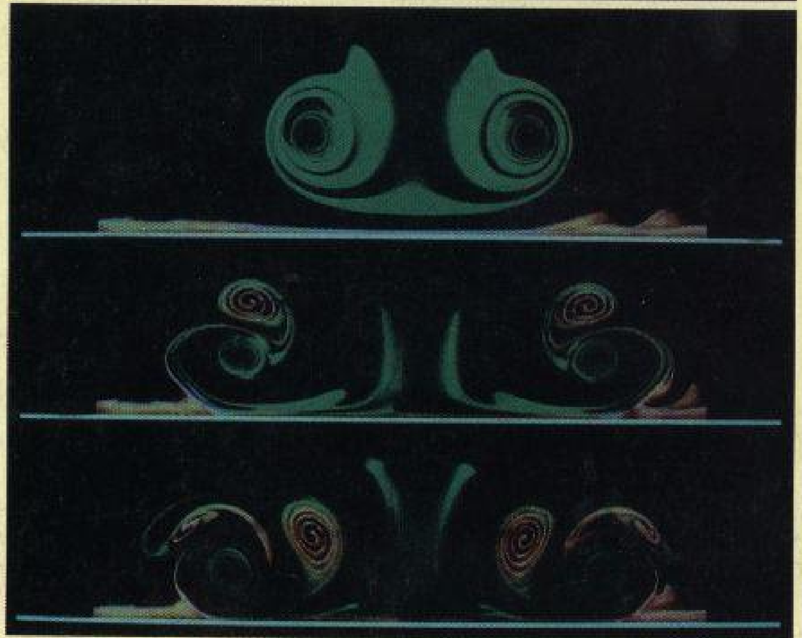
تشریح مسایل

مکانیک سیالات

استریتر

(ویرایش نهم ، سیستم SI)



به انضمام نمونه مسایل امتحانی و تکمیلی با حل

تالیف : مهندس بهزاد خداکرمی

۱ خواص سیال

۱-۱. اگر مواد در شرایط دما و فشار استاندارد در حدود 10^{18} مولکول بر میلیمتر مکعب داشته باشد با به کار بردن مطالب بخش ۱.۱ مسیر متوسط آزاد Δs را محاسبه کنید. رژیم مطالعه شده در این کتاب که گاز دینامیک نامیده می‌شود برای چه طول مشخصه‌ای (l) از اجسام معتبر است؟ فرض کنید که نسبت تقریباً بزرگتر از 100 باشد.

حل:

برای n مولکول بر سانتیمتر مکعب، فاصله متوسط بین مولکولها $n^{-1/3}$ سانتیمتر است بنابراین داریم:

$$\Delta s = (10^{18} \times 10^{3})^{-1/3} = 10^{-7} cm$$

$$\frac{\Delta s}{l} = 100 \Rightarrow \frac{10^{-7}}{l} = 100 \Rightarrow l = 10^{-9} cm$$

۲-۱. در جدول زیر مقادیر نرخ تغییر شکل یک ماده و تنشهای برشی نظیر آنها ارائه شده است. این ماده را طبقه‌بندی کنید.

$du/dy, rad/s$	0	1	3	5
τ, kPa	15	20	30	40

حل:

با توجه به داده‌های مسئله مشخص است که درگرادیان سرعت صفر مقدار تنش برشی غیرصفر است (یعنی ماده دارای تنش تسلیم است) و بعد از آن تغییرات به صورت خطی با شیب 5 می‌باشد یعنی تغییرات تنش برشی با گرادیان سرعت به صورت $\tau = 5\frac{du}{dy} + 15$ می‌باشد بنابراین ماده موردنظر پلاستیک ایده‌ال می‌باشد.

۳-۱. موادی را که رفتار آنها (در دمای ثابت) در جدول زیر ارائه شده است، طبقه‌بندی کنید.

(الف)

$du/dy, rad/s$	0	3	4	6	5	4
τ, kPa	2	4	6	8	6	4

(ب)

du/dy,rad/s	0	0.5	1.1	1.8
τ, kPa	0	2	4	6

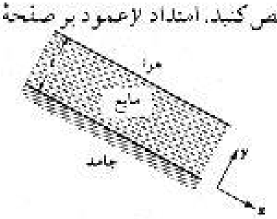
(ج)

du/dy,rad/s	0	0.3	0.6	0.9	1.2
τ, kPa	0	2	4	6	8

حل:

با توجه به داده‌های مسئله در قسمتهای الف و ب تغییرات تنش برشی بر حسب گرادیان سرعت غیرخطی است بنابراین در این حالتها سیالات غیرنیوتنی را داریم. در قسمت ج تغییرات تنش برشی بر حسب گرادیان سرعت خطی است پس سیال نیوتنی است (شیب تغییرات 6.67 می‌باشد)

۴-۱. یک مایع نیوتنی مطابق شکل 18 بر روی یک صفحهٔ شیبدار به صورت لایه نازکی به ضخامت t جریان دارد. سطح آزاد مایع در تماس با هواست که تقریباً هیچگونه مقاومتی در مقابل جریان ندارد. از قانون لزجت نیوتن استفاده کنید و مقدار du/dy در روی سطح مایع را مشخص کنید. امتداد y عمود بر صفحهٔ شیبدار است. آیا انتظار می‌رود که تغییرات u با y خطی باشد؟



شکل ۸-۱

حل:

بنابه گفته مسئله سطح بالای مایع در تماس با هوا می‌باشد که مقاومتی در برابر جریان نشان نمی‌دهد بنابراین مقدار تنش برشی در اینجا صفر است یعنی:

$$\tau_y\Big|_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = 0$$

در سطح پایین (در تماس با سطح شیبدار) مقدار تنش برشی ماکزیمم است یعنی:

$$\tau_y\Big|_{y=t} = \max \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy}\Big|_{y=t} = \max$$

در نتیجه مقدار $\frac{du}{dy}$ از بالا به پایین سطح (از $y=t$ تا $y=0$) متغیر بوده و در نتیجه تغییرات u با y به صورت خطی نمی‌باشد.

۵-۱. علمی که به الاستیسیته، ویسکوزیته و پلاستیسیتهٔ مواد می‌پردازد، رئولوژی نام دارد. رنگ و گریس از نظر رئولوژیکی چگونه موادی هستند؟

حل:

رنگ و گریس جزو مواد تیکسوتروپیک می‌باشند.

۱-۶. وزن $3kg$ جرم را به دست آورید. شتاب جاذبهٔ محل $9.7m/s^2$ است.

حل:

$$W = mg = 3 \times 9.7 = 29.1\,N$$

۱-۷. در محلی که شتاب جاذبه $9.7m/s^2$ است، با استفاده از ترازوی دوکفه‌ای و وزنه‌های استاندارد معلوم شده است که وزن یک جسم با وزن دو وزنهٔ 1 کیلوگرمی برابر است. یک ترازوی فنری که به درستی (برای سطح دریا) مدرج شده است، وزن جسم را چقدر نشان می‌دهد؟

حل:

$$W = mg = 2 \times 9.7 = 19.4\,N$$

۱-۸. $450kg$ بنزین در یک مخزن نگهداری می‌شود. وزن آن بر روی سطح زمین برحسب نیوتن و پوند چقدر است؟ جرم و وزن آن بر روی سطح کره ماه که در آنجا شتاب جاذبه تقریباً یک ششم شتاب جاذبه در سطح زمین است چقدر خواهد بود؟

حل:

$$W = mg$$

در سطح زمین:

$$W = 450 \times 9.806 = 4412.7\,N$$

$$W = 4412.7N \times \frac{1\,lb}{4.448\,N} = 992.1\,lb$$

توجه: مقدار جرم در هر نقطه ثابت است و با مکان تغییر نمی‌کند.

در سطح ماه:

$$m = 450\,kg$$

$$W = 450 \times 9.806 \times \frac{1}{6} = 735.45\,N$$

$$W = 735.45\,N \times \frac{1\,lb}{4.448\,N} = 165.34\,lb$$

۱-۹. شتاب جاذبه استاندارد در سطح یک سیاره $3m/s^2$ است. وزن $400L$ مایع با جرم مخصوص $800kg/m^3$ در این سیاره چقدر است؟

حل:

$$W = \gamma V = \rho g V$$

$$\Rightarrow W = 800 \times 3 \times 0.4 = 960\,N$$

۱-۱۰. در محلی دور از سطح زمین یک ترازوی فنری وزن جسمی به جرم $2kg$ را برابر $17.0N$ نشان می‌دهد. مقدار g در این محل چقدر است؟ ترازو به طور صحیح مدرج شده است.

حل:

$$W = mg \Rightarrow g = \frac{W}{m} = \frac{17}{2} = 8.5\,m/s^2$$

۱-۱۱. وزن یک کیسه آرد در سطح دریا $20N$ است. در محلی که شتاب جاذبه‌اش $9.6m/s^2$ است، جرم آرد

چقدر می‌باشد؟

حل:

$$W=mg \Rightarrow m=\frac{W}{g}=\frac{20}{9.806}=2.04\,kg$$

۱-۱۲. یک غلاف استوانه‌ای بر روی محوری سوار شده است. درز بین محور و غلاف حاوی سیال نیوتنی است. محور و غلاف متحدالمحورند. هرگاه غلاف را با نیروی $600N$ در امتداد محور بکشیم، به سرعت $1m/s$ می‌رسد. اگر آن را با نیروی $1500N$ بکشیم، به چه سرعتی خواهد رسید؟ دمای غلاف ثابت می‌ماند.

حل:

با توجه به ثابت بودن دما می‌توان نتیجه گرفت که μ نیز ثابت می‌ماند:

$$\tau=\frac{F}{A}=\mu\frac{du}{dy}$$

با فرض اینکه توزیع سرعت خطی باشد داریم:

در حالت اول: $\frac{600}{A}=\mu\frac{1-0}{y}$ **در حالت دوم:** $\frac{1500}{A}=\mu\frac{u-0}{y}$

دو رابطه بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم: $\Rightarrow u=\frac{1500}{600}=2.5\,m/s$

۱-۱۳. لزجت مایعی $0.002Pa.s$ و چگالی آن 0.8 است. لزجت سینماتیک مایع را به دست آورید.

حل:

$$V=\frac{\mu}{\rho}=\frac{0.002}{0.8\times 1000}=2.5\times 10^{-6}\,m^2/s$$

۱-۱۴. نرخ تغییر شکل زاویه‌ای یک سیال نیوتنی تحت تنش برشی $4mPa$ برابر $1rad/s$ است. لزجت سیال را به دست آورید.

حل:

$$tg\theta=\frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy}=tg\,1^R=1.5574$$

$$\tau=\mu\frac{du}{dy} \Rightarrow \mu=\frac{\tau}{du/dy}=\frac{4\times 10^{-3}}{1.5574}=2.568\times 10^{-3}\,N.s/m^2$$

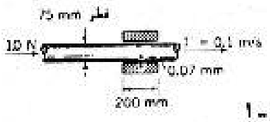
۱-۱۵. دو صفحهٔ موازی بفاصله $0.5mm$ از یکدیگر قرار دارند و بین آن دو سیالی وجود دارد. یکی از صفحات ثابت است و دیگری با سرعت $0.25m/s$ حرکت می‌کند. برای حفظ این سرعت بایستی نیرویی معادل $2N$ به واحد سطح صفحهٔ متحرک وارد کرد، لزجت سیال چقدر است؟

حل:

با فرض اینکه توزیع سرعت در سیال بین دو صفحه خطی باشد داریم:

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}=\mu\frac{u}{y} \Rightarrow \mu=\frac{\tau y}{u}=\frac{2\times(0.5\times 10^{-3})}{0.25}=0.004\quad N.s/m^2$$

۱-۱۶. لزجت سیال بین محور و غلاف را برای شکل ۹-۱ تعیین کنید.



شکل ۹-۱

حل:

$$\tau=\frac{F}{A}=\mu\frac{du}{dy}\ \Rightarrow \mu=\frac{F/A}{du/dy}$$

با فرض اینکه توزیع سرعت خطی باشد داریم:

$$\frac{du}{dy}=\frac{u}{y}=\frac{0.1}{0.07\times10^{-3}}=1428.6\,s^{-1}$$

$$A=\pi DL=\pi\times75\times10^{-3}\times300\times10^{-3}=0.0471\,m^2$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1/0.0471}{1428.6}=0.01486\,Ns/m^2$$

۱-۱۷. وزن یک چرخ طیار $600N$ و شعاع ژیراسیون آن $300mm$ است. چرخ دارای محوری به قطر $20mm$ است که در داخل غلافی به طول $50mm$ دوران می‌کند. درز شعاعی بین محور و غلاف $0.05mm$ است. هنگامی که چرخ با سرعت $600rpm$ دوران می‌کند، در اثر لزجت سیال بین غلاف و محور، سرعتش در هر دقیقه به اندازهٔ $1rpm$ کاهش می‌یابد. لزجت سیال چقدر است؟

حل:

هرگاه F_k نیروی اصطکاک، a شعاع محور و M جرم چرخ و K شعاع ژیراسیون و L طول غلاف و α شتاب زاویه‌ای باشند داریم:

گشتاور نیروی اصطکاکی وارده از طرف محور به چرخ: $\tau=F_k.a$

از طرفی داریم: $T=I\alpha\ ,I=MK^2$

$$F_k=\tau.A\ \ ,\tau=\mu\frac{du}{dy}\ \ ,A=2\pi aL$$

بنابراین:

$$F_k.a=I\alpha\Rightarrow F_k=\frac{I\alpha}{a}$$

$$\tau=\frac{F_k}{A}\Rightarrow\mu\frac{du}{dy}=\frac{I\alpha/a}{2\pi a^2L}\Rightarrow\mu=\frac{MK^2\alpha}{2\pi a^2L\ \ du/dy}$$

$$\alpha=1\,rpm/min\ \times\frac{\frac{2\pi}{60}\,Rad/s}{1rpm}\times\frac{1\,min}{60s}=1.745\times10^{-3}\,Rad/s^2$$

$$u=r\omega=0.01\times600\times\frac{2\pi/60\ rad}{1\ rpm}=0.628\,m/s$$

با فرض اینکه توزیع سرعت خطی باشد داریم:

$$\frac{du}{dy}=\frac{u}{y}=\frac{0.628}{0.05\times10^{-3}}=1.256\times10^4\ \ s^{-1}$$

$$\Rightarrow\mu=\frac{600/9/806\times0.3^2\times1.745\times10^{-3}}{2\pi\times0.01^2\times0.05\times1.256\times10^4}=0.02435\,Pa\,s$$

۱-۱۸. یک استوانه فولادی به قطر $25mm$ و طول $300mm$ در داخل یک لولهٔ قائم قرار دارد و در اثر وزن خود با سرعت ثابت $0.1m/s$ سقوط می‌کند. در درز بین استوانه و لوله یک لایه روغن کرچک با ضخامت ثابت وجود دارد. درز بین لوله و استوانه را تعیین کنید. دمای روغن $38°C$ است. چگالی فولاد 7.85 می‌باشد.

حل:

از منحنی ضمیمه کتاب برای روغن کرچک در دمای 38^C $\mu = 0.26 \;\; Pa.s$

چون سرعت حرکت استوانه فولادی ثابت است بنابراین شتاب حرکت صفر بوده و برایند نیروهای وارده در جهت حرکت صفر است:

$$\sum F = 0 \Rightarrow F_f - mg = 0 \Rightarrow F_f = mg$$

$$m = \rho V = \rho(\frac{\pi d^2}{4}L) = 7.84 \times 1000 \times (\frac{\pi \times 0.025^2}{4} \times 0.3) = 1.154\,kg$$

$$F_f = \tau.A = \mu \frac{du}{dy}.A$$

با فرض اینکه توزیع سرعت خطی باشد:

$$F_f = \mu \frac{u}{y}.A$$

$$\Rightarrow \mu \frac{u}{y}.A = mg \Rightarrow y = \frac{\mu u A}{mg} \qquad ,A = \pi DL$$

$$y = \frac{0.26 \times 0.1 \times \pi \times 0.25 \times 0.3}{1.154 \times 9.806} = 5.4 \times 10^{-5} \;\; m = 0.054\,mm$$

۱-۱۹. پیستونی به قطر $50.00mm$ در داخل استوانه‌ای به قطر $50.10mm$ حرکت می‌کند. مایع روانکاری نفت خام است که لزجت آن در شکل ج-۱ از پیوست ج داده شده است. اگر نفت را گرم کرده و دمای آن را از $0°C$ به $120°C$ برسانیم، نیروی لازم برای حرکت دادن پیستون چند درصد کاهش می‌یابد؟

حل:

از منحنی ضمیمه کتاب برای روغن (نفت خام) داریم:

$$\begin{cases} t = 0^C & : \mu = 1.8 \times 10^{-2} \; N.s/m^2 \\ t = 120^C & : \mu = 2.1 \times 10^{-3} \; N.s/m^2 \end{cases}$$

$$F_1 = \tau_1.A = \mu_1 \frac{du}{dy}.A \quad , \quad F_2 = \tau_2.A = \mu_2 \frac{du}{dy}.A$$

میزان کاهش نیروی لازم عبارت است از:

$$\frac{\Delta F}{F_1} = \frac{F_2 - F_1}{F_1} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} = \frac{1.8 \times 10^{-2} - 2.1 \times 10^{-3}}{1.8 \times 10^{-2}} = 0.883$$

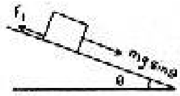
$$\frac{\Delta F}{F_1} \times 100 = 88.3 \;\; \%$$

۱-۲۰. مکعبی به جرم $12kg$ از روی یک سطح شیبدار که با افق زاویه $30°$ می‌سازد به سمت پایین حرکت می‌کند. سیالی به ضخامت $0.1mm$ سطح و جسم را از هم جدا می‌کند. لزجت سیال $0.04N.s/m^2$ است. فرض کنید توزیع سرعت در فیلم خطی است. سرعت نهایی مکعب را بدست آورید. سطح در حال تماس با

فیلم سیال $0.25m^2$ است.

حل:

برایند نیروهای وارده بر جسم در امتداد حرکت صفر است.



$$\sum F_s=0 \quad \Rightarrow F_f - mg\,Sin\theta=0 \quad \Rightarrow \ F_f=mgSin\theta$$

$$F_f=\tau A=\mu\frac{du}{dy}.A$$

با فرض اینکه توزیع سرعت خطی است:

$$F_f=\mu\frac{u}{y}.A$$

$$\Rightarrow \mu.\frac{u}{y}.A=mgSin\theta \quad \Rightarrow u=\frac{ymg\,Sin\theta}{\mu.A}$$

$$u=\frac{0.1\times10^{-3}\times12\times9.806\times Sin\,30}{0.04\times0.25}=0.588\,m/s$$

۲۱-۱. لزجت آب در دمای $0°C$ چند برابر لزجت آن در دمای $100°C$ است؟ لزجت سینماتیک آن چطور؟

حل:

از جدول ضمیمه کتاب برای آب داریم:

$$t=0^C:\begin{cases}\mu_1=1.792\times10^{-3}N.s/m^2\\ \nu_1=1.792\times10^{-6}\ m^2/s\end{cases} \quad و \quad t=100^C:\begin{cases}\mu_2=0.284\times10^{-3}N.s/m^2\\ \nu_2=0.296\times10^{-6}\ m^2/s\end{cases}$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{1.792\times10^{-3}}{0.284\times10^{-3}}=6.31 \quad و \quad \frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{1.792\times10^{-6}}{0.296\times10^{-6}}=6.054$$

۲۲-۱. لزجت مایعی $0.6Pa.s$ و چگالی آن 0.7 است. لزجت سینماتیک مایع به دست آورید.

حل:

$$\nu=\frac{\mu}{\rho}=\frac{0.6}{0.7\times1000}=8.5714\times10^{-4}\ m^2/s$$

۲۳-۱. چگالی مایعی 0.78 و لزجت سینماتیک آن 1.0×10^{-6} است. لزجت مایع چقدر است؟

حل:

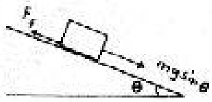
$$\nu=\frac{\mu}{\rho}\ \Rightarrow\mu=\nu\rho=1\times10^{-6}\times0.78\times10^3=7.8\times10^{-4}\,Pa.s$$

۲۴-۱. جسمی به وزن $500N$ بر روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ $30°$ می‌سازد، با سرعت $1m/s$ به طرف پایین می‌لغزد. بین جسم و سطح شیبدار لایهٔ نازکی از یک ماده روانکاری وجود دارد که لزجت آن $0.1Pa.s$ است. ضخامت لایه را تعیین کنید. سطح تماس جسم و ماده روانکار $0.2m^2$ است.

حل:

فرض می‌کنیم سرعت جسم در طول حرکت به سمت پایین ثابت می‌ماند پس برایند نیروهای وارد در جهت حرکت صفر است و داریم:

$$\sum F_s=0\Rightarrow F_f-mgSin\theta=0\Rightarrow F_f=mgSin\theta$$



$$F_f=\tau.A=\mu\frac{du}{dy}.A$$

با فرض اینکه توزیع سرعت خطی باشد داریم:

$$F_f = \mu \frac{u}{y} \cdot A$$

$$\Rightarrow \mu \frac{u}{y} \cdot A = mgSin\theta \Rightarrow y = \frac{\mu u A}{mg\ Sin\theta}$$

$$y = \frac{0.1 \times 1 \times 0.2}{500 \times Sin30} = 8 \times 10^{-5} m = 0.08 mm$$

۱-۲۵. لزجت بنزین در دمای $25°C$ چقدر است؟

حل:

با استفاده از منحنی ضمیمه کتاب برای بنزین داریم:

$$t = 25^C : \quad \mu = 2.9 \times 10^{-4} Pa.s$$

۱-۲۶. وزن مخصوص و لزجت دینامیکی یک سیال به ترتیب $7540 kg/m^3$ و $146 Pa.s$ است. لزجت سینماتیکی چقدر است؟

حل:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu g}{\gamma} = \frac{146 \times 9.806}{7540} = 0.19 m^2/s$$

۱-۲۷. چگالی مایعی 0.75 است. حجم مخصوص ماده را به دست آورید.

حل:

$$\rho = 0.75 \times 1000 = 750 kg/m^3$$

$$\nu_s = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{750} = 1.33 \times 10^{-3} m^3/kg$$

۱-۲۸. رابطهٔ بین حجم مخصوص و وزن مخصوص چیست؟

حل:

$$\gamma = \rho g \quad , \nu_s = \frac{1}{\rho} \quad \Rightarrow \nu_s = \frac{g}{\gamma}$$

۱-۲۹. دانسیته ماده‌ای $2900 kg/m^3$ است. چگالی، حجم مخصوص و وزن مخصوص ماده تعیین کنید.

حل:

چگالی نسبی: $d = \frac{2900}{1000} = 2.9$

$$\nu_s = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2900} = 3.448 \times 10^{-4} \quad m^3/kg$$

$$\gamma = \rho g = 2900 \times 9.806 = 28437.4 \ N/m^3$$

۱-۳۰. جرم ملکولی یک گاز 44 است. ثابت گاز، R چقدر است؟

حل:

$$R = \frac{8312}{M} = \frac{8312}{44} = 188.91 \quad m.N/kg.k$$

۱-۳۱. چه مقدار انرژی حرارتی برای افزایش $1°C$ دمای یک لیتر آب لازم است؟

حل:

گرمای لازم جهت افزایش 1 درجه دمای یک لیتر آب برابر $4187\ J$ می‌باشد.

۱-۳۲. یک کیسه هوا در مدت $50ms$ با $0.15kg$ گاز پر می‌شود اگر تغییر دما $200c$ باشد توان متوسط را محاسبه کنید.

حل:

$$P=\frac{W}{t}=\frac{mc_p\Delta T}{t}=\frac{0.15\times 1.004\times 200}{50\times 10^{-3}}=602.4\ kW$$

۱-۳۳. نیروی $F=4i+3j+9k$ بر روی یک سطح مربعی به ابعاد $2cm$ در $2cm$ که در صفحه xy قرار دارد اثر می‌کند. نیرو را به یک مؤلفهٔ عمودی و یک مؤلفهٔ مماسی تجزیه کنید. فشار و تنش برشی را به دست آورید. محاسبات را برای نیروی $F=4i+3j-9k$ تکرار کنید.

حل:

قسمت اول:

$$A=2\times 2=4cm^2=4\times 10^{-4}m^2$$

$$\text{مؤلفه قایم}: F_1=9k\Rightarrow F_1=\sqrt{9^2}=9N$$

$$\text{مؤلفه برشی}: F_2=4i+3j\ \Rightarrow F_2=\sqrt{4^2+3^2}=5N$$

$$P=\frac{F_1}{A}=\frac{9}{4\times 10^{-4}}=2.25\times 10^4 Pa=22.5kPa$$

$$\tau=\frac{F_2}{A}=\frac{5}{4\times 10^{-4}}=1.25\times 10^4 Pa=12.5kPa$$

قسمت دوم:

$$F_1=-9k\Rightarrow F_1=\sqrt{(-9)^2}=9N$$

$$F_2=4i+3j\Rightarrow F_2=\sqrt{4^2+3^3}=5N$$

$$P=\frac{F_1}{A}=-\frac{9}{4\times 10^{-4}}=-2.25\times 10^4 Pa=-22.5kPa$$

(علامت منفی نشان می‌دهد که فشار در جهت منحنی محور zها اعمال شده است)

$$\tau=\frac{F_2}{A}=\frac{5}{4\times 10^{-4}}=1.25\times 10^4 Pa=12.5kPa$$

۱-۳۴. بطری نیسکین برای نمونه برداری از آب در نقطه‌ای در 30 متری بالاتر از عمق 100 متری آب در خلیج مکزیکو به کار می رود پس از نمونه برداری از آب آن را فوراً به سطح آب آورده و روی کشتی قرار می‌دهند. دمای نمونه $11.6c$ اندازه گیری شده است. مقدار نمک موجود در آب خلیج مکزیکو را $33ppt$ در نظر بگیرید. دانسیته آب در نقطه نمونه گیری چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله $(1.5.8)$ داریم:

$$\rho_w=999.939900+4.216485\times 10^{-2}T-7.97451\times 10^{-3}T^2+3.509571\times 10^{-5}T^3-9.9037785\times 10^{-8}T^4$$

$$\Rightarrow \rho_w=999.939900+4.216485\times 10^{-2}\times 11.6-7.97451\times 10^{-3}\times 11.6^2+$$

$$+3.509571\times 10^{-5}\times 11.6^3-9.9037785\times 10^{-8}\times 11.6^4=999.5270kg/m^3$$

با جاگذاری $\rho_w = 999.5270 kg/m^3$ و $S = 33PPt$ و $T = 11.6C$ در معادله (1.5.9) داریم:

$$\rho(S,T) = 999.5270 + 33\left\{0.824493 - 4.0899\times10^{-3}\times11.6 + 7.6438\times10^{-5}\times11.6^2 - 8.2467\times10^{-7}\times11.6^3 + 5.3875\times10^{-9}\times11.6^4\right\} + 33^{3/2}\left\{-5.72466\times10^{-3} + 1.0227\times10^{-4}\times11.6^2\right\} + 33^2\left\{4.8314\times10^{-4}\right\} = 1025.0934 kg/m^3$$

۱-۳۵. برای مسئله قبل مشخص شده است که $1.42g$ رسوب در نمونه وجود دارد توزیع اندازه ذرات جامد معلق رسوب با استفاده از تجزیه کننده لیزری (فصل ۹ را ببینید) تعیین شده و در جدول زیر داده شده است.

جزء i	قطر (μm)	جزء جرمی	جرم (g)	حجم (μm^3)	غلظت $(\times10^3\ g/l)$
1	<10	0.1650	0.2343	523.6	0.2343
2	18	0.2100	0.2982	3053.6	0.2982
3	25	0.2650	0.3763	8181.2	0.3763
4	30	0.1500	0.213	14137.2	0.213
5	40	0.0850	0.1207	33510.3	0.1207
6	50	0.0465	0.06600	65449.8	0.06600
7	60	0.0250	0.0355	113097.3	0.0355
8	70	0.0220	0.03124	179594.4	0.03124
9	80	0.0195	0.02769	268082.6	0.02769
10	90	0.0120	0.01704	381703.5	0.01704

با محاسبه جرم، حجم و غلظت هر جزء در نمونه جدول را کامل کنید (شامل نمک) دانسیته مخلوط را محاسبه کنید. فرض کنید رسوب کوارتز است.

حل:

فرض می‌کنیم حجم کل نمونه 1 لیتر باشد:

$$\rho_{mix} = \frac{m_w + m_{sal} + m_{sed}}{V} = \rho_1 + \frac{m_{sed}}{V}$$

$$\Rightarrow \rho_{mix} = 1025.0934 + \frac{1.42}{1} = 1026.5134 kg/m^3$$

۱-۳۶. مخزنی شامل مخلوط آب و رسوب است. دانسیته آب ρ_w و دانسیته ذرات رسوب ρ_s است. فرض کنید مخلوط کامل است و دانسیته مخلوط ρ_m را محاسبه کنید. جزء جرمی رسوب ω_s است.

حل:

$$\rho_m = \frac{m}{\Delta V} = \frac{m}{\Delta V_m + \Delta V_s} \Rightarrow \frac{1}{\rho_m} = \frac{\Delta V_w + \Delta V_s}{m} = \frac{\Delta V_w}{m} + \frac{\Delta V_s}{m}$$

از طرفی داریم: $\omega_w = \dfrac{\Delta m_w}{m}$ ، $\omega_s = \dfrac{\Delta m_s}{m}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_m} = \frac{\Delta V_w}{\Delta m_w/\omega_w} + \frac{\Delta V_s}{\Delta m_s/\omega_s}$$

$$\rho_w = \frac{\Delta m_w}{\Delta V_w} \quad , \quad \rho_s = \frac{\Delta m_s}{\Delta V_s} \quad , \quad \omega_w + \omega_s = 1 \Rightarrow \omega_w = 1 - \omega_s$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_m} = \frac{\omega_w}{\rho_w} + \frac{\omega_s}{\rho_s} = \frac{1-\omega_s}{\rho_w} + \frac{\omega_s}{\rho_s}$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_m} = (1-\omega_s)\frac{\rho_s}{\rho_w} + \omega_s \Rightarrow \rho_m = \rho_s / \left[\omega_s + (1-\omega_s)\rho s/\rho w\right]$$

۱-۳۷. مخزنی شامل مخلوط آب و اجزای مختلف است. دانسیته آب ρ_w و دانسیته هر جزء ρ_i $(i=1,2,...,n)$ است فرض کنید مخلوط کامل است و دانسیته مخلوط ρ_m را محاسبه کنید. جزء جرمی هر جزء i، ω_i است. این مسئله حالت کلی مسئله قبل است.

حل:

$$\rho_m = \frac{m}{\Delta V} = \frac{m}{\Delta V_w + \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i}$$

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{\Delta V_w + \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i}{m} = \frac{\Delta V_w}{m} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i}{m} = \frac{\Delta V_w}{m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta V_i}{m}$$

از طرفی داریم: $\omega_w = \dfrac{\Delta m_w}{m} \quad , \quad \omega_i = \dfrac{\Delta m_i}{m}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_m} = \frac{\Delta V_w}{\Delta m_w/\omega_w} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta V_i}{\Delta m_i/\omega_i}$$

$$\rho_w = \frac{\Delta m_w}{\Delta V_w} \quad , \quad \rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_m} = \frac{\omega_w}{\rho_w} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{\rho_i} \quad \Rightarrow \quad \rho_m = 1 / \left[\omega_w/\rho_w + \sum_{i=1}^{n} \omega_i/\rho_i\right]$$

۱-۳۸. دانسیته آب خالص مطابق معادله *(1.5.8)* به دما وابسته است. ثابت کنید بیشترین مقدار دانسیته آب در دمای $T=4°C$ است و مقدار آنرا بیابید.

حل:

با توجه به رابطهٔ *(1.5.8)* داریم:

$$\rho_w = 999.939900 + 4.216485\,(10^{-2})\,T - 7.097451\,(10^{-3})\,T^2 + 3.509571\,(10^{-5})\,T^3 - 9.9037785\,(10^{-8})\,T^4$$

$$\frac{d\rho_w}{dT} = 4.216485\,(10^{-2}) - 2\times 7.097451\,(10^{-3})\,T + 3\times 3.509571\,(10^{-5})\,T^2 - 4\times 9.9037785\,(10^{-8})\,T^3$$

$\dfrac{d\rho_w}{dT} = 0 \Rightarrow$ از حل معادله مربوطه $T = 3.05c$

(1.5.8) با جاگذاری در رابطه : $\rho_w = 999.975\ kg/m^3$

توجه : به نظر می‌رسد فرمول ذکر شده در کتاب در این مسئله صادق نیست.

۳۹- برای یک مخلوط چند جزئی با n جزء نشان دهید.

$$\omega_1+\omega_2+....+\omega_n=1$$
$$C_1+C_2+...+C_n=\rho_m$$

ρ_m دانسیته مخلوط و ω_i و C_i به ترتیب جزء جرمی و غلظت جزء i می‌باشند.

حل:

a) داریم:

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i=\Delta m_1+\Delta m_2+....+\Delta m_n \qquad (I)$$

طرفین را بر m تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\Delta m_1}{m}+\frac{\Delta m_2}{m}+......+\frac{\Delta m_n}{m}=1$$

از طرفی داریم: $\omega_i=\dfrac{\Delta m_i}{m}$

$$\Rightarrow \omega_1+\omega_2+....+\omega_n=1$$

b) طرفین رابطه (I) را بر ΔV تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{m}{\Delta V}=\frac{\Delta m_1}{\Delta V}+\frac{\Delta m_2}{\Delta V}+....+\frac{\Delta m_n}{\Delta V}$$

از طرفی داریم: $C_i=\dfrac{\Delta m_i}{\Delta V}$, $\rho_m=\dfrac{m}{\Delta V}$

$$\Rightarrow \quad C_1+C_2+....+C_n=\rho_m$$

۴۰-۱. برای مخلوط دو جزئی A و B هرگاه $\lambda=\omega_A/\omega_B$، λ را طوری پیدا کنید که دانسیته مخلوط (ρ_m) حداکثر باشد. مقدار این حداکثر دانسیته چقدر است؟

حل: ****

۴۱-۱. از تجزیه یک پساب در آزمایشگاه نتایج زیر بدست آمده‌اند:

نمونه	حجم (mL)	جرم جامدات معلق (g)
1	85	85.43

اگر وزن مخصوص ذرات جامد معلق 1.58 باشد، حجم، غلظت مواد جامد معلق و دانسیته پساب را محاسبه کنید.

حل:

$$S_s=1.58 \qquad \Rightarrow \rho_s=1580\ kg/m^3$$

$$\Delta V_s=\frac{\Delta m_s}{\rho_s}=\frac{85.43\times10^{-3}}{1580}=54.07\times10^{-6}\ m^3$$

$$C_s=\frac{\Delta m_s}{\Delta V}=\frac{85.43\times10^{-3}}{85\times10^{-6}}=1005.06\ \ kg/m^3$$

$$\rho=\frac{\Delta m_w+\Delta m_s}{\Delta V}$$

$$\Delta m_w=\rho\Delta V_w=1000\times(85\times10^{-6}-54.07\times10^{-6})=0.3093\ kg$$

$$\Rightarrow \rho=\frac{0.03093+0.08543}{85\times10^{-6}}=1368.94\ kg/m^3$$

۱-۴۲. سه نمونه پساب از یک محل و در یک زمان برداشته شده و پس از تجزیه در آزمایشگاه نتایج زیر حاصل شده است.

نمونه	حجم (mL)	جرم جامدات معلق (g)
1	75	23.0
2	83.2	35.6
3	80	خرده شیشه

هر سه نمونه دارای دانسیته یکسان (ρ) هستند و اولی شامل ذرات با وزن مخصوص 1.93 است. دانسیته ρ و غلظت مواد جامد معلق در هر سه نمونه را بدست آورید. جزء جرمی مواد جامد در نمونه 3 را متوسط دو نمونه اول بگیرید.

حل:

$$S_{s_1}=1.93 \quad \Rightarrow \rho_{s_1}=1930\ kg/m^3$$

$$\rho_1=\frac{\Delta m_w+\Delta m_s}{\Delta V_1}$$

$$\Delta m_{w_1}=\rho_{w_1}\Delta V_{w_1}=\rho_{w_1}(\Delta V_1-\Delta V_{S_1})=1000(75\times10^{-6}-\frac{23\times10^{-3}}{1930})=63.08\times10^{-3}kg$$

$$\rho_1=\frac{23\times10^{-3}+63.08\times10^{-3}}{75\times10^{-6}}=1147.7\,kg/m^3=\rho_2=\rho_3=\rho$$

$$C_{s_1}=\frac{\Delta m_{s_1}}{\Delta V_1}=\frac{23\times10^{-3}}{75\times10^{-6}}=306.7\ \ kg/m^3$$

$$m_1=\rho\Delta V_1=1147.7\times75\times10^{-6}=0.08608\ kg$$

$$m_2=\rho\Delta V_2=1147.7\times83.2\times10^{-6}=0.09549\ kg$$

$$m_3=\rho\Delta V_3=1147.7\times80\times10^{-6}=0.09182\ kg$$

$$\omega_{s_1}=\frac{23\times10^{-3}}{0.086}=0.267\ ,\ \ \omega_{s_2}=\frac{35.6\times10^{-3}}{0.09542}=0.373\ \Rightarrow \omega_{s_3}=\frac{0.267+0.373}{2}=0.320$$

$$\Delta m_{s_3}=0.32\times0.09182=0.02938kg$$

$$C_{s_3}=\frac{0.02938}{80\times10^{-6}}=367.25kg/m^3$$

۱-۴۳. در یک فرآیند تولید آب میوه، آب میوه غلیظ شده مخلوط پرتقال، آناناس و کیوی به وسیله عبور مخلوط آب میوه تازه از یک تبخیرکننده تولید می‌شود. جزء جرمی مواد جامد موجود در مخلوط عبارتند از: درصد $\omega_{پرتقال}=6.7$، درصد $\omega_{آناناس}=4.35$ و درصد $\omega_{کیوی}=7.83$. در تبخیرکننده آب تبخیر شده و جزء جرمی مواد جامد موجود به درصد $\omega_T=48.45$ افزایش داده می‌شود. اگر مخلوط آب میوه تازه با نرخ $850kg/hr$ $(1.43m^3/hr)$ به تبخیرکننده وارد شود محاسبه کنید:

الف) غلظت پرتقال، آناناس و کیوی در آب میوه تازه.

