+t^2-2}} \end{aligned}$$

۵. بنابر صورت (ب) قاعده زنجیره‌ای، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{1}{y^2} (1) + \frac{-2x}{y^3} (-1) = \frac{y+2x}{y^3} \\ &= \frac{1-u+v+2u+2v}{(1-u+v)^3} = \frac{1+u+2v}{(1-u+v)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{1}{y^2} (2) + \frac{-2x}{y^3} (1) \\ &= \frac{2y-2x}{y^3} = \frac{2-2u+2v-2u-2v}{(1-u+v)^3} = \frac{2-4u-2v}{(1-u+v)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \left(-\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{y}\right)(2u) + \left(-\frac{1}{xy^2} + \frac{x}{y^3}\right)(v^2) \\ &= \left(-\frac{1}{2u^2v^2} - \frac{1}{uv^2}\right)(2u) + \left(-\frac{1}{2u^2v^2} + \frac{2u^2}{u^2v^2}\right)(v^2) \\ &= \frac{-1-2u^2}{u^2v^2} + \frac{-1+2u^2}{2u^2v^2} = \frac{-3-2u^2}{2u^2v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\
 &= \left(\frac{-1-x^r}{x^r y} \right) (\cdot) + \left(\frac{-1+u^r}{xy^r} \right) (r_{uv}) \\
 &= \frac{-1+r_{u^r}}{r_{u^r} r_{v^r}} (r_{uv}) = \frac{r_{u^r} r_{v^r} - 1}{u^r v^r}
 \end{aligned}$$

.v

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\
 &= (-r_x)(\sin v) + (-r_y)(-v \sin u) \\
 &= -r_u \sin^r v + r_v^r \sin u \cos u
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\
 &= (-r_x)(u \cos v) + (-r_y)(\cos u) \\
 &= -r_u^r \sin v \cos v - r_v \cos^r u
 \end{aligned}$$

.A

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\
 &= r_x y e^{x^r y} \frac{v}{r \sqrt{uv}} + x^r e^{x^r y} \left(-\frac{1}{u^r} \right) \\
 &= (r \sqrt{uv} \frac{1}{u} e^v) \frac{v}{r \sqrt{uv}} - (u v e^v) \frac{1}{u^r} \\
 &= \frac{v e^v}{u} - \frac{v e^v}{u} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\
 &= r_x y e^{x^r y} \frac{u}{r \sqrt{uv}} + x^r e^{x^r y} (\cdot) \\
 &= (r \sqrt{uv} \frac{e^v}{u}) \frac{u}{r \sqrt{uv}} = e^v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \\
 &= (\gamma \cos \gamma u \cos \gamma v)(\gamma(r+s)) + (-\gamma \sin \gamma u \sin \gamma v)(\gamma(r-s)) \\
 &= \gamma(r+s) \cos \gamma u \cos \gamma v - \gamma(r-s) \sin \gamma u \sin \gamma v \\
 &= \gamma(r+s) \cos \gamma(r+s)^\gamma \cos \gamma(r-s)^\gamma - \gamma(r-s) \sin \gamma(r+s)^\gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \\
 &= (\gamma \cos \gamma u \cos \gamma v)(\gamma(r+s)) + (-\gamma \sin \gamma u \sin \gamma v)(-\gamma(r-s)) \\
 &= \gamma(r+s) \cos \gamma u \cos \gamma v + \gamma(r-s) \sin \gamma u \sin \gamma v \\
 &= \gamma(r+s) \cos \gamma(r+s)^\gamma \cos \gamma(r-s)^\gamma + \gamma(r-s) \sin \gamma(r+s)^\gamma \sin \gamma(r-s)^\gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} \\
 &= \frac{1}{u}(s \ln \gamma^\gamma \gamma^{rs}) + \frac{1}{v} \left(\frac{1}{s} \ln \gamma^\gamma \gamma^{r/s} \right) \\
 &= \frac{s \gamma^r \ln \gamma^\gamma}{\gamma^{rs}} + \frac{\gamma^{r/s} \ln \gamma^\gamma}{\gamma^{r/s} s} \\
 &= \frac{\ln \gamma^\gamma (s^\gamma + 1)}{s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \\
 &= \frac{1}{u}(r \ln \gamma^\gamma \gamma^{rs}) + \frac{1}{v} \left(-\frac{r}{s^\gamma} \ln \gamma^\gamma \gamma^{r/s} \right) \\
 &= r \ln \gamma^\gamma - \frac{r \ln \gamma^\gamma}{s^\gamma} = \frac{r \ln \gamma^\gamma (s^\gamma - 1)}{s^\gamma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} \\ &= (e^v - ve^{-u}) \frac{1}{r} + (ue^v + e^{-u}) \left(\frac{s}{r}\right) \\ &= \frac{e^s \ln r - s \ln re^{-\ln r}}{r} + \frac{s(\ln re^s \ln r + e^{-\ln r})}{r} \\ &= \frac{1}{r} \left(r^s - \frac{s}{r} \ln r\right) + \frac{s}{r} \left(r^s \ln r + \frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \\ &= (e^v - ve^{-u}) (\cdot) + (ue^v + e^{-u}) \ln r \\ &= (\ln re^s \ln r + e^{-\ln r}) \ln r \\ &= \left(r^s \ln r + \frac{1}{r}\right) \ln r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} \\ &= \ln \gamma \gamma^{u-v} \cos s + (-\ln \gamma \gamma^{u-v}) \sin s \\ &= \ln \gamma \cos s \gamma^{r(\cos s - \sin s)} - \ln \gamma \sin s \gamma^{r(\cos s - \sin s)} \\ &= \ln \gamma (\cos s - \sin s) \gamma^{r(\cos s - \sin s)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \\ &= \ln \gamma \gamma^{u-v} (-r \sin s) + (-\ln \gamma \gamma^{u-v}) (r \cos s) \\ &= -r \ln \gamma (\sin s + \cos s) \gamma^{r(\cos s - \sin s)}\end{aligned}$$

۱۳. بنابر صورت (الف) قاعده زنجیره‌ای برای توابع با سه متغیر، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\
&= \left(\frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}\right) \cos t + \left(-\frac{x}{y^2}\right)(-\sin t) + \left(-\frac{1}{x}\right) \sin^2 t \\
&= \left(\frac{1}{\cos t} + \frac{\tan t}{\sin^2 t}\right) \cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} - \frac{\sec^2 t}{\sin t} \\
&= 1 + \frac{1}{\sin t} + \tan^2 t - \frac{\sec^2 t}{\sin t} = 1 + \cos^2 t + \tan^2 t - \cos^2 t \sec^2 t
\end{aligned}$$

.14

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\
&= \left(-\frac{z}{x^2 y^2}\right) \left(\frac{-\rho}{t^2}\right) + \left(\frac{-yz}{xy^2}\right) (-1) + \left(\frac{1}{xy^2}\right) \left(\frac{1}{t} t^{-2/\rho}\right) \\
&= \frac{\rho t^{1/\rho}}{9 t^{-\rho} t^{\rho} t^{\rho}} + \frac{\rho t^{1/\rho}}{-\rho t^{-\rho} t^{\rho}} + \frac{t^{-2/\rho}}{\rho(\rho t^{-\rho}) t^{\rho}} \\
&= \frac{\rho}{\rho} t^{-2/\rho} - \frac{\rho}{\rho} t^{-2/\rho} + \frac{1}{\rho} t^{-2/\rho} = \frac{1}{\rho} t^{-2/\rho}
\end{aligned}$$

.15

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\
&= \frac{x(\rho e^{\rho t})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y(-\rho e^{-\rho t})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z(\rho t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
&= \frac{\rho x e^{\rho t} - \rho y e^{-\rho t} + \rho t z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
&= \frac{\rho e^{\rho t} - \rho e^{-\rho t} + \rho t}{\sqrt{e^{\rho t} + e^{-\rho t} + \rho t}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\
 &= \frac{x(3t^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3y^2}{2\sqrt{y^2-z^2}} \right) 2t + \frac{3z^2}{2\sqrt{y^2-z^2}} (-3t^2) \\
 &= \frac{3t^5}{\sqrt{t^6+t^4}} + \left(\frac{t^2}{\sqrt{t^6+t^4}} - \frac{3t^4}{2\sqrt{t^6+t^4}} \right) 2t - \frac{9t^8}{2\sqrt{t^6+t^4}} \\
 &= \frac{3t^5+2t^3}{t^2\sqrt{t^2+1}} - \frac{6t^5-9t^8}{2\sqrt{t^6+t^4}} = \frac{3t^3+2t}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{6t^5-9t^8}{2\sqrt{t^2+9t^9}}
 \end{aligned}$$

۱۷. فرض می‌کنیم که $F(x, y) = x^2 + 4x^2y - 3xy^2 + y^2 - 5$. بنابر فرمول مشتقگیری ضمنی به‌دست آمده در بند ۷. ۵. ۸ متن کتاب داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x^2 + 8xy - 3y^2}{4x^2 - 6xy + 3y^2}$$

۱۸. فرض می‌کنیم که $F(x, y) = 2x^{2/3} - 3y^{2/3} - 2$. داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{-2y^{-1/3}} = \frac{2y^{1/3}}{3x^{1/3}}$$

۱۹. فرض می‌کنیم که $F(x, y) = x^2 + y^2 + \sin xy^2 - 6$. در این صورت، داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x + y^2 \cos xy^2}{2y + 2xy \cos xy^2}$$

۲۰. قرار می‌دهیم $F(x, y) = e^{xy} + \ln \frac{y}{x} + 10$. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{\frac{1}{y}e^{x/y} - \frac{1}{x}}{-\frac{x}{y^2}e^{x/y} + \frac{1}{y}} \\ &= -\frac{\frac{xe^{x/y} - y}{xy}}{-xe^{x/y} + y} = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

۲۱. فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = 2xz^2 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z$. بنابر فرمولهای به دست آمده در بند ۷. ۵. ۱۱ کتاب، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{2z^2 + 2xy^2}{6xz^2 + 6yz + 4} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{-3z^2 + 2x^2y}{6xz^2 - 6yz + 4} \\ &= \frac{3z^2 - 2x^2y}{6xz^2 - 6yz + 4} \end{aligned}$$

۲۲. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y - 2$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{z^2 + 4xy}{2xz - 4y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{2x^2 - 8yz + 3}{2xz - 4y^2} \end{aligned}$$

۲۳. قرار می‌دهیم $F(x, y, z) = x^2z^2 - 2xyz + z^2y^2 - 3$. در این صورت،

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{2xz^2 - 2yz}{2x^2z - 2xy + 2z^2y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{-2xz + 2z^2y}{2x^2z - 2xy + 2z^2y^2} \\ &= \frac{2xz - 2z^2y}{2x^2z - 2xy + 2z^2y^2} \end{aligned}$$

۲۴. قرار می‌دهیم $F(x, y, z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{z}$ داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{\frac{-1}{(xyz)^2}}{-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(y+z)^2} - \frac{1}{(x+y+z)^2}} \\ &= \frac{-z^2(y+z)^2}{(y+z)^2(x+y+z)^2 + z^2(x+y+z)^2 + z^2(y+z)^2} \end{aligned}$$

به همین ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{-(y+z)^{-2} - (x+y+z)^{-2}}{-z^{-2} - (y+z)^{-2} - (x+y+z)^{-2}} \\ &= -\frac{z^2(x+y+z)^2 + z^2(y+z)^2}{(y+z)^2(x+y+z)^2 + z^2(x+y+z)^2 + z^2(y+z)^2} \end{aligned}$$

۲۵. فرض می‌کنیم $u = x - y$. پس $z = f(u)$ در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} (1) = \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} (-1) = -\frac{\partial z}{\partial u} \end{aligned}$$

بنابراین، $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}$

۲۶. فرض می‌کنیم که $r = x - y$ ، $s = y - z$ ، $t = z - x$. در نتیجه $\omega = f(r, s, t)$ بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial r} (1) + \frac{\partial \omega}{\partial s} (0) + \frac{\partial \omega}{\partial t} (-1) \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \omega}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial r} (-1) + \frac{\partial \omega}{\partial s} (1) + \frac{\partial \omega}{\partial t} (0) \\ &= -\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial r} (0) + \frac{\partial \omega}{\partial s} (-1) + \frac{\partial \omega}{\partial t} (1) \\ &= -\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \\ &= 0\end{aligned}$$

۲۷. فرض می‌کنیم که $u = y + ax$ ، $v = y - ax$. در نتیجه $z = f(u) + g(v) = F(u, v)$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= af'(u) - ag'(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial u} [af'(u) - ag'(v)] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} [af'(u) - ag'(v)] \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= a^2 f''(u) + a^2 g''(v) = a^2 [f''(u) + g''(v)]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= f'(u)(1) + g'(v)(1) = f'(u) + g'(v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial u} [f'(u) + g'(v)] \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} [f'(u) + g'(v)] \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= f''(u)(1) + g''(v)(1) = f''(u) + g''(v)$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

۲۸. الف) داریم

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos^2 \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial x} \\ & \quad (-r \sin \theta) \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta) \frac{\sin \theta}{r} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{\partial z}{\partial x} \end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin^2 \theta + \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) \frac{\cos \theta}{r} \\ & \quad + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta) \frac{\cos \theta}{r} \\ &= \frac{\partial z}{\partial y} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

(ب) با استفاده از قسمت الف)، داریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ & \quad + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \frac{\cos^2 \theta}{r^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \end{aligned}$$

۲۹. داریم

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\lambda(x-4t), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \gamma(x-4t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 4\lambda, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \gamma$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 16 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

۳۰. چون

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -3A \sin 3t \sin 3x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -9A \cos 3t \sin 3x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3A \cos 3t \cos 3x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -9A \cos 3t \sin 3x$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

تمرینهای ۶.۷

۱. داریم

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j} \\ &= 3\vec{i} - 5\vec{j} \end{aligned}$$

در نتیجه $\nabla f(1,2) = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ چون $\vec{u} = \vec{a}$ یک بردار واحد است،

$$\begin{aligned}
 D_{uf}(1, \sqrt{2}) &= \nabla f(1, \sqrt{2}) \cdot \vec{u} \\
 &= (3\vec{i} - 5\vec{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \right) \\
 &= \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

۲. چون

$$f_x(x, y) = \sin x^2 y + 2x^2 y \cos x^2 y$$

$$f_y(x, y) = 2y + x^2 \cos x^2 y$$

پس

$$\begin{aligned}
 \nabla f(1, \pi/2) &= f_x(1, \pi/2)\vec{i} + f_y(1, \pi/2)\vec{j} \\
 &= (1)\vec{i} + \pi\vec{j} = \vec{i} + \pi\vec{j}
 \end{aligned}$$

چون $\vec{u} = \vec{a} =$ یک بردار واحد است، پس

$$\begin{aligned}
 D_{uf}(1, \pi/2) &= \nabla f(1, \pi/2) \cdot \vec{u} = (1, \pi) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1 - \pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

۳. داریم

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= \frac{y(x^2 + y^2) - 2x(xy - 1)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - yx^2 + 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\
 f_y(x, y) &= \frac{x(x^2 + y^2) - 2y(xy - 1)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - xy^2 + 2y}{(x^2 + y^2)^2}
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \nabla f(-1, 1) &= f_x(-1, 1)\vec{i} + f_y(-1, 1)\vec{j} \\
 &= -\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}
 \end{aligned}$$

چون $\vec{u} = \vec{a}$ ، یک بردار واحد است، پس

$$\begin{aligned} D_u f(-1, 1) &= \nabla f(-1, 1) \cdot \vec{u} \\ &= \left(-\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{j}\right) \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx -0.68 \end{aligned}$$

۴. در اینجا چون $f_x(x, y) = 2x \ln y$ ، $f_y(x, y) = \frac{x^2}{y}$ داریم

$$\begin{aligned} \nabla f(5, 1) &= f_x(5, 1)\vec{i} + f_y(5, 1)\vec{j} \\ &= 0\vec{i} + 25\vec{j} = 25\vec{j} \end{aligned}$$

چون $|\vec{a}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ، یک بردار واحد در جهت \vec{a} برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} D_u f(5, 1) &= \nabla f(5, 1) \cdot \vec{u} \\ &= 25\vec{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(0 + 50) = 10\sqrt{5} \end{aligned}$$

۵. بنابه تعریف داریم

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k} \\ &= 4x\vec{i} - 2y\vec{j} - 8z\vec{k} \end{aligned}$$

پس $\nabla f(1, 1, 1) = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$ چون بردار واحد در جهت \vec{a} برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4+1+1}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

مقدار مشتق سوئی f در نقطه P در جهت \vec{a} برابر است با

$$\begin{aligned} D_{\vec{a}}f(1, 1, 1) &= \nabla f(1, 1, 1) \cdot \vec{a} \\ &= (\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \cdot \frac{-1}{\sqrt{6}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} (1 - 2 - 1) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8 \end{aligned}$$

۶. چون

$$f_z(x, y, z) = 1, \quad f_y(x, y, z) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_x(x, y, z) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

داریم

$$\begin{aligned} \nabla f(3, -4, 5) &= f_x(3, -4, 5)\vec{i} + f_y(3, -4, 5)\vec{j} + f_z(3, -4, 5)\vec{k} \\ &= -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

بردار واحد \vec{a} در جهت \vec{a} برابر است با

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

در نتیجه مقدار مشتق سوئی f در نقطه P در جهت \vec{a} برابر است با

$$\begin{aligned} D_{\vec{a}}f(3, -4, 5) &= \nabla f(3, -4, 5) \cdot \vec{a} \\ &= \left(-\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 1\right) = \frac{2}{5\sqrt{3}} \approx 0.23 \end{aligned}$$

۷. داریم

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k} \\ &= e^x(\sin y + \sin z)\vec{i} + e^x \cos y \vec{j} + e^x \cos z \vec{k} \end{aligned}$$

در نتیجه گرادیان f در نقطه P برابر است با

$$\nabla f(1, \pi/2, \pi/2) = 2e\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 2e\vec{i}$$

بردار واحد \vec{u} در جهت \vec{a} برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4+4+4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

بنابراین، مقدار مشتق سوئی f در نقطه P در جهت \vec{a} برابر است با

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(1, \pi/2, \pi/2) &= \nabla f(1, \pi/2, \pi/2) \cdot \vec{u} \\ &= 2e\vec{i} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= -\frac{2e}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

۸. داریم $f_y(x, y, z) = y+z+x+y = x+2y+z$ ، $f_x(x, y, z) = y+z$ و $f_z(x, y, z) = x+y$ در نتیجه گرادیان f در نقطه P برابر است با

$$\begin{aligned} \nabla f(5, 7, 1) &= f_x(5, 7, 1)\vec{i} + f_y(5, 7, 1)\vec{j} + f_z(5, 7, 1)\vec{k} \\ &= 8\vec{i} + 25\vec{j} + 12\vec{k} \end{aligned}$$

بردار واحد \vec{u} در جهت \vec{a} برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

بنابراین، مقدار مشتق سوئی f در نقطه P در جهت \vec{a} برابر است با

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(5, 7, 1) &= \nabla f(5, 7, 1) \cdot \vec{u} \\ &= (8\vec{i} + 25\vec{j} + 12\vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(8 - 25 + 12) = \frac{-5}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k} \\ &= \frac{y \sin z}{\sqrt{xy}}\vec{i} + \frac{x \sin z}{\sqrt{xy}}\vec{j} + \sqrt{xy} \cos z\vec{k}\end{aligned}$$

گرادیان f در نقطه P برابر است با

$$\nabla f(4, 9, \pi/4) = \frac{3\sqrt{2}}{8}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{j} + 3\sqrt{2}\vec{k}$$

بردار واحد \vec{u} در جهت \vec{a} برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$$

بنابراین، مقدار مشتق سوئی f در P در جهت \vec{a} برابر است با

$$\begin{aligned}D_{\vec{u}}f(4, 9, \pi/4) &= \nabla f(4, 9, \pi/4) \cdot \vec{u} \\ &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{j} + 3\sqrt{2}\vec{k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 6\sqrt{2}\right) = \frac{7\sqrt{7}}{8}\end{aligned}$$

۱۰. چون

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k} \\ &= -2xy^2e^{z^2}\vec{i} - 3x^2y^2e^{z^2}\vec{j} - 2x^2y^2ze^{z^2}\vec{k}\end{aligned}$$

پس

$$\nabla f(1, 1, -1) = -2e\vec{i} - 3e\vec{j} + 2e\vec{k}$$

بردار واحد \vec{u} در جهت \vec{a} برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{j} - \vec{k})$$

بنابراین، مشتق سوئی f در P در جهت بردار \vec{a} برابر است با

$$\begin{aligned}
 D_{uf}(1, 1, -1) &= \nabla f(1, 1, -1) \cdot \vec{u} \\
 &= (-2e\vec{i} - 3e\vec{j} + 2e\vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{j} - \vec{k}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(0 - 6e - 2e) = -\frac{8e}{\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

۱۱. می‌دانیم که آهنگ تغییر f در نقطه P در جهت بردار واحد همسو با گرادیان f در P ماکسیمم است. داریم

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j} \\
 &= e^x(\cos y + \sin y)\vec{i} + e^x(-\sin y + \cos y)\vec{j}
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\nabla f(0, 0) = (1)\vec{i} + (1)\vec{j} = \vec{i} + \vec{j}$$

بنابراین، آهنگ تغییر f در P در جهت بردار واحد

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(0, 0)}{|\nabla f(0, 0)|} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$$

ماکسیمم است.

۱۲. داریم

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j} \\
 &= e^x\vec{i} + e^y\vec{j}
 \end{aligned}$$

در نتیجه $\nabla f(1, 1) = e\vec{i} + e\vec{j}$. بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u} = \frac{e\vec{i} + e\vec{j}}{\sqrt{e^2 + e^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$$

ماکسیمم است.

۱۳. داریم

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} \\
 \nabla f(-1, 1) &= -2\vec{i} + 2\vec{j}
 \end{aligned}$$

بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u} = \frac{-\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}}{\sqrt{4+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$$

ماکسیمم است.

۱۴. چون

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k} \\ &= 2x\vec{i} + 4y\vec{j} - 2z\vec{k}\end{aligned}$$

در نتیجه $\nabla f(1, -1, 1) = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u} = \frac{2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4+16+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k})$$

ماکسیمم است.

