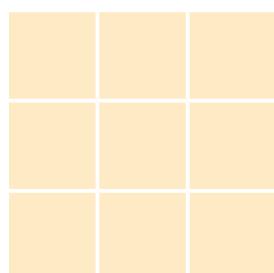


مربع‌های لاتین

سه مدرس به نام‌های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه $10-12$ ، $8-10$ و $2-4$ در سه کلاس A ، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. نام مدرس‌ها را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

۲-۴	۱۰-۱۲	۸-۱۰	جلسات کلاس‌ها
			<i>A</i>
			<i>B</i>
			<i>C</i>

فعالیت



- ۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد 1 ، 2 و 3 را قرار دهید و یک جدول 3×3 از اعداد به دست آورید.

- ۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

- (a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.
 (b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس‌ها تدریس داشته است.
 (c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.
 (d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.
 (الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.
 (ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.
 (پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.
 (ت) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است.

تعريف: یک جدول مربعی از اعداد 1 ، 2 ، ... و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطراها و ستون‌های آن با اعداد 1 ، 2 ، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین^۱» می‌نامیم. (به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.)

۱- اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شده‌اند.

مثال : دو مربع لاتین 3×3 و دو مربع لاتین 4×4 در زیر نمایش داده شده است.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

2	3	4	1
3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2

2	3	4	1
4	1	2	3
1	4	3	2
3	2	1	4

کار در کلاس

۱ دو مربع لاتین 5×5 بنویسید.

۲ با استدلال کلامی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

۳ شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن «مربع لاتین چرخشی» می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟

1	2	3	$n-1$	n
n	1	2	3	$n-2$	$n-1$
$n-1$	n	1	2	3	...	$n-3$	$n-2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3	4	5				1	2
2	3	4	n	1

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n ، مریع لاتین $n \times n$ وجود دارد.

حال فرض کیم یک مریع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی $1, 2, \dots, n$ یک مریع جدید به دست آورده‌ایم. خواهیم دید که مریع به دست آمده نیز یک مریع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مریع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می‌کند که در سطر یا ستونی از مریع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مریع لاتین بودن آن در تناقض است.

3	4	1	2
2	1	4	3
1	2	3	4
4	3	2	1

4	1	3	2
2	3	1	4
3	2	4	1
1	4	2	3

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۴، ۲، ۳ و ۱ جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مریع‌های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت‌ها از روی مریع لاتین داده شده یک مریع لاتین به دست آورید.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

1	3	5	4	2
5	4	2	1	3
2	1	3	5	4
3	5	4	2	1
4	2	1	3	5

دو مریع لاتین متعامد

تعریف: فرض کنید A و B دو مریع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظری از این دو مریع، مریع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مریع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مریع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مریع لاتین A و B «متعامدند» هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مریع جدید تکرار نشده باشد.

به طور مثال برای دو مریع A و B به صورت زیر داریم :

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 22 & 33 & 44 & 11 \\ \hline 34 & 21 & 12 & 43 \\ \hline 41 & 14 & 23 & 32 \\ \hline 13 & 42 & 31 & 24 \\ \hline \end{array}$$

یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مریع لاتین بین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو جایگاه (درایه) در یکی از مریع‌ها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه‌های (درایه‌های) نظیر به آنها از مریع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می‌خواهیم نشان دهیم دو مریع لاتین متعامد نیستند به کار می‌رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مریع دو درایه یکسان پیدا کنیم به‌طوری که در جایگاه‌های نظیر به این دو درایه در مریع دیگر نیز درایه‌های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه‌های مریع اول) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مریع لاتین A دو عدد یکسان (مانند a در شکل) به گونه‌ای بیاییم که در جایگاه‌های متناظر با آنها در مریع لاتین B (جایگاه‌های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه‌های هاشور خورده هر دو حاوی عدد b باشند در این صورت دو مریع A و B متعامد نیستند.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & a & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & a \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & b & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & b & \\ \hline \end{array}$$

مثال : در هر مورد متعامد بودن دو مریع لاتین داده شده را بررسی کنید.

$$(ب) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$(الف) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

(ب)

حل : الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامدند.

۲۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه های یکسان هر دو عدد یک هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند.

۱		
	۱	

۳		
	۳	

پ) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه های یکسان هر دو عدد ۲ هستند) دارند و در مربع دوم نیز درایه های یکسان (هر عدد ۲ هستند) دارند.

	۲		
۲			

	۲		
۲			

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

کار در کلاس

۱) چند مربع لاتین 1×1 وجود دارد؟

۲) آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟

۳) بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین 3×3 رو به رو متعامدند؟

۴ آیا دو مربع لاتین 4×4 زیر متعامندند؟

$A =$	3	4	1	2
	4	3	2	1
	1	2	3	4
	2	1	4	3

$B =$	3	4	1	2
	1	2	3	4
	2	1	4	3
	4	3	2	1

دیدیم که برای 2 و 1 ، دو مربع لاتین $n \times n$ وجود ندارد. ثابت شده است^۱ که اگر 6 و 2 و 1 ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارد و برای 6 و 2 و 1 دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد.

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B ، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامندند؟

$B' =$				

خواندنی

اویلر^۲ در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی n به صورت $4k+2$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد. در واقع اویلر پس از بررسی های زیاد بروی وجود دو مربع لاتین متعامد از مرتبه 6 و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مسئله تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری^۳ ثابت کرد که ادعای اویلر برای $6 = n$ درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای $10 = n$ و اعداد بزرگتر کسی جواب را نمی دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی دان آمریکایی به نام پارکر^۴ و دو ریاضی دان هندی به نام های بوس^۵ و شریخاند^۶ ثابت کردند که حدس اویلر به جز برای حالت $6 = n$ برای سایر $2 = 4k+2$ درست نیست؛ یعنی برای هر عدد 6 و 2 و $1 \neq n$ حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارد.