ب) غلظت پرتقال، آناناس و کیوی در آب میوه غلیظ شده.

ج) دانسیته آب میوه تازه.

د) دانسیته آب میوه غلیظ شده.

حل:

$$\begin{cases} \Delta m_1 = 850 \times 0.067 = 56.95\ kg/hr \\ \Delta m_2 = 850 \times 0.0435 = 36.975\ kg/hr \\ \Delta m_3 = 850 \times 0.0783 = 66.555\ kg/hr \\ \Delta m_4 = 850 \times 0.8112 = 689.52\ kg/hr \end{cases}$$

بعد از عبور از تبخیرکننده: $\omega_4' = 1 - 0.4845 = 0.5155$

مقدار جرم مواد در هر دو حالت یکسان است:

$$\Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 = 56.95 + 36.975 + 66.555 = 160.48\ kg/hr$$

$$\omega'_4 = \frac{\Delta m'_4}{\Delta m'_4 + 160.48} = 0.5155 \Rightarrow \Delta m'_4 = 170.748\ kg/hr$$

$$m' = 160.48 + 170.748 = 331.228\ kg/hr$$

(a

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{56.95}{1.43} = 39.825\ kg/m^3 \\ C_2 = \dfrac{36.975}{1.43} = 25.857\ kg/m^3 \\ C_3 = \dfrac{66.555}{1.43} = 46.542\ kg/m^3 \end{cases}$$

(b

$$\text{حجم آب تبخیر شده} = \frac{850 - 331.228}{1000} = 0.51877\ m^3/hr$$

$$\Delta V' = 1.43 - 0.51877 = 0.91123\ m^3/hr$$

$$\begin{cases} C'_1 = \dfrac{56.95}{0.91123} = 62.498\ kg/m^3 \\ C'_2 = \dfrac{36.975}{0.91123} = 40.577\ kg/m^3 \\ C'_3 = \dfrac{66.555}{0.91123} = 73.039\ kg/m^3 \end{cases}$$

(c

$$\rho = \frac{850}{1.43} = 594.4\ kg/m^3$$

(d

$$\rho' = \frac{331.228}{0.91123} = 363.495\ kg/m^3$$

۴۲-۱. گازی در دمای $20^\circ C$ و فشار مطلق $0.2MPa$ قرار دارد. دانسیتهٔ گاز را تعیین کنید. ثابت گاز $R=210 m.N/kg.K$ است. اگر حجم گاز $40L$ باشد، جرم آن چقدر است؟

حل:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{0.2 \times 10^6}{210 \times (20 + 273)} = 3.2504\ kg/m^3$$

$$m = \rho V = 3.2504 \times 0.04 = 0.13\ kg$$

۱-۴۵. دانسیته هوا در فشار $400kPa\ abs$ و دمای $30°C$ چقدر است؟

حل:

برای هوا: $R = 287\ mN/kg.k$

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{400 \times 10^3}{287 \times (30 + 273)} = 4.6 kg/m^3$$

۱-۴۶. دانسیته بخار آب در فشار $0.3kPa\ abs$ و دمای $30°C$ چقدر است؟

حل:

برای بخار آب: $R = 462\ m.N/kg.k$

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{0.3 \times 10^3}{462 \times (30 + 273)} = 0.00214\ kg/m^3$$

۱-۴۷. $100L$ از یک گاز با جرم ملکولی 28 تحت فشار $80\ kPa\ abs$ و دمای $330K$ قرار دارد. حجم مخصوص و جرم مخصوص گاز چقدر است؟

حل:

$$R = \frac{8312}{M} = \frac{8312}{28} = 296.9\ m.N/kg.k$$

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{80 \times 10^3}{296.9 \times 330} = 0.817\ kg/m^3$$

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{0.817} = 1.224\ m^3/kg$$

۱-۴۸. یک کیلوگرم هیدروژن در ظرفی به حجم $150L$ محبوس شده است. دمای هیدروژن $-40°C$ است. فشار آن چقدر است؟

حل:

برای هیدروژن: $R = 4121\ m.N/kgk$

$$PV = mRT$$

$$\Rightarrow P = \frac{mRT}{V} = \frac{1 \times 4121 \times 233}{0.15} = 6.4 \times 10^6\ Pa = 6.4 MPa$$

۱-۴۹. یک لاستیک اتومبیل در فشار هوای $180kPa$ و دمای $21C$ دارای حجم $20L$ است. دانسیته و وزن هوا چقدر است؟

حل:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{180 \times 10^3}{287 \times (21 + 273)} = 2.133 kg/m^3$$

$$W = mg = \rho V g = 2.133 \times 20 \times 10^{-3} \times 9.806 = 0.4183 N$$

در حالت دوم با فرض اینکه حجم ثابت باشد داریم:

$$m = cte\ ,\ V = cte \quad \Rightarrow \rho = cte$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{T'}{T} \Rightarrow P' = 180 \times 10^3 \times \frac{(21 + 30 + 273)}{(21 + 273)} = 198367 Pa$$

۱-۵۰. هوا در فشار $45kPa$ در یک مبدل حرارتی گرم می‌شود. اگر جرم هوا $4.35kg$ باشد مقدار حرارت مورد نیاز جهت حرارت دادن هوا از $45C$ به $250C$ را بدست آورید.

حل:

$$Q = mc_p\Delta T = 4.35 \times 1.004 \times (250 - 45) = 895.32\ kj$$

۱-۵۱. مخلوط یک گاز شامل 15 گرم H_2، 25 گرم NH_3 و 21 گرم CO_2 است. جزء مولی‌های y_{NH_3} ، y_{CO_2} ، y_{H_2} و جرم مولکولی متوسط مخلوط گاز را محاسبه کنید.

حل:

$$mol\ \ H_2 = \frac{15}{2} = 7.5$$

$$mol\ \ NH_3 = \frac{25}{17} = 1.47$$

$$mol\ \ CO_2 = \frac{21}{44} = 0.48$$

مول کل $= 7.5 + 1.47 + 0.48 = 9.45$

$$y_{H_2} = \frac{7.5}{9.45} = 0.794 \quad y_{NH_3} = \frac{1.47}{9.45} = 0.155 \quad y_{Co_2} = \frac{0.48}{9.45} = 0.051$$

$$M_{av} = y_{H_2}M_{H_2} + y_{NH_3}M_{NH_3} + y_{CO_2}M_{CO_2} = 0.794\times2 + 0.155\times17 + 0.051\times44 = 6.467$$

۱-۵۲. حجم مخلوط گازی توصیف شده در مسئله قبل، $250cm^3$ است. دانسیته مخلوط گاز چقدر است؟ فشار مخلوط گاز را در دمای $32C$ بدست آورید. فشارهای جزئی P_{NH_3} ، P_{CO_2} ، P_{H_2} چقدر است؟

حل:

$$\rho = \frac{(15 + 25 + 21) \times 10^{-3}}{250 \times 10^{-6}} = 244\ \ kg/m^3$$

$$P = \rho RT$$

$$R = \frac{8312}{6.467} = 1285.3\ \ m.N/kg.k$$

$$\Rightarrow P = 244 \times 1285.3 \times (273 + 32) = 95.63 \times 10^6 Pa = 95.63\,MPa$$

$$P_{H_2} = P_{y_{H_2}} = 95.63\times0.794 = 75.93\,MPa$$

$$P_{NH_3} = P_{y_{NH_3}} = 95.63\times0.155 = 14.82MPa$$

$$P_{CO_2} = P_{y_{co_2}} = 95.63\times0.051 = 4.88MPa$$

۱-۵۳. یک مخزن روباز شامل آب در $22C$ شامل $32N$ درصد (وزنی) مواد جامد معلق با وزن مخصوص 2.32 است. اگر حجم مخلوط $1.2m^3$ باشد غلظت مواد جامد معلق را برحسب lbm/ft^3 و kg/m^3 بدست آورید.

حل:

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{\omega_w}{\rho_w} + \frac{\omega_s}{\rho_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho_m} = \frac{1-0.327}{1000} + \frac{0.327}{2320} \quad \Rightarrow \quad \rho_m = 1229\ \ \ kg/m^3$$

$$m = \rho_m\Delta V = 1229 \times 1.2 = 1474.8\ \ \ kg \qquad \Delta m_s = \omega_s m = 0.327 \times 1474.8 = 482.3\ kg$$

$$C_s=\frac{\Delta m_s}{\Delta V}=\frac{482.3}{1.2}=401.9\ \ kg/m^3 \quad \text{یا}\ 401.9\,kg/m^3\times\left(\frac{0.3048}{1ft}\right)^3\times\left(\frac{1\,lb_m}{0.4536\,kg}\right)=25.1\ \ lb/ft^3$$

۱-۵۴. مدول الاستیسیتهٔ حجمی را به جای تغییر حجم بر حسب تغییر دانسیته بیان کنید.

حل:

$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow m=\rho V\quad\Rightarrow\quad dm=d(\rho V)$$

$$dm=0\quad\Rightarrow\quad d(\rho V)=0\quad\Rightarrow\quad \rho dV+Vd\rho=0\quad\Rightarrow\frac{dV}{V}=-\frac{d\rho}{\rho}$$

$$K=-\frac{dP}{dV/V}=-\frac{dP}{-dP/\rho}=\rho(\frac{dP}{d\rho})$$

۱-۵۵. نحوهٔ تغییر دانسیته یک مایع با تغییر فشار چگونه است؟ فرض کنید مدول الاستیسیته حجمی مایع ثابت بماند.

حل:

با توجه به مسئله قبل داریم:

$$k=\rho\,(\frac{dP}{d\rho})\quad\Rightarrow\quad dP=k\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\int_{P_0}^{P}dP\ =\int_{\rho_0}^{\rho}k\frac{d\rho}{\rho}\quad\Rightarrow\quad P-P_0=k\,Ln\frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow\rho/\rho_0=exp\left[(P-P_0)/k\right]\quad\Rightarrow\rho=\rho_0\,exp\left[(P-P_0)/k\right]$$

۱-۵۶. هرگاه فشار مایعی $0.6MPa$ افزایش یابد، دانسیتهٔ آن 0.02 درصد افزایش می‌یابد. مدول بالک مایع را به دست آورید.

حل:

$$k=\rho(\frac{dP}{d\rho})=\frac{dP}{d\rho/\rho}=\frac{0.6\times10^6}{0.02\times10^{-2}}=3\times10^9\,Pa=3\,GPa$$

۱-۵۷. مدول الاستیسیتهٔ حجمی آب $2.2GPa$ است. چه فشاری لازم است تا حجم آب 0.5 درصد کاهش یابد؟

حل:

$$k=-\frac{dP}{dV/V}\quad\Rightarrow dP=-k\frac{dV}{V}=-2.2\times10^9\times\frac{-0.5}{100}=1.1\times10^7Pa=11\,MPa$$

۱-۵۸. یک مخزن فولادی محتوی $450kg$ آب $(\rho=1000kg/m^3)$ در فشار استاندارد 101.3 است. چند کیلوگرم آب باید به مخزن افزود تا فشار به $70MPa$ برسد. مدول بالک آب $2.06GPa$ است. می‌دانیم که وقتی فشار داخل مخزن تا $70MPa$ افزایش یابد، حجم داخلی آن 1 درصد افزایش می‌یابد.

حل:

$$k=\rho\frac{dP}{d\rho}=\rho\frac{\Delta P}{\Delta\rho}\ \Rightarrow\ \Delta\rho=\frac{\rho}{k}\Delta P=\frac{1000}{2.06\times10^9}\times(70\times10^6)=33.98\ kg/m^3$$

$$\Rightarrow \rho_2 - \rho_1 = 33.98\,kg/m^3 \Rightarrow \rho_2 = 33.98 + 1000 = 1033.98\,kg/m^3$$

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} \Rightarrow V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{450}{1000} = 0.45\,m^3$$

با توجه به اینکه حجم داخلی مخزن در طی افزایش فشار تا $70\ MPa$، 1 درصد افزایش یافته است در نتیجه افزایش حجم آب نیز 1 درصد بوده است.

$$\frac{\Delta V}{V_1} = 0.01 \Rightarrow \frac{V_2 - V_1}{V_1} = 0.01 \Rightarrow V_2 = 1.01\,V_1 = 1.01 \times 0.45 = 0.4545\,m^3$$

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} \Rightarrow m_2 = \rho_2 V_2 = 1033.98 \times 0.4545 = 469.94\,kg$$

بنابراین مقدار جرم آب اضافه شده برابر است با:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 469.94 - 450 = 19.94\,kg$$

۵۹-۱. برای ماده که از قانون گاز ایده‌ال پیروی می‌کند نشان دهید که: $C_p = dh/dT$, $C_v = du/dt$

(راهنمایی: از معادله $(1.6.7)$ نسبت به T مشتق گرفته و نتیجه را با معادله $(1.6.6)$ مقایسه کنید)

حل:

با توجه به معادله $(1.6.7)$ داریم:

$$h = u + P/\rho$$

$$P = \rho RT \Rightarrow P/\rho = RT \Rightarrow h = u + RT$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به T دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\frac{dh}{dT} = \frac{du}{dT} + R$$

از مقایسه رابطه بدست آمده با رابطه $(1.6.6)$ که به صورت $C_p = C_v + R$ می‌باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$C_p = \frac{dh}{dT} \text{ و } C_v = \frac{du}{dT}$$

۶۰-۱. برای یک گاز کامل ثابت کنید: $C_p = kR/(k-1)$, $C_v = R/(k-1)$

حل:

$$C_p = C_v + R \Rightarrow \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$$

$$\frac{C_p}{C_v} = k \Rightarrow k = 1 + \frac{R}{C_v} \Rightarrow \frac{R}{C_v} = k - 1 \Rightarrow C_v = \frac{R}{k-1}$$

$$C_p = C_v + R \Rightarrow \frac{C_p}{C_p} = \frac{C_v}{C_p} + \frac{R}{C_p} \Rightarrow 1 = \frac{1}{k} + \frac{R}{C_p}$$

$$\frac{R}{C_p} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} \Rightarrow C_p = \frac{kR}{k-1}$$

۶۱-۱. یک مجموعه پیستون مخزن شامل $6.73kg$ گاز نیتروژن با حجم اولیه $0.3m^3$ و فشار $450kPa$ است. مشخص شده است که این گاز از قانون، ثابت $PV=1.3$ و بعلاوه قانون گاز ایده‌ال پیروی می‌کند. هرگاه حجم

گاز به $0.15m^3$ کاهش یابد فشار در مخزن را محاسبه کنید. تشابه دمای اولیه و نهایی در مخزن چقدر است؟

حل:

$$P_1V_1^{1.3}=P_2V_2^{1.3} \Rightarrow P_2=P_1(\frac{V_1}{V_2})^{1.3}=450\times(\frac{0.3}{0.15})^{1.3}=1108\,kPa$$

$$PV=mRT \Rightarrow T_1=\frac{450\times10^3\times0.3}{6.73\times297}=67.54k$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{P_2}{P_1}\Rightarrow T_2=67.54\times\frac{1108}{450}=166.3k$$

۶۲-۱. مدول الاستیسیتهٔ حجمی ایزوترم هوا در فشار مطلق $0.4MPa$ چقدر است؟

حل:

$$PV=RT\,,\,T=cte \Rightarrow d(PV)=d(RT)=0 \Rightarrow PdV+VdP=0 \Rightarrow \frac{dP}{dV}=-\frac{P}{V}$$

$$k=-\frac{dP}{dV/V}=-\frac{-P/V}{1/V}=P \Rightarrow k=0.4MPa\,abs$$

۶۳-۱. پمپی آب 20^oC را منتقل می‌کند. در چه فشاری می توان انتظار داشت که در ورودی پمپ کاویتاسیون رخ دهد؟

حل:

با استفاده از جدول کتاب برای آب $20c$: $\gamma=9789N/m^3$, $\frac{P_V}{\gamma}=0.25$

$$\Rightarrow P_v=0.25\gamma=0.25\times9789=2447Pa$$

بنا بر این درفشار فوق می توان انتظار داشت که در ورودی پمپ پدیده کاویتاسیون رخ می دهد البته باید توجه داشت که به علت افت هد ایجاد شده از سرعت سیال فشار مزبور کمتر از این مقدار خواهد بود.

۶۴-۱. در یک خط لوله روغن ایستگاههای پمپاژ در هر $60km$ دایر شده است. اگر افت فشار در خط لوله $100kPa/km$ باشد. هر پمپ چه فشاری باید تولید کند تا از تبخیر روغن جلوگیری شود؟

حل:

$$\Delta P=100\,kPa/km\;\times60\,km=6000\,kPa$$

۶۵-۱. قطر یک قطرهٔ آب $0.05mm$ است. فشار داخلی قطره چقدر است؟ دمای قطره 20^oC و فشار خارج آن فشار اتمسفر استاندارد یعنی $101.3kPa$ می‌باشد.

حل:

از جدول ضمیمه برای آب در دمای $20\ C$ داریم: $\sigma=7.36\times10^{-2}\ N/m$

$$\Delta P=\frac{2\sigma}{r}=\frac{2\times7.36\times10^{-2}}{1.2\times0.05\times10^{-3}}=5.89\ Pa\,gage$$

۶۶-۱. جت جیوه با مقطع دایره به قطر $0.1mm$ از یک سوراخ خارج می‌شود. اختلاف فشار داخل و خارج چقدر است؟ دمای جیوه 20^oC است.

حل:

از جدول ضمیمه برای جیوه داریم: $\sigma = 0.51\,N/m$

$$\Delta P = \frac{\sigma}{r} = \frac{0.51}{1.2 \times 0.1 \times 10^{-3}} = 10200\,Pa = 10.2\,kPa$$

۱-۶۷. صعود مویینگی آب مقطر در یک لولهٔ شیشه‌ای به قطر $6mm$ چقدر است؟ دمای آب $40°C$ است.

حل:

از نمودار شکل 6-1 در دمای $40\ C$ برای $2r=6mm$ داریم: $h = 3.75\ mm$

۱-۶۸. می‌خواهیم صعود مویینگی آب در لولهٔ شیشه‌ای کمتر از $0.5mm$ باشد. قطر لوله را تعیین کنید.

حل:

از نمودار شکل 6-1 برای $h = 0.5mm$ داریم: I) برای آب لوله‌کشی: $d = 13\ mm$

II) برای آب مقطر: $d = 17\ mm$

۱-۶۹. دو صفحهٔ شیشه‌ای موازی به فاصلهٔ $5mm$ از یکدیگر، به طور قائم در آب لوله‌کشی شهر فرو برده می‌شوند. صعود مویینگی را تخمین بزنید. از داده‌های شکل ۶-۱ استفاده کنید.

حل:

ابتدا باید زاویهٔ تماس θ را در شرایط مساله پیدا کنیم اگر فرض کنیم که بجای دو صفحهٔ شیشه‌ای از لولهٔ شیشه‌ای به قطر $5mm$ استفاده می‌کنیم ارتفاع h برابر است با:

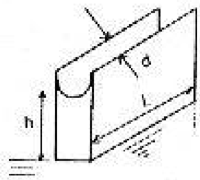
(با توجه به مسئله 71-1)

$$h = \frac{2\sigma Cos\theta}{\gamma r} \Rightarrow Cos\theta = \frac{h\gamma r}{2\sigma}$$

با استفاده از منحنی 6-1 کتاب برای $d=5mm$ داریم: $h=2.25mm$ بنابراین:

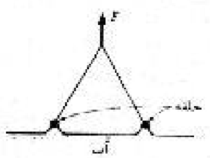
$$Cos\theta = \frac{2.25 \times 10^{-3} \times 9806 \times 1/2(5\times10^{-3})}{2 \times 0.074} = 0.37$$

در مورد صفحات شیشه‌ای از موازنهٔ نیروهای کشش سطحی و نیروی وزن داریم:



$$(hdL)\gamma = (L+L)\sigma Cos\theta \Rightarrow h = \frac{2\sigma Cos\theta}{d\gamma}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\times0.074\times0.37}{5\times10^{-3}\times9806} = 0.0011\,m \Rightarrow h = 1.1\,mm$$



۱-۷۰. یکی از روشهای تعیین کشش سطحی مایعات اندازه‌گیری نیروی لازم برای بالاکشیدن یک سیم حلقوی پلاتینی از روی سطح مایع است (شکل ۱۰-۱). نیروی لازم برای جداکردن حلقه‌ای به قطر $20mm$ از روی سطح آب در دمای $20°C$ را تخمین بزنید.

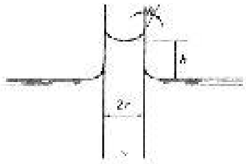
حل:

از موازنهٔ نیروها داریم:

$$2\pi r\sigma = TCos\theta$$

$$F = 2TCos\theta = 4\pi R\sigma = 4\pi \times 0.01 \times 0.074 = 0.0093\,N$$

۱-۷۱. برای لوله‌ای که در شکل ۱۱-۱ نشان داده شده، صعود موبینگی یعنی h را بر حسب θ، σ، γ و r به دست آورید.



شکل ۱۱-۱

حل:

برای تعیین صعود موئینگی یک مایع در داخل یک لوله با مقطع دایره‌ای و کشش سطحی σ و زاویهٔ تماس θ، از روی شکل مقابل داریم:

مولفهٔ عمودی نیروی کشش سطحی، در سطح مشترک حلقه‌ای شکل لوله باید با وزن ستون مایع به ارتفاع h برابر باشد:

$$(2\pi r\sigma)\,Cos\theta = \gamma\pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{2\sigma Cos\theta}{\gamma r}$$

۱-۷۲. چرا فشار داخلی یک حباب به صورت $p=4\sigma/r$ بیان می‌شود در حالی که برای قطره داریم $p=2\sigma/r$

p فشار داخلی، σ کشش سطحی و r شعاع است.

حل:

برای یک قطرهٔ کروی، افزایش فشار داخلی برابر با نیروی کشش سطحی در طول محیط دایرهٔ عظیمهٔ کره است پس داریم:

$$\pi r^2 P = 2\pi r\,\sigma \Rightarrow P = \frac{2\sigma}{r}$$

در مورد حباب، می‌توان آن را به صورت دو نیم کره تصور کرد که دو سطح مشترک با هوا دارد یکی سطح داخلی و دیگری سطح خارجی با قطری تقریباً مساوی هم بنابراین داریم:

$$P_{\text{حباب}} = 2P_{\text{قطره}} = \frac{4\sigma}{r}$$

۱-۷۳. در شکل ۱۱-۱ در اثر کشش سطحی نیرویی به لوله وارد می‌شود. نیروی قائم لازم برای نگهداری لوله را تعیین کنید. ضخامت دیوارهٔ لوله را ناچیز فرض کنید.

حل:

دو نیروی کشش سطحی از طرف آب رو به پایین به لوله وارد می‌شود یکی از طرف آب داخل لوله که در اثر خاصیت موئینگی در لوله بالا رفته است و دیگری از طرف آب بیرون لوله که اندازهٔ هرکدام از این دو نیروی مساوی برابر با $2\pi r\sigma Cos\theta$ می‌باشد پس ***نیروی لازم برای نگهداشتن لوله برابر است با:*** $F = 2\times(2\pi r\sigma Cos\theta) = 4\pi r\sigma Cos\theta$

۱-۷۴. صعود موبینگی آب در لولهٔ قائم شیشه‌ای به قطر $5mm$ برابر $2.25mm$ است. زاویهٔ بین سطح آب و

شیشه را تعیین کنید. کشش سطحی آب $0.074N/m$ است.

حل:

با استفاده از رابطه بدست آمده برای صعود مویینگی درلوله‌ها در مسئله 71 داریم:

$$h = \frac{2\sigma Cos\theta}{\gamma r}$$

$$\Rightarrow Cos\theta = \frac{\gamma r h}{2\sigma} = \frac{9806 \times 1/2 \times 5 \times 10^{-3} \times 2.25 \times 10^{-3}}{2 \times 0.074} = 0.373 \Rightarrow \theta = 68.1^\circ$$

۱-۷۵. فرمولی برای صعود مویینگی h بین دو لولهٔ شیشه‌ای متحدالمحور به شعاعهای R و r و زاویهٔ تماس θ به دست آورید.

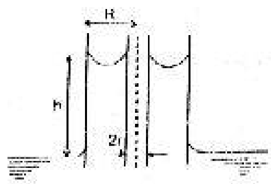
حل:

از موازنه نیروها داریم:

نیروی وزن = نیروی کشش سطحی

$$2\pi R\sigma cos\theta + 2\pi r\sigma cos\theta = \pi(R^2 - r^2)h\gamma$$

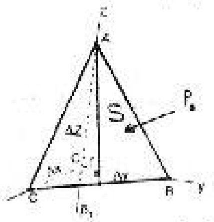
$$\Rightarrow h = \frac{2\sigma cos\theta}{\gamma(R - r)}$$



۲ استاتیک سیالات

۲-۱. برای حالت سه بعدی ثابت کنید که در یک نقطه در سیال ساکن، فشار در تمام جهات یکسان است.

حل:



از موازنه نیروها در سه جهت x و y و z می‌توان یکسان بودن فشار را ثابت نمود:

در جهت x داریم:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow P_x . \frac{\delta y \delta z}{2} - (P_s . S_s) . i = 0$$

$$(P_s . S_s) . i = P_s (S_s . i) = P_s \frac{\delta y \delta z}{2}$$

$$\Rightarrow P_x . \frac{\delta y \delta z}{2} - P_s \frac{\delta y \delta z}{2} = 0 \quad \Rightarrow P_x = P_s \qquad (1)$$

در جهت y داریم:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow P_y . \frac{\delta x \delta z}{2} - (P_s . S_s) . j = 0$$

$$(P_s . S_s) . j = P_s (S_s . j) = P_s \frac{\delta x \delta z}{2}$$

$$\Rightarrow P_y . \frac{\delta x \delta z}{2} - P_s \frac{\delta x \delta z}{2} = 0 \quad \Rightarrow P_y = P_s \qquad (2)$$

در جهت z داریم:

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow -\gamma . \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} + P_z . \frac{\delta x \delta y}{2} - (P_s . S_s) . k = 0$$

$$(P_s . S_s) . k = P_s (S_s . k) = P_s \frac{\delta x \delta y}{2}$$

با توجه به اینکه مرتبه جمله اول نسبت به دو جمله دیگر بالاتر است بنابراین می‌توان از آن صرفنظر کرد.

$$P_z\,\frac{\delta x\delta y}{2}-P_s\,\frac{\delta x\delta y}{2}=0 \qquad \Rightarrow P_z=P_s \qquad (3)$$

$$(3),(2),(1)\ \Rightarrow P_x=P_y=P_z=P_s$$

۲-۲. ارتفاع ساختمان امپایراستیت $381\,m$ است. فشار یک ستون آب به این ارتفاع برحسب پاسکال چقدر است؟

حل:

$$P=\gamma h=9806\times 381=3.736\times 10^6\,Pa=3.736\,MPa$$

۲-۳. دانسیته یک مایع با رابطهٔ $\rho=450+ah$ بیان شده است که در آن $a=12\,kg/m^4$ است و h فاصله از سطح آزاد بر حسب متر می‌باشد. فشار در عمق 10 متری از سطح آزاد این مایع چقدر است؟

حل:

روش اول: استفاده از انتگرال

$$\overline{P}=\frac{1}{h_2-h_1}\int_{h_1}^{h_2}\rho dh=\frac{1}{10-1}\int_0^1(450+12h)dh=510\ kg/m^3$$

روش دوم: استفاده از میانگین

$$h_1=0m \quad \rightarrow \rho_1=450\ kg/m^3$$

$$h_2=10m\rightarrow \rho_2=450+12\times 10=570\,kg/m^3$$

$$\rho=\frac{\rho_1+\rho_2}{2}=\frac{450+570}{2}=510\,kg/m^3$$

$$P=\gamma h=\rho g h=510\times 9.806\times 10=5\times 10^4\,Pa=50\,kPa$$

۲-۴. در یک ساختمان به ارتفاع $250\ m$ لوله قائم گاز محتوی گازی با دانسیتهٔ $\rho=0.72\,kg/m^3$ است. فشار نسبی در پایین لوله معادل 8 سانتی‌متر آب است. فشار گاز در بالای ساختمان بر حسب سانتی‌متر ستون آب چقدر است؟ الف) گاز را تراکم‌ناپذیر فرض کنید. ب) دمای گاز را ثابت بگیرید. فشار بارومتریک 10.34 متر ستون آب و دما $20\ ^\circ C$ است.

حل:

الف) از جدول کتاب برای آب در $20\ C$ $\qquad \gamma = 9789\ N/m^2$

$$(\gamma h)_{gas}=(\gamma h)_w \Rightarrow\ 0.72\times 9.806\times 250=9789\times h_w$$

$$\Rightarrow h_w=0.1803\ mH_2O=18.03\ cmH_2O$$

در بالای ساختمان داریم:

$$P_{gage}=8-18.03=-10.03\,cmH_2O=10.03\,cmH_2O \qquad gage\ suction$$

ب)

$$P_{abs}=10.34+0.08=10.42\,mH_2O$$

با استفاده از معادله (2.2.15) داریم:

$$P=P_0 exp\left(-\frac{y-y_0}{P_0/g\rho_0}\right)$$

$$\Rightarrow P=10.42\times exp\left[-\frac{250}{10.42\times 9789/(9.806\times 0.72)}\right]=10.2413\,mH_2O\quad abs$$

$$P_{gage}=10.2413-10.34=-0.0987\,mH_2O=-9.87\,cmH_2O=9.87\,cmH_2O\quad gagesuction$$

۲-۵. معادلاتی بنویسید که فشار و جرم مخصوص را در هر ارتفاع از گاز ساکن به دست دهد. شرایط در یک ارتفاع خاص معلوم است. گرادیان دما β است.

حل:

$$P=\rho RT\quad \Rightarrow R=\frac{P}{\rho T}\quad \Rightarrow \frac{P_0}{\rho_0 T_0}=\frac{P}{\rho T}$$

P_0 و ρ_0 و T_0 شرایط معلوم یک گاز ساکن در یک ارتفاع می‌باشند.

$$\Rightarrow \rho=\frac{\rho_0 T_0}{P_0}\times\frac{P}{T}\qquad T=T_0+\beta y$$

رابطه فشار: $dp=-\gamma dy=-\rho g dy=-\dfrac{\rho_0 T_0 g}{P_0}\times\dfrac{P}{T}dy=-\dfrac{\rho_0 T_0 g}{P_0}\times\dfrac{P}{T_0+\beta y}dy$

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\rho_0 T_0 g}{P_0}\,\frac{dy}{T_0+\beta y}\quad\Rightarrow\quad \int_{p_1}^{p}\frac{dP}{P}=-\frac{\rho_0 T_0 g}{P_0}\int_{y_1}^{y}\frac{dy}{T_0+By}$$

$$\Rightarrow ln\frac{P}{P_1}=-\frac{\rho_0 T_0 g}{P_0\,\beta}\,ln\frac{T_0+\beta y}{T_0+\beta y_1}=-\frac{g}{\beta R}\,ln\frac{T_0+\beta y}{T_0+\beta y_1}\quad\Rightarrow P=P_1\left\{\frac{T_0+\beta y}{T_0+\beta y_1}\right\}^{-\frac{g}{\beta R}}$$

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{P_1}{R(T_0+\beta y)}\left\{\frac{T_0+\beta y}{T_0+\beta y_1}\right\}^{-\frac{g}{\beta R}}=\frac{P_1}{R}\,\frac{(T_0+\beta y)^{\left[-1-g/R\ \beta\right]}}{(T_0-\beta y_1)^{-g/R\ \beta}}$$

۲-۶. از نتایج مسألهٔ قبل به ازای $\beta\to 0$ حد بگیرید و معادلات مربوط به حالت ایزوترم (دما ثابت) را به دست آورید.

حل:

می‌دانیم برای یک تابع: $f(y)=f(y_1)+f'(y_1)(y-y_1)$

$$f(y)=ln(T_0+\beta y)=ln(T_0+\beta y_1)+\frac{1}{T_0+\beta y_1}(T_0+\beta y-T_0-\beta y_1)$$

$$\Rightarrow ln\frac{T_0+\beta y}{T_0+\beta y_1}=\frac{\beta}{T_0+\beta y_1}(y-y_1)\qquad,\qquad lim\,T_0+\beta y_1=T_0\qquad \beta\to 0$$

$$\Rightarrow ln\frac{T_0+\beta y}{T_0+\beta y_1}=\frac{\beta}{T_0}(y-y_1)\Rightarrow\frac{T_0+\beta y}{T_0+\beta y_1}=exp\left\{\frac{\beta}{T_0}(y-y_1)\right\}$$

با جاگذاری در رابطه بدست آمده در مسئله قبل: $P=P_1 exp\left\{\frac{-\rho_0 g}{P_1}(y-y_1)\right\}=P_1 exp\left\{\frac{\rho_0 g}{P_1}(y_1-y)\right\}$

۲.۷. از نتایج مسألهٔ ۵-۲ استفاده کنید و فشار و جرم مخصوص در ارتفاع *3000* متری را به دست آورید. در ارتفاع *300* متری فشار مطلق هوا *100 kPa* و دمای آن *15°C* است. $\beta = -0.005°C/m$

حل:

$$P=P_1\left\{\frac{T_0+\beta y}{T_0+\beta y_1}\right\}^{-\frac{g}{\beta R}}$$

$$\Rightarrow P=100\left\{\frac{288+[-0.005]\times 3000}{288+[-0.005]\times 300}\right\}^{-9.806/(-0.005\times 287)}=72\ kPa\ \ abs$$

$$P=\rho RT\Rightarrow\rho=\frac{P}{RT}=\frac{72\times 10^3}{278\times\left[288+(-0.005)3000-300)\right]}=0.914\ kg/m^3$$

۲.۸. برای هوای ایزوترم در دمای *0 °C*، فشار و دانسیته در ارتفاع *4000* متری را به دست آورید. فشار مطلق در سطح دریا *0.1 MPa* است.

حل:

$$P_0=\rho_0 RT\Rightarrow\rho_0=\frac{P_0}{RT}=\frac{0.1\times 10^6}{287\times 273}=1.276\ g/m^3$$

$$P=P_0 exp\left\{\frac{\rho_0 g}{P_0}(y-y_0)\right\}=0.1\times 10^6 exp\left[-\frac{1.276\times 9.806}{0.1\times 10^6}(4000-0)\right]=6.062\times 10^4 Pa=60.62kPa$$

$$P=\rho RT\ ,\quad P_0=\rho RT\quad\Rightarrow\quad\frac{P}{P_0}=\frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow\rho=P\frac{\rho_0}{P_0}=6.062\times 10^4\times\frac{1.276}{0.1\times 10^6}=0.774\ kg/m^3$$

۲.۹. در هوای ایزوترم با دمای *25 °C* چند متر به طور قائم باید بالا رویم تا دانسیته، *10* درصد کاهش یابد؟

حل:

$$T=cte\ \Rightarrow\ \frac{P}{P_0}=\frac{\rho}{\rho_0}=0.9$$

$$\frac{\rho}{P_0}=\frac{1}{RT}=\frac{1}{287\times 298}=1.17\times 10^{-5}$$

$$\rho=\rho_0 exp\left[-\frac{\rho g}{P_0}(y-y_0)\right]\Rightarrow 0.9=exp\left[-1.17\times 10^{-5}\times 9.806\times(y-y_0)\right]\Rightarrow y-y_0=919.4m$$

۱۰-۲. فشار $50\ kPa$ را بر حسب الف) میلی‌متر ستون جیوه ب) متر ستون آب ج) متر ستون ترابرومید استیلن $(S = 2.94)$ بیان کنید.

حل:

الف)
$$50kPa \times \frac{760mmHg}{101.325kPa} = 375\,mmHg$$

ب)
$$50kPa \times \frac{10.34mH_2O}{101.325kPa} = 5.099\ mH_2O$$

ج)
$$P = \gamma h \Rightarrow h = \frac{P}{\gamma} = \frac{5\times10^4}{9806\times2.94} = 1.734m \quad \text{ترابرومیداستیلن}$$

۱۱-۲. یک فشارسنج بوردون خلاء نسبی $15\ kPa$ را نشان می‌دهد. بارومتر جیوه‌ای عدد $750\ mm$ را نشان می‌دهد. فشار را به دو روش دیگر بیان کنید.

حل:

$$P_b = -15kPa \times \frac{760mmHg}{101.325kPa} = -112.5mmHg$$

$$P = 15kPa + 750mmHg \times \frac{101.325kPa}{760mmHg} = 115kPa$$

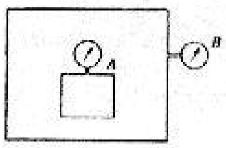
۱۲-۲. $300\ kPa$ را بر حسب متر ستون آب بیان کنید. بارومتر جیوه‌ای عدد $750\ mm$ را نشان می‌دهد.