۱۵. داریم

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k} \\ &= e^x\vec{i} + e^y\vec{j} + 2e^{2z}\vec{k}\end{aligned}$$

$$\nabla f(1, 1, -1) = e\vec{i} + e\vec{j} + 2e^{-2}\vec{k}$$

بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u} = \frac{e\vec{i} + e\vec{j} + 2e^{-2}\vec{k}}{\sqrt{e^2 + e^2 + 4e^{-4}}} = \frac{1}{\sqrt{2e^2 + 4e^{-4}}}(e\vec{i} + e\vec{j} + 2e^{-2}\vec{k})$$

ماکسیمم است.

۱۶. چون

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k} \\ &= (-yz \sin xyz)\vec{i} - (xz \sin xyz)\vec{j} - (xy \sin xyz)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\nabla f(1, 1/\sqrt{2}, \pi) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\vec{i} - \pi\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u} = \frac{-\pi/\sqrt{2}\vec{i} - \pi\vec{j} - 1/\sqrt{2}\vec{k}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5\pi^2 + 1}}(-\pi\vec{i} - \sqrt{2}\pi\vec{j} - \vec{k})$$

ماکسیمم است.

۱۷. بنابه تعریف، داریم

$$\begin{aligned}\nabla(u+v) &= \frac{\partial(u+v)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial(u+v)}{\partial y} \hat{j} \\ &= (f_x + g_x)\hat{i} + (f_y + g_y)\hat{j} \\ &= (f_x\hat{i} + f_y\hat{j}) + (g_x\hat{i} + g_y\hat{j}) \\ &= \nabla u + \nabla v\end{aligned}$$

۱۸. بنا به تعریف، داریم

$$\begin{aligned}\nabla(uv) &= \frac{\partial(uv)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \hat{j} \\ &= (u_x v + u v_x)\hat{i} + (u_y v + u v_y)\hat{j} \\ &= u(v_x\hat{i} + v_y\hat{j}) + v(u_x\hat{i} + u_y\hat{j}) \\ &= u\nabla v + v\nabla u\end{aligned}$$

۱۹

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial y} \hat{j} \\ &= \left[\frac{v u_x - u v_x}{v^2}\right] \hat{i} + \left[\frac{v u_y - u v_y}{v^2}\right] \hat{j} \\ &= \frac{v(u_x\hat{i} + u_y\hat{j}) - u(v_x\hat{i} + v_y\hat{j})}{v^2} \\ &= \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}\end{aligned}$$

۲۰. به ازای هر عدد حقیقی n ، داریم

$$\begin{aligned}\nabla u^n &= \frac{\partial u^n}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u^n}{\partial y} \hat{j} \\ &= n u^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + n u^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} \\ &= n u^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} \right) \\ &= n u^{n-1} \nabla u\end{aligned}$$

تمرینهای ۷.۷

۱. فرض می‌کنیم $F(x, y) = \sin \pi xy - \frac{\sqrt{3}}{y}$ چون

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y) &= F_x(x, y)\vec{i} + F_y(x, y)\vec{j} \\ &= y \cos \pi xy \vec{i} + \pi x \cos \pi xy \vec{j}\end{aligned}$$

بنابراین، بردار

$$\begin{aligned}\nabla F\left(\frac{1}{6}, 2\right) &= 2\pi \cos \frac{\pi}{3} \vec{i} + \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} \vec{j} \\ &= \pi \vec{i} + \frac{\pi}{12} \vec{j}\end{aligned}$$

بر منحنی داده شده در نقطه P قائم است.

۲. فرض می‌کنیم $F(x, y) = e^{xy} - 2$ در این صورت،

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y) &= F_x(x, y)\vec{i} + F_y(x, y)\vec{j} \\ &= xy \vec{i} + x^2 \vec{j}\end{aligned}$$

بنابراین، بردار

$$\begin{aligned}\nabla F(1, \ln 2) &= 1 \ln 2 e^{\ln 2} \vec{i} + e^{\ln 2} \vec{j} \\ &= 2 \ln 2 \vec{i} + 2 \vec{j}\end{aligned}$$

بر منحنی داده شده قائم است.

۳. چون $f_x(x, y) = 6x$ و $f_y(x, y) = 8y$ ، بنابر تذکر ۷.۷.۷، بردار

$$f_x(-2, 1)\vec{i} + f_y(-2, 1)\vec{j} - \vec{k} = -12\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$$

بر سطح داده شده قائم است.

۴. چون $f_x(x, y) = y^2 e^x$ و $f_y(x, y) = 2ye^x$ ، بردار

$$f_x(0, -3)\vec{i} + f_y(0, -3)\vec{j} - \vec{k} = 9\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$$

بر سطح داده شده قائم است.

۵. چون $f_x(x, y) = y - 1$ ، $f_y(x, y) = x + 1$ ، و در نتیجه $f_x(0, 2) = 1$ و $f_y(0, 2) = 1$ ،

بنابر تذکر ۷.۷.۷، معادلهٔ صفحهٔ مماس مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned}z &= f(0, 2) + f_x(0, 2)(x - 0) + f_y(0, 2)(y - 2) \\ &= 7 + 1(x) + 1(y - 2)\end{aligned}$$

$$.x + y - z + 5 = 0 \quad \text{یا}$$

۶. داریم

$f_y(x, y) = \pi x \cos \pi xy$ ، $f_x(x, y) = \pi y \cos \pi xy$ و در نتیجه

$$f_y(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -\pi\sqrt{2} \quad \text{و} \quad f_x(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \pi\sqrt{2}$$

معادله صفحه مماس بر این سطح در نقطه P عبارت است از

$$\begin{aligned} z &= f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) + f_x(-\sqrt{2}, \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) + f_y(-\sqrt{2}, \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) \\ &= 0 + \pi\sqrt{2}(x + \sqrt{2}) - \pi\sqrt{2}(y - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{یا } \pi\sqrt{2}x - \pi\sqrt{2}y - z = -4\pi$$

۷. چون $f_y(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ ، $f_x(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$ ، $f_x(-1, 0) = -2$ و $f_y(-1, 0) = 0$ ، معادله صفحه مماس مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned} z &= f(-1, 0) + f_x(-1, 0)(x+1) + f_y(-1, 0)(y-0) \\ &= 0 - 2(x+1) + 0(y-0) \end{aligned}$$

$$\text{یا } 2x + z + 2 = 0$$

۸. داریم $f_x(x, y) = 2(2+x-y)$ ، $f_y(x, y) = -2(2+x-y)$ ، $f_x(3, -1) = 12$ و $f_y(3, -1) = -12$ ، بنابراین، معادله صفحه مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned} z &= f(3, -1) + f_x(-1, 0)(x-3) + f_y(-1, 0)(y+1) \\ &= 36 + 12(x-3) - 12(y+1) \end{aligned}$$

$$\text{یا } 12x - 12y - z = 12$$

۹. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. در این صورت $F_x(x, y, z) = 2x$ ، $F_y(x, y, z) = 2y$ ، $F_z(x, y, z) = 2z$ و در نتیجه

$$F_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} , F_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 , F_z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

بنابراین، معادله صفحه مماس بر این سطح در نقطه P عبارت است از

$$1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\text{یا } x - y - \sqrt{2}z = 2$$

۱۰. در اینجا فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = xyz - 2$. بنابراین، داریم

$$F_x(x, y, z) = yz , F_y(x, y, z) = xz , F_z(x, y, z) = xy$$

$$F_x(1, -2, -1) = -2 , F_y(1, -2, -1) = -1 , F_z(1, -2, -1) = 2$$

بنابراین، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح داده شده عبارت است از
 $2(x-1) - 1(y+2) - 2(z+1) = 0$

$$\text{یا } 2x - y - 2z = 6$$

۱۱. فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = ye^{xy} + z^2$. بنابراین، داریم

$$F_z(x, y, z) = 2z, \quad F_y(x, y, z) = ye^{xy} + xye^{xy}, \quad F_x(x, y, z) = y^2e^{xy}$$

در نتیجه

$$F_z(0, -1, 1) = 2, \quad F_y(0, -1, 1) = 1, \quad F_x(0, -1, 1) = 1$$

از این رو، معادلهٔ صفحهٔ مماس موردنظر عبارت است از

$$1(x-0) + 1(y+1) + 2(z-1) = 0$$

$$\text{یا } x + y + 2z = 1$$

۱۲. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. چون

$$F_z(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad F_y(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad F_x(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

در نتیجه

$$F_z(0, -1, 0) = 0, \quad F_y(0, -1, 0) = -1, \quad F_x(0, -1, 0) = 0$$

بنابراین، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح داده شده در نقطهٔ P عبارت است از

$$0(x-0) - 1(y+1) + 0(z-0) = 0$$

$$\text{یا } y = -1$$

۱۳. فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = 4x^2 - y^2 + 3z^2 - 10$. چون

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y, z) &= F_x(x, y, z) \vec{i} + F_y(x, y, z) \vec{j} + F_z(x, y, z) \vec{k} \\ &= 8x \vec{i} - 2y \vec{j} + 6z \vec{k} \end{aligned}$$

یک بردار نرمال بر این سطح برابر است با

$$\nabla F(2, -3, 1) = 16 \vec{j} + 6 \vec{j} + 6 \vec{k}$$

بنابراین، معادلات پارامتری خط نرمال بر این سطح در نقطهٔ P عبارت‌اند از

$$x = 2 + 16t, \quad y = -3 + 6t, \quad z = 1 + 6t$$

و معادلات دکارتی این خط عبارت‌اند از

$$\frac{x-2}{16} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-1}{6}$$

۱۴. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = 2e^{-x} \cos y - z$ چون

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y, z) &= F_x(x, y, z) \vec{i} + F_y(x, y, z) \vec{j} + F_z(x, y, z) \vec{k} \\ &= -2e^{-x} \cos y \vec{i} - 2e^{-x} \sin y \vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

یک بردار قائم بر این سطح در نقطه P برابر است با

$$\nabla(0, \pi/3, 1) = \vec{i} - \sqrt{3} \vec{j} - \vec{k}$$

بنابراین معادلات پارامتری خط مورد نظر عبارت‌اند از

$$x = -t, \quad y = \frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}t, \quad z = 1-t$$

۱۵. فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 4z^2 - 16$ می‌دانیم که بردار

$$\nabla F(x, y, z) = 2x \vec{i} - 4y \vec{j} - 8z \vec{k}$$

بر صفحه مماس بر سطح در نقطه تماس $P(x, y, z)$ قائم است. از طرفی بردار $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ بر صفحه $4x - 2y + 4z = 5$ و در نتیجه بر صفحه مماس، عمود است. پس $\nabla F(x, y, z)$ با \vec{a} موازی است. یعنی

$$2x \vec{i} - 4y \vec{j} - 8z \vec{k} = \lambda(4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})$$

یا $x = 2\lambda$ ، $y = \frac{1}{2}\lambda$ ، $z = -\frac{1}{2}\lambda$. با قرار دادن این عبارتها به جای x ، y و z در معادله سطح داده شده، به دست می‌آوریم

$$4\lambda^2 - 2\left(\frac{\lambda^2}{4}\right) - 4\left(\frac{\lambda^2}{4}\right) = 16$$

در نتیجه $\lambda = \pm \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}}$. بنابراین نقاط تماس مورد نظر عبارت‌اند از

$$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

۱۶. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = 9 - 4x^2 - y^2 - z$ و $P(x, y, z)$ یک نقطه تماس مورد نظر باشد.

پس

$$\nabla F(x, y, z) = -8x\vec{i} - 2y\vec{j} - \vec{k}$$

یک بردار نرمال بر صفحه مماس در نقطه P است. از طرفی بردار $\vec{a} = 4\vec{j} - \vec{k}$ بر صفحه $4y - z = 0$ و در نتیجه بر صفحه مماس، عمود است. بنابراین $\nabla F(x, y, z)$ با \vec{a} موازی است

یعنی

$$-8x\vec{i} - 2y\vec{j} - \vec{k} = \lambda(4\vec{j} - \vec{k})$$

یا $x = 0$ ، $y = -2\lambda$ و $\lambda = 1$. با قرار دادن این مقادیر در معادله سطح داده شده، نقطه تماس مورد نظر در $P(0, -2, 5)$ به دست می‌آید.

۱۷. فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$ و $G(x, y, z) = 25 + x^2 + y^2 - 10z$

در نتیجه

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} - \vec{k}$$

$$\nabla G(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 10\vec{k}$$

بنابراین، بردارهای نرمال بر این دو سطح در نقطه مشترک $(3, 4, 5)$ عبارت‌اند از

$$\nabla G(3, 4, 5) = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k} \quad , \quad \nabla F(3, 4, 5) = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} - \vec{k}$$

این دو بردار موازی یکدیگرند، زیرا

$$\nabla G(3, 4, 5) = 10 \nabla F(3, 4, 5)$$

پس دو سطح داده شده یک صفحه مماس مشترک در نقطه $(3, 4, 5)$ دارند.

۱۸. فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = xy - 2 - z$ و $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. بنابراین

$$\nabla F(x, y, z) = y\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$$

$$\nabla G(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

در نتیجه، بردارهای نرمال بر این دو سطح در نقطه مشترک $(1, 1, -1)$ عبارت‌اند از

$$\nabla G(1, 1, -1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{و} \quad \nabla F(1, 1, -1) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

این دو بردار موازی یکدیگرند، زیرا

$$\nabla G(1, 1, -1) = 2\nabla(1, 1, -1)$$

پس دو سطح داده شده یک صفحه مماس مشترک در نقطه $(1, 1, -1)$ دارند.

۱۹. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. در نتیجه $\nabla F(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$. بنابراین اگر $P(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای بر سطح این کره باشد، آنگاه معادلات خط نرمال در P عبارت‌اند از

$$\frac{x-x_0}{2x_0} = \frac{y-y_0}{2y_0} = \frac{z-z_0}{2z_0}$$

روشن است که مرکز این کره یعنی نقطه $(0, 0, 0)$ در این معادلات صدق می‌کند. پس خط نرمال بر سطح کره در هر نقطه از مرکز آن می‌گذرد.

۲۰. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. چون $\nabla F(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$ ، اگر $P(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای بر سطح این مخروط باشد، آنگاه معادلات خط نرمال در P عبارت‌اند از

$$\frac{x-x_0}{2x_0} = \frac{y-y_0}{2y_0} = \frac{z-z_0}{-2z_0}$$

با قرار دادن $x = y = 0$ در این معادلات، $z = z_0$ به دست می‌آید. پس این خط محور z را در نقطه $(0, 0, z_0)$ قطع می‌کند.

تمرینهای ۸.۷

۱. مشتقهای نسبی f عبارت‌اند از

$$f_y(x, y) = 4y + 8, \quad f_x(x, y) = 2x - 6$$

$$f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 4, \quad f_{xx}(x, y) = 2$$

جواب دستگاه

$$f_x(x, y) = 2x - 6 = 0$$

$$f_y(x, y) = 4y + 8 = 0$$

برابر است با $(3, -2)$. چون

$$\begin{aligned} D(3, -2) &= f_{xx}(3, -2) f_{yy}(3, -2) - [f_{xy}(3, -2)]^2 \\ &= (2)(4) - 0^2 = 8 > 0 \end{aligned}$$

و $f(3, 2) = 2 > 0$ در $(3, 2)$ یک مینیمم نسبی برابر با

$$f(3, 2) = (3)^2 + 2(-2)^2 - 6(3) + 8(-2) - 1 = -18$$

دارد.

۲. مشتقهای جزئی f را پیدا می‌کنیم.

$$f_y(x, y) = 6x + 4y + 10, \quad f_x(x, y) = 2x + 6y - 6$$

$$f_{xy}(x, y) = 6, \quad f_{yy}(x, y) = 4, \quad f_{xx}(x, y) = 2$$

جواب دستگاه

$$f_x(x, y) = 2x + 6y - 6 = 0$$

$$f_y(x, y) = 6x + 4y + 10 = 0$$

برابر است با $(-3, 2)$. چون

$$\begin{aligned} D(-3, 2) &= f_{xx}(-3, 2) f_{yy}(-3, 2) - [f_{xy}(-3, 2)]^2 \\ &= (2)(4) - (6)^2 = -28 < 0 \end{aligned}$$

در $(-3, 2)$ یک نقطهٔ زین اسبی دارد.

۳. مشتقهای جزئی g عبارت‌اند از

$$g_y(x, y) = 2x + 4y + 10, \quad g_x(x, y) = 2x + 2y - 6$$

$$g_{xy}(x, y) = 2, \quad g_{yy}(x, y) = 4, \quad g_{xx}(x, y) = 2$$

جواب دستگاه

$$g_x(x, y) = 2x + 2y - 6 = 0$$

$$g_y(x, y) = 2x + 4y + 10 = 0$$

برابر است با $(11, -8)$. چون

$$\begin{aligned} D(11, -8) &= g_{xx}(11, -8)g_{yy}(11, -8) - [g_{xy}(11, -8)]^2 \\ &= (2)(4) - (2)^2 = 4 > 0. \end{aligned}$$

و $g_{xx}(11, -8) = 2 > 0$ در $(11, -8)$ یک مینیمم نسبی برابر با

$$f(11, -8) = (11)^2 + 2(11)(-8) + 2(-8)^2 - 6(11) + 10(-8) - 5 = -78$$

دارد.

۴. مشتقهای جزئی g عبارت‌اند از

$$g_y(x, y) = x^2 - 2x + 4y - 15, \quad g_x(x, y) = 2xy - 2y$$

$$g_{xy}(x, y) = 2x - 2, \quad g_{yy}(x, y) = 4, \quad g_{xx}(x, y) = 2y$$

دستگاه معادلات

$$2xy - 2y = 0$$

$$x^2 - 2x + 4y - 15 = 0$$

را حل می‌کنیم. معادله اول نتیجه می‌دهد که $y = 0$ یا $x = 1$. با قرار دادن $y = 0$ در معادله دوم، معادله $x^2 - 2x - 15 = 0$ به دست می‌آید که جوابهای آن $x = 5$ و $x = -3$ هستند. در نتیجه $(5, 0)$ و $(-3, 0)$ دو جواب دستگاه بالا هستند. با قرار دادن $x = 1$ در معادله دوم، $y = 4$ به دست می‌آید. پس $(1, 4)$ نیز یک جواب این دستگاه است. چون

$$\begin{aligned} D(5, 0) &= g_{xx}(5, 0)g_{yy}(5, 0) - [g_{xy}(5, 0)]^2 \\ &= (0)(4) - (10 - 2)^2 = -64 < 0. \end{aligned}$$

g در $(5, 0)$ یک نقطه زین اسبی دارد. همچنین، داریم

$$\begin{aligned} D(-3, 0) &= g_{xx}(-3, 0)g_{yy}(-3, 0) - [g_{xy}(-3, 0)]^2 \\ &= (0)(4) - (-6 - 2)^2 = -64 < 0. \end{aligned}$$

در نتیجه g در $(-۳, ۰)$ نیز یک نقطهٔ زین اسبی دارد. در پایان، چون

$$\begin{aligned} D(۱, ۴) &= g_{xx}(۱, ۴)g_{yy}(۱, ۴) - [g_{xy}(۱, ۴)]^2 \\ &= (۸)(۴) - (۲-۲)^2 = ۳۲ > ۰. \end{aligned}$$

و $g_{xx}(۱, ۴) = ۸ > ۰$ در $(۱, ۴)$ یک مینیمم نسبی دارد.

۵. مشتقهای جزئی f عبارت هستند از

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= -۶xy + ۳y^2 + ۶y, & f_x(x, y) &= ۶x - ۳y^2 \\ f_{xy}(x, y) &= -۶y, & f_{yy}(x, y) &= -۶x + ۶y + ۶, & f_{xx}(x, y) &= ۶ \end{aligned}$$

نقاط بحرانی f ، جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= ۶x - ۳y^2 = ۰ \\ f_y(x, y) &= -۶xy + ۳y^2 + ۶y = ۰. \end{aligned}$$

هستند. معادلهٔ اول نتیجه می‌دهد که $x = \frac{y^2}{۲}$. با قرار دادن این عبارت به جای x در معادلهٔ دوم، داریم

$$-۳y(y^2 - y - ۲) = ۰ \quad \text{یا} \quad -۳y^3 + ۳y^2 + ۶y = ۰.$$

جوابهای معادلهٔ اخیر عبارت‌اند از $y = ۰$ ، $y = ۲$ ، $y = -۱$. با قرار دادن این مقادیر به جای x در $x + \frac{y^2}{۲}$ ، نقاط بحرانی f در $(۰, ۰)$ ، $(۲, ۲)$ و $(\frac{۱}{۲}, -۱)$ به دست می‌آیند. چون

$$\begin{aligned} D(۰, ۰) &= f_{xx}(۰, ۰)f_{yy}(۰, ۰) - [f_{xy}(۰, ۰)]^2 \\ &= (۶)(۶) - (۰)^2 = ۳۶ > ۰. \end{aligned}$$

و $f_{xx}(۰, ۰) = ۶ > ۰$ در $(۰, ۰)$ یک مینیمم نسبی دارد. از آنجا که

$$\begin{aligned} D(۲, ۲) &= f_{xx}(۲, ۲)f_{yy}(۲, ۲) - [f_{xy}(۲, ۲)]^2 \\ &= (۶)(۶) - (-۱۲)^2 = -۱۰۸ < ۰. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\frac{۱}{۲}, -۱) &= f_{xx}(\frac{۱}{۲}, -۱)f_{yy}(\frac{۱}{۲}, -۱) - [f_{xy}(\frac{۱}{۲}, -۱)]^2 \\ &= (۶)(-۳) - (۶)^2 = -۵۴ < ۰. \end{aligned}$$

f در $(2, 2)$ و $(\frac{1}{3}, -1)$ نقاط زین اسبی دارد.
۶. مشتقهای جزئی f عبارت اند از

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{-x}{(x+y)^2} & , & & f_x(x, y) &= \frac{y}{(x+y)^2} \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{x-y}{(x+y)^3} & , & & f_{yy}(x, y) &= \frac{-2x}{(x+y)^3} \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{-2y}{(x+y)^3} \end{aligned}$$

دستگاه

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= -\frac{y}{(x+y)^2} = 0 \\ f_y(x, y) &= \frac{-x}{(x+y)^2} = 0 \end{aligned}$$

جوابی ندارد. پس f ماکسیم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه زین اسبی ندارد.
۷. داریم

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= 4x + 2x^2 - 2xy & , & & f_x(x, y) &= 4y + 4xy - y^2 \\ f_{xy}(x, y) &= 4 + 4x - 2y & , & & f_{yy}(x, y) &= -2x \\ f_{xx}(x, y) &= 4y \end{aligned}$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی f ، دستگاه

$$\begin{aligned} y(4 + 4x - y) &= 0 & \text{یا} & & 4y + 4xy - y^2 &= 0 \\ 2x(2 + x - y) &= 0 & & & 4x + 2x^2 - 2xy &= 0 \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. زوج (x, y) یک جواب این دستگاه است اگر و تنها اگر جواب یکی از چهار دستگاه

$$\begin{aligned} 4 + 4x - y &= 0 & 4 + 4x - y &= 0 & y &= 0 & y &= 0 \\ 2 + x - y &= 0 & x &= 0 & 2 + x - y &= 0 & x &= 0 \end{aligned}$$

باشد. این جوابها عبارت اند از $(0, 4)$ ، $(-2, 0)$ ، $(0, 0)$ ، $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ و $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. چون

$$D\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = f_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)f_{yy}\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) - [f_{xy}\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)]^2 \\ = \left(\frac{16}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{48}{9} > 0.$$

و $f_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} > 0$ در $f\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ یک مینیمم نسبی دارد. چون

$$D(0,0) = -16 < 0, \quad D(-2,0) = -16 < 0, \quad D(0,4) = -16 < 0.$$

سه نقطه $(0,4)$ ، $(-2,0)$ ، $(0,0)$ زین اسبی دارد.