۱_ اثبات این مطلب در این کتاب مذکور نیست.

۲_Euler

۳_Tarry

۴_Parker

۵_Bose

۶_Shrikhande

مثال : نشان دهید اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_2 نیز متعامدند.

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline a & \\ \hline & a \\ \hline \end{array} \quad B_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline b & \\ \hline & b \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|} \hline c & \\ \hline & c \\ \hline \end{array}$$

حل : فرض کنیم A و B_2 متعامد نباشند. لذا دو جایگاه در مربع A وجود دارد که اعداد یکسانی (مثلًا a) در آنها قرار دارد و در جایگاه‌های نظری آنها در مربع B_2 نیز دو درایه یکسان (مثلًا b) قرار دارند.

حال با توجه به تعریف جایگشت در همین دو جایگاه در مربع B نیز باید دو درایه یکسان مانند c باشد که در B_2 با اعمال جایگشت به درایه b تبدیل شده‌اند و در این صورت دو مربع A و B نیز متعامد نخواهند بود و این با فرض مسئله در تناقض است. لذا A و B_2 هم نمی‌توانند متعامد نباشند.

مثال : قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخرسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

$= A$

(الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برای کار ۵ کارگر با ۵ ماشین ریسندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریسندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد. برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین 5×5 استفاده کنیم. فرض کنید هر سیزده نشان‌دهنده یک کارگر و هر سطر نشان‌دهنده یک روز هفته و هر کدام از اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵ که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از ماشین‌های ریسندگی باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر W_1 با ماشین ریسندگی شماره ۲ کار می‌کند.

(ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت (الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک‌بار استفاده کند.

برای این کار مانند قسمت (الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر سیزده را نشان‌دهنده یک کارگر و هر سطر را نشان‌دهنده یک روز هفته و هر کدام از اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵ را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

$= B$

نمایانگر یکی از انواع **الیاف** در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شماره ۴ با الیاف شماره ۳ کار می‌کند.

پ) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع 5×5 به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به طور مثال کارگر شماره ۴ در روز یکشنبه با ماشین شماره ۳ و الیاف شماره ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین A و B متعامد هم هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع A و B به این معناست که مربع دو رنگ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقمی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شماره ماشین ریسندگی و اعداد سمت راست شماره الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته است.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

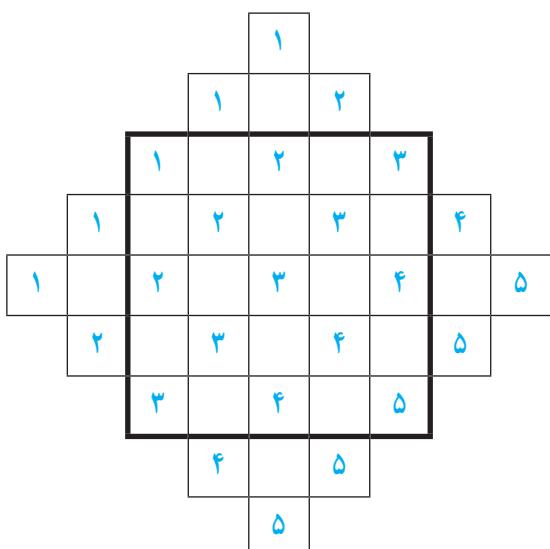
کار در کلاس

- در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده است؟
- در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف‌ها دقیقاً یک بار کار می‌کند.
- در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک بار به کار گرفته شده است؟
- اگر سه برادر تقریباً همسن‌وسال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

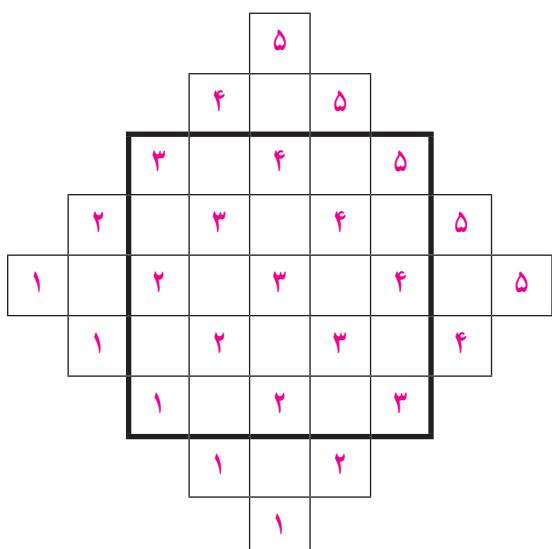
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فردا

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین 5×5 متعامد به دست آورید.

۱ اعداد ۱، ۲، ... و ۵ با نظمی خاص (به نحوه چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.



(ب)



(الف)

۲ حال مربع‌های پرنگ 5×5 وسط را در نظر بگیرید و با انتقال اعداد خارج از این مربع‌ها به داخل آنها با روش زیر، مربع‌ها را پر کرده، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵ به دست آورید.

(الف) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت چپ آن واقع است را ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.

(ب) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت راست آن واقع است را ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.

(پ) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در بالای مربع واقع است را ۵ خانه به پایین انتقال دهید.

(ت) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در پایین مربع واقع است را ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۳ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n به دست آورید.

۱- از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه غیرفرد چندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن پرداخته نمی‌شود.