حل:

$$P_{bar} = 750mmHg \times \frac{101.325kPa}{760mmHg} = 100kPa$$

$$P_{gage} = P_{atm} - P_{bar} = 300 - 100 = 200kPa$$

$$\Rightarrow P_{gage} = 200kPa \times \frac{10.34mH_2O}{101.325kPa} = 20.4mH_2O$$



شکل ۴۰-۲

۱۳-۲. در شکل ۴۰-۲ فشارسنج A عدد $80\ kPa$ و فشارسنج B عدد $120\ kPa$ را نشان می‌دهد. بارومتر خشک عدد $750\ mmHg$ را نشان می‌دهد. فشار مطلق A بر حسب سانتی‌متر ستون جیوه چقدر است؟

حل:

$$P_{bar} = 750mmHg \times \frac{101.325kPa}{760mmHg} = 100kPa$$

$$P_{A\,abs} = 80 + 120 + 100 = 300kPa \times \frac{76cmHg}{101.325kPa} = 225cmHg$$

۱۴-۲. چه ارتفاعی از ستون آب، ب) چه ارتفاعی از ستون نفت سفید $(S = 0.83)$ و ج) چه ارتفاعی از ستون ترابرومیداستیلن $(S = 2.94)$، با 300 میلی‌متر جیوه معادل است؟

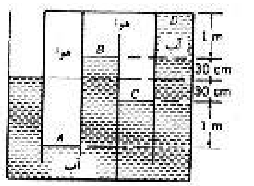
حل:

$P=\gamma_1 h_1=\gamma_2 h_2 \Rightarrow s_1\gamma_w h_1=s_2\gamma_w h_2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2}=\frac{s_2}{s_1}$

$\frac{h_1}{0.3}=\frac{13.6}{1}\Rightarrow h_1=4.082\,mH_2O$ نفت $\frac{h_1}{0.3}=\frac{13.6}{0.83}\Rightarrow h_1=4.92\,m$

تترابرمیداستیلن $\frac{h_1}{0.3}=\frac{13.6}{2.94}\Rightarrow h_1=1.389\,m$

۲.۱۵. مخزن شکل ۴۱-۲ محتوی آب و هواست. فشار در نقاط A، B، C و D را بر حسب پاسکال به دست آورید.



شکل ۴۱-۲

حل:

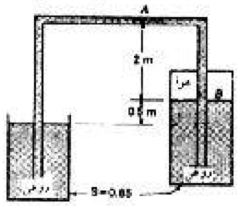
$P_A=\gamma h_1=9806\times(1+0.3)=1.275\times10^4 Pa=12.75\,kPa$

$P_A-P_B=\gamma h_2\Rightarrow P_B=P_A-\gamma h_2=1.275\times10^4-9806(1+0.3-0.3)=-2.94\times10^3 Pa=-2.94\,kPa$

$P_C=P_B=-2.94\,kP$

$P_D=P_C-\gamma h_3=-2.94\times10^3-9806\times(1+0.3+0.3)=-1.863\times10^4 Pa=-18.63\,kPa$

۲.۱۶. در شکل ۴۲-۲ لوله با روغن پر شده است. فشار در A و B را بر حسب متر ستون آب به دست آورید.



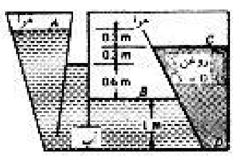
شکل ۴۲-۲

حل:

$P_A=-\gamma_1 h_1=-0.85\times9806\times2.5=-2.08378\times10^4 Pa=-2.125\,mH_2O$

$P_B=P_A+\gamma_1 h_2=-\gamma_1(h_2-h_1)=-0.85\times9806\times0.5=-4.16755\times10^3 Pa=-0.425\,mH_2O$

۲.۱۷. برای شکل ۴۳-۲ فشار در نقاط A، B، C و D را بر حسب پاسکال به دست آورید.



شکل ۴۳-۲

حل:

$P_A=-\gamma h_1=-9806\times\times0.6=-5.88\times10^3 Pa=-5.88\,kPa$

$P_B=\gamma h_2=9806\times0.6=5.88\times10^3 Pa=5.88\,kPa \quad P_C=P_B=5.88\,kPa$

$P_D=P_C+\gamma_{oil} h_3=5.88\times10^3+0.9\times9806\times1.9=2.265\times10^4 Pa=22.65\,kPa$

۲-۱۸. در شکل a ۱۰-۲ اگر $h = 50cm$ باشد، فشار در A بر حسب پاسکال چقدر است؟ چگالی مایع 1.90 است.

حل:
$$P = \gamma h = 1.90 \times 9806 \times 0.50 = 9315.7\,Pa$$

۲-۱۹. در شکل b ۱۰-۲ اگر $P_A = -30kPa$ باشد، h چقدر است؟ مایع نفت سفید $(S = 0.83)$ است.

حل:
$$P_A = -\gamma h \Rightarrow h = -\frac{P_A}{\gamma} = -\frac{-30 \times 10^3}{0.83 \times 9806} = 3.686\,m$$

۲-۲۰. در شکل b ۱۰-۲ مایع آب است و $h = 15\ cm$ می‌باشد. فشار مطلق PA را بر حسب متر ستون آب به دست آورید. بارومتر عدد $750\ mmHg$ را نشان می‌دهد.

حل:
$$P_{bar} = 750\,mmHg \times \frac{1.01325 \times 10^5\,Pa}{760\,mmHg} = 99991.77\,Pa$$

$$P_{A\ abs} = -\gamma h + P_{bar} = (-9806 \times 0.15) + 99991.77 = 98520.87\,Pa \times \frac{10.34\,mH_2O}{1.01325 \times 10^5\,Pa} = 10.05\,mH_2O$$

۲-۲۱. در شکل c ۱۰-۲ داریم: $S_1 = 0.86$ ، $S_2 = 1.0$ ، $h_2 = 90mm$ و $h_1 = 150mm$ PA را بر حسب میلی‌متر جیوه به دست آورید. اگر بارومتر، عدد $720\ mmHg$ را نشان دهد، فشار مطلق P_A بر حسب متر ستون آب چقدر است؟

حل:
$$P_A = \gamma_2 h_1 - \gamma_1 h_2 = 1 \times 9806 \times 0.15 - 0.86 \times 9806 \times 0.09 = 711.9\,Pa \times \frac{760\,mmHg}{1.01325 \times 10^5\,Pa} = 5.34\,mmHg$$

$$P_{bar} = 720\,mmHg \times \frac{10.34\,mH_2O}{760\,mmHg} = 9.796\,mH_2O$$

$$P_A = P_{bar} + \gamma_2 h_1 - \gamma_1 h_2 = P_{bar} + s_2\gamma_w h_1 - s_1\gamma_w h_2$$

$$P_A(mH_2O) = P_{bar} + s_2 h_1 - s_1 h_2 = 9.796 + 1.0 \times 0.150 - 0.86 \times 0.9 = 9.869\,mH_2O\ abs$$

۲-۲۲. در شکل c ۱۰-۲ سیال داخل مخزن A، گاز است. سیال مانومتری آب است. $h_1 = 75mm$ فشار در A را بر حسب میلی‌متر ستون جیوه به دست آورید.

حل:
$$P_A = \gamma h_1 = 9806 \times 0.075 = 735.45\,Pa \times \frac{760\,mmHg}{1.01325 \times 10^5\,Pa} = 5.51\,mmHg$$

۲-۲۳. در شکل a ۱۱-۲، $S_1 = 1.0$ ، $S_2 = 0.95$ ، $S_3 = 1.0$ ، $h_1 = h_2 = 280mm$ و $h_3 = 1mm$ $P_A - P_B$ را بر حسب میلی‌متر ستون آب به دست آورید.

حل:

$$P_A-\gamma_1 h_1-\gamma_2 h_2+\gamma_3 h_3=P_B$$

$$P_A-P_B=\gamma_1 h_1+\gamma_2 h_2-\gamma_3 h_3=s_1\gamma_w h_1+s_2\gamma_w h_2-s_3\gamma_w h_3$$

$$\frac{P_A-P_B}{\gamma_w}=s_1 h_1+s_2 h_2-s_3 h_3=1.0\times0.280+0.95\times0.280-1.0\times1=-0.454mH_2O=-454mmH_2O$$

۲-۲۴. در مسألهٔ قبل اگر اختلاف فشار $P_A - P_B = -350\,mmHg$ باشد، اختلاف ارتفاع سطح مایع در دو ستون مانومتر یعنی h_2 چقدر خواهد بود؟

حل:

با توجه به مسئله قبل داریم:

$$\frac{P_A-P_B}{\gamma_w}=s_1 h_1+s_2 h_2-s_3 h_3$$

$$-0.350=1.0\times h_1+0.95h_2-1.0\times h_3$$

حال باید h_1 و h_3 را بر حسب h_2 بنویسیم. با توجه به شکل:

$$h_1=0.28+\frac{0.28-h_2}{2} \quad , \quad h_3=1-\frac{0.28-h_2}{2}$$

$$\Rightarrow -0.350=(0.28+\frac{0.28-h_2}{2})+0.95h_2-(1-\frac{0.28-h_2}{2}) \;\Rightarrow h_2=-1.8m=-1800mm$$

۲-۲۵. در شکل b ۱۱-۲ داریم:

$h_3=120mm$, $h_2=70mm$ ، $h_1=150mm$ ، $S_2=13.6$ ، $S_1=S_3=0.83$

الف) اگر $P_B=70kPa\ \ gage$ باشد، P_A چقدر است؟ ب) اگر $P_A = 140\ kPa\ \ abs$ باشد و مانومتر $720\ mmHg$ را نشان دهد P_B بر حسب متر ستون آب چقدر است؟

حل:

الف)

$$P_A+\gamma_1 h_1-\gamma_2 h_2-\gamma_3 h_3=P_B \quad\Rightarrow\quad P_A=P_B+\gamma_2 h_2+\gamma_3 h_3-\gamma_1 h_1$$

$$\Rightarrow P_A=70000-13.6\times9806\times0.070+0.83\times9806\times0.120-0.83\times9806\times0.150=7.909\times10^4 Pa=79.09kPa$$

ب) با توجه به قسمت الف)

$$P_B=140000+0.83\times9806\times0.150-13.6\times9806\times0.070-0.83\times9806\times0.120=130908Pa$$

$$\Rightarrow P_B=13908Pa\times\frac{10.34mH_2O}{1.01325\times10^5Pa}=13.359mH_2O$$

$$P_{bar}=720mmHg\times\frac{10.34mH_2O}{760mmHg}=9.796mH_2O$$

$$P_{B\ gage}=P_{B\ abs}-P_{bar}=13.359-9.796=3.563mH_2O$$

۲-۲۶. در مسألهٔ قبل اگر $P_A=P_B$ باشد، اختلاف ارتفاع h_2 چقدر است؟

حل:

طبق مسئله قبل:

$$P_A-P_B=\gamma_2 h_2-\gamma_3 h_3-\gamma_1 h_1=s_2\gamma_w h_2-s_3\gamma_w h_3-s_1\gamma_w h_1$$

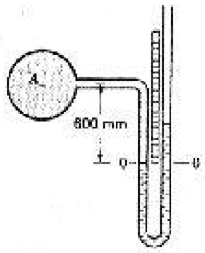
$$P_A=P_B \Rightarrow s_2 h_2-s_3 h_3-s_1 h_1=0 \Rightarrow 0.83h_1-13.6h_2-0.83h_3=0$$

حال باید h_1 و h_3 را بر حسب h_2 محاسبه کنیم با توجه به شکل مسئله در این حالت:

$$h_1 = 0.15 - \frac{0.07 - h_2}{2} \quad , \quad h_3 = 0.12 + \frac{0.07 - h_2}{2}$$

$$0.83\times(0.15-\frac{0.07-h_2}{2})-13.6h_2-0.83\times(0.12+\frac{0.07-h_2}{2})=0 \Rightarrow h_2=-2.6\times10^{-3}m=-2.6mm$$

یعنی سطح مایع در طرف چپ به اندازهٔ $2.6mm$ بالاتر از سطح این در سمت راست خواهد بود.



شکل ۴۴-۲

۲.۲۷. در شکل ۴۴-۲ مخزن A محتوی آب است. چگالی سیال مانومتری 2.94 است. وقتی $P_A = 90mmH_2O$ است، سطح مایع در شاخه سمت چپ مانومتر در مقابل نشانهٔ صفر خط کش قرار می‌گیرد. اگر P_A به $8kPa$ برسد. سطح مایع در شاخه سمت راست چه عددی را بر روی خط کش نشان خواهد داد؟

حل:

هرگاه فرض کنیم با افزایش فشار، سطح آب در سمت راست به اندازهٔ x بالا برود داریم:

h_1: فاصله سطح مایع در سمت راست از سطح $0\text{-}0$ $\qquad$ h_2: فاصله سطح مایع در سمت چپ از سطح $0\text{-}0$

I) قبل از افزایش فشار

$$P_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 = 0$$

$$P_A = 0.09mH_2O \times \frac{1.01325\times10^5 Pa}{10.34\,mH_2O} = 881.94\,Pa$$

$$\Rightarrow 881.94 + 9806\times0.6 - 2.94\times9806\times h_2 = 0 \ \Rightarrow h_2 = 0.235\,m$$

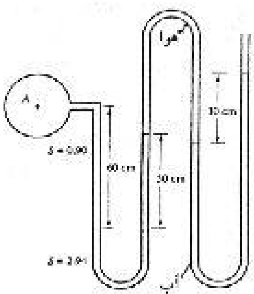
II) بعد از افزایش فشار

$$P_A + \gamma_1(0.6+x) - \gamma_2(0.235+2x) = 0$$

$$\Rightarrow 8000+9806\times(0.6+x)-2.94\times9806\times(0.235+2x)=0 \Rightarrow x=0.3834m = 383.4\,mm$$

۲.۲۸. در شکل ۴۵-۲ فشار در A را بر حسب پاسکال بدست آورید.

فشار هوا در داخل لوله چقدر است؟



شکل ۴۵-۲

حل:
$$P_A + 0.6 \times 0.9 \times 9806 - 0.5 \times 2.94 \times 9806 - 0.3 \times 9806 = 0$$
$$\Rightarrow P_A = 12061\,Pa$$
$$P_{air} - 0.3 \times 9806 = 0 \qquad \Rightarrow P_{air} = 2942\,Pa$$

۲.۲۹. در شکل ۲۵-۲ اگر به جای آب، جیوه قرار گیرد و اندازه‌گیریها با حالت قبل یکی باشد فشار در A چقدر خواهد بود؟ فشار هوا در داخل لوله را بدست آورید.

حل:
$$P_A + 0.6 \times 0.9 \times 9806 - 0.5 \times 2.94 \times 9806 - 0.3 \times 13.6 \times 9806 = 0$$
$$\Rightarrow P_A = 49128\,Pa$$
$$P_{air} - 0.3 \times 13.6 \times 9806 = 0 \qquad \Rightarrow P_{air} = 40008\,Pa$$

۲.۳۰. در شکل ۱۲-۲ اختلاف فشار گازها $9mmH_2O$ است

$\gamma_2 = 9.8kN/m^3$، $\gamma_3 = 10.5kN/m^3$ و $a/A = 0.01$ است. R را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از معادله $(2.4.1)$ برای میکرومانومترها داریم:

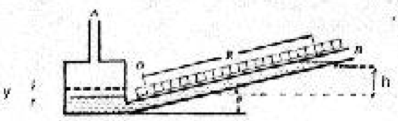
$$P_C - P_D = R\left[\gamma_3 - \gamma_2\left(1 - \frac{a}{R}\right) - \gamma_1 \frac{a}{R}\right]$$

$$P_C - P_D = 9mmH_2O \times \frac{1.01325 \times 10^5 Pa}{10340\,mmH_2O} = 88.194\,Pa$$

با توجه به اینکه گاز نسبت به بقیه γها کوچک است از عبارت $\gamma_1 \frac{a}{A}$ صرفنظر می‌کنیم.

$$\Rightarrow 88.19 = R\left[10.5 \times 10^3 - 9.8 \times 10^3(1 - 0.01)\right] \Rightarrow R = 0.1105\,m = 110.5\,mm$$

۲.۳۱. مانومتر مایل شکل ۱۳-۲ وقتی فشار A و B یکسان است، صفر را نشان می‌دهد. قطر مخزن $5cm$ و قطر لوله مایل $6mm$ است. چگالی مایع مانومتری 0.832 و $\theta = 30°$ است. اختلاف فشار P_A-P_B را (برحسب پاسکال) به صورت تابعی از R (بر حسب سانتی‌متر) بیان کنید.



حل:

$$P_A - \gamma y - \gamma h = P_B \Rightarrow P_A - P_B = \gamma(h + y)$$

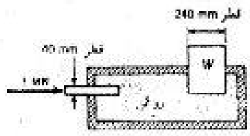
$$h = R\sin\theta = R\sin 30° = \frac{R}{2}$$

حجم آب جابجا شده نسبت به لوله مایل = حجم آب جابجا شده نسبت به مخزن

$$\Rightarrow \pi r_1^2 L_1 = \pi r_2^2 L_2 \Rightarrow \frac{0.05^2}{4} \times y = \frac{0.006^2}{4} \times R \Rightarrow y = 0.0144R$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = 0.832 \times 9.806 \times \left(\frac{R}{2} + 0.0144R\right) = 41.97R \quad Pa$$

۲-۳۲. در شکل ۲-۴۶ وزن W که به واسطهٔ نیروی وارده به پیستون نگهداری می‌شود، چقدر است؟

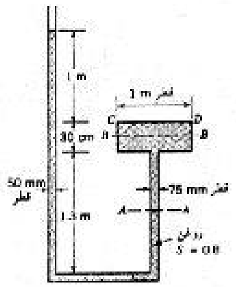


شکل ۲-۴۶

حل:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \Rightarrow \frac{1}{\pi \times 20^2/4} = \frac{F_2}{\pi \times 120^2/4} \Rightarrow F_2 = 36MN = W$$

۲-۳۳. در شکل ۲-۴۷ از وزن مخزن صرفنظر کنید الف) نیرویی که به سطح دایره‌ای CP به طرف بالا وارد می‌شود چقدر است؟ ب) در مقطع A-A نیروی فشاری وارد به دیوارهٔ لوله چقدر است؟



شکل ۲-۴۷ مسایل ۲-۳۳ و ۲-۳۴

حل:

الف)

$$P_{CD} = \gamma h = 0.8 \times 9806 \times 1 = 7844.8Pa$$

$$F_{CD} = P_{CD} . A_{CD} = 7844.8 \times \frac{\pi \times 1^2}{4} = 6161.3N$$

ب)

در بالای لوله $P_1 = 1.3 \times 7840 = 10192Pa$

در پایین لوله $P_2 = 2.6 \times 7840 = 20384Pa$

$$\overline{P} = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{10192 + 20384}{2} = 15288Pa$$

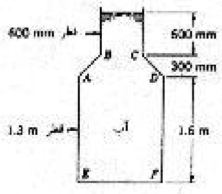
$$F = \overline{P} . A = \overline{P} . (\pi \times 75 \times 10^{-3} \times 1.3) = 4682.8N$$

۲-۳۴. در شکل ۲-۴۷ اگر سطح روغن داخل لوله به اندازهٔ $3m$ پایین‌تر بیاید نیروی وارده از روغن به سطح CD چقدر خواهد شد؟

حل:

$$P = -\gamma h = -0.8 \times 9806 \times 0.3 = -2353.44Pa$$

$$F = PA = 2353.44 \times \frac{\pi \times 1^2}{4} = 1848N$$



شکل ۴۸-۲

۲.۳۵. مقطع ظرفی که در شکل ۴۸-۲ نشان داده شده، دایره است. مقدار نیروی قائم رو به بالا وارده به سطح مخروط ناقص $ABCD$ را تعیین کنید. مقدار نیروی رو به پایین وارده به صفحهٔ EF را تعیین کنید. آیا این نیرو با وزن سیال برابر است؟ چرا؟

حل:

حجم مخروط ناقص $ABCD$ عبارت است از:

$$V=\frac{\pi h}{3}\left(\frac{AD^2}{4}+\frac{BC^2}{4}+\frac{AD.BC}{4}\right)=\frac{\pi\times0.3}{3}\left(\frac{0.6^2}{4}+\frac{1.3^2}{4}+\frac{0.6\times1.3}{4}\right)=0.222\,m^3$$

حجم آب فرضی روی سطح $ABCD$:

$$V=\left[(\pi\times1.3^2\times0.3/4)-0.222\right]+\left[(\pi\times1.3^2\times0.6/4)-(\pi\times0.6^2\times0.6/4)\right]=0.8027\,m^3$$

وزن آب فرض شده: $W=\gamma V=9806\times0.8027=7871\,N$

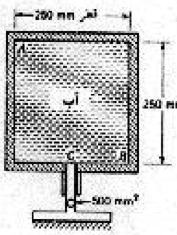
$\Rightarrow$ $ABCD$ نیروی رو به بالای وارد بر سطح مخروطی = $7871\ N$

محاسبه نیروی وارد بر سطح EF:

$$P=\gamma h=9806\,(1.6+0.3+0.6)=24515\,Pa$$

$$F=PA=24515\times\pi\times\frac{1.3^2}{4}=32539\,N$$

این نیرو با وزن سیال فرضی برابر است و بیشتر از وزن سیال واقعی داخل ظرف می‌باشد چون از طرف سطح مخروطی ناقص $ABCD$ نیرویی به طرف پایین بر سیال وارد می‌شود.



شکل ۴۹-۲

۲.۳۶. در شکل ۴۹-۲ وزن ظرف استوانه هنگامی که خالی است $400\,N$ است. ظرف با آب پر می‌شود و به طور وارونه روی پیستون قرار می‌گیرد. الف) نیرویی که به سطح فوقانی ظرف وارد می‌شود چقدر است؟ ب) اگر وزنه‌ای به وزن $600\,N$ روی ظرف قرار دهیم، نیرویی که به سطح فوقانی ظرف وارد می‌شود، چقدر افزایش می‌یابد؟

حل:

وزن آب $W_1=\gamma V=9806\times\pi\times\frac{0.25^2}{4}\times0.25=120.34\ N$

وزن کل $W_t=W_1+W_2=120.34+400=520.34\ N$

الف)

$$P_C=\frac{W_t}{A_C}=\frac{520.34}{500\times10^{-6}}=1040680\,Pa\ ,\ P_A=P_C-\gamma h=1040680-9806\times0.25=1038228.5\,Pa$$

$$F_A=P_A.A_A=1038228.5\times\pi\times\frac{0.25^2}{4}=5.096\times10^4N=50.96\,kN$$

ب)

$$W_t'=W_t+W'=520.34+600=1120.34\,N$$

$$P_C' = \frac{W_t'}{A_C} = \frac{1120.31}{500\times10^{-6}} = 2240680\,Pa \quad , \quad P_A' = P_C' - \gamma h = 2240680 - 9806\times0.25 = 2238228.5\,Pa$$

$$F_A' = P_A' A_A = 2238228.5 \times\pi\times \frac{0.25^2}{4} = 10.987\times10^4 N = 109.8\,kN$$

$$\Delta F = F_A' - F_A = 109.87 - 50.96 = 58.91\,kN$$

۲.۳۷. بشکه‌ای به قطر $600\,mm$ با آب پر شده است. لولهٔ قائمی به قطر $12\,mm$ به بالای بشکه متصل می‌شود. چند کیلوگرم آب باید به داخل لوله افزود تا نیرویی معادل $4\,kN$ به سطح فوقانی بشکه وارد شود. از تراکم‌پذیری آب صرف‌نظر کنید.

حل:

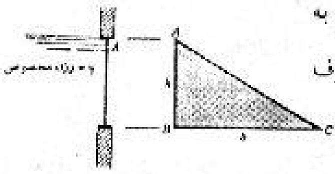
$$P = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi D^2/4} = \frac{4\times10^3}{\pi\times0.6^2/4} = 14147\,Pa$$

$$P_1 = P_2 = 14147 = \gamma h \Rightarrow h = \frac{14147}{9806} = 1.443\,m$$

$$V = hA = 1.443\times\frac{\pi}{4}\times0.012^2 = 1.63\times10^{-4}\,m^3$$

$$m = \rho V = 1000\times1.63\times10^{-4} = 0.163\,kg$$

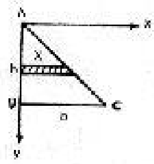
۲.۳۸. در شکل ۵۰-۲ مثلث قائم‌الزاویه ABC به طور قائم قرار دارد، به طوری که رأس آن بر سطح آزاد مایع منطبق است. نیروی وارد به یک طرف سطح را الف) با انتگرال‌گیری و ب) با استفاده از فرمول، تعیین کنید.



شکل ۵۰-۲ مسایل ۳۸-۲ ، ۴۰-۲ ، ۵۰-۲ و ۵۱-۲.

حل:

الف)



با توجه به تشابه دو مثلث $\frac{x}{b} = \frac{y}{h} \Rightarrow x = \frac{by}{h}$

$$dF = PdA = \gamma y dA = \gamma y x dy = \gamma y \frac{by}{h}\,dy = \frac{\gamma b}{h} y^2 dy$$

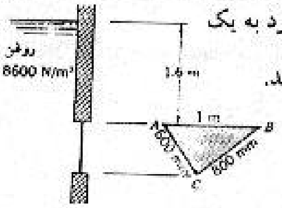
$$F = \int_0^h df = \frac{\gamma b}{h}\int_0^h y^2 dy = \frac{\gamma b}{h}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{\gamma b h^2}{3}$$

ب)

$$F = \gamma \bar{h} A \;,\; \bar{h} = \frac{2}{3}h \;,\; A = \frac{bh}{2}$$

$$\Rightarrow F = \gamma\times\frac{2}{3}h\times\frac{bh}{2} = \frac{\gamma b h^2}{3}$$

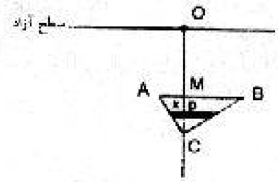
۲.۳۹. سطح مثلثی ABC در شکل ۵۱-۲ قائم‌الزاویه است. نیروی وارد به یک طرف سطح را الف) با انتگرال‌گیری و ب) با استفاده از فرمول، تعیین کنید.



شکل ۵۱-۲ مسایل ۳۹-۲ ، ۴۲-۲ و ۲۳-۲ ، ۲۸-۲ ، ۲۹-۲.

حل:

الف)



$$\begin{cases} MA+MB=1 \\ MA^2+MC^2=0.6^2=0.36 \\ MB^2+MC^2=0.8^2=0.64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA=0.36m \\ MB=0.64m \\ MC=0.48m \end{cases}$$

$$DC=OC-OD=(1.6+0.48)-y=2.08-y$$

$$\frac{DC}{MC}=\frac{x}{AB} \Rightarrow x=\frac{AB}{MC}.DC=\frac{1}{0.48}(2.08-y)=4.333-2.083y$$

$$dF=PdA=\gamma ydA=\gamma y\,xdy=\gamma y.(4.333-2.083y)dy=\gamma[4.333y-2.083y^2]dy$$

$$F=\int_{1.6}^{2.08}df=\gamma\int_{1.6}^{2.08}\left(4.333y-2.083y^2\right)dy=0.423\gamma=0.4224\times 8600=3632.6N$$

ب)

$$F=\bar{P}.A=\gamma\bar{h}.A$$

$$\bar{h}=\frac{1}{3}MC+1.6=\frac{1}{3}\times 0.48+1.6=1.76m,\; A=\frac{0.6\times 0.8}{2}=0.24m^2$$

$$F=8600\times 1.76\times 0.24=3632.6\,N$$

۲.۴۰. برای سطح ABC در شکل ۵۰-۲ گشتاور نیروی وارد به یک طرف سطح حول AB چقدر است؟

$\gamma=9000\,N/m^3$

حل:

روش اول: استفاده از روابط

$$I_{xy}=\frac{b^2h^2}{8}, \qquad \bar{I}_{xy}=I_{xy}-\bar{x}\,\bar{y}\,A$$

$$\bar{x}=\frac{b}{3},\; \bar{y}=\frac{2h}{3} \quad ,A=\frac{1}{2}bh \Rightarrow \bar{I}_{xy}=\frac{b^2h^2}{8}-\frac{b}{3}\times\frac{2h}{3}\times\frac{1}{2}bh=\frac{1}{72}b^2h^2$$

$$x_p=\bar{x}+\frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A}=\frac{b}{3}+\frac{\frac{1}{72}b^2h^2}{\frac{2h}{3}\times\frac{1}{2}bh}=\frac{b}{3}+\frac{b}{24}=\frac{3b}{8}$$

$$M=F\times x_p=\frac{b\gamma h^2}{3}\times\frac{3b}{8}=\frac{\gamma}{8}b^2h^2=\frac{9000}{8}b^2h^2=1125b^2h^2$$

روش دوم: استفاده از انتگرال

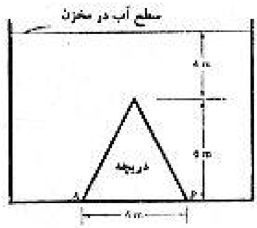
$$dF=\frac{b\gamma}{h}y^2dy$$

فاصله نیروی دیفرانسیلی از محور AB : $\quad x_F = \frac{x}{2} = \frac{by}{2h}$

$$dM = x_F \times dF = \frac{by}{2h} \times \frac{by}{h} y^2 dy = \frac{\gamma b^2}{2h^2} y^3 dy$$

$$\Rightarrow M = \int_0^h x_F dF = \frac{\gamma b^2}{2h^2} \int_0^y y^3 dy = \frac{\gamma b^2}{2h^2} \times \frac{h^4}{4} = \frac{\gamma b^2 h^2}{8} = \frac{9000 \times b^2 h^2}{8} = 1125 b^2 h^2$$

۲.۴۱. دریچه مثلثی نشان داده شده در شکل ۲-۵۲ در انتهای دیواره قائم یک مخزن حول محور افقی AB لولا شده است گشتاور مورد نیاز جهت نگهداشتن دریچه در وضعیت قایم را محاسبه کنید.



شکل ۲-۵۲

حل:

$$F = \gamma \bar{h} A$$

$$\bar{h} = (4 + 6 \times \frac{2}{3}) = 8m \quad , \quad A = \frac{6 \times 6}{2} = 18 m^2 \Rightarrow F = 9806 \times 8 \times 18 = 1412064 N$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} = 8 + \frac{1/36 \times 6 \times 6^3}{8 \times 18} = 8.25 m \Rightarrow L = (4+6) - 8.25 = 1.75 m$$

$$M = FL = 1412064 \times 1.75 = 2471112 \ N.m$$

۲.۴۲. برای سطح قائم ABC در شکل ۲-۵۱ گشتاور نیروی وارد به یک طرف سطح حول AB چقدر است؟

حل:

با توجه به مسئله ۳۹ داریم:

روش اول: استفاده از روابط

$$y_P = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} \qquad \bar{y} = 1.6 + \frac{0.48}{3} = 1.76 m$$

$$\Rightarrow y_p = 1.76 + \frac{1 \times 0.48^3/36}{1.76 \times (0.48 \times 1)/2} = 1.767276 m$$

y فاصله نقطه اثر نیرو تا محور AB $\quad y = 1.76726 - 1.6 = 0.16726 \ m$

$$M = F_y = 3632.6 \times 0.16727 = 607.63 \ N.m$$

روش دوم: استفاده از انتگرال

$$dF = \gamma (4.333y - 2.083y^2) dy$$

$$dM = \gamma (4.333y - 2.083y^2)(y - 1.6) dy$$

$$M = \int dM = \gamma \int_{1.6}^{2.08} (4.333y - 2.083y^2)(y - 1.6) \, dy = 607.63 \ N.m$$

۲.۴۳. در شکل ۵۱-۲ سطح ABC را با یک خط افقی به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. به طوری که مقدار نیروی فشاری وارده از آب به آنها برابر باشد. فاصلهٔ قائم این خط با AB چقدر است؟

حل:

روش اول: استفاده از روش انتگرال

$$dF = \frac{\gamma}{0.48} y\,(2.08 - y)$$

$$F_1 = \int_{1.6}^{1.6+y} \frac{\gamma}{0.48} y\,(2.08 - y)\,dy \quad , \quad F_2 = \int_{1.6+y}^{1.6+0.48} \frac{\gamma}{0.48} y\,(2.08 - y)\,dy$$

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \int_{1.6}^{1.6+y} \frac{\gamma}{0.48} y\,(2.08 - y)\,dy = \int_{1.6+y}^{2.08} \frac{\gamma}{0.48} y\,(2.08 - y)\,dy$$

$$\Rightarrow \int_{1.6}^{y} y\,(2.08 - y)\,dy = \int_{y}^{2.08} y(2.08 - y)\,dy$$

$$\Rightarrow 1.04y^2 - \frac{y^3}{3}\Big]_{1.6}^{y} = 1.04y^2 - \frac{y^3}{3}\Big]_{y}^{2.08} \Rightarrow 2.08y^2 - \frac{2y^3}{3} = 2.8$$

اگر معادله فوق را حل کنیم $y = 1.75\ m$ بدست می‌آید.

AB فاصله خط با $= 1.75 - 1.6 = 0.15\ m$

روش دوم : از طریق روابط

با استفاده از مسئله ۳۹ داشتیم: $3632.6\ N =$ نیروی فشاری وارده از آب به کل سطح

نیروی فشاری وارده بر هر قسمت تقسیم شده $= \frac{3632.6}{2} = 1816.3\ N$

اگر فاصله قائم این خط با AB برابر y باشد داریم:

$$\frac{DC}{MC} = \frac{x}{AB} \quad \Rightarrow \frac{0.48 - y}{0.48} = \frac{x}{1} \quad \Rightarrow x = \frac{0.48 - y}{0.48}$$

برای قسمت پایین داریم:

$$A = \frac{x\,(0.48 - y)}{2} = \frac{(0.48 - y)^2}{0.96}$$

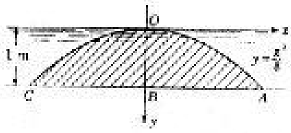
$$F = \gamma \bar{h} A \Rightarrow 1816.3 = 8600 \times (1.6 + y + \frac{0.48 - y}{3}) \times \frac{(0.48 - y)^2}{0.96}$$

از حل معادله فوق : $y = 0.15\,m$

۲.۴۴. در شکل ۵۳-۲ نیروی وارد به یک طرف سطح قائم $OABCO$ چقدر است؟ $\gamma = 9\,kN/m^3$

حل:

مطابق شکل یک المان دیفرانسیلی انتخاب می‌کنیم.



شکل ۵۳-۲ مسایل ۲.۴۴، ۲-۵۵ و ۲-۸۰

$dA = 2(xdy)$

$dF = PdA = \gamma y \times 2(xdy) = 2\gamma xydy$

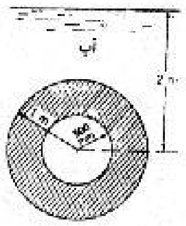
$y = \frac{x^2}{8} \quad \Rightarrow dy = \frac{x}{4}dx \quad \Rightarrow dF = 2\gamma x \times \frac{x^2}{8} \times \frac{x}{4}dx = \frac{\gamma}{16}x^4dx$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 8 \quad \Rightarrow \ x = \sqrt{8}$

$$F = \int_0^{\sqrt{8}} df = \frac{\gamma}{16}\int_0^{\sqrt{8}} x^4dx = \frac{\gamma}{16}\left(\frac{x^5}{5}\right) = \frac{9000}{16} \times \frac{181.016}{5} = 20364.3\,N$$

۲ـ۴۵. در شکل ۵۴-۲ نیروی وارده از آب به یک طرف حلقهٔ قائم چقدر است؟



شکل ۵۴-۲
مسایل ۴۵-۲ ، ۵۲-۲

حل:

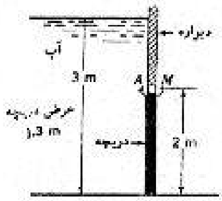
مرکز سطح در عمق 2 متری زیر آب قرار دارد بنابراین:

$F_2 = P_2A_2 = 9806 \times 2 \times \pi \times 1^2 = 61613\,N$

$F_1 = P_1A_1 = 9806 \times 2 \times \pi \times 0.5^2 = 15403\,N$

$F = F_2 - F_1 = 61613 - 15403 = 46210\,N = 46.21\,kN$

۲ـ۴۶. در شکل ۵۵-۲ گشتاور لازم برای نگهداری دریچه حول A چقدر است؟



شکل ۵۵-۲
مسایل ۴۶-۲ - ۴۷-۲ ، ۵۳-۲.

حل:

نیروی وارد بر دریچه از طرف آب عبارت است از: $F = \gamma \bar{h} A = 9806 \times (1 + \frac{2}{2}) \times (2 \times 1.3) = 50991.2\,N$

$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A}$

$I_G = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12} \times 1.3 \times 2^3 = 0.867 \Rightarrow y_p = 2 + \frac{0.867}{2(2 \times 1.3)} = 2.167\,m$

فاصله نقطه اثر نیرو از محور A: $L_1 = 2.167 - 1 = 1.167$

گشتاور وارد بر دریچه از طرف آب حول A: $M_1 = F.L_1 = 50991.2 \times 1.167 = 5.95 \times 10^4 N = 59.5\,KN.m$

برای نگهداشتن دریچه باید گشتاور 59.5 $kN.m$ را برخلاف جهت قبل اعمال نمود.

۲ـ۴۷. در شکل ۵۵-۲ فرض کنید در سمت راست دریچه نیز تا نقطهٔ A آب وجود داشته باشد. برآیند نیروهای وارده از آب به دو طرف دریچه را به دست آورید. خط اثر برآیند را تعیین کنید.