۸. مشتقات جزئی عبارت‌اند از

$$f_y(x,y) = -9y^2, \quad f_x(x,y) = -4x^3 \\ f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = -18y, \quad f_{xx}(x,y) = -12x^2$$

تنها جواب دستگاه

$$f_x(x,y) = -4x^3 = 0 \\ f_y(x,y) = -9y^2 = 0$$

برابر است با $(0,0)$. چون

$$D(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = 0.$$

پس آزمون مشتق دوم به کار نمی‌آید. ولی چون

$$f(0,y) = 1 - 3y^3 > f(0,0) = 1, \quad y < 0 \text{ اگر} \\ f(0,y) = 1 - 3y^3 < f(0,0) = 1, \quad y > 0 \text{ اگر}$$

پس $f(0,0)$ ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی ندارد. یعنی $f(0,0)$ یک نقطه زین اسبی دارد.

۹. مشتقات جزئی g عبارت‌اند از

$$g_y(x,y) = e^x \cos y, \quad g_x(x,y) = e^x \sin y \\ g_{xy} = e^x \cos y, \quad g_{yy}(x,y) = -e^x \sin y, \quad g_{xx}(x,y) = e^x \sin y$$

دستگاه

$$\sin y = 0, \quad g_x(x,y) = e^x \sin y = 0 \\ \text{یا} \\ \cos y = 0, \quad g_y(x,y) = e^x \cos y = 0$$

جوابی ندارد. بنابراین g دارای ماکسیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه زین اسبی نیست.

۱۰. مشتقهای جزئی f را پیدا می‌کنیم:

$$f_v(u, v) = ue^{uv} \quad , \quad f_u(u, v) = ve^{uv}$$

$$f_{uv}(u, v) = e^{uv} + uve^{uv} \quad , \quad f_{vv}(u, v) = u^2e^{uv} \quad , \quad f_{uu}(u, v) = v^2e^{uv}$$

تنها جواب دستگاه

$$ve^{uv} = 0$$

$$ue^{uv} = 0$$

برابر با $(0, 0)$ است. چون

$$D(0, 0) = f_{uu}(0, 0)f_{vv}(0, 0) - [f_{uv}(0, 0)]^2$$

$$= (0)(0) - (1)^2 = -1 < 0$$

f در $(0, 0)$ یک نقطهٔ زین اسبی دارد.

۱۱. مشتقهای جزئی این تابع عبارت‌اند از

$$f_y(x, y) = \frac{xy^2 - 8}{y^3} \quad , \quad f_x(x, y) = \frac{x^2y - 4}{x^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = 1 \quad , \quad f_{yy}(x, y) = \frac{-16}{y^3} \quad , \quad f_{xx}(x, y) = \frac{2}{x^3}$$

دستگاه $f_y(x, y) = 0$ ، $f_x(x, y) = 0$ یعنی

$$x^2y - 4 = 0$$

$$xy^2 - 8 = 0$$

را حل می‌کنیم. معادلهٔ اول نتیجه می‌دهد که $y = \frac{4}{x^2}$. با قرار دادن این عبارت به جای y در معادلهٔ دوم، معادلهٔ

$$x^2 = 2 \quad \text{یا} \quad x\left(\frac{16}{x^4}\right) = 8$$

به دست می‌آید. پس جواب دستگاه بالا زوج $(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2})$ است. چون

$$D(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}) = f_{xx}(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2})f_{yy}(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}) - [f_{xy}(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2})]^2$$

$$= (-4)(-1) - (1)^2 = 3 > 0$$

و $f_{xx}(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}) = 4 > 0$ در f ، $(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2})$ یک مینیمم نسبی دارد.

۱۲. مشتقهای جزئی f عبارت اند از

$$f_y(x, y) = \cos y \quad , \quad f_x(x, y) = \cos x$$

$$f_{xy}(x, y) = 0 \quad , \quad f_{yy}(x, y) = -\sin y \quad , \quad f_{xx}(x, y) = -\sin x$$

تنها جواب دستگاه

$$f_x(x, y) = \cos x = 0$$

$$f_y(x, y) = \cos y = 0$$

در بازه‌های داده شده عبارت است از $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. چون

$$D(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = f_{xx}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})f_{yy}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) - [f_{xy}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})]^2$$

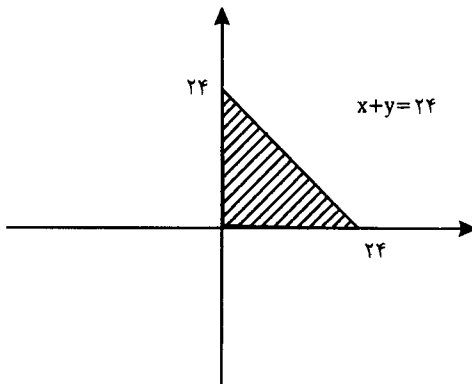
$$= (-1)(-1) - (0)^2 = 1 > 0$$

و $-1 < 0$ در $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ f ماکسیم نسبی دارد.

۱۳. می‌خواهیم سه عدد x ، y و z را پیدا کنیم به طوری که $x + y + z = 24$ و $P = xyz$ ماکسیم باشد. چون این سه عدد مثبت هستند، $z = 24 - x - y > 0$ و در نتیجه $x + y < 24$. بنابراین، باید ماکسیم (مطلق) تابع

$$f(x, y) = xy(24 - x - y) = 24xy - x^2y - xy^2$$

را به ازای (x, y) در ناحیه مثلثی زیر پیدا کنیم:



چون مقدار f روی اضلاع این مثلث برابر با صفر است، ماکسیم (مطلق) f در یک نقطه بحرانی در درون این ناحیه مثلثی رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f ، جوابهای دستگاه

$$y(24-2x-y) = 0 \quad \text{یا} \quad f_x(x, y) = 24y - 2xy - y^2 = 0$$

$$x(24-x-2y) = 0 \quad f_y(x, y) = 24x - x^2 - 2xy = 0$$

را به دست می‌آوریم. چون نقطه بحرانی مورد نظر باید در درون مثلث بالا باشد، پس $x \neq 0$ ، $y \neq 0$. از این رو، دستگاه

$$24 - 2x - y = 0$$

$$24 - x - 2y = 0$$

را حل می‌کنیم. جواب این دستگاه برابر با $(8, 8)$ است. در نتیجه، سه عدد مورد نظر برابرند با $x = 8$ ، $y = 8$ و $z = 24 - 8 - 8 = 8$.

۱۴. می‌خواهیم سه عدد x ، y ، z را پیدا کنیم به طوری که $xyz = 24$ و $s = x + y + z$ مینیمم باشد. چون $z = \frac{24}{xy}$ تابع

$$f(x, y) = x + y + \frac{24}{xy}$$

را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مقدار مینیمم مطلق f را روی دامنه آن یعنی

$$\{(x, y) \mid 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$$

پیدا کنیم. چون اگر مقادیر x یا y نزدیک به 0 یا بسیار بزرگ باشند، مقدار f بسیار بزرگ می‌شود، پس مینیمم مطلق f در یک نقطه بحرانی آن رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f ، دستگاه

$$x^2y - 24 = 0 \quad \text{یا} \quad f_x(x, y) = 1 - \frac{24}{x^2y} = 0$$

$$xy^2 - 24 = 0 \quad f_y(x, y) = 1 - \frac{24}{xy^2} = 0$$

را حل می‌کنیم. تنها جواب این دستگاه $(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ است. پس سه عدد مورد نظر عبارت‌اند از $x = 2\sqrt{3}$ ، $y = 2\sqrt{3}$ و

$$z = \frac{24}{(2\sqrt{3})(2\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}$$

۱۵. فرض کنیم ابعاد این مکعب مستطیل x ، y و z باشند، داریم

$$2z(x + y) + 2xy = 48$$

می‌خواهیم سه عدد مثبت x ، y و z را پیدا کنیم که در معادله بالا صدق کنند، و $V = xyz$ ماکسیمم باشد. چون $z = \frac{24-xy}{x+y}$ تابع

$$f(x, y) = xy \frac{24-xy}{x+y} = \frac{24xy - x^2y^2}{x+y}$$

را در نظر می‌گیریم. با بحثی مشابه قبل، نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم مطلق f در یک نقطه بحرانی آن رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f ، مشتقهای جزئی مرتبه اول f را پیدا می‌کنیم. داریم

$$f_x(x, y) = \frac{(24y - 2xy^2)(x+y) - (24xy - x^2y^2)}{(x+y)^2} = \frac{y^2(24 - x^2 - 2xy)}{(x+y)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{(24x - 2x^2y)(x+y) - (24xy - x^2y^2)}{(x+y)^2} = \frac{x^2(24 - 2xy - y^2)}{(x+y)^2}$$

دستگاه دو معادله دو مجهولی

$$y^2(24 - x^2 - 2xy) = 0$$

$$x^2(24 - 2xy - y^2) = 0$$

را حل می‌کنیم. چون $x \neq 0$ و $y \neq 0$ ، دستگاه

$$24 - x^2 - 2xy = 0$$

$$24 - y^2 - 2xy = 0$$

را حل می‌کنیم. معادله اول نتیجه می‌دهد که $y = \frac{24-x^2}{2x}$. با قرار دادن این عبارت به جای y در معادله دوم و پس از ساده کردن، معادله $0 = 4x^4 - (24-x^2)^2$ به دست می‌آید. جواب مثبت این معادله، $x = 2\sqrt{2}$ است. پس نقطه بحرانی مورد نظر $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ است. بنابراین ابعاد این مکعب مستطیل عبارت‌اند از $x = 2\sqrt{2}$ ، $y = 2\sqrt{2}$ و

$$z = \frac{24 - (2\sqrt{2})(2\sqrt{2})}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

حجم این مکعب مستطیل برابر است با $V = (2\sqrt{2})^3 = 32\sqrt{2}$ واحد حجم.

۱۶. می‌خواهیم نقطه‌ای را چون (x, y, z) پیدا کنیم به طوری که $x + y + z = ۲۴$ ، و فاصله‌اش از مبدأ، یعنی

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

مینیمم باشد. چون $z = ۲۴ - x - y$ ، تابع

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + (۲۴ - x - y)^2}$$

را در نظر می‌گیریم. مینیمم f در یک نقطه بحرانی آن رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f ، مشتقهای جزئی مرتبه اول آن را پیدا می‌کنیم. داریم

$$f_x(x, y) = \frac{2x - 2(۲۴ - x - y)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (۲۴ - x - y)^2}} = \frac{2x + y - ۲۴}{\sqrt{x^2 + y^2 + (۲۴ - x - y)^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{2y - 2(۲۴ - x - y)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (۲۴ - x - y)^2}} = \frac{2y + x - ۲۴}{\sqrt{x^2 + y^2 + (۲۴ - x - y)^2}}$$

جواب دستگاه

$$2x + y - 24 = 0$$

$$2y + x - 24 = 0$$

برابر با $(8, 8)$ است. در نتیجه مختصات نقطه مورد نظر عبارت‌اند از

$$z = 24 - 8 - 8 = 8 \text{ و } y = 8, x = 8$$

۱۷. می‌خواهیم بردار $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ را پیدا کنیم به طوری که $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ۲۰$ یا $x^2 + y^2 + z^2 = ۴۰۰$ ، چون S باید ماکسیمم باشد، پس x و y و z مثبت هستند. در نتیجه،

$$x^2 + y^2 + z^2 = 400 \Rightarrow z = \sqrt{400 - x^2 - y^2}$$

تابع f را به صورت

$$f(x, y) = x + y + \sqrt{400 - x^2 - y^2}$$

تعریف می‌کنیم. ماکسیمم f در یک نقطه بحرانی آن رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f ، مشتقات جزئی آن را پیدا می‌کنیم. داریم

$$f_x(x, y) = 1 - \frac{x}{\sqrt{400 - x^2 - y^2}} = \frac{\sqrt{400 - x^2 - y^2} - x}{\sqrt{400 - x^2 - y^2}}$$

$$f_y(x, y) = 1 - \frac{y}{\sqrt{400 - x^2 - y^2}} = \frac{\sqrt{400 - x^2 - y^2} - y}{\sqrt{400 - x^2 - y^2}}$$

دستگاه

$$\begin{aligned} \sqrt{400 - x^2 - y^2} &= x & \text{یا} & & \sqrt{400 - x^2 - y^2} - x &= 0 \\ \sqrt{400 - x^2 - y^2} &= y & & & \sqrt{400 - x^2 - y^2} - y &= 0 \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. این دستگاه معادل است با

$$2x^2 + y^2 = 400$$

$$x^2 + 2y^2 = 400$$

با قرار دادن $2x^2 = 400 - y^2$ از معادله اول در معادله دوم، داریم

$$3x^2 = 400 \quad \text{یا} \quad x^2 + 800 - 4x^2 = 400$$

در نتیجه $x = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $y = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ جواب مثبت دستگاه بالا است.

بنابراین مؤلفه‌های بردار مورد نظر عبارت‌اند از $x = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $y = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ و

$$z = \sqrt{400 - \frac{400}{3} - \frac{400}{3}} = 20\sqrt{3}/3$$

۱۸. روشن است که چون $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ و $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 < 0$$

و در نتیجه f در (x_0, y_0) یک نقطهٔ زین اسبی دارد.
 ۱۹. فرض کنیم $Q(x, y, z)$ نقطه‌ای بر صفحهٔ داده شده باشد. فاصلهٔ P از Q برابر است با

$$PQ = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (4-4x+3y)^2}$$

روشن است که اگر تابع f با تعریف

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (4-4x+3y)^2$$

در نقطه‌ای چون Q مینیمم داشته باشد، PQ نیز مینیمم است. جواب دستگاه معادلات

$$f_x = 2(x-1) - 8(4-4x+3y) = 0$$

$$f_y = 2(y-1) + 6(4-4x+3y) = 0$$

برابر با $(\frac{19}{13}, \frac{17}{16})$ است. در نتیجه

$$z = 5 - 4\left(\frac{19}{13}\right) + 3\left(\frac{17}{16}\right) = \frac{29}{26}$$

به آسانی دیده می‌شود که f در نقطهٔ $(\frac{19}{13}, \frac{17}{16}, \frac{29}{26})$ مینیمم است. بنابراین، کوتاهترین فاصلهٔ P از صفحهٔ داده شده برابر است با

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{19}{13} - 1\right)^2 + \left(\frac{17}{16} - 1\right)^2 + \left(\frac{29}{26} - 1\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

توجه کنید که این تمرین با استفاده از فرمول فاصلهٔ یک نقطه از صفحه آسانتر حل می‌شود:

$$d = \frac{|4(1) - 3(1) + 1 - 5|}{\sqrt{16 + 9 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

ولی روش بالا در تمرین زیر نیز به کار می‌آید.

۲۰. فرض کنیم نقطهٔ $Q(x, y, z)$ بر نمودار $xy^2z^2 = 16$ واقع است. چون $z^2 = \frac{16}{xy^2}$

$$OQ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{16}{xy^2}}$$

مانند تمرین قبل، برای سادگی محاسبات، نقطه‌ای چون (x, y) را پیدا می‌کنیم که مقدار تابع f با تعریف

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{16}{xy^3}$$

در آن مینیمم باشد. دستگاه معادلات

$$f_x = 2x - \frac{16}{x^2 y^3} = 0$$

$$f_y = 2y - \frac{48}{xy^4} = 0$$

را حل می‌کنیم. این دستگاه معادل است با

$$x^2 y^3 = 8$$

$$xy^5 = 24$$

معادله دوم نتیجه می‌دهد که $x = \frac{24}{y^5}$. با قرار دادن این عبارت در معادله اول، $y = \pm \sqrt[5]{12}$ به دست می‌آید. در نتیجه $x = \pm \frac{2}{\sqrt[5]{12}}$ و $z = \pm \frac{2}{\sqrt[5]{3}}$ چون

$$\begin{aligned} f\left[\pm \frac{2}{\sqrt[5]{12}}, \pm \sqrt[5]{12}, \pm \frac{2}{\sqrt[5]{3}}\right] &= \left[\pm \frac{2}{\sqrt[5]{12}}\right]^2 + (\pm \sqrt[5]{12})^2 + \left[\pm \frac{2}{\sqrt[5]{3}}\right]^2 \\ &= \frac{4}{\sqrt[5]{12}} + \sqrt[5]{12} + \frac{4}{\sqrt[5]{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt[5]{3}} + 2\sqrt[5]{3} + \frac{4}{\sqrt[5]{3}} = 4\sqrt[5]{3} \end{aligned}$$

مختصات هشت نقطه از سطح داده شده که نزدیکترین نقاط تا مبدأ هستند عبارت‌اند از

$$z = \pm \frac{2}{\sqrt[5]{3}}, \quad y = \pm \sqrt[5]{12}, \quad x = \pm \frac{2}{\sqrt[5]{12}}$$

فاصله این نقاط از مبدأ برابر است با

$$OQ = \sqrt{4\sqrt[5]{3}} = 2\sqrt[5]{3}$$

تمرینهای ۹.۷

۱. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = x + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه

$$F_x = 1 + 2\lambda x = 0$$

$$F_y = 2y + 2\lambda y = 0$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

را حل می‌کنیم. معادله دوم نتیجه می‌دهد که $y = 0$ یا $\lambda = -1$. اگر $y = 0$ ، آنگاه معادله سوم نتیجه می‌دهد که $x = \pm 2$ و اگر $\lambda = -1$ را در معادله اول قرار دهیم، $x = \frac{1}{\lambda}$ به دست می‌آید. با قرار دادن $x = \frac{1}{\lambda}$ در معادله سوم $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{\lambda}$ به دست می‌آید. بنابراین، ماکسیمم و مینیمم f در $(2, 0)$ ، $(-2, 0)$ ، $(\frac{1}{\lambda}, \frac{\sqrt{15}}{\lambda})$ یا $(\frac{1}{\lambda}, -\frac{\sqrt{15}}{\lambda})$ رخ می‌دهد. چون

$$f(\frac{1}{\lambda}, -\frac{\sqrt{15}}{\lambda}) = f(\frac{1}{\lambda}, \frac{\sqrt{15}}{\lambda}) = \frac{17}{\lambda}, \quad f(-2, 0) = -2, \quad f(2, 0) = 2$$

پس ماکسیمم و مینیمم f ، به ترتیب برابرند با $\frac{17}{\lambda}$ و -2

۲. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = 2x + 2\lambda x = 0$$

$$F_y = 4y + 2\lambda y = 0$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

را حل می‌کنیم. معادله اول نتیجه می‌دهد که $x = 0$ یا $x = -\frac{2}{\lambda}$. اگر $x = 0$ را در معادله دوم قرار دهیم، $y = \pm 1$ به دست می‌آید. اگر $\lambda = -\frac{2}{x}$ را در معادله دوم قرار دهیم، به دست می‌آوریم $0 = 6y^2 - 3xy$. پس $y = 0$ یا $y = \frac{x}{2}$. حال با استفاده از معادله سوم، داریم

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = \frac{x}{2} \Rightarrow x \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

بنابراین، ماکسیمم و مینیمم f در $(\sqrt{5}, 1)$ ، $(0, -1)$ ، $(1, 0)$ ، $(-1, 0)$ ، $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ ، $(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$ یا $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ ، $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$ رخ می‌دهد. چون

$$f(-1, 0) = -1, f(1, 0) = 1, f(0, -1) = -2, f(0, 1) = 2$$

$$f(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}) = \frac{3\sqrt{5}}{5}, f(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -\frac{3\sqrt{5}}{5}, f(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}) = 1\frac{17}{25}$$

$$f(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -1\frac{17}{25}$$

۳. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda[(x+1)^2 + y^2 - 1]$$

تعریف می‌کنیم. جوابهای دستگاه معادلات

$$F_x = y + 2\lambda(x+1) = 0$$

$$F_y = x + 2\lambda y = 0$$

$$F_\lambda = (x+1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

را به دست می‌آوریم. معادلات اول و دوم نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -\frac{y}{2(x+1)}, \quad x \neq -1 \text{ اگر}$$

$$\lambda = -\frac{x}{2y}, \quad y \neq 0 \text{ اگر}$$

اگر $x = -1$ یا $y = 0$ ، معادله سوم نتیجه می‌دهد که

$$x = -1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

اگر $x \neq -1$ و $y \neq 0$ ، آنگاه

$$\lambda = -\frac{y}{2(x+1)} = -\frac{x}{2y} \Rightarrow y^2 = x(x+1)$$

با قرار دادن این عبارت در معادله سوم، $x = 0$ و $x = -\frac{3}{4}$ به دست می‌آید. پس

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین، ماکسیمم f در $(-1, 1)$ ، $(-1, -1)$ ، $(0, 0)$ ، $(-2, 0)$ ، $(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ یا $(-\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ رخ می‌دهد. چون

$$f(-2, 0) = 0, f(0, 0) = 0, f(-1, -1) = 1, f(-1, 1) = -1$$

$$f(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ و } f(-\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

برابرند با $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ و $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

۴. تابع لاگرانژ F به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 8)$$

تعریف می‌شود. جوابهای دستگاه

$$F_x = y + 2\lambda x = 0$$

$$F_y = x + z + 2\lambda y = 0$$

$$F_z = y + 2\lambda z = 0$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$$

را به دست می‌آوریم. اگر $y = 0$ ، مقدار f صفر است. اگر $x = 0$ یا $z = 0$ ، معادلات اول و سوم نتیجه می‌دهند که $y = 0$ و مقدار f برابر با صفر است. فرض می‌کنیم $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ و $z \neq 0$. در این صورت معادلات اول، دوم و سوم نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -\frac{y}{2z} \text{ و } \lambda = -\frac{x+z}{2y}, \lambda = -\frac{y}{2x}$$

بنابراین

$$-\frac{y}{2x} = -\frac{x+z}{2y} \Rightarrow y^2 = x(x+z)$$

$$-\frac{y}{2x} - \frac{y}{2z} \Rightarrow x = z$$

در نتیجه، $y^2 = x(x+z) = x(x+x) = 2x^2$ ، با قرار دادن این عبارتها در معادله چهارم، $x = \pm\sqrt{2}$ به دست می‌آید. بنابراین

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \pm 2, \quad z = \sqrt{2}$$

$$x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \pm 2, \quad z = -\sqrt{2}$$

مقدار f را در $(\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ ، $(\sqrt{2}, -2, \sqrt{2})$ ، $(-\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2})$ و $(-\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2})$ به دست می‌آوریم. داریم

$$f(\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2})(2) + (2)(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}, -2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2})(-2) + (-2)(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}(2) + 2(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}(-2) + (-2)(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

بنابراین ماکسیمم و مینیمم f ، به ترتیب، برابرند با $4\sqrt{2}$ و $-4\sqrt{2}$.
۵. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 6)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = yz + 2\lambda x = 0$$

$$F_y = xz + 2\lambda y = 0$$

$$F_z = xy + 8\lambda z = 0$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 + 4z^2 - 6 = 0$$

را حل می‌کنیم. اگر $x = 0$ ، $y = 0$ یا $z = 0$ ، آنگاه مقدار f صفر است. فرض کنیم $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ ، $z \neq 0$. در این صورت، سه معادلهٔ اول نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -\frac{yz}{2x}, \quad \lambda = -\frac{xz}{2y}, \quad \lambda = -\frac{yz}{4x}$$

از مساوی قرار دادن این عبارتها، داریم

$$-\frac{yz}{2x} = -\frac{xz}{2y} \Rightarrow y^2 = x^2$$

$$-\frac{yz}{2x} = -\frac{yz}{4x} \Rightarrow z^2 = \frac{x^2}{4}$$

با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ چهارم، به دست می‌آوریم

$$x^2 + x^2 + x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

در نتیجه

$$x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}, z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون

$$f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$f\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

ماکسیمم و مینیمم f به ترتیب برابرند با $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$.

