

هندسه

دایره محاطی-نسبت شعاع به ضلع

دکتر یوسف گوه‌مسکن

هندسه ۱۱م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



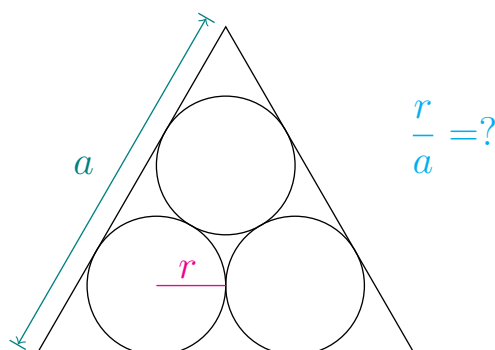
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی ██████████ آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی ██████████ آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت  نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 -  بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 -  ساده جهت تثبیت مطالب
 -  متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب
 -  سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

سه دایره یکسان به شعاع r درون یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a محاط شده‌اند. نسبت شعاع دایره‌ها به ضلع مثلث را تعیین کنید.

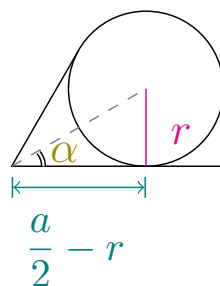


۲ روش حل مسئله

پاسخ: دو نوع روش حل مسئله برای این سوال ارائه می‌شود و برای مسائل مشابه هم می‌توان از این روش‌ها بهره گرفت. در روش اول از نسبت‌های مثلثاتی و در روش دوم از فیثاغورس استفاده می‌شود.

۱.۲ روش اول: نسبت‌های مثلثاتی

اگر زاوایای یک مثلث قائم‌الزاویه و همچنین مقدار نسبت مثلثاتی مشخص باشند، می‌توان از نسبت‌های مثلثاتی مانند سینوس یا کسینوس بهره گرفت. در شکل زیر بخشی از مثلث و یک دایره نمایش داده شده است. با توجه به آنکه مرکز دایره روی نیمساز راس سمت چپ قرار دارد، زاویه α برابر با 30° می‌باشد.



از روی شکل فوق رابطه مثلثاتی زیر بدست می آید:

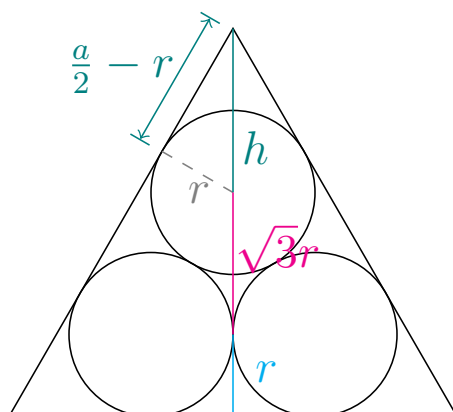
$$\tan \alpha = \frac{r}{\frac{a}{2} - r}, \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{\frac{a}{2} - r} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

با یک طرفین-وسطین ساده می توان به پاسخ زیر رسید:

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2(1 + \sqrt{3})}$$

۲.۲ روش دوم: فیثاغورس

می دانیم در هر مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a اندازه ارتفاع برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ می باشد. در شکل زیر این ارتفاع نمایش داده شده است.



در نتیجه رابطه زیر برقرار است:

$$h + \sqrt{3}r + r = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad (1)$$

با توجه به همین شکل مقدار h با فیثاغورس بدست می آید:

$$h = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + r^2} \quad (2)$$

با جایگذاری (۴) در (۳) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + r^2} + \sqrt{3}r + r &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + r^2} &= \frac{\sqrt{3}}{2}a - (1 + \sqrt{3})r \\ \Rightarrow \left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + r^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - (1 + \sqrt{3})r\right)^2 \end{aligned}$$

با ساده کردن عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\frac{a^2}{2} - (2 + \sqrt{3})ar + 2(1 + \sqrt{3})r^2 = 0$$

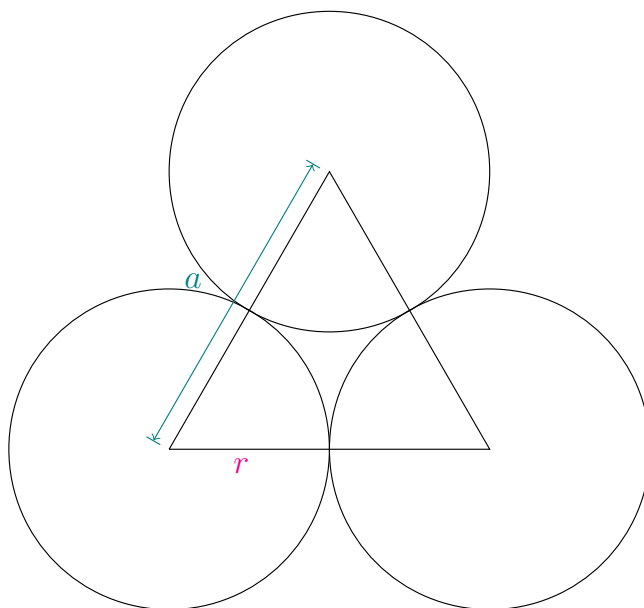
از روش دلتا برای a دو جواب بر حسب r بدست می‌آید:

$$a = 2(1 + \sqrt{3})r, \quad 2r$$

جواب دوم با توجه به ویژگی مسئله و محاط بودن دایره‌ها قابل قبول نیست. پس در نهایت برای نسبت شعاع به ضلع، مقدار زیر بدست می‌آید:

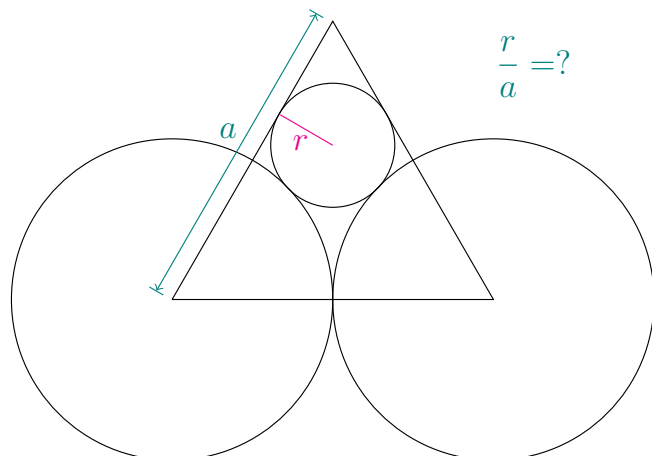
$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2(1 + \sqrt{3})}$$

💡 پاسخ دوم به این دلیل قابل قبول نمی‌باشد که مربوط به شکل زیر است و واضح است که با وجود مماس بودن دایره‌ها، این شکل با شکل مسئله تفاوت دارد!



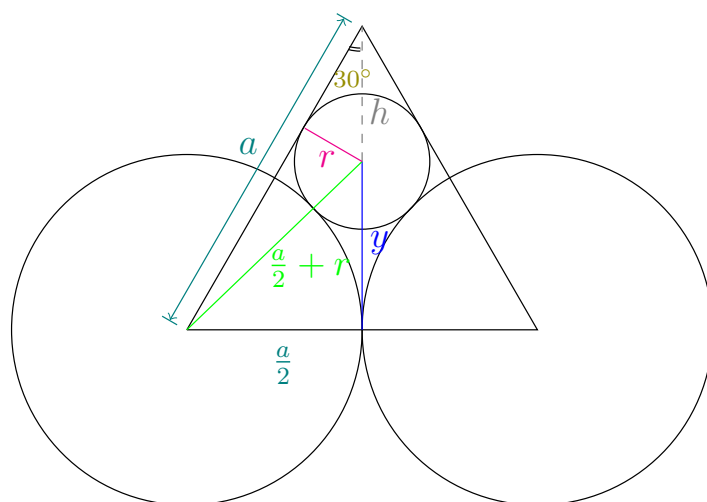
۳ مثال مرتبط

در شکل زیر دو دایره به مرکز راس‌های چپ و راست مماس بر هم رسم شده‌اند. دایره‌ای دیگر طوری رسم شده که مماس بر اضلاع مثلث و دو دایره می‌باشد. نسبت شعاع دایره کوچک‌تر به ضلع مثلث را تعیین کنید.



پاسخ: باید از هر دو روش نسبت‌های مثلثاتی و فیثاغورس استفاده شود. اگر نیمساز راس بالایی در شکل زیر رسم شود، مقدار فاصله مرکز دایره کوچک تا راس بالا تعیین می‌شود.

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{h} \Rightarrow h = 2r$$



اندازه ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. در نتیجه:

$$h + y = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad (۳)$$

با جایگذاری $h = 2r$ در رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}a - 2r \quad (۴)$$

برای تعیین y باید از فیثاغورس استفاده کرد:

$$y = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

با جایگذاری رابطه فوق در (۴) و به توان دوم رساندن آن‌ها، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{3}{4}a^2 - (2\sqrt{3} + 1)ar + 3r^2 = 0$$

پاسخ معادله درجه دوم فوق برای a بر حسب r به صورت زیر است:

$$a = \frac{2\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{4 + 4\sqrt{3}}}{\frac{3}{2}}r$$

تنها جواب با علامت مثبت قابل قبول است. چون به ازای جواب با علامت منفی مقدار شعاع دایره از ضلع مثلث بزرگتر خواهد بود که به لحاظ هندسی غیرممکن است. در نهایت برای نسبت شعاع دایره کوچک به ضلع مثلث رابطه زیر پدید می‌آید:

$$\frac{r}{a} = \frac{3}{4\sqrt{3} + 2 + 4\sqrt{1 + \sqrt{3}}}$$

کسی که هیچ وقت اشتباه نمی‌کند،
هیچ وقت هم چیز جدیدی یاد نمی‌گیرد.
آلبرت انیشتین



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/@AvaEducation16)

  0935 210 4321

 AvaEducation16@gmail.com