حل:

نیروی وارد بر طرف دیگر دریچه

$$F_2=\gamma \bar{h}_2 A=9806\times\left(\frac{2}{2}\right)\times(2\times1/3)=25495.67$$

$$F=F_1-F_2=50991.2-25495.6=25495.6\,N$$

$$y_{p_2}=\frac{2}{2}+\frac{0.867}{2/2\times(2\times1/3)}=1.333\,m$$

$y_2=y_p=1.333m$ فاصله خط اثر نیروی وارد بر طرف دیگر دریچه از لولا

$$M_2=F_2.y_2=25495.6\times1.333=33986\,N.m$$

$$M=M_1-M_2\Rightarrow F_y=M_1-M_2\;\Rightarrow y=\frac{M_1-M_2}{F}=\frac{59500-33986}{25495/6}=1m$$

بنابراین خط اثر نیرو از مرکز سطح دریچه عبور می‌کند.

۲-۴۸. در شکل ۵۱-۲ فاصلهٔ مرکز فشار سطح مثلثی ABC از سطح آزاد مایع را به روش انتگرال‌گیری و نیز با استفاده از فرمول تعیین کنید.

حل:

الف) استفاده از انتگرال

از مسئلهٔ ۳۹ داریم:

$$dF=\gamma(4.333y-2.083y^2)dy\qquad,\qquad F=3632.6\,N$$

$$dM=dF.L=\gamma(4.333y-2.083y^2)ydy==\gamma(4.333y^2-2.083y^3)dy$$

$$M=\gamma\int_{1.6}^{2.08}(4.333y^2-2.083y^3)dy=\gamma\left(\frac{4.333y^3}{3}-\frac{2.083y^4}{4}\right)_{1.6}^{2.08}=8600\times0.747=6424.2N.m$$

$$M=Fy_p\quad\Rightarrow\quad y_p=\frac{M}{F}=\frac{6424.2}{3632.6}=1.77\,m$$

ب) استفاده از روابط

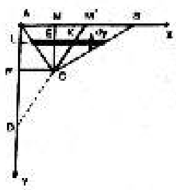
$$\bar{y}=1.6+\frac{0.48}{3}=1.76m$$

$$y_p=\bar{y}+\frac{I_G}{\bar{y}A}=1.76+\frac{1/36\times1.6\times0.48^3}{1.76\times(1\times0.48)/2}=1.77\,m$$

۲-۴۹. در شکل ۵۱-۲ موقعیت افقی مرکز فشار سطح مثلثی ABC را به روش انتگرال‌گیری تعیین کنید.

حل:

هرگاه M' وسط ضلع AB باشد و CM' را امتداد دهیم تا نقطه D حاصل شود داریم:



$$\frac{CD}{DM'}=\frac{NC}{AM'}\Rightarrow\frac{CD}{DC+CM'}=\frac{0.36}{1/2}\Rightarrow DC=2.57\,CM'$$

$$MM'=AM'-AM=0.5-0.36=0.14m\qquad,\qquad MC=0.48m$$

$$M'C^2=MM'^2+MC^2=0.14^2+0.48^2=0.25\;\Rightarrow M'C=0.5\,m$$

$$\Rightarrow DC=2.57\times0.5=1.285\,m$$

$$\frac{CK}{CM'}=\frac{CE}{CM} \quad \Rightarrow \; CK=\frac{CF}{CM}\times CM'=\frac{(2.08-y)}{0.48}\times 0.5=1.042\,(2.08-y)$$

(y نسبت به سطح آزاد می‌باشد)

$$\Delta DAB:\frac{LK}{AM'}=\frac{DK}{DM'} \;\Rightarrow LK=\frac{DK}{DM'}\times AM'=\frac{DC+CK}{DC+CM'}\times AM'$$

$$\Rightarrow LK=\frac{1.285+1.042\,(2.08-y)}{1.285+0.5}\times 0.5=0.967-0.292y=L$$

از مسئله ۳۹ داریم:

$$dF=\gamma\,(4.333y-2.083y^2)dy$$

$$dM=dF.L=\gamma(4.333y-2.083y^2)(0.967-0.292y)dy$$

$$M=\gamma\int_{1.6}^{2.08}(4.333y-2.083y^2)(0.967-0.292y)dy$$

اگر انتگرال فوق را محاسبه کنیم داریم:

$$M=\gamma\times 0.191=8600\times 0.191=1642.6\,N.m$$

$$M=Fx_p \quad\Rightarrow\quad x_p=\frac{M}{F}=\frac{1642.6}{3632.6}=0.452m=452mm$$

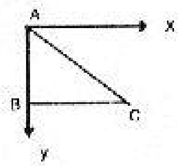
عدد فوق فاصله مرکز فشار (x_p) را از رأس A نشان می‌دهد.

۲-۵۰. در شکل ۵۰-۲ مقدار و امتداد نیروی برآیند وارد به مثلث ABC را با استفاده از منشور فشار تعیین کنید.

حل:

منشور فشار را رسم می‌کنیم تا حجمی در سه بعد x و y و z حاصل شود هرگاه محور zها را عمود بر صفحه کتاب نقطه o (مبدأ مختصات) فرض کنیم داریم:

در حل این مسئله از انتگرال دوگانه تبدیل یافته استفاده می‌کنیم البته می‌توان از انتگرال سه گانه نیز استفاده نمود.



حجم منشور:

$$v=\iiint dxdydz=\iint v_n dA$$

$$v=\iint_0^{\gamma y} dzdA=\int(\gamma y)dA$$

$$dA=\frac{by}{h}dy \Rightarrow v=\int_0^h \gamma y\times\frac{by}{h}dy=\frac{\gamma b}{h}\int_0^h y^2dy=\frac{\gamma b}{h}\left(\frac{1}{3}y^3\right)_0^h=\frac{\gamma bh^2}{3}$$

گشتاور نسبت به محور x عبارت است از

$$M=\iint_0^{\gamma y} ydzdA=\int\gamma y^2dA$$

$$M=\int_0^h \gamma y^2\times\frac{by}{h}dy=\frac{\gamma b}{h}\int_0^h y^3dy=\frac{\gamma b}{h}\left(\frac{1}{4}y^4\right)_0^h=\frac{\gamma bh^3}{4}$$

$$y_p=\frac{M}{v}=\frac{\gamma bh^3/4}{\gamma bh^2/3}=\frac{3}{4}h$$

گشتاور نسبت به محور y عبارت است از

$$M = \iint_0^{\gamma y} xdzdA = \int x\gamma y dA$$

$$x = \frac{by}{h} \times \frac{1}{2} \Rightarrow M = \int_0^h \frac{by}{h} y^2 \times \frac{by}{2h} dy = \frac{b^2\gamma}{2h^2} \int_0^h y^3 dy = \frac{b^2\gamma}{2h^2} \left(\frac{1}{4} y^4\right)_0^h = \frac{\gamma b^2 h^2}{8}$$

$$x_p = \frac{M}{v} = \frac{\gamma b^2 h^2/8}{\gamma bh^2/3} = \frac{3}{8} b$$

۲.۵۱. در شکل ۵۰-۲ محل مرکز فشار را به روش انتگرال‌گیری تعیین کنید.

حل:

$$F = \frac{b\gamma h^2}{3} \quad , \quad \delta F = \frac{b\gamma}{h} y^3 dy$$

گشتاور نسبت به محور x:

$$\delta M = \frac{b\gamma}{h} y^3 dy \Rightarrow M = \int_0^h \frac{b\gamma}{h} y^3 dy = \frac{\gamma bh^3}{4}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{M}{F} = \frac{\gamma bh^3/4}{\gamma bh^2/3} = \frac{3}{4} h$$

گشتاور نسبت به محور y

$$\delta M = \frac{b^2\gamma}{2h^2} y^3 dy \Rightarrow M = \int_0^h \frac{b^2\gamma}{2h^2} y^3 dy = \frac{\gamma b^2 h^2}{8}$$

$$x_p = \frac{M}{F} = \frac{\gamma b^2 h^2/8}{\gamma bh^2/3} = \frac{3}{8} b$$

۲.۵۲. در شکل ۵۴-۲ محل مرکز فشار سطح حلقوی را تعیین کنید.

حل:

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y} A} \quad , \quad I_G = \frac{\pi r^4}{4}$$

بنابراین داریم:

$$y_{p_1} = 2 + \frac{\pi \times 1^4/4}{2 \times \pi \times 1^2} = 2.125\,m \quad , \quad y_{p_2} = 2 + \frac{\pi \times 0.5^4/4}{2 \times \pi \times 0.5^2} = 2.031\,m$$

$$y_p A = \sum y_i A_i \Rightarrow y_p A = y_{p_1} A_1 - y_{p_2} A_2$$

مساحت سطح حلقوی:

$$A = A_1 - A_2 = \pi(1^2 - 0.5^2) = 0.75\pi\, m^2$$

$$y_p \times 0.75\pi = 2.125 \times \pi \times 1^2 - 2.031 \times \pi \times 0.5^2 \Rightarrow y_p = 2.1564\,m$$

$$y_p - \bar{y} = 2.1564 - 2 = 0.1564\,m$$

یعنی مرکز فشار به فاصله $0.1564m$ پایین‌تر از مرکز سطح قرار دارد.

۲.۵۳. در شکل ۵۵-۲ محل مرکز فشار دریچه را تعیین کنید.

حل:

$$\bar{y}_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y}A}$$

$$I_G = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}\times 1.3\times 2^3 = 0.867 \quad , \ \bar{y} = 1+\frac{2}{2} = 2$$

$$\Rightarrow y_p - \bar{y} = \frac{0.867}{2\times(2\times 1.3)} = 0.167\,m$$

یعنی مرکز فشار 0.167 متر پایین از مرکز سطح دریچه واقع است.

۲.۵۴. یک سطح مربعی به ابعاد $2m$ در $2m$ به طور قائم در آب غوطه‌ور شده، لبهٔ فوقانی آن $1m$ در زیر سطح آب است. محل یک خط افقی روی سطح مربع را تعیین کنید به طوری که الف) نیروی وارد به بخش بالایی خط با نیروی وارد به بخش پایینی آن برابر باشد. ب) گشتاور نیروی وارد به بخش بالایی حول این خط با گشتاور نیروی وارد به بخش پایینی آن برابر باشد.

حل:

الف) برای سطح بالایی:

$$F_1 = \gamma \bar{h}_1 A_1 = \gamma(1+\frac{x}{2})\,(x\times 2) = \gamma(2x+x^2)$$

برای سطح پایین:

$$F_2 = \gamma \bar{h}_2 A_2 = \gamma(1+x+\frac{2-x}{2})\,[(2-x)\times 2] = \gamma(8-2x-x^2)$$

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \gamma(2x+x^2) = \gamma(8-2x-x^2) \Rightarrow x^2+2x-4=0$$

با حل این معادله $\begin{cases} x_1 = 1.236 \\ x_2 = -3.236 \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$

یعنی محل خط افقی $1+1.236 = 2.236\,m$ زیر سطح آزاد آب می‌باشد.

ب) این قسمت را می‌توانیم هم از طریق انتگرال و هم از طریق روابط حل کنیم.

روش اول: استفاده از انتگرال

مبداء مختصات را بر روی سطح آزاد آب در نظر گرفته و جهت مثبت محور قائم را رو به پایین فرض می‌کنیم.

برای صفحه بالایی:

$$\delta F_1 = PdA = \gamma y\,.\,2dy = 2\gamma y dy$$

گشتاور را حول محور فرضی در نظر می‌گیریم.

$$\delta M_1 = (2\gamma y dy)(1+x-y) = 2\gamma y\,(1+x-y)dy \ \Rightarrow M_1 = \int_1^{1+x} 2\gamma y\,(1+x-y)\,dy$$

برای صفحه پایینی:

$$\delta F_2 = PdA = \gamma y.2dy = 2\gamma y dy$$

$$\delta M_2 = (2\gamma y dy)(y-1-x) = 2\gamma y\,(y-1-x)dy \ \Rightarrow M_2 = \int_{1+x}^{2+1} 2\gamma y\,(y-1-x)dy$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow \int_1^{1+x} 2\gamma y\,(1+x-y)dy = \int_{1+x}^{3} 2\gamma y\,(y-1-x)dy$$

$$\Rightarrow \int_1^{1+x} y\,(1+x-y)\,dy = \int_3^{1+x} y(1+x-y)\,dy$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right) y^2 - \frac{y^3}{3}\Big]_1^{1+x} = \left(\frac{x+1}{2}\right) y^2 - \frac{y^3}{3}\Big]_3^{1+x} \Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 9\left(\frac{x+1}{2}\right) - 9 \Rightarrow x = 1.167\,m$$

ب) روش دوم:

$$M_1 = M_2 \Rightarrow F_1 L_1 = F_2 L_2 \qquad (I)$$

$$y_{P_1} = \bar{y} + \frac{I_{G_1}}{\bar{y}_1 A_1} = (1+\frac{x}{2}) + \frac{1/12 \times x^3 \times 2}{(1+x/2)\times 2\times x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12(1+x/2)}$$

$$L_1 = (1+x) - y_{P_1} = (1+x) - \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12(1+x/2)}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12(1+x/2)}$$

$$y_{P_2} = \bar{y}_2 + \frac{I_{G_2}}{\bar{y}_2 A_2}\ ,\quad \bar{y}_2 = 1+x+\frac{2-x}{2} = 2+\frac{x}{2}$$

$$y_{P_2} = (2+\frac{x}{2}) + \frac{1/12\times(2-x)^3\times 2}{(2+x/2)\times(2-x)\times 2} = 2+\frac{x}{2}+\frac{(2-x)^2}{12(2+x/2)}$$

$$L_2 = y_{P_2} - (1+x) = 2+\frac{x}{2}+\frac{(2-x)^2}{12(2+x/2)} - 1 - x = 1 - \frac{x}{2} + \frac{(2-x)^2}{12(2+x/2)}$$

با جاگذاری مقادیر مربوطه در رابطه (I): $\gamma(2x+x^2)\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12(1+x/2)}\right) = \gamma(8-2x-x^2)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{(2-x)^2}{12(2+x/2)}\right)$

پس از ساده کردن: $28 - 24x = 0 \Rightarrow x = 1.167\,m$

۲.۵۵. در شکل ۵۳-۲ محل مرکز فشار سطح قائم $OABCO$ را تعیین کنید.

حل:

با انتخاب یک المان دیفرانسیلی افقی داریم:

$$dA = 2x\,dy$$

$$y = \frac{x^2}{8} \Rightarrow x = \sqrt{8y} \Rightarrow dA = 2\sqrt{8y}\,dy = 4\sqrt{2\times y}\,dy$$

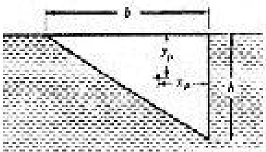
$$\delta F = P\,dA = \gamma\times y\times 4\sqrt{2xy}\,dy = 4\sqrt{2}\,\gamma y^{3/2}dy\ ,\ \delta M = \delta F\times y = 4\sqrt{2}\,\gamma y^{5/2}dy$$

$$\Rightarrow M = \int_0^1 4\sqrt{2}\,\gamma y^{5/2}dy = 4\sqrt{2}\,\gamma\left(\frac{2}{7}y^{7/2}\right)_0^1 = 14546.2\ N.m$$

از مسئله ۴۴ داریم: $F = 20365\ N$

$$M = y_p F \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{14546.2}{20364.3} = 0.71\,m$$

۲.۵۶. در شکل ۵۶-۲ محل مرکز فشار سطح قائم را تعیین کنید.



شکل ۵۶-۲

حل:

محاسبه y_p:

$$y_p=\bar{y}+\frac{I_G}{\bar{y}A}$$

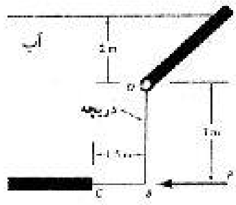
$$I_G=\frac{1}{12}bh^3 \quad , \quad \bar{y}=\frac{h}{3} \quad , \quad A=\frac{bh}{2}$$

$$y_p=\frac{h}{3}+\frac{bh^3/12}{h/3\times bh/2}=\frac{h}{3}+\frac{h}{2}=\frac{h}{2}$$

محاسبه x_p:

$$x_p=\frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A}+\bar{x}=\frac{-b^2h^2/72}{h/3\times bh/2}+\frac{1}{3}b=\frac{-b}{12}+\frac{b}{3}=\frac{b}{4}$$

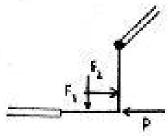
۲.۵۷. دریچه OBC نشان داده شده در شکل ۵۷-۲ دارای عرض $4m$ می‌باشد. از وزن دریچه صرفنظر کنید و فرض کنید اصطکاک لولا ناچیز باشد. نیروی P مورد نیاز جهت بسته نگهداشتن دریچه چقدر است؟



شکل ۵۷-۲

حل:

$$\sum M=0 \quad \Rightarrow M_1+M_2-M=0 \qquad (I)$$



$$F_1=\gamma\bar{h}_1A_1$$

$$\bar{h}_1=2+\frac{3}{2}=3.5m \quad , \quad A_1=3\times 4=12m^2$$

$$\Rightarrow F_1=9806\times 3.5\times 12=411852N$$

$$y_{p_1}=\bar{y}_1+\frac{I_G}{\bar{y}_1A_1}=3.5+\frac{1/12\times 4\times 3^3}{3.5\times 12}=3.714m$$

فاصله خط اثر نیروی F_1 از نقطه O:

$$L_1=\bar{y}_{p_1}-2=3.714-2=1.714m$$

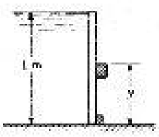
$$F_2=W=\gamma V=9806\times(1.5\times 5\times 4)=294180N$$

$$L_2=\frac{1.5}{2}=0.75m$$

با جاگذاری عبارات مربوطه در رابطه (I) داریم:

$$411852\times 1.714+294180\times 0.75-P\times 3=0 \quad \Rightarrow P=308850N$$

۲.۵۸. در شکل ۵۸-۲، y را طوری تعیین کنید که وقتی سطح آب به بالای دیواره‌ها می‌رسد، دیواره‌ها بغلتند.



شکل ۵۸-۲

حل:

در این شرایط باید مجموع گشتاورهای وارد بر نقطه N صفر شود یا به عبارت دیگر به مانع O هیچ نیروی وارد نشود:

(عرض دریچه $1\,m$ فرض شده و محاسبات نسبت به سطح آزاد انجام می‌گیرد)

محاسبه گشتاور وارد بر سطح MN :

$$F_1 = \gamma \bar{h}_1 A_1 \quad , \quad F_1 = (\frac{1-y}{2}) \times (1-y) \times 1$$

$$y_{p1} = \bar{y}_1 + \frac{I_{G1}}{\bar{y}_1 A_1} = \frac{1-y}{2} + \frac{1 \times (1-y)^3/12}{(1-y)/2 \times (1-y)\ 1} = \frac{1-y}{2} + \frac{1-y}{6} = \frac{2}{3}(1-y)$$

بنابراین فاصله مرکز فشار از نقطه N عبارت است از :

$$L_1 = (1-y) - 2\frac{(1-y)}{3} = \frac{1-y}{3}$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{\gamma}{2}(1-y)^2 \times \frac{(1-y)}{3} = \frac{\gamma}{6}(1-y)^3$$

محاسبه گشتاور وارد بر دریچه (MO)

$$F_2 = \gamma \bar{h}_2 A_2 = \gamma \times (1 - \frac{y}{2}) \times (y \times 1)$$

$$y_{p2} = \bar{y}_2 + \frac{I_G}{\bar{y}_2 A_2} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{1 \times y^3/12}{(1 - y/2) \times y \times 1}$$

فاصله مرکز فشار تا نقطه N عبارت است از

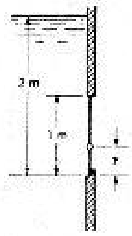
$$L_2 = y_p - (1-y) = 1 - \frac{y}{2} - 1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{6(2-y)}\ \frac{y}{2} + \frac{y^2}{6(2-y)}$$

$$\Rightarrow L_2 = \frac{3(2-y)y + y^3}{6(2-y)} = \frac{6y - 3y^2 + y^2}{6(2-y)} = \frac{6y - 2y^2}{6(2-y)} = \frac{y(3-y)}{3(2-y)}$$

$$\Rightarrow M_2 = \gamma y (\frac{2-y}{2}) \times \frac{y(3-y)}{3(2-y)} = \frac{\gamma}{6} y^2 (3-y)$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow \frac{\gamma}{6} y^2 (3-y) = \frac{\gamma}{6}(1-y)^3 \Rightarrow 3y^2 - y^3 = 1 - 3y + 3y^2 - y^3$$

$$\Rightarrow 1 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 1 \Rightarrow y = 0.3334\,m$$

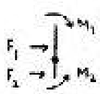


شکل ۵۹-۲

۵۹-۲. در شکل ۵۹-۲ محل لولای دریچه مستطیلی را طوری تعیین کنید که وقتی محل سطح آب مطابق شکل است، دریچه باز شود.

حل:

برای باز شدن دریچه باید برآیند گشتاورهای وارد بر دریچه حول لولا برابر صفر باشد داریم:



$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 - M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 L_1 - F_2 L_2 = 0 \qquad (I)$$

با توجه به اینکه عرض دریچه در محاسبات نقشی ندارد و در عمیات جبری در نهایت حذف می‌شود آنرا برابر واحد

فرض می‌کنیم و مبداء مختصات را بر روی سطح آزاد آب انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$F_1 = \gamma \bar{h}_1 A$$

$$\bar{h}_1 = 1 + \frac{1-y}{2} = \frac{3-y}{2} \quad , \quad A = (1-y) \times 1 = 1-y \ \Rightarrow F_1 = \gamma\left(\frac{3-y}{2}\right)(1-y)$$

$$F_2 = \gamma \bar{h}_2 A$$

$$\bar{h}_2 = 2 - \frac{y}{2} = \frac{4-y}{2} \quad , \quad A_2 = y \times 1 = y \ \Rightarrow F_2 = \gamma\left(\frac{4-y}{2}\right)y$$

محاسبه خط اثر نیروها:

فاصله خط اثر نیروی F_1 از سطح آزاد:

$$y_{p_1} = \bar{y}_1 + \frac{I_{G_1}}{\bar{y}_1 A_1} = \frac{3-y}{2} + \frac{1/12 \times 1 \times (1-y)^3}{\left(\frac{3-y}{2}\right)(1-y)} = \frac{3-y}{2} + \frac{(1-y)^2}{6(3-y)}$$

فاصله خط اثر نیروی F_1 از لولا:

$$L_1 = (2-y) - y_{p_1} = (2-y) - \frac{3-y}{2} - \frac{(1-y)^2}{6(3-y)} = \frac{(1-y)}{2} - \frac{(1-y)^2}{6(3-y)}$$

فاصله خط اثر نیروی F_2 از سطح آزاد:

$$y_{p_2} = \bar{y}_2 + \frac{I_{G_2}}{\bar{y}_2 A_2} = \frac{4-y}{2} + \frac{1/12 \times 1 \times y^3}{\frac{4-y}{2} \times y} = \frac{4-y}{2} + \frac{y^2}{6(4-y)}$$

با جاگذاری عبارات مربوطه در رابطه (I)

$$\gamma\left(\frac{3-y}{2}\right)(1-y)\left[\frac{(1-y)}{2} - \frac{(1-y)^2}{6(3-y)}\right] = \gamma\left(\frac{4-y}{2}\right)y\left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{6(4-y)}\right]$$

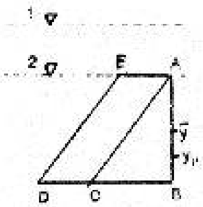
$$\frac{(3-y)(1-y)^2}{4} - \frac{(1-y)^3}{12} = \frac{y^2(4-y)}{4} + \frac{y^3}{12} \ \Rightarrow (3-y)(1-y)^2 - y^2(4-y) = \frac{1}{3}\left[(1-y)^2 + y^3\right]$$

$$(-y^3 + 5y^2 - 7y + 3) - 4y^2 + y^3 = \frac{1}{3}(1 + 3y^2 - 3y) \ \Rightarrow \ -6y + \frac{8}{3} = 0 \ \Rightarrow y = 0.444m$$

• ۲-۶. با استفاده از مفهوم منشور فشار نشان دهید که با افزایش عمق غوطه‌وری یک سطح، مرکز فشار آن به سمت مرکز سطح میل می‌کند.

حل:

با توجه به رابطه $y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\gamma A}$ هرگاه $\bar{y}$ افزایش یابد مقدار $\frac{I_G}{\gamma A}$ به صفر نزدیکتر شده در نتیجه y_p به $\bar{y}$ نزدیک‌تر خواهد شد.



از روی شکل نیز می‌توان حالت فوق را توجیه کرد در حالت نخست منشور فشار عبارت خواهد بود از شکل ABC و $\bar{y}$ و y_p به ترتیب مرکز سطح و مرکز فشار را نشان می‌دهند. موقعی که ارتفاع مایع زیاد می‌گردد در این حالت منشور فشار عبارت خواهد بود از

$AEDB$ و چنانچه مشاهده می‌شود اندازه ضلع AE با افزایش ارتفاع مایع زیاد می‌شود و در نتیجه مرکز حجم به سمت این ضلع نزدیکتر خواهد شد در نتیجه y_p به $\bar{y}$ نزدیکتر می‌شود. البته باید توجه داشت که با افزایش ارتفاع مایع اندازه ضلع BC نیز زیاد می‌شود اما میزان افزایش طول AE بیشتر از آن خواهد بود.

۲-۶۱. نشان دهید که اگر سطح مستوی کاملاً غوطه‌ور حول محوری که از مرکز سطح آن می‌گذرد دوران نماید، مقدار نیروی وارد به آن تغییر نمی‌کند.

حل:

$$\delta F = P\delta A = \gamma h\delta A = \gamma y \sin\theta \delta A$$

هرگاه محور xها منطبق بر سطح موردنظر باشد داریم

$$\Rightarrow F = \int P dA = \gamma \sin\theta \int y dA = \gamma \sin\theta \bar{y} A$$

نیروی وارد بر یک طرف سطح مستوی :

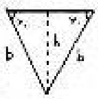
$$\Rightarrow F = P_G A$$

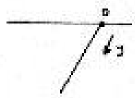
با توجه به اینکه در دوران سطح مستوی موردنظر فاصله مرکز سطح از سطح آزاد سیال ثابت بوده بنابراین P_G ثابت مانده پس F نیز ثابت خواهد بود.

۲-۶۲. سطحی به شکل مثلث متساوی‌الساقین در آب قرار دارد. یکی از ساقهای مثلث بر سطح آب منطبق است. زاویهٔ سطح با امتداد افقی $45°$ است. محل مرکز فشار را بر حسب طول ساق مثلث یعنی b تعیین کنید.

حل:

مطابق شکل با انتخاب مبداء مختصات بر روی سطح آب و محور yها در جهت قرارگرفتن سطح مثلثی داریم:

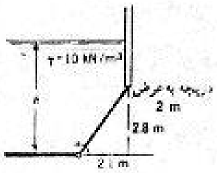




$$Sin60 = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} b$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} \quad \Rightarrow y_p = \frac{h}{3} + \frac{1/36 h^3 b}{h/3 \times (hb/2)} = \frac{h}{3} + \frac{h}{6} = \frac{h}{2} \quad \Rightarrow y_p = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} b = 0.433b$$

۲-۶۳. در شکل ۶۰-۲ لولای دریچه تحت گشتاور $150\,kN.m$ از کار می‌افتد. عمق مایع، h حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟



شکل ۶۰-۲
مسایل ۲-۶۱، ۲-۶۲، ۲-۶۳.

حل:

حداکثر ارتفاع مایع برای اینکه دریچه از کار نیفتد زمانی است که مجموع گشتاور نیروهای وارده حول لولا صفر باشد:

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_1 - M = 0 \Rightarrow M_1 = M = 150\,kN.m \qquad (I)$$

$$\text{طول دریچه} = \sqrt{2.12 + 2.8^2} = 3.5\,m \quad , \quad \sin\theta = \frac{2.8}{3.5} = 0.8$$

$$F_1 = \gamma \bar{h}_1 A_1 = 10 \times (h - \frac{2.8}{2}) \times (3.5 \times 2) = 70(h - 1.4)kN$$

$$y_{p_1} = \bar{y}_1 + \frac{I_G}{\bar{y}_1 A} = (h - 1.4) + \frac{1/12 \times 2.8^3 \times 2}{(h - 1.4)(2.8 \times 2)} = (h - 1.4) + \frac{0.6533}{h - 1.4}$$

$$L_1 = \frac{(h - y_{p_1})}{sin\theta} = (1.4 - \frac{0.6533}{h - 1.4})/0.8 = 1.75 - \frac{0.8166}{h - 1.4}$$

با جاگذاری مقادیر مربوطه در رابطه (I) :
$$\Rightarrow \; 70(h - 1.4) \times \left(1.75 - \frac{0.8166}{h - 1.4}\right) = 150$$

$$\Rightarrow \; 122.5(h - 1.4) - 57.162 = 150 \quad \Rightarrow \; h = 3.091\,m$$

۲.۶۴. در شکل ۶۰-۲ رابطه‌ای برای y_p برحسب h به دست آورید.

حل:

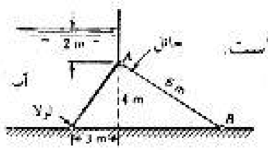
تصویر دریچه بر سطح قائم مستطیلی به ابعاد 2.8×2 می‌باشد بنابراین داریم:

$$\bar{y} = h - 2.8 + \frac{2.8}{2} = h - \frac{2.8}{2}$$

$$I_G = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12} \times 2 \times 2.8^3 = 3.659 \quad , \quad A = 2.8 \times 2 = 5.6\,m^2$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} = h - \frac{2.8}{2} + \frac{3.659}{\left(h - \frac{2.8}{2}\right) \times 5.6} = h - 1.4 + \frac{0.653}{h - 1.4}$$

(y_p در راستای قائم و نسبت به سطح آزاد می‌باشد)



شکل ۶۱-۲

۲.۶۵. در شکل ۶۱-۲ دریچهٔ OA در هر $6m$ دارای یک حائل AB است. نیروی فشاری در حائل چقدر است؟ از وزن دریچه صرفنظر کنید.

حل:

$$AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

$$tg\theta = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 53.13^\circ$$

باید گشتاور نیروهای وارده حول لولا صفر باشد با انتخاب مبدأ مختصات بر روی سطح آزاد مایع داریم:

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 + M_2 - M = 0$$

$$\Rightarrow F_1 L_1 + F_2 L_2 - FL = 0 \qquad (I)$$

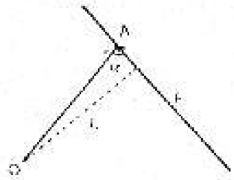
$$F_1 = \gamma \bar{h}_1 A_1 = 9806 \times 1 \times (2 \times 6) = 117672\,N$$

$$y_{p_1} = \bar{y}_1 + \frac{I_G}{\bar{y}_1 A} = 1 + \frac{1/12 \times 2^3 \times 6}{1 \times (2 \times 6)} = 1.333\ m$$

$$L_1 = (2+4) - y_{p_1} = 4.667\,m$$

$$F_2 = \gamma \bar{h}_2 A_2 = 9806 \times (2 + \frac{4}{2}) \times (5 \times 6) = 1176720\,N$$

$$y = \frac{6}{\sin 53.13} = 7.5\,m \quad , \quad \bar{y}_2 = \frac{4}{\sin 53.13} = 5\,m$$



$$y_{P_1} = \bar{y}_2 + \frac{I_G}{\bar{y}_2 A} = 4 + \frac{1/12 \times 4^3 \times 6}{4 \times (4 \times 6)} = 4.3333\,m$$

$$L_2 = \frac{6 - y_{P1}}{\sin 53.13} = \frac{6 - 4.3333}{\sin 53.13} = 2.083\,m$$

برای محاسبه خط اثر نیروی فشاری در حائل مطابق شکل داریم:

$$\sin\beta = \frac{4}{6} = 0.667 \ \Rightarrow \ \beta = 41.8$$

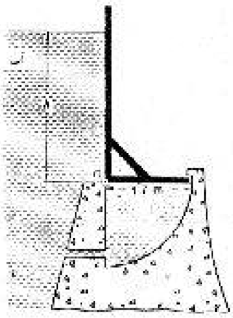
$$\theta + \beta + \alpha = 180 \ \Rightarrow \alpha = 180 - 41.8 - 53.13 = 85.1^\circ$$

$$L = AD\sin\alpha = 5 \times \sin 85.1 = 4.982\,m$$

با جاگذاری مقادیر مربوطه در رابطه (I) :

$$\Rightarrow 117672 \times 4.667 + 1176720 \times 2.083 - F \times 4.982 = 0$$

$$\Rightarrow F = 602225\,N = 602.225\,kN$$



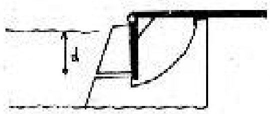
شکل ۶۲-۲

مسایل ۶۶-۲، ۶۸-۲، ۱۲۹-۲

۲.۶۶. در شکل ۶۲-۲ دریچهٔ L شکل در نقطهٔ O لولا شده است. جرم دریچه عمود بر صفحهٔ کاغذ $450\,kg/m$ است. فاصلهٔ مرکز ثقل دریچه با صفحهٔ سمت چپ $45\,cm$ و با صفحهٔ کف $60\,cm$ است. سطح آب پایین‌تر از لولا و دریچه خوابیده است. موقعیت سطح آب را طوری تعیین کنید که دریچه در آستانه دوران باشد.

حل:

مطابق شکل هرگاه فاصله سطح آب تا قسمت پایین دریچه d باشد داریم:



برای اینکه دریچه درآستانه دوران قرار گیرد باید مجموع گشتاورهای وارد بر دریچه حول لولا صفر باشد دراینجا دو نیرو داریم:

یکی نیروی فشاری وارد شده از طرف آب برقسمت قایم دریچه (F_1) و دیگری نیروی حاصل از وزن دریچه (F_2).

$$\sum M = 0 \ \Rightarrow \ M_1 - M_2 = 0 \ \Rightarrow \ M_1 = M_2 \ \Rightarrow \ F_1 L_1 = F_2 L_2 \qquad (I)$$

$$F_1 = \gamma \bar{h}_1 A_1 = 9806 \times \frac{d}{2} \times (d \times 1) = 4903\,d^2$$

فاصله خط اثر نیرو از سطح آب:

$$y_{P_1} = \bar{y}_1 + \frac{I_{G_1}}{\bar{y}_1 A_1} = \frac{d}{2} + \frac{1/12 \times 1 \times d^3}{d/2 \times (d \times 1)} = \frac{d}{2} + \frac{d}{6} = \frac{2d}{3}$$

فاصله خط اثر نیرو از لولا:

$$L_1 = 1.7 - \left(d - \frac{2d}{3}\right) = 1.7 - \frac{d}{3}$$

$F_2 = W = 450 \times 9.806 = 4412.7N \quad , \quad L_2 = 0.6m$

با جاگذاری مقادیر مربوطه در رابطه (I) داریم:

$$4903 d^2 \times (1.7 - \frac{d}{3}) = 4412.7 \times 0.6$$

از حل معادله فوق : $d = 0.6m$

۲.۶۷. در مسألهٔ قبل برای اینکه دریچه به حالت قائم (مانند شکل) درآید، حداقل h چقدر است؟

حل:

برای اینکه حداقل مقدار L را برای قایم درآمدن دریچه بدست آوریم باید مجموع گشتاورهای وارد بر دریچه حول لولا را برابر صفر قرار دهیم.

در اینجا سه نیرو داریم:

۱) نیروی افقی وارده از طرف آب به قسمت قایم دریچه (F_1)

۲) نیروی قایم وارد شده از طرف آب بر قسمت افقی دریچه (F_2)

۳) نیروی وزن دریچه (F_3)

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_1 - M_2 + M_3 = 0 \Rightarrow F_1 L_1 - F_2 L_2 + F_3 L_3 = 0 \qquad (I)$$

$$F_1 = \gamma \bar{h}_1 A_1 = 9806 \times \frac{h}{2} \times (h \times 1) = 4903 h^2$$

$$y_{p_1} = \bar{y}_1 + \frac{I_{G_1}}{\bar{y}_1 A_1} = \frac{h}{2} + \frac{1/12 \times 1 \times h^3}{h/2 \times (h \times 1)} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2h}{3}$$

$$L_1 = h - \frac{2h}{3} = \frac{h}{3}$$

$$F_2 = \gamma V = 9806 \times (1.7 \times h \times 1) = 16670.2h \ , \ L_2 = \frac{1.7}{2} = 0.85m$$

$$F_3 = W = 450 \times 9.806 = 4412.7N \quad , L_3 = 0.45m$$

با جاگذاری مقادیر مربوطه در رابطه (I) داریم:

$$4903 h^2 \times \frac{h}{3} - 16670.2h \times 0.85 + 4412.7 \times 0.45 = 0 \Rightarrow h^3 - 8.67h + 1.215 = 0$$

از حل معادله فوق: $h = 0.14 \ m$

۲ـ۶۸. در مسألهٔ ۶۶-۲ به ازای چه مقداری از h نیروی وارد به مانع حداکثر است. مقدار نیرو را نیز تعیین کنید.

حل:

با توجه به مسئله قبل داریم:

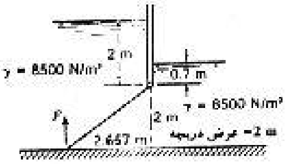
$$M(h) = \frac{4903}{r}(h^3 - 8.67h + 1.215)$$

$$\frac{dM(h)}{dh} = \frac{4903}{3} \times (3h^2 - 8.67)$$

$$\frac{dM(h)}{dh} = 0 \Rightarrow 3h^2 - 8.67 = 0 \Rightarrow h = 1.7m$$

$$M(1.7)=\frac{4903}{3}\ (1.7^3-8.67\times1.7+1.215)=-14073\,N.m$$

$$F=\frac{M}{L}=\frac{14073}{1.7}=8278\,N$$



شکل ۶۳-۲

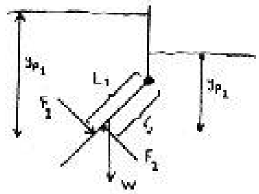
۲.۶۹. الف) مقدار و امتداد نیروهای وارد به دو طرف دریچهٔ شکل ۶۳-۲ را به دست آورید. ب) برآیند نیروهای وارد از مایع به دو طرف دریچه را تعیین کنید.