۶. فرض می‌کنیم

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + 2y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 4)$$

دستگاه معادلات

$$F_x = 2x + \lambda = 0$$

$$F_y = 4y + \lambda = 0$$

$$F_z = 2z + \lambda = 0$$

$$F_\lambda = x + y + z - 4 = 0$$

را حل می‌کنیم. سه معادلهٔ اول نتیجه می‌دهند که

$$z = -\frac{\lambda}{2}, y = -\frac{\lambda}{4}, x = -\frac{\lambda}{2}$$

با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ چهارم، $\lambda = -\frac{16}{5}$ به دست می‌آید. در نتیجه $y = \frac{4}{5}$ ، $x = \frac{8}{5}$ و $z = \frac{8}{5}$. بنابراین، مقدار مینیمم f برابر است با

$$f\left(-\frac{\Lambda}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{\Lambda}{5}\right) = \left(\frac{\Lambda}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{\Lambda}{5}\right)^2 = 6/4$$

۷. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x + 2y - 3z + \lambda(x^2 + 4y^2 - z)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = 1 + 2\lambda x = 0$$

$$F_y = 2 + 8\lambda y = 0$$

$$F_z = -3 - \lambda = 0$$

$$F_\lambda = x^2 + 4y^2 - z = 0$$

را حل می‌کنیم. معادله سوم نتیجه می‌دهد که $\lambda = -3$. اگر این مقدار λ را در معادلات اول و دوم قرار دهیم، $x = \frac{1}{6}$ و $y = \frac{1}{12}$ به دست می‌آید. معادله چهارم نتیجه می‌دهد که

$$z = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

بنابراین، مقدار مینیمم f برابر است با

$$f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}\right) = \frac{1}{6} + 3\left(\frac{1}{12}\right) - 3\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{4}$$

۸. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{z} + \lambda\left(x + y + z - \frac{11}{12}\right)$$

تعریف می‌کنیم، دستگاه معادلات

$$F_x = 2x + \lambda = 0$$

$$F_y = 8y + \lambda = 0$$

$$F_z = \frac{1}{\sqrt{z}} + \lambda = 0$$

$$F_\lambda = x + y + z - \frac{11}{12} = 0$$

را حل می‌کنیم. معادلات اول تا سوم نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -10\sqrt{z}, \quad \lambda = -8y, \quad \lambda = -2x$$

از مساوی قرار دادن این عبارتها، داریم

$$\begin{aligned} -4x^2 &= -32y^2 \Rightarrow x = 2y \\ -32y^2 &= -108z^2 \Rightarrow z = \frac{2}{3}y \end{aligned}$$

با قرار دادن این عبارتها به جای x و z در معادله چهارم، $y = \frac{1}{4}$ به دست می آید. در نتیجه $x = \frac{1}{2}$ ، $y = \frac{1}{4}$ و $z = \frac{1}{6}$ بنابراین، مینیمم f برابر است با

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 27\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{11}{96}$$

۹. داریم $xyz = 24$. فرض می کنیم که $f(x, y, z) = x + y + z$ و $g(x, y, z) = xyz - 24$ تابع لاگرانژ را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(xyz - 24)$$

تعریف می کنیم. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} F_x &= 1 + \lambda yz = 0 \\ F_y &= 1 + \lambda xz = 0 \\ F_z &= 1 + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda &= xyz - 24 = 0 \end{aligned}$$

را حل می کنیم. روشن است که $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ و $z \neq 0$ ، زیرا در غیر این صورت معادله چهارم نقض می شود. داریم

$$\begin{aligned} 1 + \lambda yz &= 1 + \lambda xz \Rightarrow x = y \\ 1 + \lambda xz &= 1 + \lambda xy \Rightarrow z = y \end{aligned}$$

با قرار دادن این عبارتها در معادله چهارم، $y = 2\sqrt[3]{3}$ به دست می آید. در نتیجه $x = y = z = 2\sqrt[3]{3}$.

۱۰. داریم $x + y + z = 24$. فرض می کنیم $f(x, y, z) = xyz$ و $g(x, y, z) = x + y + z - 24$. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 24)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned}F_x &= yz + \lambda = 0 \\F_y &= xz + \lambda = 0 \\F_z &= xy + \lambda = 0 \\F_\lambda &= x + y + z - 24 = 0\end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. معادلات اول تا سوم نتیجه می‌دهند که

$$\begin{aligned}\lambda + yz &= \lambda + xz \Rightarrow y = x \\ \lambda + yz &= \lambda + xy \Rightarrow z = x\end{aligned}$$

با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ چهارم، $x = 8$ به دست می‌آید. در نتیجه $y = 8$ و $z = 8$.
۱۱. می‌خواهیم نقطه‌ای چون (x, y, z) را پیدا کنیم به طوری که $x + y + z = 24$ و $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ مینیمم باشد. برای سادگی محاسبات نقطه‌ای چون (x, y, z) را روی صفحهٔ داده شده پیدا می‌کنیم به طوری که مقدار

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

مینیمم باشد. روشن است که در این صورت d نیز مینیمم می‌شود. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 24)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned}F_x &= 2x + \lambda = 0 \\F_y &= 2y + \lambda = 0 \\F_z &= 2z + \lambda = 0 \\F_\lambda &= x + y + z - 24 = 0\end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. سه معادلهٔ اول نتیجه می‌دهند که $x = y = z$. با قرار دادن این عبارتها به جای y و z در معادلهٔ چهارم به دست می‌آوریم $x = y = z = 8$.

۱۲. می‌خواهیم برداری چون (x, y, z) پیدا کنیم به طوری که $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 20$ یا $x^2 + y^2 + z^2 = 400$ و $f(x, y, z) = x + y + z$ ماکسیمم باشد. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 400)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned}F_x &= 1 + 2\lambda x = 0 \\F_y &= 1 + 2\lambda y = 0 \\F_z &= 1 + 2\lambda z = 0 \\F_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 400 = 0\end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. چون $\lambda = 0$ در معادلات صدق نمی‌کند، پس سه معادله اول نتیجه می‌دهند که

$$\begin{aligned}1 + 2\lambda x &= 1 + 2\lambda y \Rightarrow x = y \\1 + 2\lambda y &= 1 + 2\lambda z \Rightarrow z = y\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به معادله چهارم، داریم

$$x^2 + x^2 + x^2 - 400 = 0 \Rightarrow x = \pm 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

و در نتیجه $y = z = \pm 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. چون مقدار ماکسیمم f مورد نظر است، پس x ، y و z مثبت

هستند و $(20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})$ بردار مورد نظر است.

۱۳. تابع f ماکسیمم و مینیمم خود را روی مرز ناحیه داده شده، یعنی روی دایره $x^2 + y^2 = 4$ ، یا در یک نقطه بحرانی اختیار می‌کند. ابتدا، به روش مضرب لاگرانژ ماکسیمم و مینیمم احتمالی f را روی دایره $x^2 + y^2 = 4$ پیدا می‌کنیم. تابع لاگرانژ را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned}F_x &= 4x + 2\lambda x = 0 \\F_y &= 2y + 2 + 2\lambda y = 0 \\F_\lambda &= x^2 + y^2 - 4 = 0\end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. جوابهای این دستگاه عبارت‌اند از $(0, 2)$ ، $(0, -2)$ ، $(2, 0)$ ، $(-2, 0)$ ، $(\sqrt{3}, 1)$ و $(-\sqrt{3}, 1)$. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f ، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} f_x &= 4x = 0 \\ f_y &= 2y + 2 = 0 \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. پس تنها نقطهٔ بحرانی f در $(0, -1)$ است. در پایان، چون

$$\begin{aligned} f(0, 2) &= 5, f(0, -2) = -3, f(2, 0) = 5 = f(-2, 0) \\ f(\sqrt{3}, 1) &= 6 = f(-\sqrt{3}, 1), f(0, -1) = -4 \end{aligned}$$

پس ماکسیمم و مینیمم f ، به ترتیب، برابرند با ۶ و -۴.
۱۴. مانند تمرین ۱۳، ابتدا، به روش مضرب لاگرانژ، ماکسیمم و مینیمم احتمالی f را روی ناحیهٔ $4 = 2x^2 + y^2$ پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم که

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x^2 + y^2 - 4)$$

دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} F_x &= y + 4\lambda x = 0 \\ F_y &= x + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda &= 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. اگر $x=0$ یا $y=0$ ، مقدار f برابر با ۰ است. فرض کنیم $x \neq 0$ و $y \neq 0$. در این صورت معادلات اول و دوم نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -\frac{x}{2y}, \quad \lambda = -\frac{y}{4x}$$

از مساوی قرار دادن این عبارتها، داریم

$$-\frac{x}{2y} = -\frac{y}{4x} \Rightarrow y^2 = 2x^2$$

با قرار دادن این عبارت در معادلهٔ سوم، $x = \pm 1$ به دست می‌آید. در نتیجه $y = \pm\sqrt{2}$. پس اگر f روی $4 = 2x^2 + y^2$ ماکسیمم یا مینیمم داشته باشد، این مقدار ماکسیمم یا مینیمم در $(1, \sqrt{2})$ ، $(-1, \sqrt{2})$ ، $(1, -\sqrt{2})$ یا $(-1, -\sqrt{2})$ رخ می‌دهد.

برای پیدا کردن نقاط بحرانی f ، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} f_x &= y = 0 \\ f_y &= x = 0 \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. جواب این دستگاه $(0, 0)$ است. در پایان، چون

$$f(1, \sqrt{2}) = f(-1, -\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$f(-1, \sqrt{2}) = f(1, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \quad f(0, 0) = 0$$

ماکسیمم و مینیمم f ، به ترتیب، برابرند با $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$.
۱۵. می‌خواهیم مقدار مینیمم

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

را تحت شرط $4x - 3y + z = 5$ پیدا کنیم. برای سادگی محاسبات، فرض می‌کنیم

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + \lambda(4x - 3y + z - 5)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = 2(x-1) + 4\lambda = 0$$

$$F_y = 2(y-1) - 3\lambda = 0$$

$$F_z = 2(z-1) + \lambda = 0$$

$$F_\lambda = 4x - 3y + z - 5 = 0$$

را حل می‌کنیم. تنها جواب این دستگاه معادلات $x = \frac{19}{13}$ ، $y = \frac{17}{26}$ ، $z = \frac{29}{26}$ است. پس
کوته‌ترین فاصله نقطه P از صفحه داده شده برابر است با

$$d = \sqrt{\left(\frac{19}{13} - 1\right)^2 + \left(\frac{17}{26} - 1\right)^2 + \left(\frac{29}{26} - 1\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

۱۶. فرض کنیم x شعاع و y ارتفاع این استوانه باشند. داریم $6\pi = 2\pi xy + 2\pi x^2$ یا
 $xy + x^2 = 3$. حجم این استوانه برابر است با $F(x, y) = \pi x^2 y$. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = \pi x^2 y + \lambda(xy + x^2 - 3)$$

$xy + x^2 = 3$. حجم این استوانه برابر است با $F(x, y) = \pi x^2 y$. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = \pi x^2 y + \lambda(xy + x^2 - 3)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = 2\pi xy + \lambda(y + 2x) = 0$$

$$F_y = \pi x^2 + \lambda x = 0$$

$$F_\lambda = xy + x^2 - 3 = 0$$

را حل می‌کنیم. چون $x \neq 0$ ، معادلهٔ دوم نتیجه می‌دهد که $\lambda = -\pi x$. با جایگزین کردن این مقدار λ در معادلهٔ اول، $y = 2x$ به دست می‌آید. با قرار دادن این مقادیر λ در معادلهٔ سوم، $x = 1$ و در نتیجه $y = 2$ به دست می‌آید.

تمرینهای فصل ۸

تمرینهای ۱.۸

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{-1}^1 x \, dy \, dx &= \int_0^1 [xy]_{y=-1}^{y=1} \, dx \\ &= \int_0^1 2x \, dx = x^2 \Big|_0^1 = 1\end{aligned}\quad .1$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} \, dy \, dx &= \int_0^1 [e^{x+y}]_0^1 \, dx \\ &= \int_0^1 (e^{x+1} - e^x) \, dx \\ &= [e^{x+1} - e^x]_0^1 = e^2 - 2e + 1\end{aligned}\quad .2$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^{x^2} dy \, dx &= \int_0^1 [y]_x^{x^2} \, dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}\end{aligned}\quad .3$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{x^2+y} \, dy \, dx &= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} x (x^2+y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{3}} dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} x (x^2+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} x^3 \right] dx \\
 &= \left[\frac{2}{15} (x^2+3)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{15} x^5 \right]_0^1 = \frac{62}{15}
 \end{aligned}
 \tag{۴}$$

در محاسبه $\int \frac{2}{3} x (x^2+3)^{\frac{3}{2}}$ از تغییر متغیر $u = x^2 + 3$ استفاده شده است.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{y^2}{2} \right) dy \\
 &= \left[2y - \frac{y^3}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}
 \tag{۵}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\sqrt{2}\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} \, dr \, d\theta &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \left[-\frac{1}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 d\theta \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \frac{1}{3} d\theta = \left[\frac{1}{3} \theta \right]_0^{\sqrt{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}
 \end{aligned}
 \tag{۶}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x \frac{2}{x^2+y^2} \, dy \, dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \left[\frac{2}{x} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \right]_0^x dx \\
 &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2x} dx = \left[\frac{\pi}{2} \ln x \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \ln \sqrt{2}
 \end{aligned}
 \tag{۷}$$

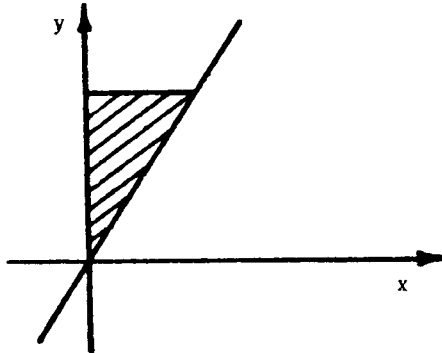
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x e^{(x^y)} dy dx &= \int_0^1 [y e^{(x^y)}]_0^x dx && \text{.8} \\ &= \int_0^1 x e^{(x^x)} dx = \left[\frac{1}{x} e^{(x^x)} \right]_0^1 = \frac{1}{x} e - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/\sqrt{e}} \int_0^{\cos y} e^x \sin y dx dy &= \int_0^{\pi/\sqrt{e}} [e^x \sin y]_0^{\cos y} dy && \text{.9} \\ &= \int_0^{\pi/\sqrt{e}} (e^{\cos y} \sin y - \sin y) dy \\ &= [-e^{\cos y} + \cos y]_0^{\pi/\sqrt{e}} \\ &= -e^{\frac{\sqrt{e}}{e}} + \frac{\sqrt{e}}{e} + e - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{e}} \int_0^{\sqrt{e-y^2}} y dx dy &= \int_0^{\sqrt{e}} [xy]_0^{\sqrt{e-y^2}} dy && \text{.10} \\ &= \int_0^{\sqrt{e}} y \sqrt{e-y^2} dy \\ &= \left[-\frac{1}{3} (e-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{e}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_R \int (x+y) dA &= \int_{\sqrt{e}}^e \int_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} (x+y) dx dy && \text{.11} \\ &= \int_{\sqrt{e}}^e \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} dy \\ &= \int_{\sqrt{e}}^e \left(y + \frac{e}{y} \right) dy = \left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{e}{y} \right]_{\sqrt{e}}^e = 15 \end{aligned}$$

۱۲. ناحیه R در شکل ۱.۱.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱.۱.۸

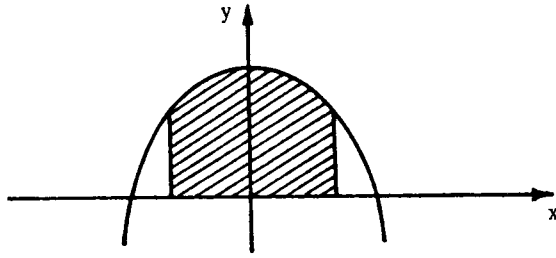
این انتگرال دوگانه را می‌توانیم توسط هریک از انتگرالهای مکرر

$$\int_0^2 \int_{y=2x}^{y=4} (x+y) dy dx \quad \text{یا} \quad \int_0^4 \int_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} (x+y) dx dy$$

محاسبه کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \int_R \int (x+y) dA &= \int_0^2 \int_{2x}^4 (x+y) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{2x}^4 dx \\ &= \int_0^2 (-4x^2 + 4x + 8) dx \\ &= \left[-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 8x \right]_0^2 = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

۱۳. ناحیه R در شکل ۲.۱.۸ نشان داده شده است.

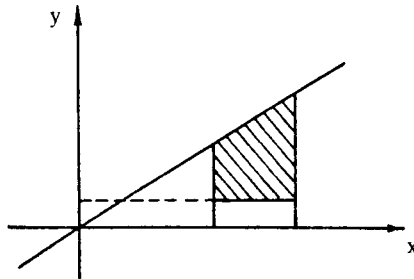


شکل ۲.۱.۸

محاسبه این انتگرال دوگانه توسط انتگرال مکرر زیر آسانتر است:

$$\begin{aligned} \int_R \int xy^2 dA &= \int_{-1}^1 \int_{y=0}^{y=4-x^2} xy^2 dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{xy^3}{3} \right]_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{x(4-x^2)^3}{3} dx \\ &= \left[-\frac{1}{24} (4-x^2)^4 \right]_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

۱۴. ناحیه داده شده در شکل ۳.۱.۸ رسم داده شده است.

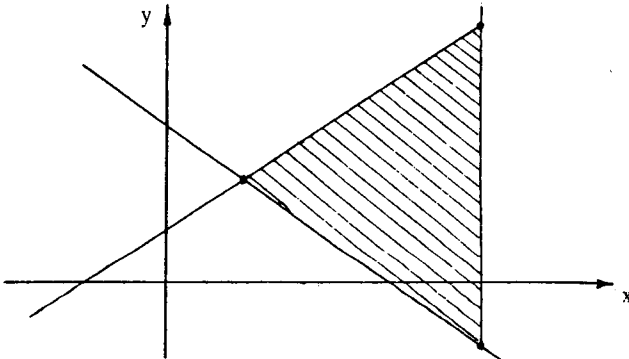


شکل ۳.۱.۸

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_R \int x dA &= \int_3^5 \int_{y=1}^{y=x} x dy dx \\ &= \int_3^5 [xy]_1^x dx \\ &= \int_3^5 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_3^5 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

۱۵. دو خط $y = 5 + x$ و $y = -x + 7$ یکدیگر را در نقطه $(6, 1)$ قطع می‌کنند.



شکل ۴.۱.۸

این انتگرال دوگانه توسط انتگرال مکرر زیر آسانتر محاسبه می‌شود،

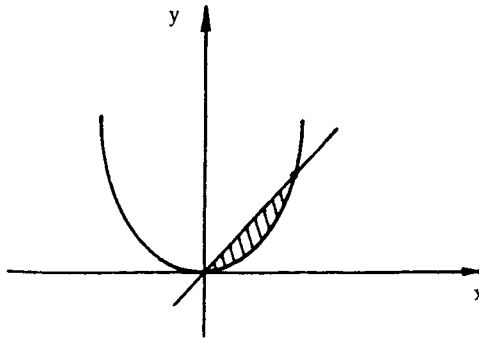
$$\begin{aligned} \int_R \int (3x - 5) dA &= \int_1^{10} \int_{y=x+7}^{y=5+x} (3x - 5) dy dx \\ &= \int_1^{10} [(3x - 5)y]_{-x+7}^{5+x} dx \\ &= \int_1^{10} (6x^2 - 16x + 10) dx \\ &= [2x^3 - 8x^2 + 10x]_1^{10} = 1296 \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر بخواهیم اول نسبت به x انتگرال بگیریم، باید ناحیه R را توسط خط $y = 6$ به دو زیر ناحیه تقسیم کنیم. در این صورت

$$\int_R \int (3x - 5) dA = \int_{-3}^6 \int_{x=7-y}^{10} (3x-5) dx dy + \int_6^{15} \int_{x=7-5}^{10} (3x-5) dx dy$$

دانشجویان می‌توانند این انتگرالها را محاسبه و جواب را با جواب به دست آمده در بالا مقایسه کنند.

۱۶. ناحیه R ، و محل تلاقی دو نمودار $y = x^2$ و $y = x$ ، در شکل ۵.۱.۸ نشان داده شده است.

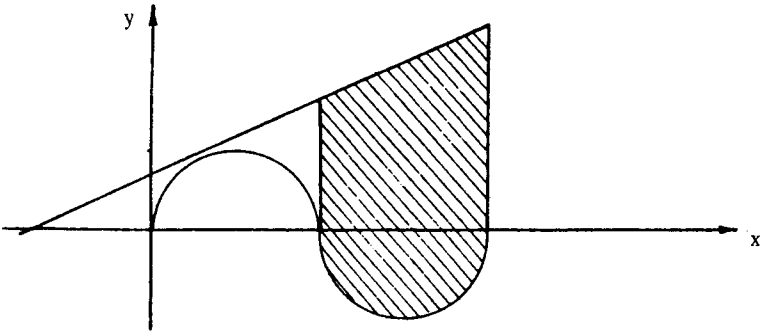


شکل ۵.۱.۸

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_R \int xy dA &= \int_0^1 \int_{y=x^2}^x xy dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

۱۷. ناحیه R در شکل ۶.۱.۸ رسم شده است.

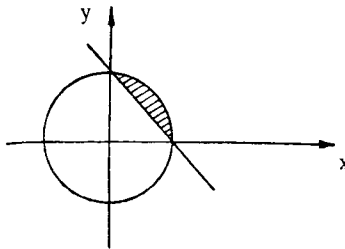


شکل ۶.۱.۸

بنابراین، انتگرال دوگانه مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}
 \iint_R dA &= \int_{\pi}^{2\pi} \int_{y=\sin x}^{y=1+x} dy dx \\
 &= \int_{\pi}^{2\pi} [y]_{\sin x}^{1+x} dx \\
 &= \int_{\pi}^{2\pi} (1+x - \sin x) dx \\
 &= \left[x + \frac{x^2}{2} + \cos x \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{3\pi^2}{2} + \pi + 2
 \end{aligned}$$

۱۸. ناحیه مورد نظر در شکل ۷.۱.۸ سایه زده شده است.

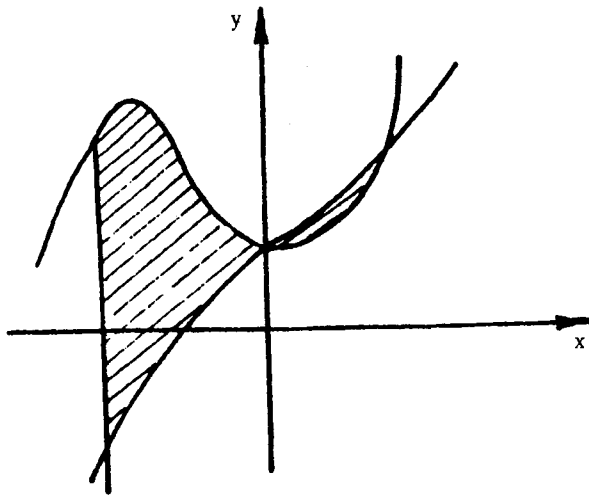


شکل ۷.۱.۸

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \int_R \int xy^2 dA &= \int_0^1 \int_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_0^1 (-y^4 + y^3) dy \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{4} y^4 \right) \right]_0^1 = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

۱۹. ناحیه R در شکل ۸.۱.۸ سایه زده شده است.

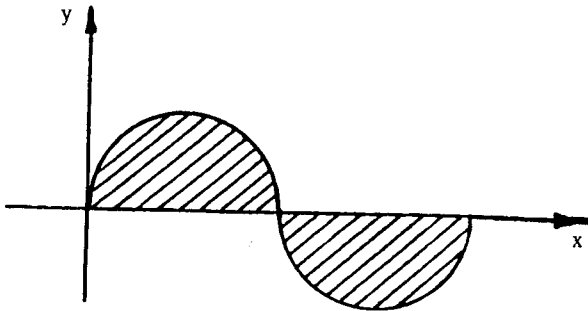


شکل ۸.۱.۸

چون R به دو زیرناحیه R_1 و R_2 تقسیم شده است، پس

$$\begin{aligned}
\int_R \int x^r dA &= \int_{R_1} \int x^r dA + \int_{R_2} \int x^r dA \\
&= \int_{-1}^0 \int_{x^{r+x+1}}^{x^{r+x^r+1}} x^r dy dx + \int_0^1 \int_{x^{r+x^r+1}}^{x^{r+x+1}} x^r dy dx \\
&= \int_{-1}^0 [x^r y]_{x^{r+x+1}}^{x^{r+x^r+1}} dx + \int_0^1 [x^r y]_{x^{r+x^r+1}}^{x^{r+x+1}} dx \\
&= \int_{-1}^0 (x^r - x^r) dx + \int_0^1 (x^r - x^r) dx \\
&= \left[\frac{x^{\delta}}{\delta} - \frac{x^r}{r} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^r}{r} - \frac{x^{\delta}}{\delta} \right]_0^1 = \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

۲۰. ناحیه داده شده در شکل ۹.۱.۸ سایه زده شده است.



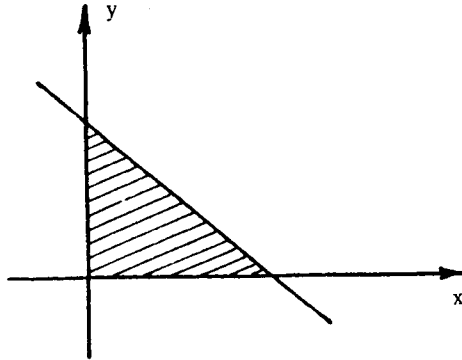
شکل ۹.۱.۸

بنابراین، انتگرال دوگانه مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}
\int_R \int r y dA &= \int_{R_1} \int r y dA + \int_{R_2} \int r y dA \\
&= \int_0^{\pi} \int_{y=0}^{y=\sin x} r y dy dx + \int_{\pi}^{2\pi} \int_{y=\sin x}^{y=0} r y dy dx \\
&= \int_0^{\pi} [y^r]_0^{\sin x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} [y^r]_{\sin x}^0 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin^2 x \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2}x \right]_{\pi}^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

۲۱. صفحه داده شده صفحه xy را در خط $y = 1-x$ قطع می‌کند. بنابراین، حجم این جسم برابر است با انتگرال دوگانه $f(x, y) = 1-x-y$ روی ناحیه R که در شکل ۱۰.۱.۸ سایه زده شده است.

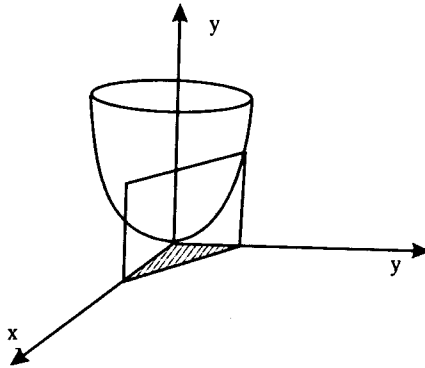


شکل ۱۰.۱.۸

در نتیجه،

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 \int_{y=0}^{y=1-x} (1-x-y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

۲۲. ناحیه مورد نظر در شکل ۱۱.۱.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱۱.۱.۸

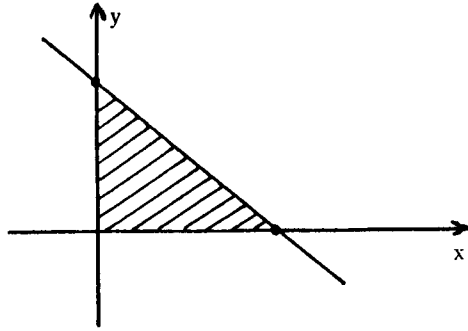
بنابراین،

$$\begin{aligned} V &= \int_R \int (x^2 + y^2) \, dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} \, dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{4}{3} x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3} \right) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} x \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

۲۳. قاعده جسم مورد نظر ناحیه $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ در صفحه xy است. بنابراین،

$$\begin{aligned} V &= \int_R \int f(x, y) \, dA = \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9} x^2 + \frac{1}{16} y^2 \right) \, dy \, dx \\ &= \int_0^3 \left[4y - \frac{1}{9} x^2 y + \frac{1}{48} y^3 \right]_0^2 \, dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{47}{6} - \frac{2}{9} x^2 \right) \, dx \\ &= \left[\frac{47}{6} x - \frac{2}{27} x^3 \right]_0^3 = \frac{43}{2} \end{aligned}$$

۲۴. حجم ناحیه موردنظر برابر است با انتگرال دوگانه $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ روی ناحیه محدود به خط $2x + y = 2$ و محورهای x و y (شکل ۱۲.۱.۸ را ببینید).



شکل ۱۲.۱.۸

بنابراین،

$$\begin{aligned} V &= \int_R \int f(x, y) \, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^{2-2x} \, dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{14}{3} x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right] \, dx \\ &= \left[-\frac{2}{6} x^4 + \frac{10}{3} x^3 - 5x^2 + \frac{14}{3} x \right]_0^1 = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

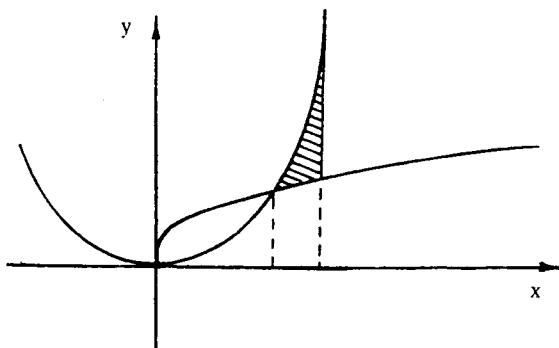
۲۵. الف) این جسم به نمودار $f(x, y) = 3$ و ناحیه مستطیلی

$$R = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 4\}$$

محدود است.

ب) این جسم زیر نمودار $f(x, y) = x^2 + y^2$ و روی ناحیه محدود به نمودارهای $y = x - 1$ و $y = 1 - x^2$ قرار دارد.

۲۶. ناحیه موردنظر در شکل ۱۳.۱.۸ نشان داده شده است.

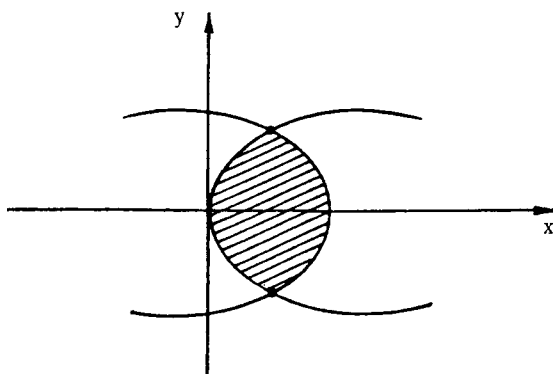


شکل ۱۳.۱.۸

بنابراین، مساحت R برابر است با

$$\begin{aligned}
 A &= \int_R \int dA = \int_1^4 \int_{y=\sqrt{x}}^{y=x^2} dy dx \\
 &= \int_1^4 (x^2 - \sqrt{x}) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^4 = \frac{49}{3}
 \end{aligned}$$

۲۷. ناحیه مورد نظر در شکل ۱۴.۱.۸ سایه زده شده است.

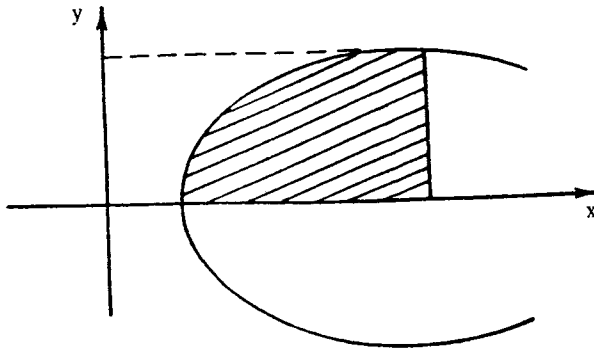


شکل ۱۴.۱.۸

بنابراین، مساحت R برابر است با

$$\begin{aligned} A &= \int_R \int dA = \int_{-4}^4 \int_{x=y^2}^{32-y^2} dx dy \\ &= \int_{-4}^4 (32 - 2y^2) dy \\ &= \left[32y - \frac{2}{3}y^3 \right]_{-4}^4 = \frac{512}{3} \end{aligned}$$

۲۸. ناحیه‌ای که انتگرال دوگانه روی آن محاسبه می‌شود در شکل ۱۵.۱.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱۵.۱.۸

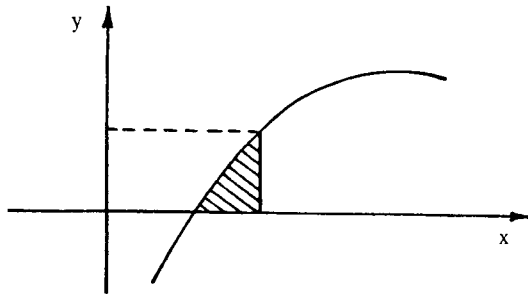
برای تغییر ترتیب انتگرال‌گیری، R را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$R = \{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x-1} \}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \int_{1+y^2}^{\sqrt{x-1}} ye^{(x-1)^r} dx dy &= \int_1^{\sqrt{5}} \int_{y^2}^{\sqrt{x-1}} ye^{(x-1)^r} dy dx \\
 &= \int_1^{\sqrt{5}} \left[\frac{y^2}{2} e^{(x-1)^r} \right]_{y^2}^{\sqrt{x-1}} dx \\
 &= \int_1^{\sqrt{5}} \frac{(x-1)}{2} e^{(x-1)^r} dx \\
 &= \left[\frac{1}{4} e^{(x-1)^r} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{1}{4} (e^{16} - 1)
 \end{aligned}$$

۲۹. ناحیه‌ای که انتگرال دوگانه روی آن محاسبه می‌شود زیر نمودار $y = \ln x$ و روی بازه $[1, e]$ قرار دارد (شکل ۱۶.۱.۸ را ببینید).

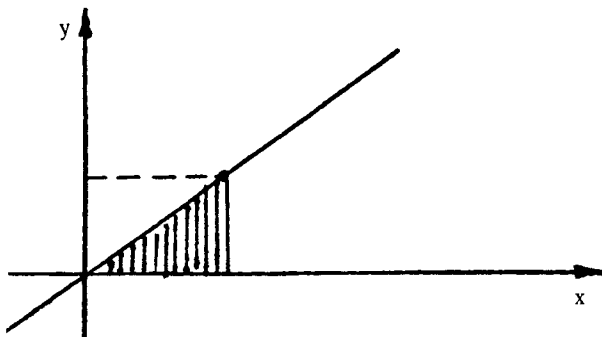


شکل ۱۶.۱.۸

این ناحیه را به صورت $R = \{(x, y) | e^y \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1\}$ در نظر می‌گیریم. بنابراین،

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \int_{x=e^y}^x y dy dx &= \int_0^1 \int_{e^y}^e y dx dy \\
 &= \int_0^1 [yx]_{e^y}^e dy \\
 &= \int_0^1 (ey - ye^y) dy \\
 &= \left[\frac{e}{2} y - e^y (y - 1) \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1
 \end{aligned}$$

توجه کنید که انتگرال $\int y e^y dy$ را به روش جزء به جزء پیدا کرده‌ایم.
 ۳۰. ناحیه داده شده در شکل ۱۷.۱.۸ رسم شده است.



شکل ۱۷.۱.۸

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_y^{\sqrt{\pi/2}} y^2 \sin x^2 dx dy &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_{y=0}^{y=x} y^2 \sin x^2 dy dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left[\frac{y^3}{3} - \sin x^2 \right]_0^x dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{x^3}{3} \sin x^2 dx \end{aligned}$$

با محاسبه این انتگرال به روش جزء به جزء، مقدار آن برابر با $\frac{1}{6}$ به دست می‌آید.

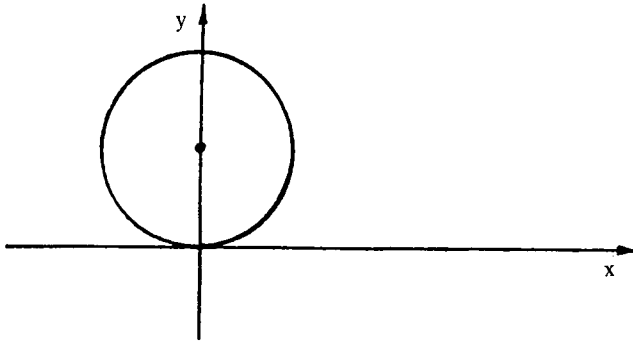
تمرینهای ۲.۸

۱. چون در مختصات قطبی، $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ پس

$$\begin{aligned} \iint_R xy dA &= \int_R \int r^2 \sin \theta \cos \theta dA \\ &= \int_0^5 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r^2 \sin \theta \cos \theta r d\theta dr = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^3 \sin 2\theta d\theta dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^5 \left[-\frac{1}{4} r^3 \cos 2\theta \right]_0^{2\pi} dr \\
 &= \int_0^5 0 \, dr = 0.
 \end{aligned}$$

۲. ناحیه R در شکل ۱.۲.۸ رسم شده است.

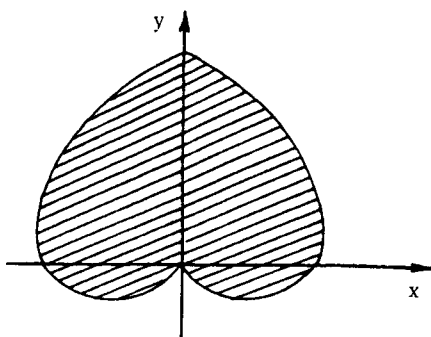


شکل ۱.۲.۸

بنابراین،

$$\begin{aligned}
 \iint_R x^2 dA &= \int_R r^2 \cos^2 \theta \, dA \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r^2 \cos^2 \theta \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \cos^2 \theta \right]_0^{\sin \theta} d\theta \\
 &= \int_0^\pi \frac{1}{4} \sin^4 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \pi
 \end{aligned}$$

جزئیات محاسبه انتگرال آخر را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.
۳. ناحیه R در شکل ۲.۲.۸ رسم شده است.



شکل ۲.۲.۸

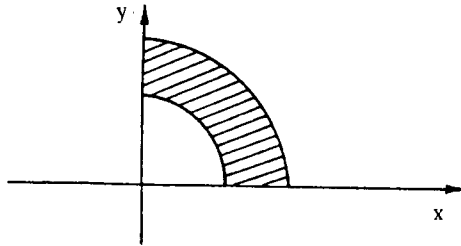
چون در مختصات قطبی $x^2 + y^2 = r^2$

$$\begin{aligned} \int_R \int (x^2 + y^2) dA &= \int_R \int r^2 dA \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2(1+\sin\theta)} r^2 r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2(1+\sin\theta)} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4(1+\sin\theta)^2 d\theta = 35\pi \end{aligned}$$

جزئیات محاسبه انتگرال آخر را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.

$$\begin{aligned} \int_R \int dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} r dr d\theta \quad .۴ \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = 1 \end{aligned}$$

۵. سطح مقطع هشت یک اول این جسم با صفحه xy در شکل ۳.۲.۸ سایه زده شده است.

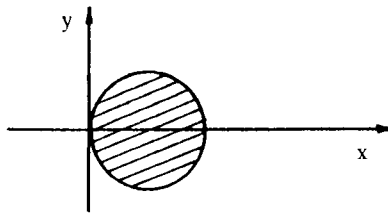


شکل ۳.۲.۸

چون در مختصات قطبی، $z^2 = 25 - x^2 - y^2 = 25 - r^2$ ، حجم جسم موردنظر برابر است با

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_R \int \sqrt{25 - r^2} r dr d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_3^5 \sqrt{25 - r^2} r dr d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} (25 - r^2)^{3/2} \right]_3^5 d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \frac{64}{3} d\theta = \left[\frac{512}{3} \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{256\pi}{3} \end{aligned}$$

۶. معادله دایره داده شده در مختصات قطبی $r = 2\cos\theta$ است (شکل ۴.۲.۸ را ببینید).

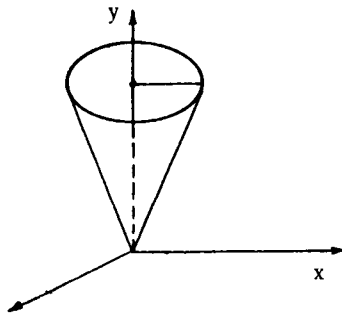


شکل ۴.۲.۸

بنابراین، حجم ناحیه مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}
 V &= \int_R \int (x^2 + y^2) dA = \int_R \int r^2 dA \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r dr d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^4 \theta d\theta = 4\pi/2
 \end{aligned}$$

جزئیات محاسبه انتگرال آخر را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.
۷. ناحیه مورد نظر در شکل ۵.۲.۸ نشان داده شده است.