حل:

در اینجا سه نیرو داریم:

۱) نیروی وارد شده از طرف آب بر سمت چپ دریچه (F_1) ۲) نیروی وارد شده از طرف آب بر سمت راست دریچه (F_2) ۳) نیروی وزن دریچه (F_3)

$$tg\theta=\frac{2}{2.667}=0.75\ \Rightarrow\theta=36.87^\circ$$



$$F_1=\gamma_1\bar{h}_1A_1=8500\times(2+\frac{2}{2})\times(2\times3.3336)=170014\,N$$

$$F_2=\gamma_1\bar{h}_2A_2=8500\times(0.7+\frac{2}{2})\times(2\times3.3336)=96341\,N$$

$$F_3=W=2000\times9.806=19612\,N$$

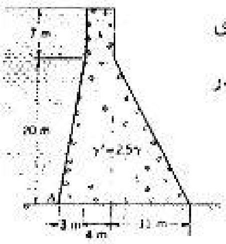
$$y_{p_1}=\bar{y}_1+\frac{I_G}{\bar{y}_1A_1}=3+\frac{1/12\times2\times2^3}{3\times(2\times2)}=3.111\,m\quad,\quad L_1=\frac{y_{p_1}-2}{sin\theta}=\frac{3.111-2}{sin36.87}=1.852\,m$$

$$y_{p_2}=\bar{y}_2+\frac{I_G}{\bar{y}_2A_2}=1.7+\frac{1/12\times2\times2^3}{1.7\times(2\times2)}=1.896\,m\quad,\quad L_2=\frac{y_{p_2}-0.7}{sin\theta}=\frac{1.896-0.7}{sin36.87}=1.993\,m$$

$$L_3=\frac{2.667}{2}=1.3335\,m$$

$$\sum M=0\Rightarrow M_1-M_2+M_3-M=0\Rightarrow M=M_1-M_2+M_3$$

$$\Rightarrow F\times2.667=170014\times1.852-96341\times1.993+19612\times1.3335\Rightarrow F=55872\,N$$



شکل ۶۴-۲

۲.۷۰. در شکل ۶۴-۲ تنش روی قاعده سد به طور خطی تغییر می‌کند. الف) نیروی برآیند در چه نقطه‌ای قاعده را قطع می‌کند. ب) حداکثر و حداقل تنشهای فشاری در قاعده را محاسبه کنید. از نیروی بالا برنده هیدرواستاتیک صرفنظر کنید.

حل:

در اینجا سه نیرو بر پایه سه وارد می‌شود یکی نیروی وزن پایه که برای محاسبه گشتاور حاصله آن پایه را به سه قسمت 1

و 2 و 3 تقسیم می‌کنیم و دیگری نیروی وارد بر سطح BC و سومی نیروی وارد بر سطح AB و داریم: (عرض پایه را برای $1m$ فرض می‌کنیم)

$$F_1=W_1=\gamma' V_1=2.5\gamma\times(\frac{3\times20}{2})=75\gamma$$

$$F_2=W_2=\gamma' V_2=2.5\gamma\times(27\times4)=270\gamma$$

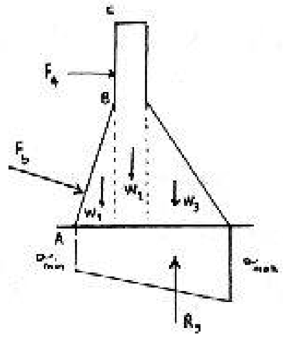
$$F_3=W_3=\gamma' V_3=2.5\gamma\times(\frac{11\times20}{2})=275\gamma$$

$$F_4=\gamma\bar{h}_4A_4=\gamma\times\frac{7}{2}\times(7\times1)=24.5\gamma$$

$$tg\theta=\frac{20}{3}=6.667\Rightarrow\theta=81.47^\circ$$

$$\overline{AB}=\frac{20}{sin\,81.47}=20.224m$$

$$F_5=\gamma\bar{h}_5A_5=\gamma\times(7+\frac{20}{2})\times(20.224\times1)=343.8085$$



گشتاور حاصل از نیروها نسبت به نقطه A محاسبه می‌گردند.

$$L_1=\frac{2}{3}\times3=2m\ ,\ L_2=3+\frac{4}{2}=5m\ ,\ L_3=3+4+\frac{1}{3}\times11=10.667m$$

$$y_{p_4}=\bar{y}_4+\frac{I_{G_4}}{\bar{y}_4A_4}=3.5+\frac{1/12\times7^3\times1}{3.5\times(7\times1)}=4.667m\ ,L_4=27-y_{p4}=27-4.667=22.333m$$

$$y_{p_5}=\bar{y}_5+\frac{I_{G_5}}{\bar{y}_5A_5}=17+\frac{1/12\times20^3\times1}{17\times(20\times1)}=18.961m\ ,\ L_5=\frac{(27-y_{p_5})}{sin\theta}=\frac{27-18.961}{sin81.47}=8.129m$$

(نیروی F_4 در جهت y مؤلفه‌ای ندارد)

$$\sum F_y=0\Rightarrow F_1+F_2+F_3+F_5cos\theta-R_y=0$$

$$\Rightarrow R_y=75\gamma+270\gamma+275\gamma+343.808\gamma\times cos81.47=671\gamma$$

$$\sum M=0\Rightarrow M_1+M_2+M_3+M_4+M_5-R_y.x=0$$

$$\Rightarrow75\gamma\times2+270\gamma\times5+275\gamma\times10.667+24.5\gamma\times22.333+343.808\gamma\times8.129-671\gamma\times x=0$$

$$\Rightarrow x=11.588$$

اگر فرض کنیم تغییرات فشار پایه سد بر روی پایه به صورت خطی باشد منشور فشار به صورت ذوزنقه می‌باشد که حجم این منشور ذوزنقه‌ای معادل R_y است پس داریم:

$$\text{حجم منشور ذوزنقه‌ای}=R_y\Rightarrow1/2(\sigma_{min}+\sigma_{max})\times(3+4+11)=671\gamma\Rightarrow\sigma_{min}+\sigma_{max}=74.556\gamma\qquad(1)$$

برای تعیین σ_{min} و σ_{max} باید یک رابطه دیگر هم بدست آوریم با توجه به محاسبات بالا معلوم شد که مرکز حجم منشور به فاصله $x=11.588m$ از نقطه A واقع است. با گشتاورگیری حول نقطه A داریم:

$$M=FL\ \Rightarrow\ R_y.x=F_1L_1+F_2L_2$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{max}+\sigma_{min})\times18\times11.588=(\sigma_{min}\times18\times1)\times\frac{18}{2}+(\sigma_{max}-\sigma_{min})\times\frac{18}{2}\times(\frac{2}{3}\times18)$$

از ساده کردن رابطه فوق $\sigma_{max} = 13.563\,\sigma_{min}$ (2)

از حل دو معادله (1) و (2) داریم:
$$\begin{cases}\sigma_{min} = 5.12\gamma \\ \sigma_{max} = 69.436\gamma\end{cases}$$

۲ـ۷۱. مسألهٔ قبل را مجدداً حل کنید. این بار فرض کنید نیروی بالابرنده هیدرواستاتیک از $20m$ در A تا صفر در پاشنه سد به طور خطی تغییر کند.

حل:

هرگاه R'_y نیروی هیدرواستاتیک بالا برنده باشد این نیرو رو به بالا و جهت قائم وارد می‌شود و داریم:
$$R'_y = PA = \gamma \bar{h} A$$
$$\bar{h} = \frac{0+20}{2} = 10m \quad , \quad A = 18\times 1 = 18m^2 \quad \Rightarrow R'_y = \gamma\times 10\times 18 = 180\gamma$$

برای این حالت جدید نیروی R_y را توسط معادله زیر بدست می‌آوریم:
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow F_1 + F_2 + F_3 + F_5 \cos\theta - R'_y - R_y = 0$$
$$\Rightarrow R_y = 75\gamma + 270\gamma + 275\gamma + 343.808\gamma \times \cos 81.47 - 180\gamma = 491\gamma$$

نقطه اثر نیروی هیدروستاتیک به فاصله $x' = 6m$ از نقطه A واقع است.

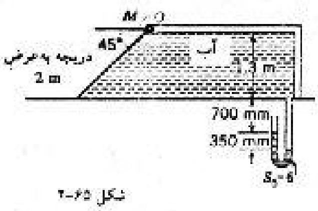
برای تعیین نقطه اثر نیروی برایند داریم:
$$\sum M = 0 \;\Rightarrow M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 - x'R'_y - xR_y = 0$$
$$\Rightarrow 75\gamma\times 2 + 270\gamma\times 5 + 275\gamma\times 10.667 + 24.5\gamma\times 22.333 + 343.808\gamma\times 8.129 - 6\times 180\gamma - x\times 491\gamma = 0$$
$$\Rightarrow x = 13.636m$$

مانند مسئله قبل داریم:
$$\text{حجم منشور ذوزنقه‌ای} = R_y \Rightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{min}+\sigma_{max})\times(3+4+11) = 491\gamma \;\Rightarrow \sigma_{min}+\sigma_{max} = 54.556 \quad (1)$$
$$R_y x = F_1 L_1 + F_2 L_2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{min}+\sigma_{max})\times 18\times 13.636 = (\sigma_{min}\times 18\times 1)\times\frac{18}{2} + (\sigma_{max}-\sigma_{min})\times\frac{18}{2}\times(\frac{2}{3}\times 18)$$

از ساده کردن رابطه فوق $\Rightarrow \sigma_{max} = -4.6675\sigma_{min}$ (2)

از حل دو معادله (1) و (2) داریم:
$$\begin{cases}\sigma_{max} = 69.43\gamma \\ \sigma_{min} = -14.875\gamma\end{cases}$$

۲ـ۷۲. در شکل ۶۵-۲ گشتاور حول O برای بسته نگه داشتن دریچه چقدر است؟



شکل ۶۵-۲

حل:

فشار در قسمت بالای مخزن: $P = 6 \times 0.35 \times \gamma - (0.7 + 0.35 + 1.3)\gamma = -0.25\gamma$

فشار در قسمت پایین مخزن: $P = 6 \times 0.35 \times \gamma - (0.7 + 0.35)\gamma = 1.05\gamma$

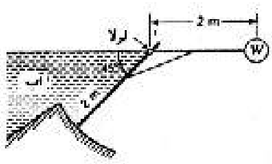
$$F = PA = \gamma \bar{h} A = 9806 \times \left(\frac{-0.25 + 1.05}{2}\right) \times \left(\frac{1.3}{sin45} \times 2\right) = 14423\,N$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y} A}$$

$$\bar{y} = 1.3 - \left(\frac{-0.25 + 1.05}{2}\right) = 0.9\,m$$

$$y_p = 0.9 + \frac{1/12 \times 1.05^3 \times 2}{0.9 \times (1.05 \times 2)} = 1.0021m \quad , \quad L = \frac{1.0021}{sin45} = 1.4172m$$

$$M = F.L = 14423 \times 1.4172 = 20440\,N.m$$



شکل ۶۶-۲

۲.۷۳. دریچه‌ای که در شکل ۶۶-۲ نشان داده شده است، در حال تعادل است. وزن وزنهٔ تعادل بر واحد عرض دریچه چقدر است؟ از وزن دریچه صرف‌نظر کنید. آیا تعادل دریچه پایدار است؟

حل:

ابتدا نیروی وارده شده از طرف آب را محاسبه می‌کنیم: $F_1 = \gamma \bar{h}_1 A_1$

$$\bar{h}_1 = \frac{2sin45}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ m$$

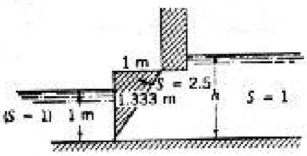
$$\Rightarrow F_1 = \gamma \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2 \times 1) = \sqrt{2}\ \gamma$$

محور yها را در جهت دریچه در نظر می‌گیریم:

$$y_{p_1} = \bar{y}_1 + \frac{I_G}{\bar{y}_1 A_1} = 1 + \frac{1/12 \times 2^3 \times 1}{1 \times 2 \times 1} = \frac{4}{3}\ m = L_1$$

برای وزنه داریم: $F_2 = W \quad , \quad L_2 = 2\,m$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow M_1 = M_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \times 9806 \times \frac{4}{3} = W \times 2 \quad \Rightarrow W = 9245\,N$$



شکل ۶۷-۲

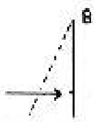
۲.۷۴. در شکل ۶۷-۲ در سمت راست دریچه آب تا چه ارتفاعی، h باید بالا رود تا دریچه باز شود. عرض دریچه $2m$ است و چگالی آن 2.5 می‌باشد. از روش منشور فشار استفاده کنید.

حل:

با توجه به شکل منشور فشار برای این دیوارهٔ قائم (AB) به صورت گوه‌ای با مساحت قاعده $1 \times 2 = 2m^2$ می‌باشد

ارتفاع منشور در بالا صفر و در پایین $\gamma \times 1$ است

بنابراین ارتفاع متوسط منشور $\frac{\gamma}{2}$ می‌باشد در نتیجه:



$F_{AB}=\frac{\gamma}{2}\times 2-\gamma=9806\,N$

مرکز حجم منشور نیز به فاصله $\frac{l}{3}$ از نقطه A واقع است یعنی داریم:

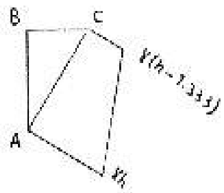
$L_{AB}=\frac{1}{3}=0.333\,m$

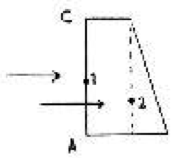
حجم دریچه $V=\frac{1\times 1.333\times 2}{2}=1.333\,m^3$

$L_w=\frac{1}{3}\times 1=0.333\,m$

$W=1.333\times 2.5\times 9806=32678.5\,N$

برای تعیین نیروی وارد از طرف آب بر قسمت AC داریم:





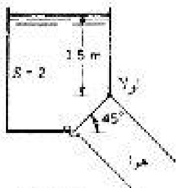
$F_{AC_1}=\gamma(h-1.333)\times(1.666\times 2)=3.32\gamma(h-1.333)$, $L_1=\frac{1.666}{2}=0.833\,m$

$F_{AC_2}=\frac{1.333\gamma}{2}\times(1.666\times 2)=2.221\gamma$, $L_2=\frac{1.666}{3}=0.555\,m$

$\sum M=0\Rightarrow 9806\times 0.333+32678.5\times 0.333=3.32\times 9806\times(h-1.333)\times 0.833+2.221\times 9806\times 0.555$

$\Rightarrow h=1.4\,m$

۲.۷۵. در شکل ۶۸-۲ برای اینکه دریچه باز نشود باید فشار هوا چقدر باشد؟ دریچه صفحه‌ای است دایره‌ای به قطر $700\,mm$ و وزن آن $1800\,N$ می‌باشد.



شکل ۶۸-۲

حل:

شرط اینکه حالت تعادل برقرار باشد:

$\sum M=0\Rightarrow M_1+M_2-M=0$

$\Rightarrow F_1L_1+F_2L_2-FL=0 \qquad (I)$

F_1 نیروی وارد از طرف سیال

F_2 نیروی حاصل از وزن دریچه

F نیروی فشاری وارده از طرف هوا

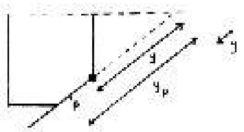
$F_1=\gamma\bar{h}_1A_1$

$\bar{h}_1=1.5+r\sin 45=1.5+0.35\times\frac{\sqrt{2}}{3}=1.7475\,m$

$\Rightarrow F_1=2\times 9806\times 1.7475\times\left(\frac{\pi\times 0.7^2}{4}\right)=13189\,N$

برای محاسبه خط اثر نیروی F_1 مطابق شکل داریم:

محاسبات در امتداد دریچه دایره‌ای شکل صورت می‌گیرد.



$$y_{p_1} = \bar{y}_1 + \frac{I_G}{\bar{y}_1 . A} \quad , \quad I_G = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$y = \frac{1.5}{\sin 45} = 2.121m \quad , \quad \bar{y}_1 = 2.121 + \frac{0.7}{2} = 2.471m$$

$$y_{p_1} = 2.471 + \frac{\pi\times 0.35^4/4}{2.471\times\pi\times 0.7^2/4} = 2.483m \quad , \quad L_1 = y_{p_1} - y = 2.483 - 2.121 = 0.362m$$

$$F_2 = W = 1800N$$

خط اثر نیروی F_2 حاصل از وزن دریچه به مرکز سطح آن اثر می‌کند بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$\cos 45 = \frac{L_2}{0.35} \Rightarrow L_2 = 0.2475m$$

نیروی فشاری وارد شده از طرف هوا به صورت عمودی به مرکز سطح دریچه اثر می‌کند بنابراین: $L = 0.35m$

با جاگذاری مقادیر مربوطه در رابطه (I) داریم:

$$13189\times 0.362 + 1800\times 0.2475 - F\times 0.35 = 0 \Rightarrow F = 14914N$$

$$\text{نشار هوا}\; P = \frac{F}{A} = \frac{14914}{\pi\times 0.7^2/4} = 38753Pa$$

۲.۷۶. فشارداخلی یک مخزن $30MPa$ است. سوراخی به قطر $10mm$ دربالای مخزن وجود دارد. یک کره فولادی به قطر $20mm$ این سوراخ را پوشانده است. برای بلند کردن کره از روی سوراخ به چه نیرویی احتیاج داریم؟

حل:

هرگاه تمام کره در داخل مخزن قرار بگیرد از طرف مخزن بر آن نیرویی وارد نمی‌گردید ولی با توجه به صورت مسئله واضح است که قسمتی از کره بیرون مخزن قرار می‌گیرد بنابراین فشار وارده از طرف مخزن مانع بلند شدن کره فولادی می‌گردد حال آنکه هرگاه در انتهای تحتانی مخزن قرار بگیرد نیروی وزن نیز به همراه فشار وارده از طرف مخزن مانع بلند شدن آن خواهد شد ولی با توجه به کمی نیروی وزن کره می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. حال برای محاسبه نیروی لازم برای بلند کردن کره کافی است نیروی وارد شده بر قسمت بیرون افتاده کره در صورتیکه در داخل مخزن بود را محاسبه کنیم با توجه به ثابت بودن فشار داخل مخزن از تصویر قسمت مزبور بر امتداد افق استفاده می‌کنیم و داریم:

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi\times 0.01^2}{4} = 7.854\times 10^{-5} m^2$$

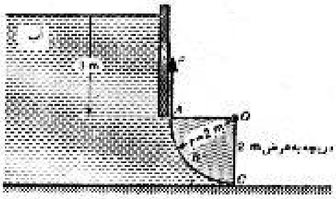
$$F = PA = 30\times 10^6\times 7.854\times 10^{-5} = 2357N = 2.357kN$$

۲.۷۷. قایقی در شکل ۶۹-۲ نشان داده شده است. اگر مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به سطح منحنی با نیروی وارد به تصویر آن روی سطح قائم برابر نمی‌بود، در مورد نیروی جلوبرنده وارده به قایق چه نتیجه‌ای می‌توانستیم بگیریم؟

شکل ۶۹-۲

حل:

با توجه به شکل فایق واضح است که نیروهای وارده از طرف آب بر سطح منحنی و قائم فایق با هم برابر نبوده بنابراین دارای برآیندی خواهند بود که این نیروی برآیندی سبب رانش قایق شده یا حداقل حرکت در جهت موردنظر را تسهیل خواهد نمود.



شکل ۷۰-۲ مسائل ۷۹-۲ و ۸۳-۲

۲.۷۸. در شکل ۷۰-۲ یک دریچه قطاعی نشان داده شده است.

الف) مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به دریچه و خط اثر آن را تعیین کنید.

ب) مؤلفهٔ قائم نیرو و خط اثر آن را تعیین کنید.

ج) نیروی لازم برای بازکردن دریچه، F، را به دست آورید. از وزن دریچه صرفنظر کنید.

د) گشتاور نیروها حول محوری که از O میگذرد، چقدر است؟

حل:

با انتخاب سطح آزاد آب به عنوان بنا داریم:

الف) نیروی افقی: $F_H = \gamma \bar{h} A$

هرگاه این دریچه قطاعی را بر صفحه قائم تصویر کنیم مربعی به ضلع 2 خواهد بود.

و در رابطه فوق برای محاسبه نیروی افقی از سطح تصویر شده جسم استفاده میکنیم.

$$\Rightarrow F_H = 9806 \times (3 + \frac{2}{2}) \times (2 \times 2) = 156896\,N$$

تعیین خط اثر نیروی افقی:

فاصله از سطح آب

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y} A} = 4 + \frac{1/12 \times 2 \times 2^3}{4 \times (2 \times 2)} = 4.0833\,m$$

ب) نیروی قائم وارده از طرف آب برابر وزن سیال فرضی روی سطح موردنظر تا سطح آزاد آب میباشد.

$$F = W = \gamma V$$

حجم ربع استوانه + حجم مکعب = حجم بالای دریچه

$$V = 3 \times 2 \times 2 + \frac{1}{4}\,(\pi \times 2^2 \times 2) = 18.2832\,m^3$$

$$F = 9806 \times 18.2832 = 179285\,N$$

برای تعیین خط اثر این نیرو مطابق شکل داریم:

$$x_p A = \sum x_i A_i \Rightarrow x_p = \frac{\sum x_i A_i}{A}$$

$$x_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \times 2}{3\pi} = \frac{8}{3\pi}\,m \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3} \times 3 = 1m$$

$$A_1 = \frac{1}{4}\pi \times 2^2 = \pi m^2 \quad , \quad A_2 = 3 \times 2 = 6\,m^2$$

$$x_p = \frac{\pi \times \frac{8}{3\pi} + 6 \times 1}{\pi + 6} = 0.948\,m$$

ج) برای تعیین نیروی لازم جهت باز نمودن دریچه باید مجموع گشتاورهای وارده به آن را برابر صفر قرار بدهیم:

$$\sum M=0 \Rightarrow M_1-M_2+M=0 \Rightarrow F_1L_1-F_2L_2+FL=0$$

F_1: نیروی قائم وارد شده

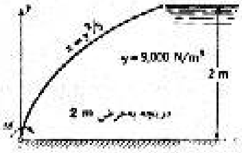
F_2: نیروی افقی وارد شده

F: نیروی لازم برای بازکردن دریچه

$$0.948\times179285-156896\times1.0833+F\times2=0 \quad \Rightarrow F=0$$

د) با توجه قسمت ج) $\sum M=M_1-M_2=0$

۲.۷۹. در شکل ۷۱-۲ مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به دریچه و خط اثر آن را تعیین کنید.



شکل ۷۱-۲
مسائل ۷۹-۲ و ۸۳-۲.

حل:

برای محاسبه نیروی قائم وارد بر دریچه باید وزن سیال فرضی بالای دریچه تا سطح آزاد را محاسبه کنیم

$$\delta F=\gamma\delta V=\gamma\times2\delta A=2\gamma x\,dy=\frac{2\gamma}{5}y^2dy$$

$$F=\int\delta f=\frac{2\gamma}{5}\int_0^2 y^2dy=\frac{2\gamma}{5}\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^2=9600N$$

$$V=\frac{F}{\gamma}=\frac{9600}{9000}=1.0667m^3$$

$$x_p=\bar{x}=\frac{1}{V}\int x dv=\frac{1}{V}\int\frac{x}{2}dv=\frac{1}{V}\int_0^2\frac{x}{2}2xdy=\frac{1}{V}\int_0^2x^2dy=\frac{1}{V}\int_0^2\frac{y^4}{25}dy=\frac{1}{1.0667}\left(\frac{1}{25}\times\frac{y^5}{5}\right)_0^2=0.24m$$

۲.۸۰. در شکل ۵۳-۲، OA معرف یک سطح منحنی است. عرض سطح عمود بر صفحهٔ کاغذ $3m$ است. نیروی وارد به سطح را به دست آورید. $\gamma=9kN/m^3$

حل:

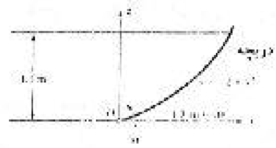
با توجه به اینکه سطح موردنظر متقارن است (OB محور تقارن سطح می‌باشد) برایند نیروهای افقی وارد شده صفر است یعنی دو نیروی اعمال شده در دو جهت همدیگر را خنثی می‌کنند برای محاسبه نیروی قائم وارد شده، وزن سیال بالای سطح را حساب می‌کنیم این نیرو کل نیروی وارد به سطح می‌باشد. $dA=ydx$

$$\delta F=\gamma\delta V=\gamma\times2\times(3\times ydx)=6\gamma ydx=6\gamma\frac{x^2}{8}dy=\frac{3}{4}\gamma x^2dx$$

$$\delta F=6\gamma\times\frac{x^2}{8}dx=\frac{3}{4}\gamma x^2dx$$

$$F=\int\delta f=\frac{3}{4}\gamma\int_0^{\sqrt{8}}x^2dx=\frac{3}{4}\gamma\left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^{\sqrt{8}}=50912N=50.912kN$$

۲-۸۱. گشتاور مورد نیاز جهت نگهداشتن دریچه نشان داده شده در شکل ۲-۷۲ را بدست آورید. از وزن آن صرفنظر کنید.



شکل ۲-۷۲

حل:

محاسبه نیروی افقی و خط اثر آن:

تصویر دریچه موردنظر را بر صفحه قائم درنظر گرفته و داریم:

$$F_H = \gamma \bar{h} A = 9806 \times \left(\frac{1.1}{2}\right) \times (1.1 \times 1.3) = 7712\,N$$

$$z_p = \bar{z} + \frac{I_G}{\bar{z}A} = \frac{1.1}{2} + \frac{1/12 \times 1.1^3 \times 1.3}{1.1/2 \times (1.1 \times 1.3)} = 0.733\,m$$

$L_H = 1.1 - 0.733 = 0.367\,m$ فاصله خط اثر نیروی افقی از نقطه O.

محاسبه نیروی قائم و خط اثر آن:

$$z = 1.1\,m \Rightarrow x = 1.1^{1/3} = 1.032\,m$$

$$F_v = \int P dA = \int_0^{1.032} \gamma(1.1 - z) b dx = \gamma b \int_0^{1.032} (1.1 - x^3) dx = 9806 \times 1.3 \times \left[1.1x - \frac{x^4}{4}\right]_0^{1.032} = 10856\,N$$

$$x_p = \frac{1}{F_v} \int x P dA = \frac{1}{F_v} \int_0^{1.032} x\gamma(1.1 - z) b dx = \frac{\gamma b}{F_v} \int_0^{1.032} x(1.1 - x^3) dx$$

$$= \frac{9806 \times 1.3}{10856} \left[\frac{1.1x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{1.032} = 0.413\,m$$

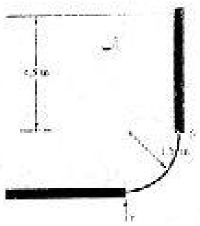
$\Rightarrow L_v = 0.413\,m$ فاصله خط اثر نیروی قائم از نقطه O.

محاسبه گشتاور لازم جهت نگهداشتن دریچه:

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow M_1 + M_2 - M = 0 \quad \Rightarrow F_H L_H + F_V L_V - M = 0$$

$$\Rightarrow M = 7712 \times 0.367 + 10856 \times 0.413 = 7313.8\,N.m$$

۲-۸۲. دریچه نشان داده شده در شکل ۲-۷۳ دارای طول $2m$ و در نقطه O لولا شده است. مؤلفه افقی نیروی وارد بر دریچه و خط اثر آنرا محاسبه کنید. مؤلفه قایم و خط اثر آنرا بدست آورید. با صرفنظر کردن از نیروی وزن چه نیرویی برای باز کردن دریچه مورد نیاز است؟



شکل ۲-۷۳

حل:

محاسبه نیروی افقی و خط اثر آن:

$$F_H = \gamma \bar{h} A$$

$$\bar{h} = 4.5 + \frac{1.5}{2} = 5.25\,m \quad , \quad A = 1.5 \times 2 = 3\,m$$

$$F_H = 9806 \times 5.25 \times 3 = 154444\,N$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} = 5.25 + \frac{1/12 \times 1.5^3 \times 2}{5.25 \times 3} = 5.286\,m$$

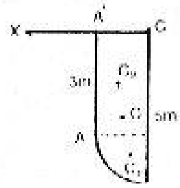
$L_H = 5.286 - 4.5 = 0.786m$:فاصله خط اثر نیروی افقی از نقطه O

محاسبه نیروی قائم و خط اثر آن:

$$F_V = W = \gamma V$$

$$V = 4.5\times2\times1.5 + \frac{1}{4}\times\pi\times1.5^2\times2 = 17.0343 m^3$$

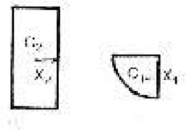
$$\Rightarrow F_V = 9806\times17.0343 = 167038 N$$



$$x_p = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

$$x_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4\times1.5}{3\pi} = 0.6366 m \quad , \quad A_1 = \frac{\pi\times1.5^2}{4} = 1.767 m^2$$

$$x_2 = \frac{1.5}{2} = 0.75 m \quad , \quad A_2 = 1.5\times4.5 = 6.75 m^2$$



$$\Rightarrow x_p = \frac{0.6366\times1.767 + 0.75\times6.75}{1.767 + 6.75} = 0.726 m$$

$L_v = 1.5 - 0.726 = 0.774 m$:فاصله خط اثر نیروی قائم از O

محاسبه نیروی لازم جهت بازکردن دریچه:

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 - M_3 = 0 \Rightarrow F_H L_H + F_V L_V - FL = 0$$

$$154444\times0.786 + 167038\times0.774 - F\times1.5 = 0 \Rightarrow F = 167120 N$$

۲ـ۸۳. در شکل ۷۱-۲ گشتاور M برای نگهداری دریچه چقدر است؟ از وزن دریچه صرفنظر کنید.

حل:

تصویر دریچه بر صفحه قائم را در نظر گرفته و با محاسبه نیروی افقی وارد بر آن و نیز نقطه اثر آن گشتاور ایجاد شده را محاسبه می‌کنیم.

$$A = 2\times2 = 4m^2 \quad , \quad \bar{y} = \bar{h} = \frac{2}{2} = 1m$$

$$F_H = P_G A = \gamma\bar{h}A = 9000\times1\times4 = 36000 N$$

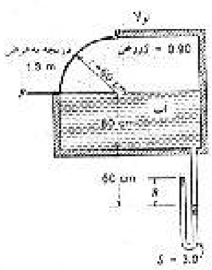
$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} = 1 + \frac{2\times2^3/12}{1\times4} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$ نسبت به سطح آزاد مایع

$$\Rightarrow L_H = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$ نسبت به نقطه O

با توجه به مسئله ۷۹ و محاسبات بالا داریم:

$$\sum M = 0 \Rightarrow M - M_H - M_v = 0 \Rightarrow M - 36000\times\frac{2}{3} - 9600\times0.24 = 0 \Rightarrow M = 26304 N.m = 26.304 KN.m$$

۲ـ۸۴. در شکل ۷۴-۲ نیروی لازم برای بسته نگه داشتن دریچه، F، را محاسبه کنید. $R = 60 cm$



شکل ۷۴-۲

مسایل ۸۲-۲ و ۸۶-۲

حل:

برای تعیین نیروی وارده به دریچه فشار در سطح جدایی آب و روغن و نیز در سطح روغن را محاسبه می‌کنیم.

در سطح جدایی آب و روغن $P = 3\gamma R - 1.2\gamma = 3 \times 0.6 \times \gamma - 1.2\gamma = 0.6\gamma$

در سطح روغن $P = 3\gamma R - 1.2\gamma - 0.6 \times 0.9 \times \gamma = 3 \times 0.6 \times \gamma - 1.2\gamma - 0.6 \times 0.9 \times \gamma = 0.06\gamma$

$$F = P.A = \gamma \bar{h} A = \gamma \times (\frac{0.6 + 0.06}{2}) \times (0.6 \times 1.3) = 2524\,N$$

۸۵-۲. در شکل ۷۴-۲ نیروی لازم برای باز کردن یا بسته نگه داشتن دریچه، F چقدر است؟ $R = 45\,cm$

حل:

مانند مسئله قبل:

در سطح جدایی آب و روغن $P = 3\gamma R - 1.2\gamma = 3 \times 0.45 \times \gamma - 1.2\gamma = 0.15\gamma$

در سطح روغن $P = 3\gamma R - 1.2\gamma - 0.6 \times 0.9 \times \gamma = 3 \times 0.45 \times \gamma - 1.2\gamma - 0.6 \times 0.9 \times \gamma = -0.39\gamma$

$$F = PA = \gamma \bar{h} A = \gamma (\frac{0.15 - 0.39}{2}) \times (0.6 \times 1.3) = -918\,N$$

۸۶-۲. در شکل ۷۴-۲ مقدار R را طوری تعیین کنید که نیروی لازم برای باز کردن یا بسته نگه‌داشتن دریچه، F صفر شود.

حل:

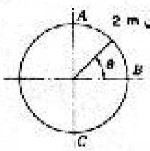
برای اینکه نیرو صفر شود باید فشار هم صفر باشد در نتیجه داریم:

فشار در سطح جدایی آب و روغن + فشار در سطح روغن = 0

$$(3\gamma R - 1.2\gamma) + (3\gamma R - 1.2\gamma - 0.6 \times 0.9 \times \gamma) = 0$$

$$\Rightarrow 6\gamma R - 2.94\gamma = 0 \Rightarrow R = 0.49\,m = 490\,mm$$

۸۷-۲. در شکل ۷۵-۲ یک استوانه نشان داده شده است. توزیع فشار ناشی از جریان در پیرامون استوانه، روی قطع ABC با رابطه $P = 2\rho\,(1 - 4\sin^2\theta) + 500$ داده شده است، که در آن P بر حسب پاسکال است. نیروی وارد به ABC را محاسبه کنید.



شکل ۷۵-۲ مسایل ۸۷-۲، ۸۸-۲

حل:

$$dA = rd\theta \times \omega = 2rd\theta$$

$$\delta F = PdA = P \times 2rd\theta = 2Prd\theta$$

با توجه به اینکه نیرو (F) یک کمیت برداری است و جهت آن بر روی سطح ABC متغیر است نمی‌توان مقدار آنرا از طریق انتگرال محاسبه نمود بنابراین F_x و F_y را به طور مجزا حساب می‌کنیم.

$$\delta F_x = \delta F\cos\theta = 2Pr\cos\theta d\theta$$

$$F_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\rho\left(1-4\sin^2\theta\right)+500\right) 2r\cos\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\rho - 8\rho\sin^2\theta + 500\right)\times 2r\cos\theta d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\rho+500)\,2r\cos\theta d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\times 8\rho r\cos\theta\sin^2\theta d\theta = 2r\left(\left[(2\rho+500)\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 8\rho\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= 2r\left((2\rho+500)\times 2 - 8\rho\times\frac{2}{3}\right) = 2r\left(1000 - \frac{4}{3}\rho\right)$$

$$\delta F_y = \delta F\sin\theta = 2Pr\sin\theta d\theta$$

$$F_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\rho\left(1-4\sin^2\theta\right)+500\right) 2r\sin\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\rho - 8\rho\sin^2\theta + 500\right) 2r\sin\theta d\theta$$

$$= 2r\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\rho+500)\sin\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\rho\sin^3\theta d\theta\right)$$

با توجه به اینکه توابع تحت انتگرال فوق توابعی فرد بوده و انتگرال‌گیری از a تا $a-$ صورت می‌گیرد. بنابراین مقدار هر دو انتگرال برابر صفر خواهد بود پس: $F_y = 0$

$$\Rightarrow F = 2r\left(1000 - \frac{4}{3}\rho\right)$$

۲-۸۸. تغییرات فشار روی استوانهٔ شکل ۷۵-۲ با رابطهٔ $p = 2\rho\left[1+\sin\theta\right]^2 + 500$ داده شده است. نیروی وارد به استوانه چقدر است؟

حل:

$$P = 2\rho\left[1-4(1+\sin\theta)^2\right]+500 = 2\rho\left[1-4\left(1+\sin^2\theta+2\sin\theta\right)\right]+500 = -8\rho\left(1+2\sin\theta\right)+\left[2\rho\left(1-4\sin^2\theta\right)+500\right]$$

عبارت دوم در مسئله قبل محاسبه شده است. برای محاسبه قسمت اول داریم:

$$F_{x_1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -8\rho\left(1+2\sin\theta\right)2r\cos\theta d\theta = -16\rho r\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta d\theta\right)$$

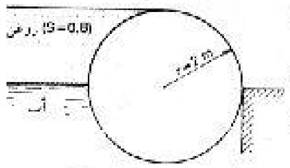
$$= -16\rho r\left(\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = 16\rho r\,(2-0) = -32\rho r$$

$$\Rightarrow F_x = -32\rho r + 2r\left(1000 - \frac{4}{3}\rho\right) = 2r\left(1000 - \frac{52\rho}{3}\right)$$

$$F_{y_1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -8\rho\left(1+2\sin\theta\right)2r\sin\theta d\theta = -16\rho r\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\sin\theta\right)\sin\theta d\theta\right)$$

$$= -16\rho r\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta d\theta\right) = -16\rho r\left(\left[-\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = -16\rho r[0+\pi] = -16\pi\rho r$$

$$\Rightarrow F_y = -16\pi\rho r + 0 = -16\pi\rho r$$



شکل ۲-۷۶

۲.۸۹. یک تنهٔ درخت مطابق شکل ۲-۷۶ جلوی آب و روغن را بند آورده است. شکل کنده را استوانه فرض کرده، برای واحد طول آن مطلوب است؛ الف) نیرویی که استوانه را به دیواره می‌فشارد، ب) وزن استوانه، ج) چگالی استوانه.