شکل ۵.۲.۸

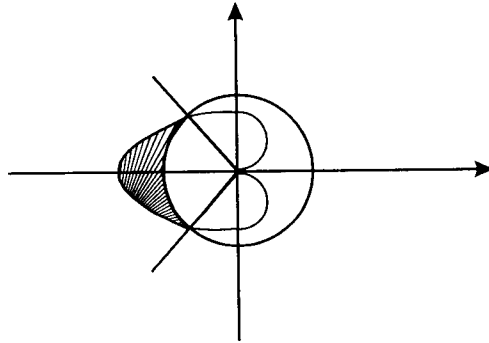
حجم ناحیه مورد نظر برابر است با تفاضل حجم زیر مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ و روی صفحه xy از حجم استوانه به شعاع ۲ و ارتفاع ۲. بنابراین،

$$\begin{aligned}
 V &= 8\pi - \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(r dr d\theta) \\
 &= 8\pi - \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\theta \\
 &= 8\pi - \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\theta = 8\pi - \frac{16\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}
 \end{aligned}$$

۸. چون در مختصات قطبی، $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta$ ، پس

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \cos \theta r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{32}{3} \cos \theta d\theta = \left[\frac{32}{3} \sin \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

۹. ناحیه موردنظر در شکل ۶.۲.۸ نشان داده شده است.



شکل ۶.۲.۸

بنابراین، مساحت R برابر است با

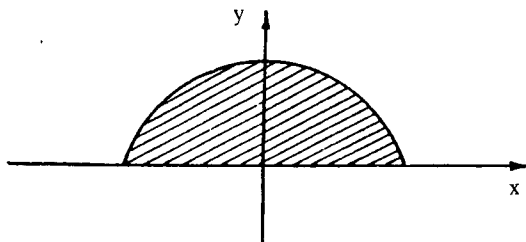
$$\begin{aligned} A &= \int_R \int dA = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \int_2^{2-2\cos\theta} r dr d\theta \\ &= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_2^{2-2\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} [(2-2\cos\theta)^2 - 4] d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}\pi/3}^{4\pi/3} (\sqrt{2} \cos^2 \theta - \sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{2}) d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}\pi/3}^{4\pi/3} (\sqrt{2} \cos^2 \theta - \sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{2}) d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sin 2\theta - \sqrt{2} \sin \theta - \sqrt{2}\theta) \right]_{\sqrt{2}\pi/3}^{4\pi/3} = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi
\end{aligned}$$

۱۰. مساحت قطعه موردنظر برابر است با

$$\begin{aligned}
A &= \int_R \int dA = \int_0^\alpha \int_0^{a \sin \theta} r dr d\theta \\
&= \int_0^\alpha \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a \sin \theta} d\theta \\
&= \int_0^\alpha \frac{1}{2} a^2 \sin^2 \theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} a^2 \int_0^\alpha (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} a^2 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\alpha = \frac{1}{2} a^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)
\end{aligned}$$

۱۱. ناحیه‌ای که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود در شکل ۸.۲.۸ رسم شده است.



شکل ۸.۲.۸

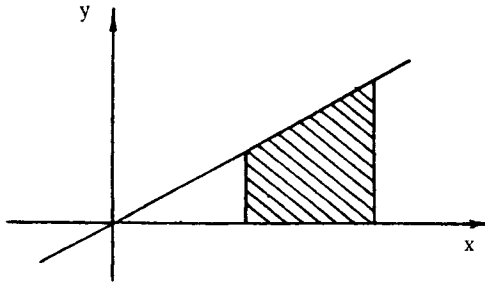
بنابراین، با توجه به تذکر ۵.۲.۸، داریم

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx &= \int_0^\pi \int_0^a e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^a d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} \right) \theta \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} \pi (1 - e^{-a^2}) \end{aligned}$$

۱۲. ناحیه‌ای که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود، ربع اول دایره $r = a$ است. پس

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2} dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^3 r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{a^5}{5} d\theta = \left[\frac{a^5}{5} \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{a^5 \pi}{10} \end{aligned}$$

۱۳. ناحیه R که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود در شکل ۷.۲.۸ نشان داده شده است.



شکل ۷.۲.۸

چون $x = r \cos \theta$ ، معادلات خطوط $x = 1$ و $x = 2$ در مختصات قطبی به صورت $r = \frac{1}{\cos \theta}$ و $r = \frac{2}{\cos \theta}$ هستند. بنابراین،

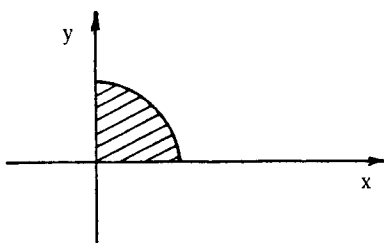
$$\int_1^2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx = \int_0^{\pi/4} \int_{1/\cos \theta}^{2/\cos \theta} \frac{1}{r} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} [r]_{1/\cos \theta}^{2/\cos \theta} d\theta$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos} d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec \theta d\theta$$

$$= [\ln (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)]_0^{\pi/4} = \ln (\sqrt{2+1})$$

۱۴. ناحیه‌ای که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود در شکل ۹.۲.۸ نشان داده شده است.



شکل ۹.۲.۸

بنابراین، در مختصات قطبی داریم

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 e^r r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} [e^r (r-1)]_0^1 d\theta \quad (\text{جزء به جزء})$$

$$= \int_0^{\pi/2} [\theta]_0^{\pi/2} = \pi/2$$

تمرینهای ۳.۸

۱. فرض می‌کنیم $f(x, y) = x^2$ چون $f_x(x, y) = 2x$ و $f_y(x, y) = 0$ ، بنابر فرمول ۱.۳.۸، داریم

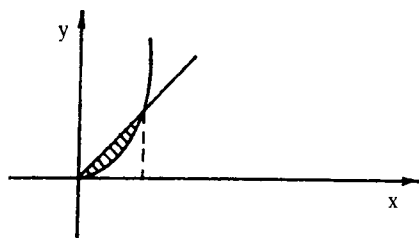
$$\begin{aligned}
 S &= \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \\
 &= \int_0^2 \int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2} dy dx \\
 &= \int_0^2 3\sqrt{1 + 4x^2} dx \\
 &= 3\sqrt{17} + \frac{3}{4} \ln(4 + \sqrt{17})
 \end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال آخر، تغییر متغیر $x = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \theta$ را به کار برده ایم؛ جزئیات این محاسبه را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.

۲. قرار می‌دهیم $f(x, y) = 1 - x^2$ در نتیجه

$$\begin{aligned}
 S &= \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 + 4x^2} dy dx \\
 &= \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2} dx \\
 &= \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}
 \end{aligned}$$

۳. ناحیه R در شکل ۱.۳.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱.۳.۸

قرار می‌دهیم $f(x, y) = 2x + 3y$ در نتیجه

$$\begin{aligned}
 S &= \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \\
 &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \sqrt{1 + 4 + 9} dy dx \\
 &= \sqrt{14} \int_0^1 [y]_{x^2}^x dx = \sqrt{14} \int_0^1 (x - x^2) dx \\
 &= \left[\sqrt{14} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^1 \\
 &= \frac{\sqrt{14}}{6}
 \end{aligned}$$

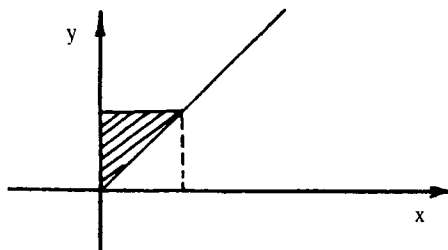
۴. فرض می‌کنیم $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ در این صورت

$$\sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} = \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2}$$

بنابراین، در مختصات قطبی، داریم

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\sqrt{x^2 + y^2} = a} \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{a/\sqrt{2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\
 &= -\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^{a/\sqrt{2}} d\theta \\
 &= -\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} \Big|_0^{\pi/2} a d\theta \\
 &= \left[\sqrt{2} a^2 (2 - \sqrt{3}) \theta \right]_0^{\pi/2} = \pi a^2 (2 - \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

۵. فرض می‌کنیم $f(x, y) = y^2$. در نتیجه، با توجه به شکل ۲.۳.۸، داریم



شکل ۲.۳.۸

$$\begin{aligned}
 S &= \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1 + 4y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \frac{y}{2} \sqrt{1 + 4y^2} dy \\
 &= \left[\frac{1}{24} (1 + 4y^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{24}
 \end{aligned}$$

۶. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = x^2 + z^2$. پس

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{[F_x(x, y, z)]^2 + [F_y(x, y, z)]^2 + [F_z(x, y, z)]^2} \\
 &= \frac{\sqrt{4x^2 + 4z^2}}{2|z|} = \frac{3}{\lambda - x^2}
 \end{aligned}$$

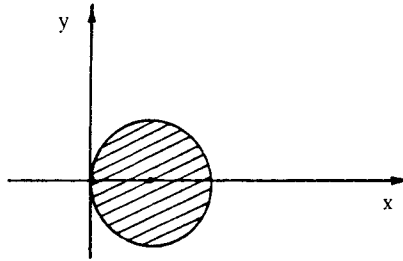
بنابراین، با توجه به تذکر ۲.۳.۸، ۵، داریم

$$\begin{aligned}
 S &= \int_R \int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dA \\
 &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dy dx \\
 &= 12 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = 24 \left[\sin^{-1} \frac{x}{3} \right]_1^2 \\
 &= 12 \left(\sin^{-1} \frac{2}{3} - \sin^{-1} \frac{1}{3} \right)
 \end{aligned}$$

۷. سطح مقطع نمودار $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ با صفحه xy دایره $x^2 + y^2 = 1$ است. بنابراین، در مختصات قطبی، داریم

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{x^2+y^2=1} \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \\
 &= \int_{x^2+y^2=1} \int \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \left[(1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^1 d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (5\sqrt{5} - 1) d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \left[(5\sqrt{5} - 1)\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)
 \end{aligned}$$

۸. سطح مقطع استوانه داده شده با صفحه xy دایره $x^2 - 4x + y^2 = 0$ است (شکل ۳.۳.۸ را ببینید).



شکل ۳.۳.۸

فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ چون،

$$\frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2|z|} = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

پس، بنابر تذکر ۵.۳.۸

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_R \int \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dA \\ &= 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{16 - r^2}} r dr d\theta \quad (\text{در مختصات قطبی}) \\ &= 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-(16 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{4 \cos \theta} d\theta \\ &= 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 - 4 \sin \theta) d\theta \\ &= [8(4\theta + 4 \cos \theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 32\pi \end{aligned}$$

۹. بنابر فرمول ۸.۳.۸، داریم

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{9x^4 + 1} dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{10}} [(9x^4 + 1)^{3/2}]_0^1 = \frac{\pi(10\sqrt{10} - 1)}{2\sqrt{10}} \end{aligned}$$

۱۰. بنابر فرمول ۸.۳.۸، داریم

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} f(x) \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right) \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) dx \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(\frac{1}{6}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{25\pi}{9} \end{aligned}$$

تمرینهای ۴.۸

۱.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} (y-xz) dz dy dx &= \int_0^3 \int_{-1}^1 \left[yz - \frac{xz^2}{2} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} dy dx \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^1 (2y - 6x) dy dx \\ &= \int_0^3 [y^2 - 6xy]_{-1}^1 dx \\ &= \int_0^3 -12x dx = [-6x^2]_0^3 = -54 \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} (y-xz) dy dx dz &= \int_0^3 \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2} - xyz \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} dx dz \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^1 (6 - 2xz) dx dz \\ &= \int_0^3 [6x - x^2z]_{-1}^1 dz \\ &= \int_0^3 12 dz = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \int_0^x \int_{x-y}^{x+y} (z - \sqrt{x-y}) dz dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^x \left[\frac{z^2}{2} - \sqrt{x-y} z \right]_{x-y}^{x+y} dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^x (-\sqrt{y} - \sqrt{xy}) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[-\frac{\sqrt{y}}{2} - \sqrt{xy} \right]_0^x dx \\
 &= \int_{-1}^1 -\frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} dx = -\left[\frac{5}{12} x^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^1 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \cos z dy dx dz \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 [(x \cos z)y]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx dz \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 x \cos z \sqrt{1-x^2} dx dz \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} \cos z (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 dz \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos z dz \\
 &= \left[\frac{1}{3} \sin z \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\ln 2} \int_0^1 \int_0^y (z^2 + 1)e^{y^2} dx dz dy \\
 &= \int_0^{\ln 2} \int_0^1 (z^2 + 1)y e^{y^2} dz dy \\
 &= \int_0^{\ln 2} \left[\left(\frac{z^3}{3} + z \right) y e^{y^2} \right]_0^1 dy \\
 &= \int_0^{\ln 2} \frac{4}{3} y e^{y^2} dy \\
 &= \left[\frac{2}{3} e^{y^2} \right]_0^{\ln 2} \\
 &= \frac{2}{3} e^{(\ln 2)^2} - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\sqrt{\pi/6}} \int_0^y \int_0^y (1 + y^2 z \cos xz) dx dz dy \\
 &= \int_0^{\sqrt{\pi/6}} \int_0^y [x + y^2 \sin xz]_0^y dz dy \\
 &= \int_0^{\sqrt{\pi/6}} \int_0^y (y + y^2 \sin yz) dz dy \\
 &= \int_0^{\sqrt{\pi/6}} [yz - y \cos yz]_0^y dy \\
 &= \int_0^{\sqrt{\pi/6}} (y^2 - y \cos y^2 + y) dy \\
 &= \left[\frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} \sin y^2 + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{\pi/6}} \\
 &= \frac{\pi}{18\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^e \int_1^{\sqrt{x}} z(\ln x)^{\gamma} dz dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^e \left[\frac{z^{\gamma}}{\gamma} (\ln x)^{\gamma} \right]_1^{\sqrt{x}} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^e \frac{1}{\gamma} \frac{(\ln x)^{\gamma}}{x} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\gamma} (\ln x)^{\gamma} \right]_1^e dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} dy = \frac{1}{\gamma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/\gamma} \int_0^{\pi/\gamma} \int_0^{\sin z} x^{\gamma} \sin y dx dy dz \\
 &= \int_0^{\pi/\gamma} \int_0^{\pi/\gamma} \left[\frac{x^{\gamma}}{\gamma} \sin y \right]_0^{\sin z} dy dz \\
 &= \int_0^{\pi/\gamma} \int_0^{\pi/\gamma} \frac{1}{\gamma} \sin^{\gamma} z \sin y dy dz \\
 &= \int_0^{\pi/\gamma} \left[-\frac{1}{\gamma} \sin^{\gamma} z \cos y \right]_0^{\pi/\gamma} dz \\
 &= \int_0^{\pi/\gamma} \frac{1}{\gamma} \sin^{\gamma} z dz \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_0^{\pi/\gamma} (1 - \cos^{\gamma} z) \sin z dz \\
 &= \frac{1}{\gamma} \left[-\cos z + \frac{\cos^{\gamma} z}{\gamma} \right]_0^{\pi/\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma}
 \end{aligned}$$

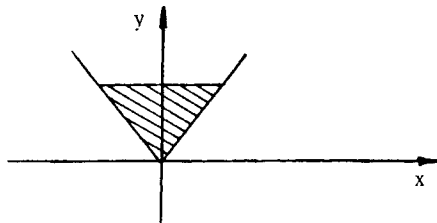
.۹

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_{1+x}^{1+x} \int_z^{1+x} x \, dy \, dz \, dx &= \int_0^1 \int_{1+x}^{1+x} [xy]_{\frac{x}{z}+z} \, dz \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_{1+x}^{1+x} x^2 \, dz \, dx \\
 &= \int_0^1 [x^2 z]_{1+x}^{1+x} \, dx \\
 &= \int_0^1 (x^2 - x^2) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

.۱۰

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_1^{x+y} x^2 y \, dz \, dy \, dx &= \int_{-1}^2 \int_1^{x^2} [x^2 y z]_1^{x+y} \, dy \, dx \\
 &= \int_{-1}^2 \int_1^{x^2} (x^2 y + x^2 y^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_{-1}^2 \left[x^2 y^2 + \frac{2}{3} x^2 y^3 \right]_1^{x^2} \, dx \\
 &= \int_{-1}^2 \left(x^4 + \frac{2}{3} x^6 - x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right) \, dx \\
 &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{21} x^7 - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{9} x^4 \right]_{-1}^2 = \frac{513}{8}
 \end{aligned}$$

۱۱. سطح مقطع ناحیه D با صفحه xy در شکل ۱.۴.۸ سایه زده شده است.



شکل ۱.۴.۸

در نتیجه، بنابر فرمول ۴.۴.۸، داریم

$$\begin{aligned}
 \iiint_D e^y dv &= \int_{-1}^1 \int_{-y}^y \int_{-y}^y e^y dz dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-y}^y [e^y z]_{-y}^y dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-y}^y y e^y dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 [ye^y x]_{-y}^y dy \\
 &= \int_{-1}^1 2y^2 e^y dy = [2e^y y^2 - 4e^y y + 4e^y]_{-1}^1 = 2e - 4
 \end{aligned}$$

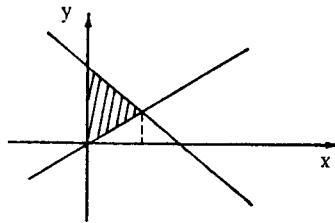
.۱۲

$$\begin{aligned}
 \iiint_D ye^{xy} dv &= \int_{-2}^2 \int_{-1}^2 \int_{-2}^0 ye^{xy} dz dx dy \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-1}^2 2y e^{xy} dx dy \\
 &= \int_{-2}^2 [2e^{xy}]_{-1}^2 dy \\
 &= \int_{-2}^2 (2e^{2y} - 2e^{-y}) dy \\
 &= \left[\frac{2}{3} e^{3y} - 2e^y \right]_{-2}^2 = \frac{2}{3} e^6 - 2e^2 + \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

۱۳. سطح مقطع صفحه xy با مخروط $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ، دایره $x^2+y^2=1$ است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 \iint_D zy \, dv &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zy \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{z^2}{2} y \right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (y-yx^2-y^3) dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2}x^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.
 \end{aligned}$$

۱۴. ناحیه D از بالا به صفحه $z = 1 + x + y$ و از پایین به مثلث سایه زده در شکل ۲.۴.۸ محدود است.



شکل ۲.۴.۸

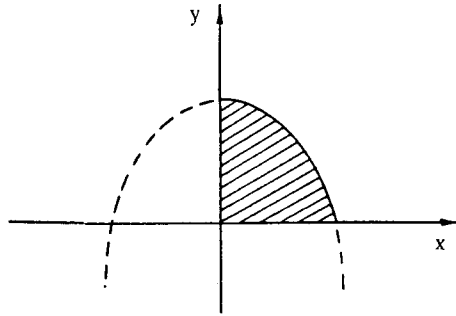
بنابراین، حجم D برابر است با

$$\begin{aligned}
 v &= \iiint_D 1 \, dv = \int_0^1 \int_x^{2-x} \int_0^{1+x+y} dz \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_x^{2-x} (1+x+y) dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[1 \cdot y + xy + \frac{y^2}{2} \right]_x^{2-x} dx \\
 &= \int_0^1 (-2x^2 - 2 \cdot x + 22) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - 1 \cdot x^2 + 22x \right]_0^1 = \frac{34}{3}
 \end{aligned}$$

۱۵. نقطه (x, y, z) متعلق به محل تلاقی این دو رویه است اگر

$$y = 1 - x^2 \quad \text{یا} \quad x^2 + 2y + 1 = y + 2$$

پس سطح مقطع D با صفحه xy ناحیه سایه زده در شکل ۳.۴.۸ است.



شکل ۳.۴.۸

بنابراین، حجم D برابر است با

$$\begin{aligned} v &= \iiint_D 1 \, dv = \int_0^1 \int_x^{1-x^2} \int_{x^2+2y+1}^{y+2} dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} [z]_{x^2+2y+1}^{y+2} dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1-x^2-y) dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[y-x^2y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

تمرینهای ۵.۸

$$r = \sin \theta = -\epsilon \quad .1$$

$$\Delta z = r \cos \theta \quad .2$$

$$r(\cos \theta + \sin \theta) + z = \gamma \quad .3$$

$$r^\gamma + z^\gamma = \gamma \quad .4$$

$$r^\gamma + z = \gamma \quad .5$$

$$z = \gamma r \quad \text{یا} \quad \epsilon r^\gamma - z^\gamma = 0 \quad .6$$

.۷

$$\begin{aligned} \int_0^{\gamma\pi} \int_0^{\gamma} \int_0^{\Delta} e^z r \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{\gamma\pi} \int_0^{\gamma} [e^z r]_0^{\Delta} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\gamma\pi} \int_0^{\gamma} r(e^{\Delta} - 1) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\gamma\pi} \left[\frac{r^2}{2} (e^{\Delta} - 1) \right]_0^{\gamma} \, d\theta \\ &= \int_0^{\gamma\pi} \frac{\gamma^2}{2} (e^{\Delta} - 1) \, d\theta \\ &= \left[\frac{\gamma^2}{2} (e^{\Delta} - 1) \theta \right]_0^{\gamma\pi} = \gamma^2 \pi (e^{\Delta} - 1) \end{aligned}$$

.۸

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/\gamma} \int_0^{\gamma} \int_0^{\sqrt{1-r^\gamma}} r \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{\pi/\gamma} \int_0^{\gamma} [(r \sin \theta) z]_0^{\sqrt{1-r^\gamma}} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/\gamma} \int_0^{\gamma} \sin \theta (r \sqrt{1-r^\gamma}) \, dr \, d\theta \\ &= -\frac{1}{\gamma} \int_0^{\pi/\gamma} \left[\sin \theta (1-r^\gamma)^{\gamma/\gamma} \right]_0^{\gamma} \, d\theta \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^{\pi/\gamma} \sin \theta \, d\theta \\ &= \left[-\frac{1}{\gamma} \cos \theta \right]_0^{\pi/\gamma} = \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

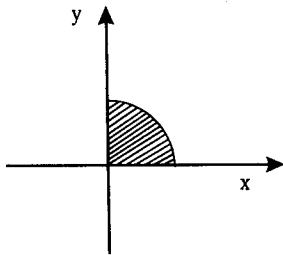
.۹

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} \int_0^r r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_0^{\sin \theta} d\theta \\
 &= \frac{32}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta \\
 &= \frac{32}{3} \left[\frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{16}{15}
 \end{aligned}$$

.۱۰

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{1-\cos 2\theta} \int_0^r r \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{1-\cos 2\theta} r \sin \theta \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \sin \theta \right]_0^{1-\cos 2\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1-\cos 2\theta)^2 \sin \theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (3-4\cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (9-24\cos^2 \theta + 16\cos^4 \theta) \sin \theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[-9\cos \theta + 8\cos^3 \theta - \frac{16}{5}\cos^5 \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0
 \end{aligned}$$

۱۱. سطح مقطع این جسم با صفحه xy در شکل ۸. ۵. نشان داده شده است. چون ناحیه D از بالا به نمودار $z^2 = 1-x^2-y^2 = 1-r^2$ محدود است،



$$\begin{aligned}
 \iiint_D z \, dv &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-r^2}} dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{1}{2} r (1-r^2) dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{\lambda} (1-r^2) \right]_0^1 d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\lambda} d\theta = \left[\frac{\theta}{\lambda} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}
 \end{aligned}$$

۱۲. سطح مقطع D با صفحه xy دایره $r = \cos \theta$ است، از بالا به نمودار $z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}$ محدود است. پس در مختصات استوانه‌ای، داریم

$$\begin{aligned}
 \iiint_D yz \, dv &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \int_0^{\sqrt{1-r^2}} (r \sin \theta) z r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \left[r^2 \sin \theta \frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-r^2}} dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \sin \theta \cdot r^2 (1-r^2) dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^{\cos \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \frac{\cos^5 \theta}{5} \right) d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos^4 \theta}{12} - \frac{\cos^6 \theta}{30} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0
 \end{aligned}$$

۱۳. به آسانی محاسبه می‌شود که محل تلاقی دو رویه داده شده دایره $r = 1$ (در صفحه $z = 1$) است. چون D از بالا به نمودار $z = \sqrt{2-x^2-y^2} = \sqrt{2-r^2}$ و از پایین به $z = x^2 + y^2 = r^2$

محدود است،

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D \sqrt{z} \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\sqrt{2-r^2} - r^3) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(2-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{12} \right) d\theta \\
 &= \left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{12} \right) \theta \right]_0^{2\pi} = 2\pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{12} \right)
 \end{aligned}$$

۱۴. محل تلاقی سهمیوار داده شده و صفحه $z=3$ دایره $x^2+y^2=4$ (یا در مختصات قطبی، $r=2$) است. چون $z=1-x^2-y^2=1-r^2$

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D \sqrt{z} \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-r^2}^{1-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(4-r^2) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{3} \right]_0^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta = [4\theta]_0^{2\pi} = 8\pi
 \end{aligned}$$

۱۵. محل تلاقی این دو رویه دایره $r=2$ (در صفحه $z=2$) است. چون

$$\begin{aligned}
 z^2 &= x^2 + y^2 \Rightarrow z^2 = r^2 \\
 x^2 + y^2 + z^2 - 4z &= 0 \Rightarrow (z-2)^2 = 4 - r^2
 \end{aligned}$$

پس D از پایین به نمودار $z=2$ و از بالا به نمودار $z=2+\sqrt{4-r^2}$ محدود است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D dv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{2+\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(2+\sqrt{4-r^2}-r) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 4 d\theta = [4\theta]_0^{2\pi} = 8\pi
 \end{aligned}$$

تمرینهای ۶.۸

۱. چون $\rho=1$ ، $\phi = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$ ،

$$x = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$z = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

۲. چون $\rho=5$ ، $\phi = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = 0$ ،

$$x = 5 \sin \frac{\pi}{2} \cos 0 = 5$$

$$y = 5 \sin \frac{\pi}{2} \sin 0 = 0$$

$$z = 5 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

۳. چون $x=1$ ، $y=0$ و $z=1$ پس $r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$ و $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ در نتیجه

$$x = r \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = 0$$

$$z = \rho \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

بنابراین، مختصات کروی این نقطه عبارت است از $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 0)$.۴. چون $x=2$ ، $y=2$ و $z = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ پس

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه

$$x = r \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \rho \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$$

.۵

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \phi \right]_0^1 \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3} \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos \phi \right]_0^{\pi/4} \, d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \, d\theta \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \theta \right]_0^{\sqrt{2}\pi} = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

.۶

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \cos \phi \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3} \cos \phi \sin \phi \right]_0^1 \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3} \cos \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \left[\frac{1}{6} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/4} \, d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}\pi} \frac{1}{6} \, d\theta = \left[\frac{1}{6} \theta \right]_0^{\sqrt{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \int_{\pi/\gamma}^\pi \int_0^\gamma \rho^\gamma \sin^\gamma \phi \cos^\gamma \theta d\rho d\phi d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_{\pi/\gamma}^\pi \left[\frac{\rho^\delta}{\delta} \sin^\gamma \phi \cos^\gamma \theta \right]_0^\gamma d\phi d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_{\pi/\gamma}^\pi \frac{\gamma^\gamma}{\delta} \sin^\gamma \phi \cos^\gamma \theta d\phi d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_{\pi/\gamma}^\pi \frac{\gamma^\gamma}{\delta} \left(\frac{1 - \cos^\gamma \phi}{\gamma} \right) \cos^\gamma \theta d\phi d\theta \\
 &= \int_0^\pi \frac{\gamma^\gamma}{\delta} \left[\left(\phi - \frac{1}{\gamma} \sin^\gamma \phi \right) \cos^\gamma \theta \right]_{\pi/\gamma}^\pi d\theta \\
 &= \int_0^\pi \frac{\gamma^\gamma \pi}{\gamma^\delta} \cos^\gamma \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{\gamma^\gamma \pi}{\gamma^\delta} \left(\frac{1 + \cos^\gamma \theta}{\gamma} \right) d\theta \\
 &= \frac{\gamma^\gamma \pi}{\gamma^\delta} \left[\theta + \frac{1}{\gamma} \sin^\gamma \theta \right]_0^\pi = \frac{\gamma^\gamma \pi}{\gamma^\delta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} \int_0^\theta \int_0^{\sec \phi} \rho \cos^\gamma \phi \cos \theta d\rho d\phi d\theta \\
 &= \int_{\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} \int_0^\theta \left[\frac{\rho^\gamma}{\gamma} \cos^\gamma \phi \cos \theta \right]_0^{\sec \phi} d\phi d\theta \\
 &= \int_{\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} \int_0^\theta \frac{\lambda^\gamma}{\gamma} \cos \theta d\phi d\theta \\
 &= \int_{\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} \left[\frac{\lambda^\gamma}{\gamma} (\cos \theta) \phi \right]_0^\theta d\theta \\
 &= \frac{\lambda^\gamma}{\gamma} \int_{\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} \theta \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{\lambda^\gamma}{\gamma} [\theta \sin \theta + \cos \theta]_{\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} \\
 &= \frac{\lambda^\gamma}{\gamma} \pi \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} - \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \right) + \frac{\lambda^\gamma}{\gamma} (1 - \sqrt{\gamma})
 \end{aligned}$$

(جزء به جزء)

۹. چون معادلات این دو کره به ترتیب $\rho=2$ و $\rho=3$ است، پس D مجموعه نقاط (ρ, φ, θ) است، به طوری که

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 2 \leq \rho \leq 3$$

در نتیجه، بنابر قضیه ۴.۶.۸، داریم

$$\begin{aligned} \iiint_D x^2 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_2^3 (\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \sin \varphi \rho d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \right]_2^3 d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{211}{3} \sin^2 \varphi \cos^2 \theta d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{211}{3} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi \cos^2 \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{211}{3} \int_0^{2\pi} \left[(-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi) \cos^2 \theta \right]_0^\pi d\theta \\ &= \frac{144}{15} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{144}{15} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{144}{15} \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{144}{15} \pi \end{aligned}$$

۱۰. با استفاده از فرمولهای ۱.۶.۸، معادلات مخروط و دو کره داده شده در مختصات کروی به ترتیب عبارت انداز $\sqrt{3}$ (یا $\phi = \frac{\pi}{6}$)، $\rho=3$ و $\rho=9$. بنابراین D مجموعه نقاط (ρ, φ, θ) است به طوری که

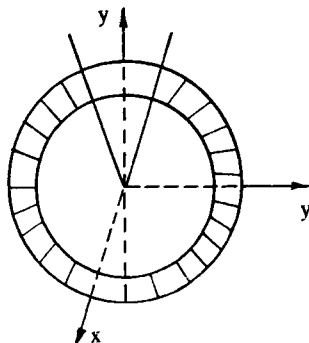
$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ و } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}, 3 \leq \rho \leq 9$$

در نتیجه، بنابر قضیه ۴.۶.۸، داریم

$$\begin{aligned}
 \iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dV &= \int_0^2 \int_0^{\pi/6} \int_{\sqrt{3}\rho}^2 \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \rho \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} [-\rho \cos \phi]_0^{\pi/6} d\theta = 0 \\
 &= \int_0^{2\pi} \rho(2 - \sqrt{3}) d\theta = 6\pi(2 - \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

۱۱. معادلات دو کره و مخروط داده شده در مختصات کروی به ترتیب عبارت‌اند از $\rho=1$ ، $\rho=2$ و $\phi = \frac{\pi}{3}$ (شکل ۸.۶.۱) را ببینید. بنابراین D مجموعه نقاط (ρ, ϕ, θ) است به طوری که

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \pi, \quad 1 \leq \rho \leq 2$$



بنابراین، حجم D برابر است با.

$$\begin{aligned}
 \iiint_D 1 dV &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \phi \right]_1^2 d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{7}{3} \sin \phi \, d\phi \, d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{y}{r} \cos \phi \right]_{\pi/r}^{\pi} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{y}{r} d\theta = \left[\frac{y}{r} \theta \right]_0^{2\pi} = 2\pi
 \end{aligned}$$

۱۲. معادله کره به شعاع a و مرکز O عبارت است از $\rho = a$. بنابراین، حجم آن برابر است با

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \phi \right]_0^a \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^3}{3} \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a^3}{3} \cos \phi \right]_0^{\pi} \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{2a^3}{3} \, d\theta = \left[\frac{2a^3}{3} \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi a^3}{3}
 \end{aligned}$$

تمرینهای ۷.۸

۱. داریم

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_R \rho(x, y) \, dA = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} (x+y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^9 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{x}} \, dx \\
 &= \int_0^9 \left(x^{3/2} + \frac{x}{2} \right) \, dx = \frac{2349}{2}
 \end{aligned}$$

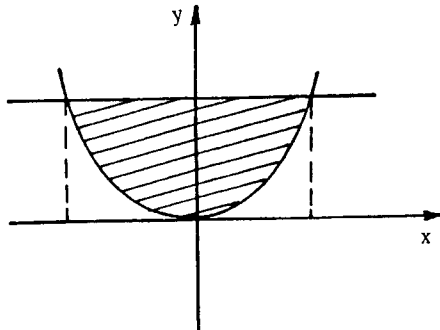
$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_R y\rho(x,y) dA = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} y(x+y) dy dx \\
 &= \int_0^9 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^9 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^{3/2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{6} + \frac{2}{15}x^{5/2} \right]_0^9 = \frac{1539}{10}
 \end{aligned}$$

به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که $M_y = \frac{10449}{14}$. در نتیجه، مختصات مرکز جرم عبارت‌اند از

$$\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{38}{29} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{1290}{203}$$

۲. ناحیه R در شکل ۱.۷.۸ سایه زده شده است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_R \rho(x,y) dA = \iint_R |x| dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 x dy dx + \int_{-2}^0 \int_{x^2}^0 -x dy dx = 4 + 4 = 8
 \end{aligned}$$



شکل ۱.۷.۸

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_R y \rho(x,y) dA = \iint_R y |x| dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 yx dy dx + \int_0^2 \int_{-2}^{x^2} -yx dy dx \\
 &= \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

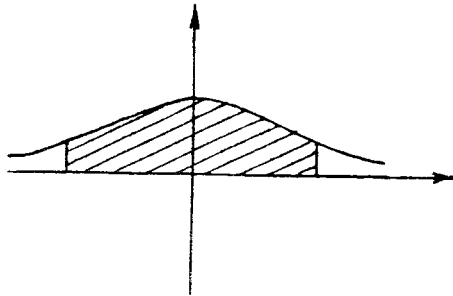
$$\begin{aligned}
 M_y &= \iint_R x \rho(x,y) dA = \iint_R x |x| dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 x^2 dy dx + \int_0^2 \int_{-2}^{x^2} -x^2 dy dx \\
 &= \frac{64}{15} - \frac{64}{15} = 0
 \end{aligned}$$

جزئیات محاسبه انتگرالهای بالا را به عهده دانشجویان واگذار می‌کنیم. بنابراین

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{64/3}{8} = \frac{8}{3} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{m} = 0$$

۳. ناحیه R در شکل ۲.۷.۸ نشان داده شده است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_R \rho(x,y) dA = \iint_R |xy| dA \\
 &= \int_{-1}^0 \int_0^{e^{-x^2}} -xy dy dx + \int_0^1 \int_0^{e^{-x^2}} xy dy dx = \frac{1}{4} (1 - e^{-2})
 \end{aligned}$$



شکل ۲.۷.۸

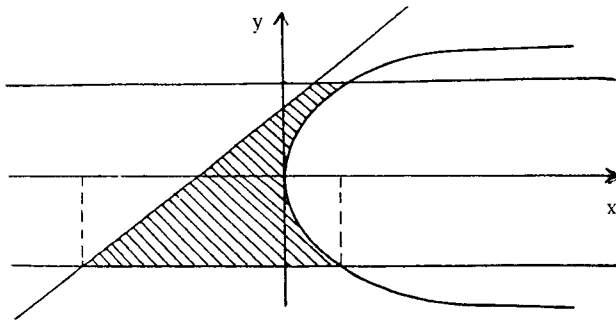
$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_R \int y \rho(x,y) dA = \int_R \int y |xy| dA \\
 &= \int_{-1}^0 \int_0^{e^{-x^2}} -xy^2 dy dx + \int_0^1 \int_0^{e^{-x^2}} xy^2 dy dx \\
 &= \frac{1}{9}(1-e^{-2})
 \end{aligned}$$

$$M_y = \int_R \int x \rho(x,y) dA = \int_R \int x |xy| dA = 0$$

جزئیات محاسبه انتگرالهای بالا را به عهده دانشجویان واگذار می‌کنیم. بنابراین

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{9} \frac{1-e^{-2}}{1-e^{-2}} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{m} = 0$$

۴. ناحیه R در شکل ۳.۷.۸ نشان داده شده است.



شکل ۳.۷.۸

بنابراین

$$\begin{aligned}
 m &= \int_R \int \rho(x,y) dA = \int_R \int dA \\
 &= \int_{-2}^3 \int_{y-2}^{y^2} dx dy = \frac{115}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_R \int y(x,y) dA = \int_R \int y dA \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{y-2}^{y^2} y dx dy = \frac{115}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_R \int x \rho(x,y) dA = \int_R \int x dA \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{y-2}^{y^2} x dx dy = \frac{50}{3}
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{115}{12}}{\frac{115}{6}} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{50}{3}}{\frac{115}{6}} = \frac{20}{23}$$

۵

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_R \int y^2 \rho(x,y) dA = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} y^2 (x+y) dy dx \\
 &= \frac{7533}{28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_R \int x^2 \rho(x,y) dA = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} x^2 (x+y) dy dx \\
 &= \frac{41553}{8}
 \end{aligned}$$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{7533}{28} + \frac{41553}{8} = \frac{305937}{56}$$

۶

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_R \int y^2 \rho(x,y) dA = \int_R \int y^2 |x| dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^2 y^2 x dy dx + \int_{-2}^0 \int_{x^2}^2 -y^2 x dy dx \\
 &= 64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_R \int x^2 \rho(x,y) dA = \int_R \int x^2 |x| dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 x^2 dy dx + \int_{-2}^0 \int_{x^2}^4 -x^2 dy dx \\
 &= \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{224}{3} \quad \text{در نتیجه}$$

۷. محل تلاقی دو سهمیوار داده شده مجموعه نقاط (x, y, z) است به طوری که

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad x^2 + y^2 = 1 - x^2 - y^2$$

بنابراین، جرم این جسم برابر است با

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_D \rho(x,y,z) dv = \iiint_D (2-z) dv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{r^2}^{1-r^2} (2-z)r dz dr d\theta \quad (\text{در مختصات استوانه‌ای}) \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left[(2z - \frac{z^2}{2})r \right]_{r^2}^{1-r^2} dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2r - 6r^3}{2} dr d\theta \\
 &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} [r^2 - r^4]_0^{1/\sqrt{2}} d\theta \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{3}{16} \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}
 \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که $M_{xz} = M_{yz} = 0$. همچنین، داریم

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint_D z \rho(x, y, z) dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{r^2}^{1-r^2} z(2-z)r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left[(z^2 - \frac{z^3}{3})r \right]_{r^2}^{1-r^2} dr d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} (2r - 2r^3 - 3r^5 + 2r^7) dr d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{2}{3}r^4 - \frac{1}{3}r^6 + \frac{1}{4}r^8 \right]_0^{1/\sqrt{2}} d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{17}{64} d\theta = \frac{17}{96} \pi
\end{aligned}$$

پس

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{17 \frac{\pi}{96}}{\frac{3\pi}{8}} = \frac{17}{36}, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{x} = 0.$$

۸. جرم این جسم برابر است با

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_D \rho(x, y, z) dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (\rho \sin \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3} \sin^3 \phi \right]_0^2 d\phi d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos^2 \phi}{2} d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Delta 1}{\Delta} \int_0^{2\pi} \left[\phi - \frac{1}{3} \sin^2 \phi \right]_{\pi/2}^{\pi/2} d\theta \\
 &= \frac{31}{16} \pi \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\Delta 1}{16} \pi \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{\Delta 1}{\Delta} \pi^2
 \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که $M_{xz} = M_{zx} = 0$. همچنین، داریم

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iiint_D z \rho(x, y, z) dv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^r (\rho \cos \phi) (\rho \sin \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5} \sin^2 \phi \cos \phi \right]_0^r d\phi d\theta \\
 &= \frac{243}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \cos \phi d\phi d\theta \\
 &= \frac{243}{5} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \sin^3 \phi \right]_0^{\pi/2} d\theta \\
 &= \frac{\Delta 1}{5} \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\Delta 1}{5} \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{162}{5} \pi
 \end{aligned}$$

بنابراین $\bar{y} = \bar{x} = 0$ و

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{162}{5}}{\frac{\Delta 1 \pi^2}{\Delta}} = \frac{16}{5\pi}$$

۹. داریم

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iiint_D z \rho(x, y, z) dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} z(z^2 + 1) r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} \right) r \right]_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dr d\theta = 0
 \end{aligned}$$

به همین ترتیب $M_{xz} = M_{yz} = 0$. بنابراین مرکز جرم این جسم در $(0, 0, 0)$ است.
۱۰. مانند مسأله نمونه‌ای ۸.۷.۱۸ حل کنید.

۱۱. در مختصات کروی، داریم

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_D (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^5 (\rho^3 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^3 \cos^2 \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\rho^5 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \sin \phi] d\phi d\theta \\ &= 3125 \int_0^{2\pi} \left[-\sin^2 \theta \cos \phi - \frac{1}{3} \cos^3 \phi \cos^2 \theta \right]_0^\pi d\theta \\ &= 3125 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \theta + \frac{2}{3} \cos^2 \theta \right) d\theta = \frac{25000}{3} \pi \end{aligned}$$

به همین ترتیب $I_y = I_z = \frac{25000}{3} \pi$ به دست می‌آید.
۱۲. در مختصات استوانه‌ای، داریم

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_D (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^6 r^2 (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[r^2 (r^2 z \sin^2 \theta + \frac{1}{3} z^3) r \right]_0^6 dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (6r^2 \sin^2 \theta + 72r) dr d\theta = 624\pi \end{aligned}$$

به همین ترتیب $I_y = 624\pi$ و

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iiint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^6 (r^2) r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 12r^3 dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} [3r^4]_0^2 d\theta = 48 \int_0^{2\pi} d\theta = 96\pi
 \end{aligned}$$

تمرینهای فصل ۹

تمرینهای ۱.۹

۱.

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \left(\frac{-xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-xy}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k} = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{F} &= \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \\ &= -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \\ \operatorname{div} \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{x}{z} & -\frac{y}{z} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{y}{z^2} \vec{i} + \frac{x}{z^2} \vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F = \nabla \cdot F &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = -\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y & e^x \sin y & z \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} + \vec{j} + (e^x \sin y + e^x \sin y) \vec{k} \\ &= \nabla e^x \sin y \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) + \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y) + \frac{\partial}{\partial z} z \\ &= e^x \cos y + e^x \cos y + 1 = \nabla e^x \cos y + 1 \end{aligned}$$

۵. داریم $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. در نتیجه

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

۶. چون $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ، $\frac{\partial f}{\partial z} = -4z$ ، داریم

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= 2 + 2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x \cos xy \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -y \sin xy$$

\vec{F} گرادیان هیچ تابعی نیست.

۸. چون

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & x^2z & x^2y+1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2 - x^2)\vec{i} + (2xy - 2xy)\vec{j} + (2xz - 2xz)\vec{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

و دامنه \vec{F} تمام فضا است، \vec{F} گرادیان یک تابع است. فرض کنیم $\vec{F} = \text{grad } f$ چون

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} &= \text{grad } f \\ &= 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + (x^2y+1)\vec{k} \end{aligned}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y+1 \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z, \frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz \quad (*)$$

با انتگرالگیری از معادله اول (*) نسبت به x ، داریم

$$f(x, y, z) = x^2yz + g(y, z)$$

که در آن g نسبت به x ثابت است. مشتق جزئی اول این عبارت نسبت به y برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z + \frac{\partial g}{\partial y}$$

با مقایسه این عبارت و معادله دوم (*)، داریم

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

در نتیجه g نسبت به y ثابت است. بنابراین

$$f(x, y, z) = x^2yz + h(z)$$

مشتق جزئی اول این عبارت نسبت به z برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + \frac{dh}{dz}$$

با مقایسه این عبارت و معادله سوم (*)، داریم

$$h(z) = z + C \quad \text{و در نتیجه} \quad \frac{dh}{dz} = 1$$

که در آن C یک مقدار ثابت است. بنابراین

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 yz + h(z) \\ &= x^2 yz + z + C \end{aligned}$$

۹. چون

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & yz & xz \end{vmatrix} = -y\vec{i} + (x-z)\vec{j} + 0\vec{k} \neq \vec{0}$$

پس \vec{F} گرادیان هیچ تابعی نیست.

۱۰. چون

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + x^2 & z^2 + y^2 & x^2 + z^2 \end{vmatrix} \\ &= 2z\vec{i} - 2x\vec{j} - 2y\vec{k} \neq \vec{0} \end{aligned}$$

پس \vec{F} گرادیان تابعی نیست.