حل:

الف) نیرویی که استوانه را به دیواره می‌فشارد عبارت است از تفاضل نیروهای افقی وارده بر سطح BC و ADC نیروهای افقی وارد بر سطوح BC و DC به علت وجود داشتن تقارن یکدیگر را خنثی می‌کنند پس تنها نیروی باقیمانده نیروی وارد بر سطح AD می‌باشد.

$$F_H = F_{H,AD} = \gamma \bar{h} A = 0.8 \times 9806 \times \frac{2}{2} \times (2 \times 1) = 15690\,N \approx 15.7\,kN$$

ب) برای حفظ حالت تعادل تنه درخت باید برایند نیروهای قایم وارد شده صفر باشد، یعنی وزن استوانه باید با مؤلفه قایم نیروی وارد از طرف سیال به آن برابر باشد. برای تعیین مؤلفه قایم نیروی وارده از طرف سیال وزن سیال فرضی بالای سطح BCD تا سطح آزاد را محاسبه می‌کنیم.

$$F_{v_1} = F_{v,BCD} = \gamma_w\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) + \gamma_{oil}(2r \times r) = \gamma_w\left(\frac{\pi \times 2^2}{2}\right) + 0.8\gamma_w(2\times2\times2) = \gamma_w(2\pi + 6.4)$$

$$F_{v_2} = F_{v,AB} = -\gamma_{oil}\left(r \times r - \frac{1}{4}\pi r^2 \times 1\right) = -0.8\gamma_w\left(2\times2 - \frac{1}{4}\times\pi\times2^2\right) = -0.8\gamma_w(4-\pi)$$

$$F_v = F_{v_1} + F_{v_2} = W$$

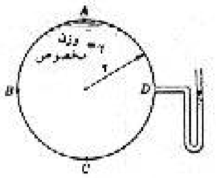
$$\Rightarrow W = \gamma_w(2\pi + 6.4) - 0.8\gamma_w(4-\pi) = \gamma_w(2.8\pi + 3.2) = 9806 \times (2.8\pi + 3.2) = 117637\,N/m = 117.64\,kN/m$$

ج)

$$S = \frac{\gamma}{\gamma_w}$$

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{117637}{\pi \times 2^2 \times 1} = 9361.3\ N/m^3$$

$$\Rightarrow S = \frac{9361.3}{9806} = 0.955$$



شکل ۲-۷۷

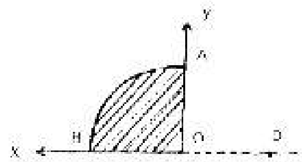
۲.۹۰. در شکل ۲-۷۷ استوانه از مایع پر شده است. برای واحد طول استوانه؛ الف) مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به AB را بدست آورید. خط اثر این مؤلفه را تعیین کنید. ب) مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به AB و خط اثر آن را تعیین کنید.

حل:

با توجه به مانومتر نشان داده شده در شکل واضح است که فشار نسبی در سطح BD برابر صفر می‌باشد.

الف) برای محاسبه نیروی افقی وارد بر AB تصویر کمان مزبور را بر سطح قائم پیدا می‌کنیم که مستطیلی به ابعاد r و 1 می‌باشد.

فاصله مرکز سطح تصویر مزبور از سطح آزاد برابر $\frac{r}{2}$ است و داریم:



$$A = r \times 1 = r \quad , \quad \bar{h} = \frac{r}{2}$$

$$F_H = \gamma \bar{h} A = -\gamma \times \frac{r}{2} \times r = \frac{-\gamma r^2}{2}$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y} A}$$

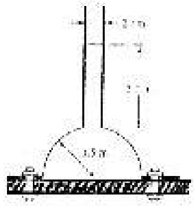
$$y_p = \frac{r}{2} + \frac{\frac{1}{12} \times 1 \times r^3}{\frac{r}{2} \times r \times 1} = \frac{r}{2} + \frac{r}{6} = \frac{2}{3} r \qquad \text{(فاصله از سطح } BD\text{)}$$

ب) برای محاسبه مؤلفه قائم نیروی وارد بر AB وزن سیال فرضی بالای سطح AB را حساب می‌کنیم.

$$F_V = V\gamma = \frac{\pi r^2}{4} \times 1 \times \gamma = \frac{-\gamma \pi r^2}{4}$$

علامت منفی ظاهر شده در نیروهای محاسبه شده بالا به خاطر این است که نیروهای افقی و قائم وارد شده بر سطح AB برخلاف جهت مثبت نشان داده شده در شکل می‌باشد با توجه به اینکه در جهت عمود بر صفحه تقارن موجود است بنابراین برای محاسبه خط اثر نیرو باید مرکز سطح شکل OAB را در نظر بگیریم که برابر $x_p = \frac{4r}{3\pi}$ می‌باشد (فاصله از AC)

۲.۹۱. ظرف نیمکره‌ای نشان داده شده در شکل ۷۸-۲ با آب پر شده و دارای وزن $28\,KN$ می‌باشد. این ظرف توسط پیچ‌هایی به کف محیط دایره‌ای شکل بسته شده است نیروی کل مورد نیاز جهت نگهداشتن پایین ظرف را محاسبه کنید.



شکل ۷۸-۲

حل:

نیروی وارده از طرف آب برابر وزن آب بالای سطح ظرف (به طور فرضی) می‌باشد.

$$F_W = \gamma V$$

V = حجم استوانه بزرگ - (حجم نیمکره + حجم استوانه کوچک)

$$V = \pi \times 1.5^2 \times (3+1.5) - (\frac{2}{3}\pi \times 1.5^3 + \pi \times 0.01^2 \times 3) = 24.7391\, m^3$$

$$\Rightarrow F_w = 9806 \times 24.7391 = 242592\, N$$

$\sum F = 0 \Rightarrow F_w - W + F = 0 \Rightarrow 242592 - 28000 + F = 0$

$\Rightarrow F = -214592\,N$ نیروی لازم به سمت پایین

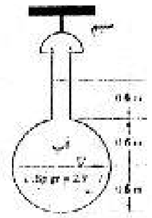
۲.۹۲. ظرف کروی شکل با یک سیم و حلقه نیم‌دایره‌ای توسط یک لوله پیزومتر کوچک آویزان شده است. شکل ۷۹-۲ بالای لوله به اتمسفر باز می‌باشد. محاسبه کنید:

الف) نیروی وارد بر نیمه پایینی ظرف کروی

ب) نیروی وارد بر نیمه بالایی ظرف کروی

ج) تنش کل بر روی سیم

از وزن ظرف صرفنظر کنید.



شکل ۷۹-۲

حل:

از وزن آب موجود در قسمت لوله‌ای صرفنظر کرده و داریم:

نیروی وارد بر قسمت پایین نیمکره:

نیروی واردبرقسمت پایین‌نیمکره‌وزن سیال بالای سطح‌نیمکره پایین تاسطح آزاد سیال‌می‌باشد(مطابق‌شکل)

$$F = 2.9\times 9806\times(2/3\times\pi\times0.6^3) + 9806\times\left[\pi\times0.6^2\times(0.6+0.4)\right] = 23955\ N$$

نیروی وارد بر قسمت بالای نیمکره:

نیروی وارد بر قسمت بالای نیمکره وزن سیال فرضی بالای سطح جدایی آب و سیال دیگر تا سطح آزاد آب می‌باشد (مطابق شکل)

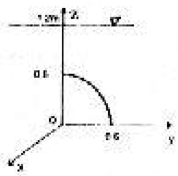
$$F = \gamma V = 9806\times\left[\pi\times0.6^2\times(0.4+0.6) - \frac{2}{3}\pi\times0.6^3\right] = 6654\ N$$

نیروی وارد بر سیم:

نیروی وارد بر سیم برابر وزن سیال موجود در ظرف می‌باشد:

$$F = 2.9\times9806\times(\frac{2}{3}\times\pi\times0.6^3) + 9806\times(\frac{2}{3}\times\pi\times0.6^3) = 17300\ N$$

۲.۹۳. مقدار و امتداد نیروی برآیند وارد به ربع اول سطح یک کره به شعاع $600\,mm$ که مرکز آن در مبدأ است را به دست آورید. مرکز کره $1.2\,m$ زیر سطح آب است.



حل:

برای محاسبه نیروهای F_x F_y تصویر سطح کروی داده شده را بر صفحه zoy و zox پیدا می‌کنیم و برای محاسبه F_z باید وزن آب بالا سطح مورد نظر را حساب کنیم.

واضح است که مقدار نیروی F_x با توجه به تقارن سطح مذکور نسبت به صفحه xoy برابر صفر می‌باشد.

برای محاسبهٔ F_y داریم: $A = \frac{2\times1}{4}\pi r^2 = \frac{2}{4}\pi\times(0.6)^2 = 0.5655\,m^2$

$\bar{h} = (r - \frac{4r}{3\pi}) + (d - r) = (0.6 - \frac{4 \times 0.6}{3\pi}) + (1.2 - 0.6) = 0.945\ m$

$F_y = P_G A = \gamma \bar{h} A = 9806 \times 0.945 \times 0.5655 = 5240 N$

برای محاسبه F_z داریم: $F_z = \gamma V$

$V = \left(\frac{1 \times 2}{4} \pi r^2 \times 1.2\right) - \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{2} \pi \times 0.6^2 \times 1.2 - \frac{1}{3} \pi \times 0.6^3 = 0.4524\ m^3$

$\Rightarrow F_z = 9806 \times 0.4524 = 4436 N$

محاسبه مرکز فشار: $z_p = \bar{z} + \frac{I_G}{\bar{y} A}$

$I_G = \frac{1}{8} \pi r^4 = \frac{1}{8} \times \pi \times 0.6^4 = 0.051 \quad , \quad A = \frac{1 \times 2}{4} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi \times 0.6^2 = 0.5655\ m^2$

نسبت به سطح آزاد: $\Rightarrow z_p = 0.945 + \frac{0.051}{0.945 \times 0.5655} = 1.04$

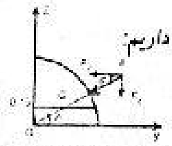
نسبت به نقطه O: $\Rightarrow z_p = 1.2 - 1.04 = 0.16$

با توجه به تقارن سطح نسبت به صفحه zoy مرکز فشار روی صفحه مزبور می‌باشد بنابراین $x_p = 0$ برای محاسبه y_p هم می‌توان از روش ویژه سطوح کروی و دایره‌ای ذکر شده در زیر و هم روش انتگرال استفاده نمود. داریم:

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{0 + (5240)^2 + (4436)^2} = 6866 N$

با توجه به اینکه $x_p = 0$ می‌باشد F کل در صفحه zoy قرار دارد

با توجه به شکل داریم:



$\sin\theta = \frac{F_z}{F} = \frac{4436}{6866} = 0.646 \Rightarrow \theta = 40.24°$

$tg\theta = \frac{z_p}{y_p} = \frac{0.16}{y_p} = tg\, 40.24 = 0.846 \Rightarrow y_p = 0.189 m$

روش ۲. با توجه به اینکه مجموع گشتاور نیروهای فشار حول مرکز کره برابر صفر می‌باشد داریم:

$F_z y_p - F_y z_p = 0 \Rightarrow 4436 \times y_p - 5240 \times 0.16 = 0 \Rightarrow y_p = 0.189 m$

$\Rightarrow$ مرکز فشار $(0, 0.189, 0.16)$

۲.۹۴. حجم یک بیضیگون به معادلهٔ $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ برابر $4\pi abc/3$ است و سطح یک بیضی به معادلهٔ $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ برابر πac است. نیروی قائم وارد به سطحی که در مثال ۱۰-۲ ذکر شده را تعیین کنید.

حل:

برای محاسبه نیروی قائم باید حجم آب بالای سطح بیضیگون را حساب کنیم.

$V_1 = 2 \times (\pi \times 2 \times 3/4) = 3\pi \quad , \quad V_2 = \frac{1}{8} (4\pi \times 2 \times 2 \times 3/3) = 2\pi$

$V = 3\pi - 2\pi = \pi$

$F = \gamma V = 9806 \times \pi = 30806 N = 30.806 kN$

۲-۹۵. لوله‌ای به قطر $5\,m$ مایع را تحت فشار $1.4\,MPa$ منتقل می‌کند. ضخامت جدارهٔ لوله باید چقدر باشد؟ حداکثر تنش مجاز $70\,MPa$ است.

حل:

$$\sigma = \frac{pr}{e} \Rightarrow e = \frac{pr}{\sigma} = \frac{1.4 \times 2.5}{70} = 0.05\,m = 50\,mm$$

۲-۹۶. برای انتقال سیال می‌توان به جای یک لوله از چهار لوله با قطر نصف استفاده کرد، تا سطح مقطع جریان در دو حالت برابر باشد. در کدامیک از دو حالت فولاد مصرفی کمتر است؟ تنش حداکثر مجاز در جدارهٔ لوله در دو حالت یکسان است.

حل:

با توجه به محور جریان یکسان از داخل لوله‌ها در هر دو حالت فشار درون لوله‌ها برابر می‌باشد.

I) برای یک لوله داریم:

$$e_1 = \frac{pr}{\sigma}$$

حجم فولاد مصرف شده:

$$V_1 = \pi\left[(r+e)^2 - r^2\right] = \pi e(2r+e)$$

II) برای هرکدام از چهار لوله داریم:

$$e_2 = \frac{p \times r/2}{\sigma} = \frac{pr}{2\sigma} \quad \Rightarrow \quad e_2 = \frac{e_1}{2} = \frac{e}{2}$$

حجم فولاد مصرف شده:

$$V_2 = 4\pi\left(\left(\frac{r}{2}+\frac{e}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right) = 4\pi\left(\frac{r}{2}+\frac{e^2}{4}\right) = \pi e(2r+e)$$

$V_1 = V_2 \Rightarrow$ **یعنی در هر دو حالت مقدار فولاد یکسان مصرف می‌شود**

۲-۹۷. یک کره جدار نازک به قطر $3\,m$ محتوی گاز تحت فشار $5\,MPa$ است. حداقل ضخامت جدارهٔ کره را تعیین کنید. تنش مجاز $60\,MPa$ است.

حل:

$$\sigma = \frac{pr}{2e} \Rightarrow e = \frac{pr}{2\sigma} \Rightarrow e = \frac{1.5 \times 3/2}{2 \times 60} = 1.875\,cm = 18.75\,mm$$

۲-۹۸. یک مخزن استوانه‌ای به ارتفاع $2.3\,m$ و قطر $1.3\,m$ به دو حلقه مجهز شده است که به فاصلهٔ $30\,cm$ از دو قاعدهٔ مخزن قرار دارند. مخزن از آب پر می‌شود. تنش کششی در هر حلقه چقدر است؟

حل:

برای حلقه اول:

$$P_1 = \gamma h_1 = 9806 \times 0.3 = 2941.8\,Pa$$

کشش به ازای واحد طول

$$T_1 = p_1 r = 2941.8 \times \frac{1.3}{2} = 1912.17\,N$$

برای حلقه دوم:

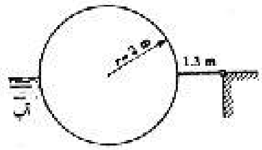
$$P_2 = \gamma h_2 = 9806\,(2.3 - 0.3) = 19612\,Pa$$

کشش به ازای واحد طول

$$T_2 = P_2 r = 19612 \times \frac{1.3}{2} = 12747.8\,N$$

۲-۹۹. دریچهٔ شکل ۸۰-۲ از یک استوانه توخالی و یک صفحه تشکیل شده است. صفحه به دیواره لولا شده

است. موقعیت دریچه با پمپاژ آب به داخل یا خارج استوانه کنترل می‌شود. در حالتی که استوانه خالی است، مرکز ثقل کل دریچه در روی محور تقارن و به فاصلهٔ $1.3\,m$ از لولا قرار دارد. در این حالت دریچه به صورتی که در شکل نشان داده شده است، متعادل است. هنگامی که سطح آب $1\,m$ بالاتر رود، چند متر مکعب آب باید به داخل استوانه پمپ شود تا دریچه در موقعیت خود باقی بماند. عرض دریچه را $1\,m$ بگیرید.



شکل ۸۰-۲

حل:

حالت اول :

در حالتی که آب پایین است دو نیرو بر سیستم وارد می‌شود F_{ABC} به سمت بالا و نیروی وزن به پایین (به غیر از نیروهای وارد بر لولا)

$$F_{ABC} = \gamma V = 9806 \times (\frac{\pi}{2}(1)^2 \times 1) = 15403.23\,N$$

$$\sum M = 0$$

$$15403.23 \times 1.67 = W \times 1.3 \Rightarrow W = 19787.2\ N/m$$ *(واحد عرض دریچه)*

حالت دوم :

در این حالت نیروهای وارد شده بر سیستم به شرح زیر است:

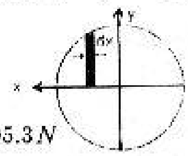
$$\begin{cases} F_{OA} = \gamma \bar{h} A = 9806 \times 1 \times (0.67 \times 1) = 6570.02\,N \\ L_1 = \dfrac{0.67}{2} = 0.335\,m \quad \text{به سمت چپ لولا} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{ABC} = \gamma V = (\dfrac{\pi r^2}{2} \times 1 + 2r^2 \times 1) = 9806 \times (\dfrac{\pi \times (1)^2}{2} \times 1 + 2 \times (1)^2 \times 1) = 35015.23\,N_2 \\ L_2 = 0.67 + 1 = 1.67\,m \quad \text{به سمت چپ لولا} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{CD,x} = \gamma \bar{h} A = 9806 \times \dfrac{1}{2} \times (1 \times 1) = 4903\,N \\ L_3 = \dfrac{1}{3}\,m \end{cases}$$

$$F_{CD,y} = \gamma V = 9806 \times (r^2 - \frac{\pi r^2}{4}) \times 1 = 9806 \times (1 - \frac{\pi}{4}) = 2104.38\,N$$

برای محاسبه محل اثر این نیرو با انتخاب المان دیفرانسیلی مطابق شکل داریم:



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$dF = \gamma dx \times (1-y) \times 1\ ,\quad dM = \gamma[(1-y)dx]x$$

$$F = \gamma \int_0^1 (1-y)\,dx = \gamma \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2})\,dx = 9806 \times 0.2147 = 2105.3\,N$$

$$M=\gamma\int_0^1(1-y)xdx=\gamma\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})xdx=9806\times0.1668=1635.6\,N.m$$

$$M=F\times x_p\Rightarrow x_p=\frac{M}{F}=\frac{1635.6}{2105.3}=0.787\,m$$

$\Rightarrow L_4=1.67+0.78=2.45\,m$ به سمت چپ لولا

$\begin{cases}W=19787.2\,N\\L_5=1.3\,m\end{cases}$ به سمت چپ لولا

$\begin{cases}F:\\L_6=1.67\,m\end{cases}$ نیروی وارد شده از طرف وزن آب پمپ شده

$\sum M_0=0$

$$\Rightarrow 6570.02\times0.335+35015.23\times1.67+4903\times\frac{1}{3}-2104.3\times2.45-19787.2\times1.3-F\times1.67=0$$

$\Rightarrow F=18820.35\,N$

حجم آب لازم $V=\frac{F}{\gamma}=\frac{18820.35}{9806}=1.919\,m^3/m$ به ازای عرض استوانه

۲-۱۰۰. تغییرات دانسیته یک مایع با عمق با رابطهٔ $\rho=1000+0.03y\ kg/m^3$ داده شده است. کره‌ای به قطر $250\,mm$ و چگالی 1.4 در این مایع غوطه‌ور می‌شود. در چه عمقی کره به تعادل می‌رسد؟

حل:

در حالت تعادل داریم:

$W=F_B\Rightarrow\gamma V=\gamma_w V$

$\Rightarrow\gamma=\gamma_w\Rightarrow\rho=s\rho_w$

$1000+0.03y=1.4(1000)\Rightarrow 0.03y=400$

$\Rightarrow y=13333.3\,mm\ \Rightarrow y=13.33\,m$

۲-۱۰۱. مسألهٔ قبل را برای یک استوانهٔ افقی به قطر $250\,mm$ و چگالی 1.4 حل کنید.

حل:

با توجه به مسئله قبل مشاهده می‌شود که حجم جسم موردنظر تأثیری در محاسبات ندارد بنابراین برای استوانه هم با محاسبات مشابه همان عدد $y=13.33\ m$ بدست می‌آید.

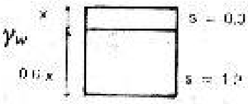
۲-۱۰۲. طول ضلع یک مکعب $60\,cm$ است. چگالی نیمه بالایی مکعب 1.4 و چگالی نیمه‌پایینی آن 0.6 است. مکعب در مایعی به چگالی 0.9 قرار می‌گیرد. در زیر این مایع، مایع دیگری به چگالی 1.2 وجود دارد. چه ارتفاعی از مکعب، بالاتر از سطح مشترک دو مایع خواهد بود؟

حل:

$V=0.6^3=0.216\,m^3$: حجم مکعب

$$W=V_1\gamma_1+V_2\gamma_2=\frac{0.216}{2}\times\gamma_w\times0.6+\frac{0.216}{2}\times\gamma_w\times1.4=0.216\gamma_w$$

با توجه به اینکه مکعب ایستا است بنابراین در حال تعادل می‌باشد پس:



$$W = xA\gamma_1 + (0.6 - x)A\gamma_2$$

$$0.216\,\gamma_w = x \times (0.6 \times 0.6) \times 0.9\gamma_w + (0.6 - x) \times (0.6 \times 0.6) \times 1.2\gamma_w$$

$$\Rightarrow 0.216 = 0.324x + (0.6 - x) \times 0.432 \Rightarrow x = 0.4\,m$$

۲-۱۰۳. وزن یک جسم در آب $3\,N$ و در روغن $(S = 0.83)\ 4\,N$ است. جرم مخصوص، حجم مخصوص و حجم جسم را تعیین کنید.

حل:

حجم جسم موردنظر: $V = \dfrac{F_1 - F_2}{\gamma_2 - \gamma_1}$

$$F_1 = 3\,N \quad , \quad \gamma_1 = 9806\ N/m^3$$

$$F_2 = 4\,N \quad , \quad \gamma_2 = 0.83 \times 9806\ N/m^3$$

$$\Rightarrow V = \frac{3 - 4}{0.83 \times 9806 - 9806} = 6 \times 10^{-4}\,m^3 = 600\,cm^3$$

$$W = F_1 + V\gamma_1 = 3 + 6 \times 10^{-4} \times 9806 = 8.88\,N$$

چگالی جسم

$$S = \frac{W}{\gamma_w V} = \frac{8.88}{9806 \times 600 \times 10^{-6}} = 4.51$$

$$W = \gamma V = \rho g V \quad \Rightarrow \rho = \frac{W}{gV} = \frac{8.88}{9.806 \times 6 \times 10^{-4}} = 1509.3\,kg/m^3$$

حجم مخصوص

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1509.3} = 6.6 \times 10^{-4}\ m^3/kg$$

۲-۱۰۴. دو مکعب با حجم یکسان $1\,m^3$ یکی با چگالی 0.8 و دیگری با چگالی 1.1 با سیم کوتاهی به یکدیگر متصل شده، در آب قرار داده شده‌اند. چقدر از مکعب سبکتر در بالای سطح آب قرار می‌گیرد؟ کشش در سیم چقدر است؟

حل:

دو مکعب را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. بر این سیستم دو نیرو وارد می‌شود که عبارتند از: ۱-نیروهای وزن ۲-نیروهای شناوری

$$(\text{نیروهای وزن})\sum F_w = \sum F_B\ (\text{نیروهای شناوری})$$

$$1 \times 1.1 \times \gamma_w + 1 \times 0.8 \times \gamma_w = 1 \times \gamma_w + V_o \times \gamma_w$$

(V_o حجم قسمتی از مکعب سبک می‌باشد که در درون آب قرار گرفته است)

$$1.9 = 1 + V_o \Rightarrow V_o = 0.9\,m^3 \Rightarrow \frac{(1 - 0.9)m^3}{1\,m^2} = 0.1\,m = 100\,mm$$

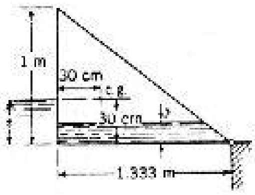
قسمتی از مکعب سبک‌تر که خارج از آب قرار دارد $\frac{1-0.9}{1} = 0.1$

برای محاسبه اندازه نیروی کشش در سیم مکعب سبکتر را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم و داریم:

$W + T = F_B$ (نیروی وزن) (نیروی شناوری)

$1 \times 0.8 \times \gamma_w + T = 0.9 \times \gamma_w \Rightarrow T = 0.1 \times \gamma_w = 0.1 \times 9806 = 980.6 N$

۲-۱۰۵. منشور توخالی مثلث‌القاعده‌ای که در شکل ۸۱-۲ نشان داده شده است، به ازای $z = 30 cm$ و $y = 0$ مطابق شکل در تعادل است. وزن واحد طول منشور و z را بر حسب y به دست آورید. هر دو مایع آب است. مقدار y را به ازای $z = 45 cm$ حساب کنید.



شکل ۸۱-۲ مسایل ۱۰۵-۲ و ۱۲۰-۲

حل:

الف) $z = 0.3 m \quad , \quad y = 0$

$F_{OB} = \gamma h_G A = 9806 \times 0.3 \times (1.333 \times 1) = 3921.42 N$

$F_{AB} = \gamma h_G A = 9806 \times \frac{0.3}{2} \times (0.3 \times 1) = 441.21 N$

$\sum M_O = 0 \Rightarrow 3921.42 \times \frac{1.333}{2} + 441.21 \times \frac{0.3}{3} - W \times (1.333 - 0.3) = 0$

$\Rightarrow W = 2572.84 \ N/m$

ب) $y \neq 0$

$F_{OB} = \gamma h_G A = \gamma z (1.333 \times 1) = 1.333 \gamma z \quad , \quad L_1 = \frac{1.333}{2}$ به سمت چپ لولا

$F_{AB} = \gamma h_G A = \gamma \frac{z}{2} (z \times 1) = \frac{\gamma z^2}{2} \quad , \quad L_2 = \frac{z}{3}$

نیروی وزن آب $F_w = \gamma \times \left(\frac{y}{2} (1.333(1-y) + 1.333) \right) = 1.333 (2-y) \frac{\gamma y}{2} = 0.6665 (2-y) \gamma y$

$\frac{CD}{1.333} = \frac{1-y}{1} \Rightarrow CD = 1.333(1-y) = 1.333 - 1.333y$

$x_{fw} = \frac{1}{0.6665(2-y)y} \left[\left(\frac{1.333(1-y)}{2} + 1.333y \right)(y \times 1.333(1-y)) + \left(\frac{y \times 1.333y}{2} \right)\left(\frac{2}{3} \times 1.333y \right) \right]$

پس از ساده کردن $x_{fw} = \frac{2.22y + 0.889}{2-y}$ به سمت چپ لولا

$W = 2572.84 \ N/m$ عرض $\quad , \quad L_3 = 1.333 - 0.3 = 1.033 m$ به سمت چپ لولا

$\sum M_O = 0 \Rightarrow \left(1.333 \gamma z \times \frac{1.333}{2}\right) + \left(\frac{\gamma z^2}{2} \times \frac{z}{3}\right) - (f_{water} \times x_{fw}) - (2572.84 \times 1.333) = 0$

$$\Rightarrow (1.333\gamma z)\times\frac{1.333}{2}+\frac{\gamma z^2}{2}\times\frac{z}{3}-0.6665(2-y)\gamma y\times\frac{2.22y+0.889}{2-y}-2572.84\times1.033=0$$

$$z=0.45\,m \Rightarrow y=0.17\,m$$

۱۰۶-۲. حجم یک تیر چوبی $0.1\,m^3$ و چگالی آن 0.65 است. چند کیلوگرم بتون باید به تیر متصل کرد تا هر دو غوطه‌ور شوند. وزن مخصوص بتون $25\,kN/m^3$ است.

حل:

برای اینکه هر دو غوطه‌ور شوند باید مجموع نیروهای وزنی آندو با نیروی شناوری ایجاد شده برابر باشد البته با این شرایط حداقل مقدار بتن محاسبه می‌شود و در صورت اتصال بتن بیشتر از آن هر چه بهتر به خواست مسئله خواهیم رسید.

با فرض اینکه وزن بتن برابر W باشد داریم:

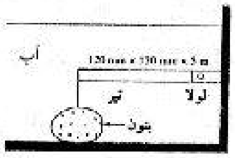
$$W=\gamma V \Rightarrow \quad V_{1\,\text{بتن}}=\frac{W}{\gamma}=\frac{W}{25\times10^3}$$

$$\gamma V+W=\gamma_w V+\gamma_w V_1$$

$$0.1\times0.65\times9806+W=0.1\times9806+\frac{m}{25000}\times9806$$

$$\Rightarrow 0.60776\,W=343.21 \;\;\Rightarrow\;\; W=564.713\,N \;\;\Rightarrow m=\frac{564.713}{9.806}=57.58\,kg$$

۱۰۷-۲. تیر نشان داده شده در شکل ۸۲-۲ توسط یک لنگر بتونی در وضعیت افقی نگهداشته شده است. اندازه تیر $120\,mm\times120\,mm\times5\,m$ می‌باشد. وزن مخصوص تیر و بتون به ترتیب 0.6 و 2.5 می‌باشد. حداقل مقدار وزن بتون را محاسبه کنید.



شکل ۸۲-۲

حل:

$$\sum M=0 \quad\Rightarrow\; F_1L_1+F_2L_2=0$$

$$F_1=W_1-F_{B_1}=0.6\gamma V_1-\gamma V_1 \;=-0.4\gamma V_1=-0.4\times9806\times(0.12\times0.12\times5)=-282.4\,N$$

$$F_2=W_2-F_{B_2}=2.5\gamma V_2-\gamma V_2=1.5\gamma V_2\;=1.5\times9806\times V_2=14709\,V_2$$

$$L_1=\frac{5}{2}=2.5\,m \quad,\quad L_2=5\,m$$

$$\Rightarrow\; -282.4\times2.5+14709V_2\times5=0 \quad\Rightarrow V_2=0.0096\,m^3$$

$$W=\gamma_c V_2=2.5\times9806\times0.0096=235.3\,N$$

۱۰۸-۲. قطر یک بالون کروی $15\,m$ است. بالون با هیدروژن پر شده و کف آن باز است. بارومتر فشار محیط را برابر $710\,mmHg$ نشان می‌دهد. دمای هوا $20°C$ است. مجموع وزن بالون و باری که می‌تواند آن را ساکن نگه دارد، چقدر است؟

حل:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{15}{2})^3=1767.15m^3$$

$$P_{bar}=710mmHg\times\frac{101325Pa}{760mmHg}=94660Pa$$

چون بالن از زیر باز می‌باشد پس فشار آن با فشار محیط یعنی فشار بارومتریک برابر است.

$$PV=mRT\Rightarrow m=\frac{PV}{RT}=\frac{94660\times1767.15}{4121\times293}=138.54kg$$

$W=mg=138.54\times9.806=1358.5N$ وزن هیدروژن (وزن کلی بالن)

$$\rho_{air}=\frac{P}{RT}=\frac{94823}{287\times293}=1.128$$

$$\Rightarrow\gamma_{air}=\rho_{air}g=1.128\times9.806=11.06N/m^3$$

نیروی شناوری = نیروی وزن

بار موردنظر $W+W'=F_B\Rightarrow W'=F_B-W=\gamma_{air}V-W=11.06\times1767.15-1358.5=18186N$

۲.۱۰۹. جرم یک بالون هوای گرم $272kg$ می‌باشد که شامل جرم سبد، یک نفر و بالون است. هوای داغ در دمای $68°C$ به بالون وارد می‌شود و هوای اتمسفر $24°C$ است. فرض کنید در بیرون و داخل بالون فشار اتمسفر یک استاندارد باشد با فرض اینکه شکل بالون کروی باشد چه قطری برای آن مورد نیاز است؟

اگر دمای هوای بیرون $2°C$ باشد اندازه بالون را محاسبه کنید.

حل:

$$\sum F_y=0\Rightarrow W+W_{\text{هوای ورودی}}=F_B$$

$$\rho_{in}\text{ هوای ورودی}=\frac{P}{RT}=\frac{101325}{287\times(273+68)}=1.035\ kg/m^3$$

$$\rho_{out}\text{ هوای بیرون}=\frac{P}{RT}=\frac{101325}{287\times(273+24)}=1.189\ kg/m^3$$

$$\Rightarrow 272\times9.806+1.035\times9.806\times(\frac{\pi d^3}{6})=1.189\times9.806\times(\frac{\pi d^3}{6})$$

$$\Rightarrow d=15m$$

برای حالتیکه دمای بیرون $2C$ باشد داریم:

$$\rho_{out}=\frac{P}{RT}=\frac{101325}{287\times(273+2)}=1.284\ kg/m^3$$

$$\Rightarrow 272\times 9.806 + 1.035\times 9.806\times\left(\frac{\pi d^3}{6}\right) = 1.284\times 9.806\times\left(\frac{\pi d^3}{6}\right)$$

$$\Rightarrow d = 12.78\, m$$

۲-۱۱۰. وزن یک هیدرومتر $0.035\,N$ و قطر شاخه آن $6\,mm$ است. فاصلهٔ بین دو نشانهٔ 1.0 و 1.1 چقدر است.

حل:

$$V_0\gamma = W \Rightarrow V_0 = \frac{W}{\gamma} = \frac{0.035}{9806} = 3.57\times 10^{-6}\, m^3$$

$$a = \frac{\pi}{4}D^2 = \frac{\pi}{4}\times 0.006^2 = 2.83\times 10^{-5}\, m^2$$

با استفاده از معادله $(2.7.4)$ داریم:

$$\Delta h = \frac{V_0}{a}\times\frac{s-1}{s} = \frac{3.57\times 10^{-6}}{2.83\times 10^{-5}}\times\frac{1.1-1}{1.1} = 0.0115\, m = 11.5\, mm$$

۲-۱۱۱. یک هیدرومتر طراحی کنید که چگالی را محدودهٔ 0.8 تا 1.1 اندازه‌گیری کند. طول مقیاس هیدرومتر را $75\,mm$ بگیرید.

حل:

اگر درجه پایین‌ترین نقطه درجه‌بندی هیدرومتر را صفر درنظر بگیریم در حالت $S = 1.1$ عدد صفر را ملاحظه خواهیم کرد و با توجه به طول مقیاس هیدرومتر که $75\,mm$ است در حالت $S = 0.8$ عدد m را ملاحظه می‌کنیم هرگاه عدد درجه‌بندی شده برای $S = 1$ را ما فرض کنیم داریم:

$$S = 1.1 \;\Rightarrow\; (h-0) = \frac{v_0}{a}\times\frac{1.1-1}{1.1} \;\Rightarrow h = 0.091\frac{v_0}{a} \qquad (1)$$

$$S = 0.8 \;\Rightarrow\; -(0.075-h) = \frac{v_0}{a}\times\frac{0.8-1}{0.8} \Rightarrow 0.075 - h = 0.25\frac{v_0}{a} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \;\Rightarrow\; \frac{h}{0.075-h} = \frac{0.091}{0.25} \;\Rightarrow\; 2.75h = 0.075 - h \;\Rightarrow h = 0.02\, m$$

با جاگذاری h در رابطه (1) داریم:

$$\Rightarrow 0.02 = \frac{v_0}{a}\times\frac{0.1}{1.1} \;\Rightarrow\; \frac{v_0}{a} = 0.22$$

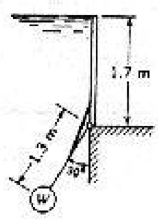
با فرض اینکه $v_0 = 4\ cm^2$ باشد داریم:

$$a = \frac{4}{0.22} = 0.1818\, cm^2$$

قطر میله :

$$\frac{\pi}{4}D^2 = 0.1818 \Rightarrow D = 0.481\, cm = 4.81\ mm$$

۲-۱۱۲. دریچه‌ای که در شکل ۸۳-۲ نشان داده شده، در حال تعادل است. جرم واحد عرض دریچه $225\,kg/m$ است. از وزن میله و حائلی که وزنهٔ تعادل را نگه می‌دارند، صرف‌نظر کنید. الف) W را به دست آورید. ب) آیا تعادل دریچه پایدار است؟ وزنه از بتون ساخته شده و چگالی آن 2.5 است.



شکل ۸۳-۲

حل:

نیروی فشاری وارده از طرف آب
$F=\gamma\bar{h}A=9806\times\frac{1.7}{2}\times(1.7\times1)=14170\,N$

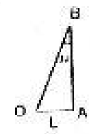
$y_p=\frac{2}{3}\times1.7=\frac{3.4}{3}\quad,\quad L=1.7-\frac{3.4}{3}=0.567\,m$

$M_1=14170\times0.567=8034.4\ \ N.m$

گشتاور نیروی W
$\sum M=0\Rightarrow M_1-M=0\ \Rightarrow M=8034.4\ N.m$

$W=F+V\gamma_W=F+\frac{W}{\gamma}\times\gamma_W=F+\frac{W}{s}\ \Rightarrow W=\frac{F}{1-1/s}=\frac{sF}{s-1}$

$sin\theta=\frac{OA}{OB}\ \Rightarrow OA=OBsin\theta=1.3\times sin30=0.65\,m\Rightarrow L=0.65\,m$



وزن ظاهری:
$F=\frac{M}{L}=\frac{8034.4}{0.65}=12361\,N$

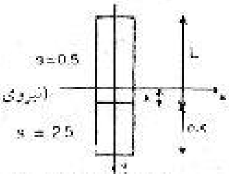
وزن واقعی:
$W=\frac{sF}{s-1}=\frac{2.5\times12361}{2.5-1}=20602\ N$

تعادل ناپایدار می‌باشد چون می‌توان با ایجاد اندک تغییر مکان زاویه‌ای شرایط را تغییر داد در نتیجه حالت کنونی از بین خواهد رفت.