۱۱. (الف) چون گرادیان تابع $h = fg$ یک تابع برداری است، $\text{grad}(fg)$ یک میدان برداری است.

(ب) بی معنی است.

(پ) یک میدان برداری است.

(ت) یک میدان برداری است. زیرا $\text{div } \vec{F}$ یک تابع چند متغیره است و در نتیجه گرادیان

آن یک میدان برداری است.

(ث) یک میدان برداری است.

(ج) یک تابع چند متغیره است.

(چ) یک میدان برداری است.

(ح) یک تابع چند متغیره است.

(خ) بی معنی است زیرا $\text{div}(\text{grad } f)$ یک میدان برداری نیست و چرخه آن معنی ندارد.

۱۲. فرض کنیم $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ و $\vec{G} = M'\vec{i} + N'\vec{j} + P'\vec{k}$. به آسانی می توان نشان داد که

$$\begin{aligned} \text{curl}(\vec{F} + \vec{G}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_x + M_y & N_x + N_y & P_x + P_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_x & N_x & P_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_y & N_y & P_y \end{vmatrix} \\ &= \text{curl} \vec{F} + \text{curl} \vec{G} \end{aligned}$$

.۱۳

$$\text{div}(F+G) = \nabla \cdot (F+G) = \nabla \cdot F + \nabla \cdot G = \text{div} F + \text{div} G$$

$$.۱۴ \text{ اگر } \vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k} \text{ آنگاه}$$

$$\begin{aligned} \text{curl}(f\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fM & fN & fP \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial(fP)}{\partial y} - \frac{\partial(fN)}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial(fM)}{\partial z} - \frac{\partial(fP)}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial(fN)}{\partial x} - \frac{\partial(fM)}{\partial y} \right) \hat{k} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial y} P + f \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} N - f \frac{\partial N}{\partial z} \right] \hat{i} + \left[\frac{\partial f}{\partial z} M + f \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} P - f \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \hat{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial x} N + f \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} M - f \frac{\partial M}{\partial y} \right] \hat{k} \\ &= f \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \hat{i} + f \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \hat{j} + f \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y} P - \frac{\partial f}{\partial z} N \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} M - \frac{\partial f}{\partial x} P \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} N - \frac{\partial f}{\partial y} M \right) \hat{k} \\ &= f(\text{curl} \vec{F}) + [(\text{grad} f) \times \vec{F}] \end{aligned}$$

.۱۵ مانند تمرین قبل حل می شود.

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \operatorname{Lap} f \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\operatorname{curl} \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} = \vec{0}$$

$$\operatorname{grad} |\vec{r}| = \operatorname{grad} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \hat{k} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{k} \\ &= \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{aligned}$$

۱۸. فرض کنیم $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ چون

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= (a_2 z - a_3 y) \hat{i} + (a_3 x - a_1 z) \hat{j} + (a_1 y - a_2 x) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} (\vec{a} \times \vec{r}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2 z - a_3 y & a_3 x - a_1 z & a_1 y - a_2 x \end{vmatrix} \\ &= (a_1 + a_1) \hat{i} + (a_2 + a_2) \hat{j} + (a_3 + a_3) \hat{k} = 2\vec{a} \end{aligned}$$

تمرینهای ۲.۹

۱. داریم

$$x = \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$y = \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$z = t, \quad \frac{dz}{dt} = 1$$

و $M(x, y, z) = -x = -\cos t$ ، $N(x, y, z) = y = \sin t$ ، $P(x, y, z) = z = t$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C M dx + N dy + P dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(-\cos t)(-\sin t) + (\sin t)(\cos t) + (t)(1)] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t \cos t + \sin t \cos t + t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin t \cos t + t) dt \\ &= \left[\sin^2 t + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{16} + 1 \right) \end{aligned}$$

۲. داریم

$$x = \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$y = \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$z = 2t, \quad \frac{dz}{dt} = 2$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C M dx + N dy + P dz \\
&= \int_C \left[M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right] dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\sin t)(-\sin t) + (\cos t \sin t) \cos t + \sqrt{t}^{\sqrt{t}}] dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin^2 t + \cos^2 t \sin t + \sqrt{t}^{\sqrt{t}}) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{2} + \cos^2 t \sin t + \sqrt{t}^{\sqrt{t}} \right) dt \\
&= \left[\frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{2} t - \frac{1}{3} \cos^3 t + \int \sqrt{t}^{\sqrt{t}} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

۳. در اینجا،

$$x = \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

$$z = \sin t, \quad \frac{dz}{dt} = \cos t$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\pi}^0 \left[M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right] dt \\
&= \int_{\pi}^0 [(-\sin t)(-\sin t) + 0 + (\cos t)(\cos t)] dt \\
&= \int_{\pi}^0 \sqrt{t} dt = \int_{\pi}^0 -\pi
\end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} t^{-3/2}$$

$$y = \sqrt{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} t^{-1/2}$$

$$z = -\ln(\cos ht), \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\sin ht}{\cos ht} = \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}}$$

و $M(x, y, z) = \frac{\pi}{\sqrt{t}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{t}} = -\frac{\pi}{2} e^{-x} e^x$ ، $N(x, y, z) = -\frac{\pi}{\sqrt{t}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{t}} = -\frac{\pi}{2} e^{-x} e^x$ ، و $P = 0$ در نتیجه

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{t}}} \left[(\frac{\pi}{\sqrt{t}} - e^{-x}) \cdot 0 + (-\frac{\pi}{\sqrt{t}}) \cdot 0 + 0 \cdot \frac{-\sin ht}{\cos ht} \right] dt = 0$$

۵

$$\begin{aligned} \int_C y dx - x dy + xyz dz &= \int_0^1 \left[M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^1 [e^t(-e^{-t}) - (e^{-t})e^t + (e^{-t}e^t t^2)] dt \\ &= \int_0^1 (-2 + t^2) dt \\ &= \left[-2t + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

۶

$$\begin{aligned} \int_C e^x dx + xy dy + xyz dz &= \int_{-1}^1 \left[e^x \frac{dx}{dt} + xy \frac{dy}{dt} + xyz \frac{dz}{dt} \right] dt \\ &= \int_{-1}^1 [e^{-t}(-1) + (-t)(-t)(-1) + (-t)(-t)(-2t)(-2)] dt \\ &= \int_{-1}^1 (-e^{-t} - t^2 + 4t^2) dt \\ &= \left[e^{-t} - \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 \right]_{-1}^1 = e^{-1} - e - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_C xy dx + (x+z) dy + z^2 dz &= \int_{-1}^2 \left[xy \frac{dx}{dt} + (x+z) \frac{dy}{dt} + z^2 \frac{dz}{dt} \right] dt \\
 &= \int_{-1}^2 [(t+1)(t-1)(1) + (t+1+t^2)(1) + t^2(2t)] dt \\
 &= \int_{-1}^2 (2t^3 + 2t^2 + t) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2} t^4 + \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 \right]_{-1}^2 = \frac{57}{2}
 \end{aligned}$$

۸. معادلهٔ منحنی C عبارت است از

$$\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{1+y^2} dy &= \int \left[\frac{1}{1+x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{2}{1+y^2} \frac{dy}{dt} \right] dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1+\cos^2 t} (-\sin t) + \frac{2}{1+\sin^2 t} \cos t \right] dt \\
 &= \left[\operatorname{tg}^{-1} \cos t + 2 \operatorname{tg}^{-1} \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

۹. معادلهٔ برداری خط C که این جسم روی آن حرکت می‌کند عبارت است از

$$\vec{v}(t) = t \vec{i} + t \vec{j} + t \vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

بنابراین، کار انجام شده برابر است با

$$\begin{aligned}
 W &= \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \left[M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right] dt \\
 &= \int_0^1 [(\sqrt{t}-t)(1) + \sqrt{t}(1) + (t-t)(1)] dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{t} dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

۱۰. در اینجا

$$\begin{aligned}
 x &= \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} t, & \frac{dx}{dt} &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} t \\
 y &= \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} t, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} t \\
 z &= t, & \frac{dz}{dt} &= 1
 \end{aligned}$$

بنابراین، کار انجام شده توسط \vec{F} برابر است با

$$\begin{aligned}
 W &= \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \left[M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right] dt \\
 &= \int_0^1 \left[(\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} t - \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} t) \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} t \right) + \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} t \right) + \left(\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} t - t \right) (1) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} t \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} t + \pi t \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} t + \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} t - t \right] dt \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} t + \sqrt{2} t \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} t + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} t - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} t - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

تمرینهای ۳.۹

۱. قرار می‌دهیم $M(x, y) = e^x + y$ و $N(x, y) = x + \sqrt{y}$. چون

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

و دامنه $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j}$ تمام صفحه است، بنابر قضیه ۱۴.۱.۹، \vec{F} پایستار است و در نتیجه انتگرال خطی داده شده مستقل از مسیر است. برای پیدا کردن مقدار این انتگرال می‌توانیم تابع پتانسیل \vec{F} را پیدا کنیم و سپس قضیهٔ اساسی انتگرال خطی را به کار ببریم یا انتگرال را روی مسیر ساده‌ای چون یک خط راست که از نقاط $(0, 1)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد محاسبه کنیم.

روش اول

ابتدا تابع پتانسیلی چون f پیدا می‌کنیم به طوری که $\vec{F} = \text{grad } f$. چون

$$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = \text{grad } f = (e^x + y) \vec{i} + (x + 2y) \vec{j}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y \quad (*)$$

با انتگرالگیری از معادلهٔ اول نسبت به x ، داریم

$$f(x, y) = e^x + xy + g(y)$$

که در آن تابع g نسبت به x ثابت است. مشتق این عبارت نسبت به y برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{dg}{dy}$$

با مقایسهٔ این عبارت و معادلهٔ دوم $(*)$ ، داریم

$$g(y) = y^2 + c \quad \text{و در نتیجه} \quad \frac{dg}{dy} = 2y$$

که در آن c یک مقدار ثابت است. بنابراین

$$\begin{aligned} F(x, y) &= e^x + xy + g(y) \\ &= e^x + xy + y^2 + c \end{aligned}$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ اساسی انتگرال خطی، داریم

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (e^x + y) dx + (x + 2y) dy = f(2, 3) - f(0, 1) = e^2 + 13$$

روش دوم

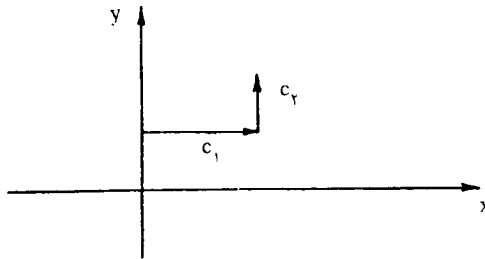
معادله دکارتی خطی که از $(0, 1)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد عبارت از $y = x + 1$ است. معادلات

$$x = t, \quad y = t + 1, \quad 0 \leq t \leq 2$$

را به عنوان معادلات پارامتری این خط در نظر می‌گیریم. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_C (e^x + y) dx + (x + 2y) dy &= \int_{(0, 1)}^{(2, 3)} \left[(e^x + y) \frac{dx}{dt} + (x + 2y) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^2 [(e^t + t + 1)(1) + (t + 2t + 2)(1)] dt \\ &= [e^t + 2t^2 + 3t]_0^2 = e^2 + 13 \end{aligned}$$

روش سوم

در اینجا C را مسیر شکل ۱.۳.۹ در نظر می‌گیریم. در اینجا $\int_{C_1} N dy = 0$ و $\int_{C_2} M dx = 0$ (چرا؟)

شکل ۱.۳.۹

$$\begin{aligned} \int_{(0, 1)}^{(2, 3)} M dx + N dy &= \int_{C_1} M dx + N dy + \int_{C_2} M dx + N dy \\ &= \int_{C_1} M dx + \int_{C_2} N dy \\ &= \int_{(0, 1)}^{(2, 1)} (e^x + y) dx + \int_{(2, 1)}^{(2, 3)} (x + 2y) dy \end{aligned}$$

چون در انتگرال اول y و در انتگرال دوم x ثابت است، انتگرالهای بالا برابرند با

$$\begin{aligned} &= [e^x + xy]_{(0,1)}^{(2,1)} + [xy + y^2]_{(2,1)}^{(2,3)} \\ &= e^2 + 2 - 1 - 0 + 6 + 9 - 2 - 1 = e^2 + 13 \end{aligned}$$

۲. در اینجا $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ که در آن $M=y$ ، $N=x+z$ ، $P=y$ چون

$$\frac{\partial N}{\partial z} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

و دامنه \vec{F} تمام فضا است، بنا به قضیه ۱۴.۱.۹، \vec{F} پایستار است و در نتیجه انتگرال داده شده مستقل از مسیر است. ابتدا و انتهای منحنی C به ترتیب نقاط $P_1(-1, 1, 0)$ و $P_2(-\frac{5}{3}, 0, 1)$ هستند که با قرار دادن $t=0$ و $t=\frac{1}{3}$ در $\vec{r}(t)$ به دست می‌آیند. چون محاسبه این انتگرال روی منحنی C مشکل است. پس مسیر ساده‌تری چون یک خط راست را در نظر می‌گیریم که این دو نقطه را به یکدیگر متصل می‌کند. چون

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-\frac{2}{3}, -1, 1)$$

پس معادلات پارامتری این خط عبارت‌اند از $x = -1 - \frac{2}{3}t$ ، $y = 1 - t$ ، $z = t$. چون $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3}$ ، $\frac{dz}{dt} = 1$ ، $\frac{dy}{dt} = -1$ داریم

$$\begin{aligned} \int_C y dx + (x+z)dy + y dz &= \int_C \left[y \frac{dx}{dt} + (x+z) \frac{dy}{dt} + y \frac{dz}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[(1-t) \left(-\frac{2}{3} \right) + \left(-1 - \frac{2}{3}t + t \right) (-1) + (1-t)(1) \right] dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}t \right) dt \\ &= \left[\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^2 \right]_0^{\frac{1}{3}} = 1 \end{aligned}$$

۳. قرار می‌دهیم

$$P = \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}, \quad N = \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}, \quad M = \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{xyz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{yzx}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{xyx}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

پس $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ پایستار است و در نتیجه انتگرال داده شده مستقل از مسیر است. ابتدا و انتهای منحنی C نقاط $P_1(0, 0, 0)$ و $P_2(1, 1, 1)$ هستند که با قرار دادن $t=0$ و $t=1$ در $r(t)$ به دست می‌آیند. چون محاسبه این انتگرال روی منحنی C مشکل است، خط P_1P_2 را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, 1)$$

پس معادلات پارامتری این خط عبارت‌اند از $x=t, y=t, z=t$. چون $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 1$

$$\int_C \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2} dx + \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2} dy + \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2} dz$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{t}{1+3t^2} (1) + \frac{t}{1+3t^2} (1) + \frac{t}{1+3t^2} (1) \right] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{3t}{1+3t^2} dt = \frac{1}{2} [\ln(1+3t^2)] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2$$

۴. در اینجا

$$\frac{\partial N}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{e^{-x}}{y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

پس انتگرال داده شده مستقل از مسیر است. ابتدا و انتهای C نقاط $P_1(-1, 1, 1)$ و $P_2(0, e, 2)$ هستند. در اینجا تابع پتانسیل f را پیدا می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$\frac{\partial f}{\partial z} = z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{e^{-x}}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x} \ln y \quad (*)$$

با انتگرالگیری از معادله اول نسبت به x داریم

$$f(x, y, z) = -e^{-x} \ln y + g(y, z) \quad (**)$$

مشتق جزئی این عبارت نسبت به y برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{e^{-x}}{y} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

با مقایسه این عبارت و معادله دوم (*)، داریم $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ و در نتیجه g نسبت به y ثابت است. مشتق جزئی عبارت (***) نسبت به z برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}$$

با مقایسه این عبارت و معادله سوم (*)، داریم

$$g(y,z)=g(y)=\frac{z^2}{4} + c \quad \text{و در نتیجه} \quad \frac{dg}{dz} = z$$

که در آن c یک مقدار ثابت است. پس

$$f(x, y, z) = -e^{-x} \ln y + \frac{z^2}{4} + c$$

در نتیجه، بنابر قضیه اساسی انتگرال خطی، داریم

$$\begin{aligned} \int_C e^{-x} \ln y \, dx - \frac{e^{-x}}{y} \, dy + z \, dz &= f(0, e, 2) - f(-1, 1, 1) \\ &= -1 + 2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

تمرینهای ۲.۹

۱.

$$\begin{aligned} \oint y \, dx + 0 \, dy &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(y) \right] dA \\ &= \int_R \int -1 \, dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 -r \, dr \, d\theta \quad (\text{در مختصات قطبی}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} r^2 \right]_0^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \, d\theta \\ &= \left[-2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \oint xy \, dx + (x^{\frac{r}{r}} + y^{\frac{r}{r}}) dy &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x^{\frac{r}{r}} + y^{\frac{r}{r}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (xy) \right] dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{r}{r} x^{\frac{1}{r}} - x \right) dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{r}{r} x^{\frac{1}{r}} y - xy \right]_0^1 dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{r}{r} x^{\frac{1}{r}} - x \right) dx \\
 &= \left[x^{\frac{r}{r}} - \frac{1}{r} x^{\frac{r}{r}} \right]_0^1 = \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \oint_C (x^r + y^r) dx + (x^r + y^r) dy &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^r + y^r) - \frac{\partial}{\partial y} (x^r + y^r) \right] dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^r}} (rx - ry) dy \, dx \\
 &= \int_0^1 [rx - ry^2]_0^{\sqrt{1-x^r}} dx \\
 &= \int_0^1 (rx\sqrt{1-x^r} - 1+x^r) dx \\
 &= \left[-\frac{r}{r}(1-x^r)^{\frac{r}{r}} - x + \frac{1}{r}x^{\frac{r}{r}} \right]_0^1 = 0
 \end{aligned}$$

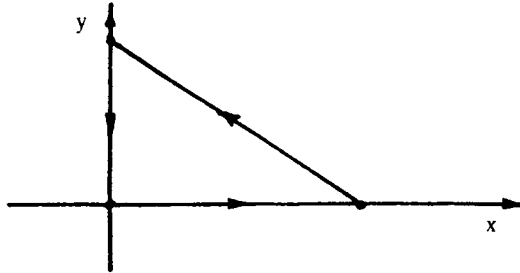
$$\begin{aligned}
 \oint y dx - x dy &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) \right] dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} -r dr d\theta \quad (\text{در مختصات قطبی}) \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{r^2}{2} \right]_0^{1-\cos\theta} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2} + \cos\theta - \frac{\cos^2\theta}{2}) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + \cos\theta - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\theta \right) d\theta \\
 &= \left[-\frac{3}{4}\theta + \sin\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = -3\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \oint_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy &= \int_F \int \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) \right] dA \\
 &= \int \int_R \cdot dA = \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \oint_C xy dx + \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + xy \right) dy &= \int \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + xy \right) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right] dA \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}} y dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1-x^2) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

تمرینهای ۵.۹

۱. قرار می‌دهیم $z=f(x, y)=6-2x-3y$. تصویر S روی صفحه xy در شکل ۱.۵.۹ نشان داده شده است. بنابراین



شکل ۱.۵.۹

$$\begin{aligned}
 \iint_S g(x,y,z)ds &= \iint_R x\sqrt{f_x^2+f_y^2+1} dA \\
 &= \int_0^3 \int_0^{3-\frac{y}{3}x} x\sqrt{4+9+1} dy dx \\
 &= \sqrt{14} \int_0^3 [xy]_0^{3-\frac{y}{3}x} dx \\
 &= \sqrt{14} \int_0^3 \left(2x - \frac{2}{9}x^2 \right) dx \\
 &= \sqrt{14} \left[x^2 - \frac{2}{9}x^3 \right]_0^3 = 3\sqrt{14}
 \end{aligned}$$

۲. قرار می‌دهیم $z=f(x, y)=2x-2$. تصویر S روی صفحه xy ناحیه R محدود به دایره $x^2+y^2=4$ است. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}
 \iint_S g(x,y,z)ds &= \iint_R (2x^2+1)\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dA \\
 &= \int_R (2x^2+1)\sqrt{9+0+1}dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^2\cos^2\theta+1)\sqrt{10}rdrd\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{10} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} r^2 \cos^2 \theta + \frac{r^2}{\sqrt{2}} \right]^{\frac{1}{2}} d\theta \\
 &= \sqrt{10} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2} \cos^2 \theta + 1) d\theta \\
 &= \sqrt{10} \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + 1 \right] d\theta \\
 &= \sqrt{10} \left[\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 12\pi\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

۳. در اینجا $z=f(x, y)=x^2+y^2$. نقطه (x, y, z) روی محل تلاقی سهمیوار $z=x^2+y^2$ و صفحه $y=z$ قرار دارد اگر (x, y) در معادله دایره $x^2+y^2-y=0$ (یا در مختصات $r=\sin \theta$) صدق کند. پس تصویر S روی صفحه xy ناحیه R محدود به این دایره است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 \int_S \int g(x, y, z) ds &= \int_R \int \sqrt{4x^2+4y^2+1} \sqrt{f_x^2+f_y^2+1} dA \\
 &= \int_R \int \sqrt{4x^2+4y^2+1} \sqrt{4x^2+4y^2+1} dA \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin \theta} (4r^2+1)r dr d\theta \quad (\text{در مختصات قطبی}) \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[r^4 + \frac{r^2}{2} \right]_0^{\sin \theta} d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{5}{8} \pi
 \end{aligned}$$

۴. فرض می‌کنیم که $z=f(x, y)=4-y^2$ در این صورت،

$$\begin{aligned}
 \int_S \int g(x, y, z) ds &= \int_R \int y \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA \\
 &= \int_0^2 \int_0^2 y \sqrt{0 + 4y^2 + 1} dy dx \\
 &= \int_0^2 \left[\frac{1}{12} (4y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 dx \\
 &= \frac{1}{12} \int_0^2 \left[17^{\frac{3}{2}} - 1 \right] dx \\
 &= \frac{1}{12} \left[\left[17^{\frac{3}{2}} - 1 \right] x \right]_0^2 = \frac{1}{6} \left[17^{\frac{3}{2}} - 1 \right]
 \end{aligned}$$