۲-۱۱۳. یک استوانه چوبی به چگالی 0.5 و یک استوانه بتونی به چگالی 2.5 به یکدیگر متصل شده‌اند. قطر هر دو استوانه $600\,mm$ است. طول استوانه بتونی $600\,mm$ است. این مجموعه به طور قائم در آب شناور می‌شود. طول استوانه چوبی را طوری تعیین کنید تا تعادل مجموعه پایدار باشد.

حل:

با فرض اینکه L طول استوانه چوبی و x طول قسمتی از آن که در درون آب قرار گرفته است باشد داریم:



(نیروهای وزن) $\sum F_W=\ \sum F_B$ (نیروهای شناوری)

W_1 (وزن چوب) + W_2 (وزن بتون) = F_{B_1} (نیروی شناوری مربوط به چوب) + F_{B_2} (نیروی شناوری مربوط به بتن)

$\Rightarrow\gamma_1V_1+\gamma_2V_2=\gamma_wV_1'+\gamma_wV_2'$

$0.5\gamma_w\times(\pi\times0.6^2\times L)/4+2.5\gamma_w\times(\pi\times0.6^2\times0.6)/4=\gamma_w(\pi\times0.6^2\times x)/4+\gamma_w\times(\pi\times0.6^2\times0.6)/4$

$\Rightarrow 0.6\times2.5+L\times0.5=0.6+x\Rightarrow x=0.5L+0.9$

حداقل شرایط برای برقراری حالت تعادل مجموعه این است که مرکز ثقل بر مرکز نیروی شناوری منطبق باشد (درحالت‌کلی برای برقراری‌حالت‌تعادل‌باید‌مرکز‌نیروی شناوری بالاتریاحداقل منطبق‌برمرکز ثقل قرار گیرد)

برای محاسبه مرکز ثقل سیستم داریم:

۱) برای قطعه چوب
$y_1=\frac{L}{2}\quad,\qquad m_1=0.5\gamma_w\times AL$

۲) برای قطعه بتون
$y_2=L+0.3\quad,\quad m_2=2.5\gamma_w\times0.6A$

$$y=\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}=\frac{0.25L^2+1.5L+0.45}{0.5L+1.5}\Rightarrow y=\frac{0.25L^2+1.5L+0.45}{1.5+0.5L}$$

برای کل سیستم مرکز نیروی شناوری عبارت است از: $y=L-\frac{x}{2}+\frac{0.6}{2}$

$$y=L-\frac{x}{2}+0.3=L-\frac{0.5x+0.9}{2}+0.3=0.75L-0.15$$

$$\Rightarrow 0.75L-0.15=\frac{0.25L^2+1.5L+0.45}{1.5+0.5L}\Rightarrow L^2-3.6L-5.4=0\Rightarrow L=4.7394\,m$$

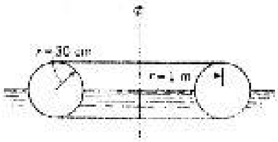
۲.۱۱۴. یک تیر چوبی به طول $4m$ به طور قائم در آب شناور می‌شود. سطح مقطع تیر، مربع و چگالی آن 0.75 است. آیا تعادل تیر پایدار است؟

حل:

بر این تیر دو نیروی شناوری و وزن وارد می‌گردد و داریم: $F_W=F_B \Rightarrow 0.75\gamma_w\times 4A=\gamma_W\times AL$

$\Rightarrow L=4\times 0.75=3m$ طول قسمتی که داخل آب قرار گرفته است

بنابراین مرکز نیروی شناوری در فاصله $\frac{3}{2}=1.5m$ زیر سطح آزاد آب قرار گرفته است و مرکز ثقل آن در فاصله 1 متری زیر سطح آزاد آب واقع است می‌دانیم شرط تعادل این است که مرکز شناوری بالاتر یا حداقل منطبق بر مرکز ثقل باشد و در اینجا شرط فوق برقرار نیست بنابراین تعادل تیر پایدار نخواهد بود.



شکل ۸۴-۲

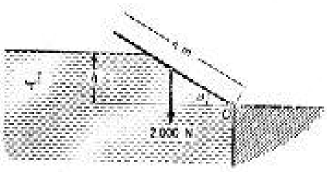
۲.۱۱۵. برای چنبره‌ای که در شکل ۸۴-۲ نشان داده شده است، ارتفاع متاسانتریک را به دست آورید.

حل:

$$b=\frac{4r}{3\pi}:\overline{GB}=\frac{4r}{3\pi}=\frac{4\times 0.3}{3\pi}=0.127\,m$$

$$\overline{MB}=\frac{I}{V}=\frac{\pi\,(R+r)^4/4-\pi\,(R-r)^4/4}{\pi r^2/2\times(2\pi R)}=\frac{\pi\,(1+0.3)^4/4-\pi\,(1-0.3)^4/4}{\pi\times 0.3^2/2\times(2\pi\times 1)}=2.313\,m$$

ارتفاع متاسانتریک: $\overline{MG}=\overline{MB}-\overline{GB}=2.313-0.127=2.186\,m$



شکل ۸۵-۲

۲.۱۱۶. در شکل ۸۵-۲ دریچهٔ مسطحی نشان داده شده است که وزن واحد عرض آن $2000\,N/m$ است. فاصلهٔ مرکز ثقل دریچه تا لولای O، برابر $2m$ است. الف) برای تعادل دریچه h را به صورت تابعی از θ به دست آورید. ب) آیا تعادل دریچه به ازای تمام مقادیر θ پایدار است؟

حل:

الف) برای حالت تعادل باید برآیند گشتاورهای وارد بر دریچه حول لولا صفر باشد.

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 - M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 L_1 - F_2 L_2 = 0 \qquad (I)$$

F_1 نیروی وارد از طرف آب بر دریچه

F_2 نیروی وزن دریچه

$$F_1 = \gamma \bar{h}_1 A_1 = \gamma \times \frac{h}{2} \times \left(\frac{h}{\sin\theta} \times 1\right) = \frac{\gamma h^2}{2\sin\theta}$$

$$y_{p_1} = \bar{y}_1 + \frac{I_G}{\bar{y}_1 A_1} = \frac{h}{2} + \frac{1/12 \times 1 \times h^3}{h/2 \times h \times 1} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2h}{3}\ , \quad L_1 = \frac{h - 2h/3}{\sin\theta} = \frac{h}{3\sin\theta}$$

$$F_2 = W = 2000\,N\ , \quad L_2 = 2\cos\theta$$

با جاگذاری مقادیر مربوطه در رابطه (I) :

$$\Rightarrow \frac{9806 \times h^2}{2\sin\theta} \times \frac{h}{3\sin\theta} - 2000 \times 2\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow h^3 = \frac{24000}{9806} \times \sin^2\theta\cos\theta \Rightarrow h = 1.348\,(\sin^2\theta\cos\theta)^{1/3}$$

ب) مشخص است که $0 \le d \le 4$ بنابراین: اگر $d = 4m$ باشد داریم:

$$4 = \frac{h}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad h = 4\sin\theta$$

$$4\sin\theta = 1.348\,(\sin^2\theta\cos\theta)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = 0.038 \quad \Rightarrow \quad \theta = 2.19^\circ$$

اگر $d = 0$ باشد داریم:

$$h = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\theta\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 54.74^\circ$$

در نتیجه برای برقراری حالت تعادل باید $2.19 < \theta < 54.74$ باشد.

۲.۱۱۷. مخزنی محتوی مایع تحت شتاب یکنواخت افقی قرار گرفته است. کاهش فشار داخل مایع در امتداد حرکت $20\,kPa/m$ است. شتاب را به دست آورید. $S = 0.88$

حل:

چون حرکت افقی است بنابراین y مقدار ثابتی است:

$$a_y = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p_0 - \gamma\frac{a_x}{g}x - \gamma y$$

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_0 - \gamma y$$

$$x_2 = 1m \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_0 - \gamma\frac{a_x}{y} - \gamma y$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\gamma\frac{a_x}{g} = -20000$$

$$\Rightarrow a_x = 2000 \times \frac{9.086}{0.86 \times 9806} = 23.26\ m/s^2$$

۲.۱۱۸. ظرف محتوی مایع در امتداد افقی تحت شتاب یکنواخت قرار گرفته است. زاویه سطح آزاد مایع با افق $20^\circ C$ است. شتاب ظرف چقدر است؟

حل:

شیب سطح آزاد مایع $m = tg\theta = \dfrac{-a_x}{a_y + g}$

$a_y = 0 \Rightarrow tg(-20) = \dfrac{-a_x}{g} = 0.36397 \Rightarrow a_x = 0.36397 \times 9.806 = 3.57\, m/s^2$

۱۱۹-۲. سرعت یک ماشین در یک جاده افقی به طور یکنواخت در مدت 5 ثانیه به $60\, m/hr$ می‌رسد. شیب سطح آزاد گازوئیل موجود در مخزن همراه وسیله نقلیه چقدر است؟

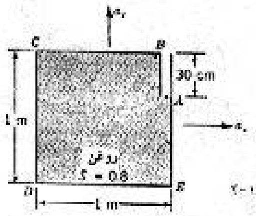
حل:

$\Delta V = 60\, m/hr \times \dfrac{1hr}{3600s} = \dfrac{1}{60}\, m/s$

$a_x = \dfrac{1/60}{5} = \dfrac{1}{300}\, m/s^2$

شیب سطح آزاد: $-\dfrac{a_x}{g} = -\dfrac{1/300}{9.806} = -0.00034$

۱۲۰-۲. در شکل ۸۶-۲، $a_x = 3.9\, m/s^2$ و $a_y = 0$ است. سطح آزاد خیالی مایع را تعیین کنید. فشار در نقاط B، C، D و E را به دست آورید.



شکل ۸۶-۲

مسایل ۱۲۰-۲، ۱۲۲-۲، ۱۲۶-۲

حل:

$P = P_0 - \gamma \dfrac{a_x}{g} x - \gamma \left(1 + \dfrac{a_y}{g}\right) y$

$a_y = 0 \quad , \quad a_x = 3.9\, m/s^2$

$\Rightarrow P = P_0 - 9806 \times 0.8 \times \dfrac{3.9}{9.806} x - 9806 \times 0.8 (1+0) y = P_0 - 3120x - 7844.8y$

هرگاه نقطه A را به عنوان مبدأ انتخاب کنیم داریم: $P_A = P_0 = 0$

در نقطه B: $x = 0\ ,\ y = 0.3 \Rightarrow P = -3120 \times 0 - 7844.8 \times 0.3 = 2353\, Pa$

در نقطه C: $x = -1\ ,\ y = 0.3 \Rightarrow P = -3120 \times (-1) - 7844.8 \times 0.3 = 766\, Pa$

در نقطه D: $x = -1\ ,\ y = -0.7 \Rightarrow P = -3120 \times (-1) - 7844.8 \times (-0.7) = 8611\, Pa$

در نقطه E: $x = 0\ ,\ y = -0.7 \Rightarrow P = -3120 \times 0 - 7844.8 \times (-0.7) = 5491\, Pa$

$tg\theta = -\dfrac{a_x}{a_y + g} = -\dfrac{3.9}{0 + 9.806} = -0.4 \Rightarrow \theta = 158.2^{\circ C}$

۱۲۱-۲. در شکل ۸۶-۲، $a_x = 0$ و $a_y = 2.45\, m/s^2$ است. فشار در نقاط B، C، D و E را تعیین کنید.

حل:

مبدأ را نقطه A فرض می‌کنیم. $P_A = P_0 = 0$

$a_x = 0 \quad , \quad a_y = -2.45 m/s^2$

$$P = P_0 - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma (1 + \frac{a_y}{g}) y = 0 - \gamma \times 0 - \gamma (1 + \frac{-2.45}{9.806}) y = -9806 \times 0.8 \times 0.75 y = -5884 y$$

B درنقطه $: y = 0.3 \Rightarrow P_B = -5884 \times 0.3 = -1765 Pa$

$P_B = P_C = -1765 Pa$

D درنقطه $: y = -0.7 \Rightarrow P_D = -5884 \times 0.7 = 4119 Pa$

$P_E = P_D = 4119 Pa$

۲-۱۲۲. در شکل ۲-۸۶، $a_x = 2.45 m/s^2$ و $a_y = 4.902 m/s^2$ است. سطح آزاد خیالی و فشار در نقاط B، C، D و E را تعیین کنید.

حل:

مبدأ را نقطه A فرض می‌کنیم. $P_A = P_0 = 0$

$$P = P_0 - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma (1 + \frac{a_y}{g}) y = 0 - 0.8 \times 9806 \times \frac{2.45}{9.806} x - 0.8 \times 9806 \times (1 + \frac{4.902}{9.806}) y$$

$\Rightarrow P = -1960x - 11766.4y$

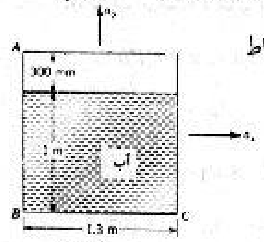
B درنقطه $: x = 0 \, , \, y = 0.3 \quad \Rightarrow P_B = -1960 \times 0 - 11766.4 \times 0.3 = -3530 \, Pa$

C درنقطه $: x = -1 \, , \, y = 0.3 \quad \Rightarrow P_C = -1960 \times (-1) - 11766.4 \times 0.3 = 1570 \, Pa$

D درنقطه $: x = -1 \, , \, y = -0.7 \quad \Rightarrow P_D = -1960 \times (-1) - 11766.4 \times (-0.7) = 10196 \, Pa$

E درنقطه $: x = 0 \, , \, y = -0.7 \quad \Rightarrow P_E = -1960 \times 0 - 11766.4 \times (-0.7) = 8236 \, Pa$

$$tg\theta = -\frac{a_x}{a_y + g} = -\frac{2.45}{4.902 + 9.806} = -0.1666 \Rightarrow \theta = 170.54^{\circ C}$$



شکل ۲-۸۷

مسایل ۲-۱۲۲ و ۲-۱۲۳

۲-۱۲۳. در شکل ۲-۸۷، $a_x = 9.806 m/s^2$ و $a_y = 0$ است، فشار در نقاط A، B و C را تعیین کنید.

حل:

$$tg\theta = \frac{-9.806}{9.806} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = -45^\circ \, , \; 135^\circ$$

طول DA را برابر با x فرض می‌نمائیم.

$DA = x \quad , \quad EN = x + 0.3$

$NH = HM = 1.3 - x - 0.3 = 1 - x$

باید مساحت مثلث NHM با مساحت ذوزنقه $DAEN$ برابر باشد.

$$\frac{0.3}{2}\times(x+x+0.3)=\frac{1}{2}(1-x)(1-x)\Rightarrow 0.6x+0.09=1-2x+x^2$$

$$\Rightarrow x^2-2.6x+0.91=0 \quad \Rightarrow x=0.417\,m$$

$$\Rightarrow D(0.417\ ,\ 1.3) \quad , \quad P_D=0$$

$$P=P_0-\gamma\frac{a_x}{g}x-\gamma(1+\frac{a_y}{g})=P_0-9806\times\frac{9.809}{9.809}x-9806y$$

با جایگذاری مقادیر برای نقطه D:

$$P=P_0-9806x-9806y$$

$$0=P_0-9806\times 0.417-9806\times 1.3 \Rightarrow P_0=16837\,Pa$$

$$P=16837-9806x-9806y$$

نقطه A $\quad x=0 \quad , \quad y=1.3$

$$P_A=16837-9806\times 0-9806\times 1.3=4089\,Pa$$

نقطه B $\quad x=0 \quad , \quad y=0 \quad \Rightarrow P_B=16837\ Pa$

نقطه C $\quad x=1.3 \quad , \quad y=0 \quad \Rightarrow P_C=16837-9806\times 1.3=4089\ Pa$

۲-۱۲۴. در شکل ۲-۸۷، $a_x=4.903\,m/s^2$ و $a_y=9.806\,m/s^2$ است. فشار در نقاط A، B و C را تعیین کنید.

حل:

$$tg\theta=\frac{4.903}{9.806+9.806}=0.25\Rightarrow\theta=14$$

$$\Delta MND=\Delta DEF\Rightarrow DF=DN=\frac{1}{2}BC$$

$$tg\theta=\frac{MN}{DN}=\frac{MN}{1.3/2}=0.25 \Rightarrow MN=0.25\times 1.3/2=0.1625\,m$$

$$\Rightarrow MB=1+0.1625=1.1625\,m$$

$$M(0,1.1625) \quad , \quad P_M=0$$

$$P=P_0-9806\frac{4.903}{9.806}x-9806(1+\frac{9.806}{9.806})y \Rightarrow P=P_0-4903x-19612y$$

$$P_M=0=P_0-19612\times 1.1625 \quad\Rightarrow P_0=22799\ Pa$$

با توجه به شکل مورد نظر در نقطه A فشار با فشار محیط برابر می‌باشد یعنی $P_A=0$ است.

در نقطه B: $\quad x=0\ ,\ y=0 \quad P_B=22799\,Pa=22.8\,kPa$

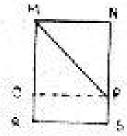
در نقطه C: $\quad x=1.3\ ,\ y=0 \quad P_C=22799-4903\times 1.3=16425\,Pa=16.425\,kPa$

۲-۱۲۵. مخزنی به شکل استوانه به قطر $1.3\,m$ و عمق $2\,m$ را با مایع پر کرده و تحت شتاب یکنواخت افقی قرار می‌دهند. یک سوم مایع از مخزن سرریز می‌کند. شتاب حرکت چقدر است؟

حل:

با توجه به شکل ترسیم شده حجم مایع سرریز شده معادله حجم MPN است بنابراین باید حجم قسمت پایین

(OPRS) معادله $\frac{1}{3}$ کل حجم اولیه ظرف باشد پس:



$$PS = \frac{2}{3}$$

$$MO = NP = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad , \quad OP = 1.3\,m$$

$$tg\theta = \frac{MO}{OP} = \frac{4/3}{1.3} = 1.025$$

$$\Rightarrow \; tg\theta = -\frac{a_x}{g} = -1.025 \quad \Rightarrow \; a_x = 9.806 \times 1.025 = 10.05\; m/s^2$$

۲-۱۲۶. برای شکل ۸۶-۲، a_x و a_y را طوری تعیین کنید که فشار در نقاط A، B و C یکسان باشد.

حل:

$$P = P_0 - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) y$$

$$P_A = P_B = P_C \Rightarrow P_0 - \gamma\frac{a_x}{g}x_A - \gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)y_A = P_0 - \gamma\frac{a_x}{g}x_B - \gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)y_B = P_0 - \gamma\frac{a_x}{g}x_C - \gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)y_C$$

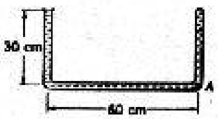
$$\Rightarrow \frac{a_x}{g}x_A - \left(1+\frac{a_y}{g}\right)y_A = \frac{a_x}{g}x_B - \left(1+\frac{a_y}{g}\right)y_B = \frac{a_x}{g}x_C - \left(1+\frac{a_y}{g}\right)y_C$$

هرگاه نقطه C را به عنوان مبدأ فرض کنیم: $A(3\,,-1)\;,\;B(3,0)\;,C(0,0)$

$$\Rightarrow \frac{a_x}{g} \times 3 - 0 = \frac{a_x}{g} \times 0 - \left(1 - \frac{a_y}{g}\right) \times 0 = 0 \quad \Rightarrow \; a_x = 0$$

$$\frac{a_x}{g} \times 3 - \left(1 + \frac{a_y}{g}\right)(-1) = 0 \quad \Rightarrow \; 1 + \frac{a_y}{g} = 0 \;\Rightarrow\; a_y = -g$$

۲-۱۲۷. در شکل ۸۸-۲، لوله با مایعی به چگالی 2.40 پر شده است. برای حالتی که لوله با شتاب $2.45\,m/s^2$ به طرف راست حرکت می‌کند، سطح آزاد خیالی مایع را رسم کنید و فشار در A را تعیین کنید. اگر خلاء نسبی در A برابر $56\;kPa$ باشد، a_x چقدر است؟



شکل ۸۸-۲

مسایل ۱۲۷-۲ ، ۱۳۳-۲ ، ۱۳۴-۲ ، ۱۴۲-۲

حل:

$$tg\theta = \frac{a}{g} = \frac{2.45}{9.806} = 0.25 \quad \Rightarrow \; \theta = 14^\circ$$

$$\gamma = \rho g = 2.4 \times 1000 \times 9.806 = 23534.4\; N/m^3$$

$$P = P_0 - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) y$$

$$\Rightarrow P = P_0 - 23534.4 \times \frac{2.45}{9.806} \times x - 23534.4\,(1+0)y = P_0 - 5880x - 23534.4y$$

هرگاه نقطه B را به عنوان مبدأ مختصات انتخاب کنیم

$$P_0 = 0$$

$$\Rightarrow P = -5880x - 23534.4y$$

$$A(0.6\,,-0.3) \;\Rightarrow\; P = -5880 \times 0.6 - 23534.4 \times (-0.3) = 3532.3\,Pa$$

در حالت دوم:

$P_A = -5.6 \times 10^4 Pa$

$\Rightarrow P = P_0 - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma (1 + \frac{a_y}{g}) y$

$\Rightarrow -5.6 \times 10^4 = 0 - 23534.4 \times \frac{a_x}{9.806} \times 0.6 - 23534.4\,(1+0) \times (0.03) \Rightarrow a_x = 43.79 m/s^2$

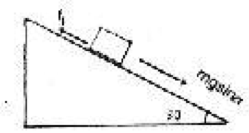
۲.۱۲۸. جعبه مکعبی شکلی که طول هر ضلع آن $1\,m$ است، تا نیمه از آب پر شده است. سطح بالایی جعبه باز است. جعبه روی یک سطح شیبدار قرار می‌گیرد که زاویهٔ آن با امتداد افقی 30^o است. وزن جعبه خالی $550\,N$ است. ضریب اصطکاک جعبه با سطح شیبدار 0.3 است. شتاب جعبه را تعیین کنید. زاویهٔ سطح آزاد آب با امتداد افقی را به دست آورید.

حل:

$\sum F = ma \;\Rightarrow\; mg sin\alpha - \mu mg cos\alpha = ma$

$a = g sin\alpha - \mu g cos\alpha = 9.806 \times sin30 - 0.3 \times 9.806 \times cos30 = 2.3554 m/s^2$

$a_x = a cos\alpha \quad , \quad a_y = a sin\alpha$



$a_x = 2.3554 \times cos\,30 = 2.0394 m/s^2$

$a_y = 2.3554 \times sin\,30 = -1.178 m/s^2$

$tg\theta = \frac{a_x}{a_y - g} = \frac{2.0394}{-1.178 + 9.806} = 0.2364 \;\Rightarrow\; \theta = 13.3^\circ$

۲.۱۲۹. نشان دهید که در یک مایع که به صورت جسم صلب حرکت می‌کند، فشار در هر نقطه، در تمام جهات یکسان است.

حل:

با توجه به اینکه لایه‌های سیال نسبت به هم ثابت بوده و هیچگونه حرکتی ندارند می‌توان مانند مسئله (۱) با انتخاب المان مناسب مطلب فوق را اثبات کرد.

۲.۱۳۰. یک جعبهٔ بسته محتوی دو مایع نامحلول است. ثابت کنید هنگامی که جعبه به طور یکنواخت در امتداد افقی شتاب می‌گیرد، سطح مشترک دو مایع با سطح فشار صفر موازی است.

حل:

برای اثبات این مطلب جعبه حاوی دو سیال را در نظر می‌گیریم واضح است که سیال سبکتر در بالای جعبه قرار می‌گیرد حال یک سطح هم فشار در سیال سبکتر را در نظر گرفته و در راستای قائم به داخل سیال حرکت می‌کنیم هرگاه فرض کنیم سطح هم فشار موردنظر ما و سطح فشار صفر با هم موازی نباشند موقعی که به طور قائم به داخل سیال حرکت می‌کنیم زمانی حالتی روی خواهد داد که قسمتی از سطح مورد نظر ما در سیال سبکتر قرار گرفته و قسمتی دیگر در سیال سنگین‌تر داخل خواهد گردید و با توجه به اینکه جرم مخصوص دو سیال با هم متفاوت است فشار در کل سطح ثابت نخواهد بود بنابراین فرض ما نادرست می‌باشد.

۲.۱۳۱. نشان دهید که وقتی مایع مانند جسم صلب حول محور قائم دوران می‌کند، هیچ تنش برشی در سیال ایجاد نمی‌شود.

حل:

می‌دانیم جسم صلب جسمی است که اجزای آن نسبت به هم ساکن و ثابت می‌باشند. (خصوصیت جسم جامد) با استفاده از قانون لزجت نیوتن می‌توان تحقیق کرد که برای یک سیال موقعی که هیچ نیرویی بین لایه‌ها وارد نشود یعنی لایه‌ها نسبت به هم ساکن باشد هیچ تنش برشی وارد نخواهد گردید یعنی سیال موردنظر رفتاری مانند رفتار جامدات خواهد داشت لذا می‌توان قوانین مکانیک جامدات را برای آن (کل سیستم سیال) به کار برد.

۲.۱۳۲. مخزنی محتوی مایع حول محور قائم دوران می‌کند. چگالی مایع 1.3 است. فشار در نقطه‌ای به فاصلهٔ $0.6\,m$ از محور با فشار در نقطهٔ دیگری به فاصلهٔ $1.2\,m$ از محور که $0.6\,m$ بالا قرار دارد، برابر است. سرعت دوران را به دست آورید.

حل:

$$P_1 = P_0 + \gamma \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} - \gamma y_1 \quad , \quad P_2 = P_0 + \gamma \frac{\omega^2 r_2^2}{2g} - \gamma y_2$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{\gamma \omega^2}{2g}(r_1^2 - r_2^2) - \gamma(y_1 - y_2)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\gamma \omega^2}{2g}(0.6^2 - 1.2^2) - \gamma(-0.6) \Rightarrow \frac{\omega^2}{2g} \times 1.08 = 0.6 \quad \Rightarrow \omega = 3.3 \ Rad/s$$

$$\omega = \frac{3.3}{2\pi} \times 60 = 31.52\,rpm$$

۲.۱۳۳. در شکل ۸۸-۲ لوله حول محور قائمی که در سمت راست A و به فاصلهٔ $15\,cm$ از آن است دوران می‌کند، اگر فشار نسبی در A صفر باشد، سرعت دورانی چقدر است؟

حل:

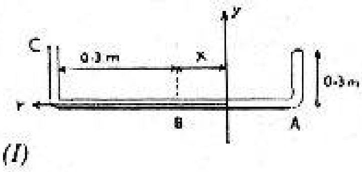
$$\begin{cases} r_A = 0.15 \ m \\ y_A = 0 \ m \end{cases} \qquad \begin{cases} r_C = 0.6 + 0.15 = 0.75\,m \\ y_C = 0.3\,m \end{cases}$$

$$P = P_0 + \gamma \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \gamma y$$

$$P_A = 0 = P_0 + \gamma \frac{\omega^2 (0.15)^2}{2g} - \gamma \times 0 = P_0 + 0.00115\,\gamma \omega^2$$

۲.۱۳۴. در شکل ۸۸-۲ محل محور قائم دوران و سرعت دورانی لوله U شکل را طوری تعیین کنید که فشار مایع در نقطه وسط لوله و در A هر دو صفر باشد.

حل:



$r_B = x \qquad r_A = -(0.3 - x) = x - 0.3$

$y_B = 0 \qquad y_A = 0$

$r_C = 0.3 + x \qquad y_C = 0.3$

$$P_A = 0 = \frac{\gamma r_A^2}{2g}\omega^2 - \gamma y_A + P_0 = \frac{\gamma (x-0.3)^2}{2g}\omega^2 - 0 + P_0 \qquad (I)$$

$$P_B = 0 = \frac{\gamma r_B^2}{2g}\omega^2 - \gamma y_B + P_0 = \frac{\gamma x^2}{2g}\omega^2 - 0 + P_0 \qquad (II)$$

$$P_C = 0 = \frac{\gamma}{2g}\times(0.3+x)^2\omega^2 - 0.3\gamma + P_0 \qquad (III)$$

$$P_A = P_B = 0 \Rightarrow \frac{\gamma(x-0.3)^2}{2g}\omega^2 + P_0 = \frac{\gamma x^2}{2g}\omega^2 + P_0 \Rightarrow (x-0.3)^2 = x^2 \Rightarrow x = 0.15m$$

$$P_B = P_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma x^2}{2g}\omega^2 + P_0 = \frac{\gamma}{2g}(0.3+x)^2\omega^2 - 0.3\gamma + P_0$$

$$\Rightarrow \frac{0.15^2}{2\times 9.806}\omega^2 = \frac{(0.3+0.15)^2}{2\times 9.806}\omega^2 - 0.3$$

از حل معادله بالا $\omega = 5.72\ Rad/s$

۱۳۵ـ۲. سیال تراکم‌ناپذیر با دانسیته ρ با سرعت زاویه‌ای ω حول یک محور مایل دوران می‌کند. زاویهٔ محور با امتداد قائم θ است. با دانستن فشار در یک نقطه از سیال، چگونه می‌توان فشار در سایر نقاط را به دست آورد؟

حل:

معادله اندازه حرکت را در جهت r می‌نویسیم: $\sum F = ma$

$$\Rightarrow (P+dP)dA - PdA + \rho g dr dA \sin\theta = \rho dr dA r\omega^2$$

$$\Rightarrow dPdA + \rho g dr dA \sin\theta = \rho dr dA r\omega^2$$

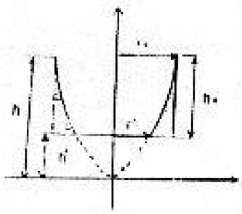
$$\Rightarrow dP + \gamma dr\sin\theta = \frac{\gamma}{g} dr r\omega^2 \Rightarrow dP = (\frac{\gamma}{g} r\omega^2 - \gamma\sin\theta)dr$$

$$\Rightarrow P = P_0 + \frac{\gamma r^2\omega^2}{2g} - \gamma\sin\theta r$$

۱۳۶ـ۲. استوانه روبازی به شعاع r_0 و ارتفاع h_0 با مایع پر شده است. استوانه با چه سرعتی حول محور قائم دوران کند تا نصف قاعدهٔ آن در معرض هوا قرار گیرد؟

حل:

با توجه به شکل داریم:



$$h = h' + h_0 \ , \quad h = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

$$\pi r'^2 = \frac{\pi r_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad r'^2 = \frac{r_0^2}{2}$$

معادله سطوح هم فشار $h = mr^2 \, (m = cte)$

$$h = mr_0^2 \Rightarrow m = \frac{h}{r_0^2}$$

$$h' = mr'^2 \Rightarrow h' = \frac{h}{r_0^2} \times r'^2 = \frac{h}{r_0^2} \times \frac{r_0^2}{2} = \frac{h}{2}$$

$$h = h' + h_0 = \frac{h}{2} + h_0 \Rightarrow \frac{h}{2} = h_0 \Rightarrow h = 2h_0$$

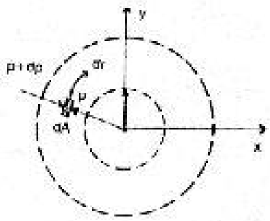
$$h = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \Rightarrow 2h_0 = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4gh_0}{r_0^2} \Rightarrow \omega = \frac{2}{r_0}\sqrt{gh_0}$$

۲ـ۱۳۷. مایعی مانند جسم صلب حول یک محور افقی دوران می‌کند. فشار در روی محور $70\,kPa$ است. تغییرات فشار را در امتداد خط قائمی که از مرکز می‌گذرد، به دست آورید. دانسیته مایع ρ و سرعت دورانی ω است.

حل:

معادله اندازه حرکت را در جهت قائم می‌نویسیم:

$$\sum F = ma$$



$$(P + dP)dA - PdA + (dydA)\rho g = (\rho dydA)r\omega^2$$

$$PdA + dPdA - PdA + (dydA)\rho g = \rho dydAr\omega^2$$

$$\Rightarrow dP + \rho gdy = \rho r\omega^2 dr = \frac{\gamma}{g} r\omega^2 dr \Rightarrow dP = \frac{\gamma}{g} r\omega^2 dr - \rho gdy$$

$$\int_{P_0}^{P} dP = \int_0^r \frac{\gamma}{g} r\omega^2 dr - \int_0^y \rho gdy \Rightarrow P = \frac{\gamma\omega^2}{2g} r^2 - \rho gy + P_0$$

۲ـ۱۳۸. برای وضعیتی که در مسألهٔ قبل گفته شد، معادله‌ای برای سطوح فشار ثابت به دست آورید.

حل:

با اعمال شرایط مرزی: $y = 0, r = 0 \Rightarrow P = P_0$

داریم: $r^2 = x^2 + y^2$

$$P = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho gy + P$$

$$\frac{2(P - P_0)}{\rho\omega^2} = r^2 - \frac{2g}{\omega^2} y = x^2 + y^2 - \frac{2y}{\omega^2} y + \frac{g^2}{\omega^4} - \frac{g^2}{\omega^4}$$

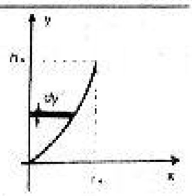
$$\Rightarrow \frac{2(P - P_0)}{\rho\omega^2} + \frac{g^2}{\omega^4} = x^2 + (y^2 - \frac{2g}{\omega^2} y + \frac{y^2}{\omega^4}) \Rightarrow \frac{2(P - P_0)}{\rho\omega^2} + \frac{g^2}{\omega^4} = x^2 + (y - \frac{g}{\omega^2})^2$$

۲ـ۱۳۹. با انتگرال‌گیری ثابت کنید که حجم سهمیگون نصف حجم استوانه محاط بر آن است.

حل:

حجم استوانه محاط بر سهمیگون: $V_1 = \pi r_0^2 h$

برای محاسبه حجم سهمیگون مطابق شکل با دوران منحنی $y = ax^2$ حول محور داریم: $dV = \pi x^2 dy$



$$y = ax^2 \Rightarrow h_0 = ar_0^2 \Rightarrow a = \frac{h_0}{r_0^2}$$

$$dV = \pi x^2 dy = \pi \frac{y}{a} dy = \frac{\pi r_0^2}{h_0} y dy$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{a} \frac{\pi r_0^2}{h_0} \int_0^{h_0} y\, dy = \frac{\pi r_0^2}{h_0} \left(\frac{1}{2} y^2\right)_0^{h_0} = \frac{\pi r_0^2}{h_0} \times \frac{1}{2} h_0^{\,2} = \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0$$

$\Rightarrow V_2$ (حجم سهمیگون) $= \frac{1}{2} V_1$ (حجم استوانه)

۲.۱۴۰. مخزنی محتوی دو مایع نامحلول حول یک محور قائم دوران می‌کند. ثابت کنید که شکل سطح مشترک دو مایع با شکل سطح فشار صفر یکسان است.

حل:

به توضیح مسئله ۱۳۰ مراجعه شود.

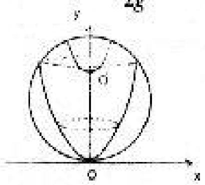
۲.۱۴۱. یک کرهٔ توخالی به شعاع r_0 با مایع پر شده و حول محور قائم خود با سرعت ω دوران می‌کند. موقعیت خط دایره‌ای حداکثر فشار را تعیین کنید.

حل:

با توجه به رابطه $P = \frac{\gamma\omega^2}{2g} r^2 - \rho g y + P_0$:

$r = 0, y = 0 \Rightarrow P = P_0$ (مبدأ)

$$P = P_0 \Rightarrow \frac{\gamma\omega^2}{2g} r^2 - \rho g y = 0 \Rightarrow y = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$



با فرض $k = \frac{\omega^2}{2g}$ داریم: $y = kr^2$ که معادله یک سهمی می‌باشد که در شکل زیر ترسیم گردیده است. این شکل یک سطح هم فشار $(P = P_0)$ را نشان می‌دهد. می‌توان به موازات این منحنی‌های دیگری نیز رسم نمود که نمونه‌ای از این منحنی رسم گردیده است.

اما فشار نقاط گذرنده از نقطه O بیشترین خواهد بود چون در مقایسه فشار دو نقطه O و O' داریم:

$y_{o'} > y_o \Rightarrow P_o > P_{o'}$ ، $\rho = cte$ سطح مورد نظر ما از دوران سهمی $y = kr^2$ حول محور yها حاصل شده است که یک سهمیگون را حاصل نموده است که سطح این سهمیگون سطوح فشار ثابت را نشان میدهد. دوایر نشان داده شده که هر دایره دارای y, r مساوی می‌باشد.

۲.۱۴۲. گازی که از قانون $P\rho^{-n} = const$ پیروی می‌کند، حول محور قائم به صورت جسم صلب دوران می‌کند. رابطه‌ای برای فشار در امتداد شعاعی به دست آورید. سرعت دورانی ω است. در نقطه‌ای روی محور، فشار P_0 و دانسیته ρ_0 است.

حل:

$$dP = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r dr = \rho\omega^2 r dr$$

$$P\rho^{-n} = P_0 \rho_0^{-n} \Rightarrow \frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \Rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/n}$$

$$dP=\rho_0\left[\frac{P}{P_0}\right]^{1/n}\omega^2 rdr \Rightarrow \frac{dP}{P^{1/n}}=\frac{\rho_0}{P_0^{1/n}}\omega^2 rdr \Rightarrow \int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P^{1/n}}=\int_0^r\frac{\rho_0}{P_0^{1/n}}\omega^2 rdr$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n-1}\left[P^{\frac{n-1}{n}}\right]_{P_0}^{P}=\frac{\rho_0}{P_0^{1/n}}\omega^2\times\left(\frac{1}{2}r^2\right)_0^r \Rightarrow P^{\frac{n-1}{n}}-P_0^{\frac{n-1}{n}}=\frac{n-1}{n}\frac{\rho_0\omega^2r^2}{2P_0^{1/n}}$$

$$\Rightarrow P^{(n-1)/n}=P_0^{(n-1)/n}+\frac{n-1}{n}\frac{\rho_0\omega^2r^2}{2P_0^{1/n}} \Rightarrow P=\left[P_0^{(n-1)/n}+\frac{n-1}{n}\frac{\rho_0\omega^2r^2}{2P_0^{1/n}}\right]^{n/(n-1)}$$

۲-۱۴۳. یک مخزن محتوی آب حول یک محور قائم با سرعت زاویه‌ای $50\,rad/s$ دوران می‌کند. در همان حال، مخزن با شتاب $4.903\,m/s^2$ به پایین سقوط می‌کند. معادلهٔ سطح فشار ثابت را به دست آورید.

حل:

$$dP=-\gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)dy+\frac{\gamma}{g}\omega^2 rdr$$

با انتگرال‌گیری: $P=-\gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)y+\frac{\gamma}{g}\omega^2\frac{r^2}{2}+c$

$$\Rightarrow P=P_0+\frac{\gamma\omega^2r^2}{2g}-\gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)y$$

با فرض: $y=0\ ,\ r=0 \Rightarrow P_0=0$

طرفین را بر γ تقسیم می‌کنیم $\Rightarrow h=\frac{\omega^2r^2}{2g}-\left(1+\frac{a_y}{g}\right)y$

$$\Rightarrow h=\frac{50^2}{2\times9.806}r^2-\left(1+\frac{-4.903}{9.806}\right)y \Rightarrow h=127.47r^2-0.5y$$

۲-۱۴۴. در شکل ۸۸-۲ لولهٔ U شکل حول محور قائمی که از A می‌گذرد، دوران می‌کند. آب داخل لوله در انتهای بستهٔ لوله در بالای A شروع به بخار شدن می‌کند. دمای آب $20°C$ است. سرعت زاویه‌ای چقدر است؟ اگر سرعت زاویه‌ای افزایش یابد، چه اتفاقی خواهد افتاد؟

حل:

از جدول کتاب برای آب در $20C$: $\frac{P_v}{\gamma}=0.25\ ,\gamma=9789\,N/m^3$

$$\Rightarrow P_v=0.25\times9789=2447.25\,Pa$$

$$P=P_0+\frac{\gamma\omega^2r^2}{2g}-\gamma y$$

نقطه B: $y=0.3m\ ,r=0 \Rightarrow P_B=P_0-0.3\gamma$

نقطه C: $y=0.3\,m\ ,\ r=0.6\,m \Rightarrow P_C=P_0+\frac{\gamma\omega^2}{2g}\times0.6^2-\gamma\times0.3$

$$P_C=P_{bar}=1.01325\times10^5\,Pa$$

$$P_C - P_B = \frac{\gamma\omega^2}{2g} \times 0.6^2 - 0.3\gamma + 0.3\gamma = 0.6^2 \frac{\gamma\omega^2}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{0.6^2\gamma\omega^2}{2g} = (1.01325 \times 10^5 - 2447.25) \Rightarrow \omega^2 = 549.3$$

$$\Rightarrow \omega = 23.44\ Rad/s = 223.9\ rpm$$

۲-۱۴۵. یک جعبه مکعبی روباز که طول هر ضلع آن $1.3\,m$ است با آب پر شده است. جعبه با شتاب $2.45\,m/s^2$ به طرف بالا حرکت می‌کند. نیروی وارده از آب به یکی از وجوه جانبی جعبه را به دست آورید.

حل:

با انتخاب مبدأ مختصات بر روی سطح آب و با فرض اینکه فشار نسبی برابر صفر باشد داریم: $P_0 = 0$

$$P = P_0 \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma(1 + \frac{a_y}{g})y \quad \Rightarrow P = -\gamma(1 + \frac{a_y}{g})y$$

$$P_w = -9806(1 + \frac{2.45}{9.806})y = -12256y\ (Pa)$$

با توجه به خطی بودن تغییرات فشار داریم: $F = P_G A$

$$\bar{y} = -\frac{1.3}{2} = -0.65m \quad , \quad A = 1.3 \times 1.3 = 1.69\,m^2$$

$$F = P_G A = -12256(-0.65) \times 1.69 = 13463\,N = 13.463\,kN$$

۲-۱۴۶. جعبه مکعبی شکلی که طول هر ضلع آن $1\,m$ است با مایعی به چگالی 0.65 پر شده است و با شتاب $2.45\,m/s^2$ رو به پایین حرکت می‌کند. نیروی وارده به یک وجه جعبه را به دست آورید.

حل:

با توجه به مسئله قبل داریم:

$$P = -\gamma(1 + \frac{a_y}{g})y = -9806 \times 0.65(1 + \frac{-2.45}{9.806})y = -4781.4y$$

با توجه به خطی بودن تغییرات فشار داریم: $F = P_G A$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2} = -0.5\,m \quad , A = 1 \times 1 = 1\,m^2$$

$$F = -4781.4(-0.5) \times 1 = 2390.7\,N = 2.3907\ kN$$

۲-۱۴۷. یک استوانه به قطر $60\,cm$ و طول $2\,m$ در امتداد محور خود در امتداد افقی با شتاب $4.903\,m/s^2$ حرکت می‌کند. استوانه با مایعی به وزن مخصوص $7850\,N/m^3$ پر شده است و فشار روی محور استوانه قبل از آنکه حرکت شتابدار شروع شود $70\,kPa$ است. نیروی خالص افقی که به مایع وارد می‌شود رابدست آورید.

حل:

$$P = P_0 - \gamma\frac{a_x}{g}x - \gamma(1 + \frac{a_y}{g})y \qquad a_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P = P_0 - \gamma\frac{a_x}{g}x$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P = P_0 = 70\,kPa$$

$\Rightarrow P = 70\times10^3 - 3927.4x - 7850y$

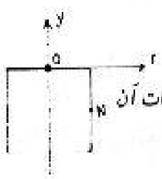
$P(x=0) = 70\times10^3 - 7850y$

$P(x=2) = 70\times10^3 - 7850y - 7854.8$

$$F_x = \int_{-0.3}^{0.3} [70\times10^3 - 7850y]\times2\times\sqrt{0.3^2 - y^2}\,dy - \int_{-0.3}^{0.3}\left(70\times10^3 - 7850y - 7854.8\right)2\sqrt{0.3^2 y^2}\,dy$$

$= 19783.8 - 17563.9 = 2219.9\ N$

۲.۱۴۸. یک جعبه مکعبی که طول هر ضلع آن $300\,mm$ است با آب پر می‌شود و به طور یکنواخت حول محور قائمی که از مرکز آن می‌گذرد با سرعت $\omega\ rad/s$ دوران می‌کند. سوراخ کوچکی در مرکز وجه فوقانی جعبه وجود دارد. نیروی وارده به یک طرف جعبه را به دست آورید.



حل:

با توجه به سوراخ بودن جعبه در نقطه O، $P_0 = 0$ می‌باشد. نقطه N مرکز وجه بوده و مختصات آن $y_N = \frac{-0.3}{2} = -0.15\,m$ می‌باشد.

برای محاسبه نیروی وارده بر یک وجه از رابطه $F = P_G A$ استفاده می‌کنیم. $A = 0.3^2 = 0.09\,m^2$

با توجه به اینکه مقدار r در هر وجه در $y = -0.15\,m$ متغیر می‌باشد پس P نیز متغیر خواهد بود بنابراین مجبوریم برای محاسبه P، $\bar{r}$ را تعیین کنیم. با توجه به شکل داریم:

$NP = ON = 0.15\,m \ ,\ pq = 0.3\,m\ ,\ OM = r$

با توجه به تساوی $OC = OB$ می‌توان $\bar{r}$ را در شکل ONP محاسبه و در کل شکل opq مورد استفاده قرار داد.

$r^2 = AM^2 + OA^2 = x^2 + 0.15^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + 0.15^2}$

$$\bar{r} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} r\,dx \Rightarrow \bar{r} = \frac{1}{0.15}\int_0^{0.15}\sqrt{x^2 + 0.15^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \bar{r} = \frac{1}{0.15}\times\left(\frac{x\sqrt{x^2+0.15^2}}{2} + \frac{0.15^2}{2}\,ln\left(x + \sqrt{x^2+0.15^2}\right)\right]_0^{0.15} = 0.173\,m$$

روش دوم برای محاسبه $\bar{r}$ این است که میانه وارد بر ضلع AB را محاسبه کنیم واضح است که این $\bar{r}$ تقریبی خواهد بود. و داریم:

$r^2 = 0.075^2 + 0.15^2 \Rightarrow \bar{r} = 0.168\,m \quad , x = \frac{0.15}{2} = 0.075m$

$$P = \frac{\gamma\omega^2 r^2}{2g} - \gamma y + p_0 = \frac{9806\,\omega^2\times0.173^2}{2\times9.806} - 9806(-0.15) \Rightarrow P_G = 15\omega^2 + 1470.9$$

$$F = P_G A = (15\omega^2 + 1470.9)\times0.09 = 1.35\omega^2 + 132.381 \Rightarrow F = 132.381\,(1 + 0.0102\omega^2)$$

۳ جریان سیال

مفاهیم و معادلات اصلی حجم کنترل

۳-۱. جریان تراکم‌ناپذیر دوبعدی در پیرامون یک استوانه برقرار است (شکل ۳-۳). دبی عبوری از بین خطوط جریان به ازای هر متر عرض *1 L/s* است. فاصلهٔ خطوط جریان در نقطه‌ای دور از استوانه *5 mm* و در نقطه‌ای نزدیک به آن *3 mm* است. مقدار سرعت در این دو نقطه را به دست آورید.

حل:

$$\Delta q = vh \Rightarrow v = \frac{\Delta q}{h}$$

$$v_1 = \frac{1\times10^{-3}}{5\times10^{-3}} = 0.2\,m/s \quad , \quad v_2 = \frac{1\times10^{-3}}{3\times10^{-3}} = 0.33\,m/s$$

۳-۲. یک خط لوله، روغن با چگالی *0.86* را منتقل می‌کند. در مقطعی به قطر *200 mm* سرعت جریان *2 m/s* است. در مقطع دیگری، قطر لوله *60 mm* است. سرعت جریان در مقطع اخیر را به دست آورید. دبی جرمی جریان بر حسب کیلوگرم در ثانیه چقدر است؟

حل:

با نوشتن معادله پیوستگی داریم:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \;,\; \rho_1 = \rho_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow V_2 = 2 \times \left(\frac{0.2}{0.06}\right)^2 = 22.22\,m/s$$

$$\dot m = \rho V A = 0.86\times1000\times2\times\frac{\pi}{4}\times0.2^2 = 54.04\,kg/s$$

۳-۳. *0.01 kg/s* هیدروژن در لوله‌ای به قطر *50 mm* جریان دارد. در مقطعی فشار *280 kPa abs* و دما *25°C* است. سرعت متوسط چقدر است؟

حل:

$$P = \rho RT \Rightarrow \rho = \frac{P}{RT} = \frac{280\times10^3}{4121\times298} = 0.228\,kg/m^3$$

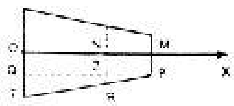
$$A=\frac{\pi\times 0.05^2}{4}=0.001963\ m^2$$

$$m=\rho VA \Rightarrow V=\frac{m}{\rho A}=\frac{0.01}{0.228\times 0.001963}=22.34\ m/s$$

۳-۴. از یک نازل که قطر قاعدهٔ آن $80\,mm$ و قطر دهانهٔ آن $30\,mm$ است، دبی $10\,L/s$ عبور می‌کند. جریان تراکم‌ناپذیر است. رابطه‌ای برای سرعت سیال در طول محور نازل بنویسید. محور xها را منطبق بر محور نازل و مبدأ مختصات را در قاعدهٔ نازل بگیرید.

حل:

$$OM=L\ ,\quad RN=r\ ,\quad ON=x$$



$$MP=\frac{0.03}{2}=0.015\,m\ ,\quad OT=\frac{0.08}{2}=0.04\,m$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.01}{\pi r^2}\ m/s$$

$$\frac{QP}{ZP}=\frac{QT}{ZR}\ \Rightarrow\ \frac{QP}{QT}=\frac{ZP}{ZR}$$

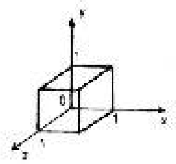
$$\Rightarrow\frac{L}{(0.04-0.015)}=\frac{L-x}{r-0.015}\Rightarrow r=\frac{0.025\,(L-x)}{L}+0.015=\frac{0.04\,L-0.025\,x}{L}=\frac{1}{20}\left(0.8-0.5\frac{x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow V=\frac{0.01}{\pi\times\frac{1}{20^2}\ \left(0.04-0.25x/L\right)^2}=\frac{1.273}{\left(0.8-0.5x/L\right)^2}$$

۳-۵. مکعبی را در نظر بگیرید که طول هر ضلع آن $1\,m$ است و در ربع اول دستگاه مختصات قرار دارد. اضلاع مکعب به موازات محورها هستند و یکی از گوشه‌هایش بر مبدأ مختصات منطبق است. برای توزیع سرعت داده شده در مسألهٔ قبل، دبی عبوری از هر یک از وجوه مکعب را به دست آورید. نشان دهید که اگر دانسیته سیال ثابت باشد، هیچ جرمی در داخل مکعب انباشته نمی‌شود.

حل:

با توجه به اینکه بردار dA به صورت عمود بر سطح و رو به خارج است بنابراین در ضرب برداری $V.dA$ تنها مؤلفه x از dA هم‌جهت باقی‌مانده و مؤلفه‌های دیگر صفر می‌شود.



داریم: $dm=\rho v dA$

در جهت x:

برای صفحه $x=0$: $\quad v=5\times 0=0$ و $m_1=\rho\times 0\times 1=0$

برای صفحه $x=1$: $\quad v=5\times 1=5\ m/s$ و $m_2=\rho\times 5\times 1=5\rho$

$\Rightarrow m_x=-5\rho\ kg/s$ **بطرف خارج**

در جهت y:

برای صفحه $y=0$: $v=5\times 0=0$ و $m_1=\rho\times 0\times 1=0$

برای صفحه $y=1$: $v=5\times 1=5\ m/s$ و $m_2=\rho\times 5\times 1=5\rho\ \ kg/s$

$\Rightarrow m_y=-5\rho\ kg/s$ بطرف خارج

در جهت z:

برای صفحه $z=0$: $v=-10\times 0=0$ و $m_1=\rho\times 0\times 1=0$

برای صفحه $z=1$: $v=-10\times 1=-10\ m/s$ و $m_2=\rho\times(-10)\times 1=-10\rho\ \ kg/s$

$\Rightarrow m_z^0=10\rho\ \ kg/s$ بطرف خارج

جرم انباشته شده $=-5\rho-5\rho+10\rho=0$

۳-۶. مربعی را در نظر بگیرید که گوشه‌های آن در نقاط $(0,0)$، $(0,1)$، $(1,1)$ و $(1,0)$ قرار دارند. توزیع سرعت به صورت

$$v=i\,(16y-12x)+j\,(12y-9x)$$

داده شده است. دبی عبوری از هر یک از اضلاع مربع (به ازای واحد طول در امداد z) را به دست آورید و نشان دهید که معادلهٔ پیوستگی برقرار است.

حل:

برای محاسبه m می‌توان از دو طریق عمل نمود یکی اینکه در صفحه موردنظر $\bar{V}$ را محاسبه کرده و از روی رابطه $m=\rho A\bar{V}$، m را بدست آورد یا به طور مستقیم عمل نمود.

جرم‌های ورودی را با علامت مثبت و جرم‌های خروجی را با علامت منفی در نظر می‌گیریم.

در جهت x:

برای صفحه $x=0$

$$V=16y-12x=16y$$

$$dm=\rho VdA \qquad dA=1\times dy=dy$$

$$\Rightarrow m=\int_0^1\rho\,(16y)dy=16\rho\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=8\rho\ kg/s \qquad \text{از چپ}$$

برای صفحه $x=1$

$$\Rightarrow V=16y-12\times 1=(16y-12)$$

$$dm=\rho VdA=\rho(16y-12)dy$$

$$\Rightarrow m=\int_0^1\rho\,(16y-12)dy=\rho\left(\frac{16}{2}y^2-12y\right)_0^1=\rho\,(8-12)=-4\rho\ kg/s \qquad \text{از راست}$$

$\Rightarrow m_x = 8\rho + (+4\rho) = 12\rho \ kg/s$ ورودی

در جهت y:

در صفحه $y=0$: $\Rightarrow V = 12\times 0 - 9x = -9x$

$dm = \rho V dA \qquad dA = 1\times dx = dx$

از پایین $dm = \rho(-9x)dx \Rightarrow m = \int_0^1 -9\rho x dx = -9\rho\left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^1 = -4.5\rho \ kg/s$

در صفحه $y=1$: $\Rightarrow V = 12\times 1 - 9x = 12 - 9x$

از بالا $dm = \rho(12-9x)dx \Rightarrow m = \int_0^1 \rho(12-9x)dx = \rho\left(12x - \frac{9}{2}x^2\right)_0^1 = \rho(12-4.5) = 7.5\rho$

$\Rightarrow m_y = -7.5\rho - 4.5\rho = -12\rho$ خروجی

$\Rightarrow m_x + m_y = 12\rho - 12\rho = 0 \Rightarrow$ بنابراین معادله پیوستگی صادق است.

۳-۷. در جریان مایع در یک خط لوله، به ازای سرعت $2m/s$، تلفات $3kW$ و به ازای سرعت $3m/s$، تلفات $6kW$ است. جریان آرام است یا درهم؟

حل:

با توجه به اینکه در جریان آرام تلفات با سرعت به توان 2 متناسب و در جریان درهم به توان بین 1.7 تا 2 متناسب می‌باشد داریم:

$$\text{تلفات} \propto (\text{سرعت})^n \Rightarrow \frac{(\text{تلفات})_1}{(\text{تلفات})_2} = \frac{V_1^n}{V_2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \ln 0.5 = n\ln\frac{2}{3} \Rightarrow n = \frac{\ln 0.5}{\ln\ (2/3)} = 1.71$$

$1.7 < n < 2$ می‌باشد بنابراین جریان درهم است.

۳-۸. در یک خط لوله اگر دبی جریان را 3 برابر کنیم، تلفات 7.64 برابر می‌شود. نحوهٔ تغییر تلفات با سرعت چگونه است؟ جریان آرام است یا درهم؟

حل:

$$\text{تلفات} \propto (\text{سرعت})^n \Rightarrow \frac{(\text{تلفات})_1}{(\text{تلفات})_2} = \frac{V_1^n}{V_2^n}$$

$$\Rightarrow 7.64 = (3)^n \Rightarrow \ln 7.64 = n\ln 3 \Rightarrow n = \frac{\ln 7.64}{\ln 3} = 1.85$$

$1.7 < n < 2$ می‌باشد بنابراین جریان درهم است.

۳-۹. یک لولهٔ قائم به قطر $6m$ و ارتفاع $15m$ با آب پر شده است. انرژی پتانسیل آب داخل لوله چقدر است؟ مبنای ارتفاع را $3m$ پایین‌تر از کف لوله بگیرید.

حل:

$$A = \frac{\pi \times 6^2}{4} = 28.27\ m^2$$

$$dV = Adz \quad , \quad dm = \rho dV = \rho Adz$$

$$\Rightarrow dE = gz \times dm = gz \times \rho Adz = z\gamma Adz$$

$$\Rightarrow E = \int_3^{18} \gamma Azdz = \gamma A \left(\frac{1}{2}z^2\right)_3^{18} = 157.5\gamma A = 157.5 \times 9806 \times 28.27 = 43.67 \times 10^6\ m.N$$

۳-۱۰. در مسألهٔ قبل آب داخل لوله از یک توربین عبور می‌کند و به داخل مخزنی تخلیه می‌شود که $10m$ پایین‌تر از کف لوله است. راندمان توربین را 100 درصد فرض کنید و کار تولیدی را محاسبه کنید.

حل:

$$E_2 = mg \times z_2 = \gamma v z_2 = 9806 \times \pi \times 3^2 \times 15 \times (3-10) = -29.11 \times 10^6\ m.N$$

طبق فرض مسئله راندمان توربین 100 درصد می‌باشد بنابراین:

$$W = E_1 - E_2 = 43.67 \times 10^6 - (-29.11 \times 10^6) = 72.78 \times 10^6\ m.N$$

۳-۱۱. $0.01\ m^3/s$ روغن با چگالی 0.8 از یک نازل به قطر $30\ mm$ تخلیه می‌شود. نرخ خروج انرژی جنبشی را بر حسب متر-نیوتن در ثانیه به دست آورید.

حل:

$$m = \rho Q = 0.8 \times 1000 \times 0.01 = 8\ kg/s$$

$$Q = VA \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{A}$$

$$V = \frac{0.01}{\pi \times 0.03^2/4} = 14.147\ m/s \quad \Rightarrow \quad E_c = m\frac{V^2}{2} = 8 \times \frac{14.147^2}{2} = 800\ N.m/s$$

۳-۱۲. نشان دهید که کاری که مایع در اثر فشارش می‌تواند انجام دهد $\int pdV$ است. V جرم مایع جابجا شده است.

حل:

در معادله انرژی کار انجام شده توسط مایع با عبارت $\frac{P}{\rho}$ (با واحد $N.m/kg$) بیان گردیده است.

می‌دانیم: $v = \frac{1}{\rho}$ حجم مخصوص

(چگالی مایع را ثابت فرض کرده‌ایم)

کار انجام شده توسط مایع $W = m\frac{P}{\rho} = mpv$

در رابطه بالا مبنا را حداقل فشار یعنی فشار صفر درنظر گرفته‌ایم:

هرگاه V حجم مایع موردنظر باشد داریم:

$$V = mv \Rightarrow W = PV$$

هرگاه فشار ثابت نباشد:

$$dW = pdV \Rightarrow W = \int pdV$$

باید توجه کرد که در رابطه فوق جابجایی حجمی مایع صورت می‌پذیرد ولی در رابطه اولر که ما به عبارت $\frac{dp}{\rho}$ برمی‌خوریم انتگرالگیری بین دو موقعیت که مایع پیدا می‌کند صورت می‌گیرد.

۳-۱۳. توزیع سرعت برای جریان بین دو صفحه موازی به فاصله a به صورت زیر داده شده است.

$$u = -10\frac{y}{a} + 20\frac{y}{a}\left(1-\frac{y}{a}\right)$$

u مؤلفهٔ سرعت به موازات صفحات و y فاصله عمودی از صفحه پایینی است. دبی حجمی جریان و سرعت متوسط آن را به دست آورید. نرخ عبور انرژی جنبشی از بین صفحات را به دست آورید. انرژی جنبشی در چه جهتی عبور می‌کند؟

حل:

با فرض اینکه عرض صفحات برابر $1m$ باشد داریم:

$$dA = 1 \times dy = dy$$

$$dQ = udA = [-10\frac{y}{a} + 20\frac{y}{a}(1-\frac{y}{a})]dy = [10\frac{y}{a} - 20\frac{y^2}{a^2}]dy$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^a \left(10\frac{y}{a} - 20\frac{y^2}{a^2}\right) dy \Rightarrow Q = \left(\frac{5}{a}y^2 - \frac{20}{3a^2}y^3\right)_0^a = \frac{5}{a}a^2 - \frac{20}{3a^2} \times a^3 = -\frac{5}{3}a$$

$$\bar{V} = \frac{1}{A}\int vdA = \frac{1}{A} \times Q = \frac{-5a/3}{a \times 1} = -\frac{5}{3}$$

نرخ عبور انرژی جنبشی عبارت است از $\frac{V^2}{2}$ (بر حسب $N.m/kg$) و یا $m\frac{V^2}{2}$ (بر حسب $N.m/s$): با انتخاب المان دیفرانسیلی جرمی داریم:

$$dm = \rho VdA$$

$$\Rightarrow dE = \frac{V^2}{2}dm = \frac{V^2}{2}\rho VdA \quad \Rightarrow \quad E = \int \frac{\rho}{2}V^3 dA$$

$$\Rightarrow E = \int_0^a \frac{\rho}{2}\left(-10\frac{y}{a} + 20\frac{y}{a} - 20\frac{y^2}{a^2}\right)^3 dy = \int_0^a \frac{\rho}{2}\left(1000\frac{y^3}{a^3} - 6000\frac{y^4}{a^4} + 12000\frac{y^5}{a^5} - 8000\frac{y^6}{a^6}\right) dy$$

$$E = \frac{\rho}{2}\left(\frac{1000}{4a^3}y^4 - \frac{6000}{5a^4}y^5 + \frac{12000}{6a^5}y^6 - \frac{8000}{7a^6}y^7\right)_0^a = -46.43\,\rho a$$

در جهت چپ

۳-۱۴. نرخ عبور انرژی جنبشی از مکعبی که در مسألهٔ ۵-۳ گفته شد را به دست آورید.

حل:

نرخ عبور انرژی جنبشی عبارت است از:

$$E_C = \int_{cs} \frac{V^2}{2} \times \rho V.dA$$

می‌دانیم بردار dA به صورت عمود بر سطح و رو به خارج است بنابراین در ضرب برداری درونی $V.dA$ تنها مؤلفه x از dA هم جهت با V باقی مانده و مؤلفه‌های دیگر صفر می‌شود بنابراین داریم:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

برای صفحه $x=0$ داریم:

$$V^2 = (5\times0)^2 + (5y)^2 + (-10z)^2 = 25y^2 + 100z^2$$

$$V.dA = v_x dA = (5\times0)dA = 0 \Rightarrow E_C = 0$$

برای صفحه $x = 1$ داریم:

$$v^2 = (5\times1)^2 + (5y)^2 + (-10z)^2 = 25 + 25y^2 + 100z^2$$

$$V.dA = v_x dA = 5dA$$

$$E_C = \int \frac{1}{2}(25 + 25y^2 + 100z^2)\rho \times 5dA = \frac{5}{2}\rho \left| \int 25dA + \int 25y^2 dA + \int 100z^2 dA \right|$$

$$E_C = \frac{5}{2}\rho \left| 25\times1 + \int_0^1 25y^2(1\times dy) + \int_0^1 100z^2(1\times dz) \right|$$

$$E_C = \frac{5}{2}\rho \left| 25 + \frac{25}{3} + \frac{100}{3} \right| = \frac{500}{3}\rho$$

به همین ترتیب برای صفحات دیگر نیز نرخ عبور انرژی جنبشی را محاسبه می‌کنیم:

برای صفحه $y = 1$: $E_C = \dfrac{500}{3}\rho$

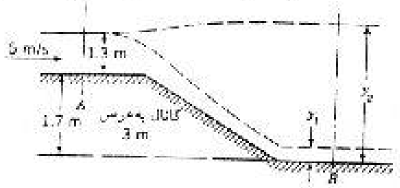
برای صفحه $z = 1$:

$$v^2 = 25x^2 + 25y^2 + 100 \qquad V.dA = v_z dA = -10dA \Rightarrow E_C = -\frac{1750}{3}\rho$$

نرخ عبور انرژی جنبشی برای صفحات $y = 0$ و $z = 0$ صفر است بنابراین نرخ عبور انرژی جنبشی کل عبارت است از:

$$\Rightarrow E_C = \frac{500}{3}\rho + \frac{500}{3}\rho - \frac{1750}{3}\rho = -\frac{750}{3}\rho = -250\rho$$

۳-۱۵. در شکل ۳-۴۳ آب در یک کانال جریان دارد. از کلیه تلفات صرفنظر کنید. دو عمق ممکن y_1 و y_2 را به دست آورید.



شکل ۳-۴۳ مسائل ۳-۱۵، ۳-۱۷، ۳-۲۱

حل:

معادله انرژی را بین نقاط (1) و (2) می‌نویسیم.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$0 + \frac{5^2}{2\times 9.806} + (1.7 + 1.3) = 0 + \frac{V_2^2}{2\times 9.806} + y \Rightarrow y + \frac{V_2^2}{19.612} = 4.275 \quad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع (1) و (2) عبارت است از:

$$Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad V_1A_1 = V_2A_2$$

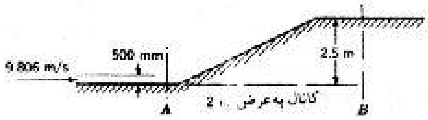
$$\Rightarrow 5\times(3\times1.3) = V_2\times(y\times3) \Rightarrow \quad V_2 = \frac{6.5}{y} \quad (II)$$

$$\text{روابط } (I) \text{ و } (II) \Rightarrow y + \frac{6.5^2}{19.612\times y^2} = 4.275 \quad \Rightarrow y^3 - 2.154y^2 + 11.473 = 0$$

از حل معادله بالا: $y_1 = 0.786\,m \quad , \quad y_2 = 4.15\,m$

ریشه سوم از لحاظ فیزیکی بی‌معنی است.

۳.۱۶. در شکل ۴۴-۳ آب با سرعت زیاد از سطح شیبدار به طرف بالا جریان می‌یابد. از تمام تلفات صرفنظر کنید. دو عمق ممکن در مقطع B را به دست آورید.



شکل ۴۴-۳ مسایل ۱۶-۳، ۳۲-۳، ۳۳-۳.

حل:

مانند مسئله قبل با انتخاب دو نقطه 1 و 2 در دو مقطع از جریان و نوشتن معادله انرژی داریم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$0+\frac{9.806^2}{2g}+0.5=0+\frac{V_2^2}{2g}+(2.5+y) \Rightarrow y+\frac{V_2^2}{2g}=2.903 \quad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع عبارت است از: $V_1A_1=V_2A_2$

$$\Rightarrow 9.806\times(0.5\times 2)=V_2\times(y\times 2) \quad \Rightarrow \quad V_2=\frac{4.903}{y} \qquad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow$ $y+\left(\frac{40903}{y}\right)^2\times\frac{1}{2\times 9.806}=2.903$

$$\Rightarrow y+\frac{1.2257}{y^2}=2.903 \quad \Rightarrow \quad y^3-2.903y^2+1.226=0$$

از حل معادله بالا: $y_1=2.74\,m \quad , \quad y_2=0.755\,m$

ریشه سوم از لحاظ فیزیکی بی‌معنی است.

۳.۱۷. در شکل ۴۳-۳ کانال باریک می‌شود و عرض آن در مقطع B به $2m$ می‌رسد. جریان در مقطع B را یکنواخت فرض کنید و دو عمق ممکن جریان را به دست آورید. از تمام تلفات صرفنظر کنید.

حل:

با توجه به حل مسئله ۱۵ داریم:

معادله انرژی بین نقاط (1) و (2) $\Rightarrow y+\frac{V_2^{\,2}}{19.612}=4.275 \qquad (I)$

معادله پیوستگی بین دو مقطع: $Q_1=Q_2 \quad \Rightarrow \quad V_1A_1=V_2A_2$

$$5\times(1.3\times 3)=V_2(y\times 2) \quad \Rightarrow \quad V_2y=9.75 \quad \Rightarrow \quad V_2=\frac{9.75}{y} \qquad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow y+\frac{9.75^2}{19.612\times y^2}=4.275 \quad \Rightarrow \quad y^3-4.275y^2+4.847=0$

از حل معادله بالا : $y_1 = 1.27m \quad , \quad y_2 = 3.97m$

ریشه سوم از لحاظ فیزیکی بی‌معنی است.

۳-۱۸. در زیر برخی از لوکوموتیوهای بخار، قاشقکهایی نصب شده است که آب را از یک مخزن واقع بین ریلها بلند کرده و آن را داخل منبعی در لوکوموتیو می‌ریزند. برای آنکه آب توسط قاشقک به اندازهٔ $4m$ بالا برده شود، قطار باید چه سرعتی داشته باشد؟ از تمام تلفات صرفنظر کنید.

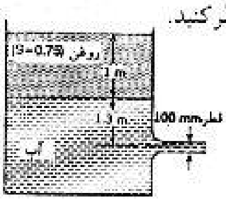
راهنمایی: برای اینکه جریان به جریان دائمی تبدیل شود، فرض کنید لوکوموتیو ساکن باشد و آب به طرف آن حرکت کند.

حل:

با توجه به فرض داده شده در مسئله با نوشتن معادله انرژی بین دو نقطه و ساده کردن آن داریم:

$$\frac{V^2}{2g} = z \Rightarrow V^2 = 2gz = 2 \times 9.806 \times 4 = 78.448 \Rightarrow V = 8.86\ m/s$$

۳-۱۹. دبی آب خروجی از مخزن شکل ۴۵-۳ را به دست آورید. از تلفات صرفنظر کنید.



شکل ۴۵-۳

حل:

فشار در سطح آب برابر است با:

$$P_1 = P_0 + \gamma h = 0 + \gamma_w \times 0.75 \times 1 = 0.75\gamma_w$$

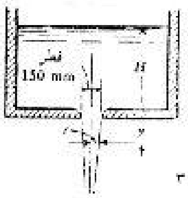
معادله انرژی را بین نقاط (1) و (2) می‌نویسیم :

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{0.75 \times \gamma_w}{\gamma_w} + 0 + 1.3 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0 \Rightarrow V_2^2 = 40.2046 \Rightarrow V = 6.34\ m/s$$

$$Q_2 = V_2 A_2 = 6.34 \times \frac{\pi \times 0.1^2}{4} = 0.0498\, m^3/s = 49.8\, L/s$$

۳-۲۰. در شکل ۴۶-۳ معادله‌ای برای سطح جت آب به دست آورید، یعنی r را به صورت تابعی از y/H بنویسید. از تلفات و اثرات کشش سطحی صرفنظر کنید.



شکل ۴۶-۳

حل:

با انتخاب نقطه (1) بر روی سطح آزاد آب و نقطه (2) در درون جت خروجی و نقطه (3) در درون جت جایی که شعاع

جت برابر r می‌باشد داریم:

$$P_1 = P_2 = P_3 = 0\ ,\ V_1 = 0\ ,\ z_1 = H + y\ ,\ z_2 = y\ ,\ z_3 = 0$$

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow\ 0 + 0 + H = 0 + \frac{{V_2}^2}{2g} + 0 \ \Rightarrow\ V_2^2 = 2gH \ \Rightarrow\ V_2 = \sqrt{2gH}$$

معادله انرژی بین دو نقطه (3) و (1) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3$$

$$\Rightarrow\ 0 + 0 + (y + H) = 0 + \frac{V_3^2}{2g} + 0 \ \Rightarrow\ V_3^2 = 2g(y + H) \ \Rightarrow\ V_3 = \sqrt{2g(y + H)}$$

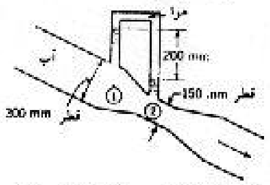
معادله پیوستگی بین دو مقطع (2) و (3) عبارت است از:

$$V_2A_2 = V_3A_3$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2gH} \times \frac{\pi \times 0.15^2}{4} = \sqrt{2g(y + H)} \times \pi r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{0.15^2 \times \sqrt{2gH}}{4\sqrt{2g(y + H)}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{0.075}{(1 + y/H)^{0.25}}$$

۳.۲۱. در شکل ۴۷-۳ دبی عبوری از لوله ونتوری را به دست آورید. از تلفات صرفنظر کنید.



شکل ۴۷-۳

حل:

نقاط 1 و 2 را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم البته می‌توان این دو نقطه را به طور هم‌سطح انتخاب کرد و رابطه فشار را با استفاده از مانومتر برای ایندو نقطه نوشت و در معادله انرژی جاگذاری نمود اما اگر ایندو نقطه به طور هم‌سطح هم انتخاب نشوند در محاسبات ایرادی وارد نخواهد گردید و این مسئله در نوشتن معادله انرژی برطرف خواهد شد زیرا می‌دانیم با صرفنظر نمودن از اصطکاک و تنش سرعت درکلیه نقاط یک مقطع ثابت بوده و به z بستگی ندارد.

رابطه فشار بین دو نقطه:

$$P_1 - 0.2\gamma = P_2 \qquad \Rightarrow \qquad P_1 - P_2 = 0.2\gamma$$

معادله انرژی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = 0.2$$

$$\Rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 0.4 \times 9.806 = 3.9224 \qquad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع (1) و (2) عبارت است از: $V_1A_1 = V_2A_2$

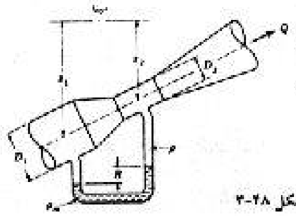
$$\Rightarrow \quad V_1 \times \frac{\pi}{4}(0.3)^2 = V_2 \times \frac{\pi}{4}(0.15)^2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0.25\,V_2 \qquad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow \quad V_2^2 - (0.25\,V_2)^2 = 3.9224$

$$\Rightarrow 0.9375\,V_2^2 = 3.9224 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 2.045\ m/s$$

$$\Rightarrow Q = V_2A_2 = 2.045\left(\frac{\pi}{4} \times 0.15^2\right) = 0.036\ m^3/s = 36\ L/s$$

۳-۲۲. برای لوله ونتوری شکل ۴۸-۳ رابطه‌ای بنویسید که دبی حجمی جـریان را بـر حسب اخـتلاف ارتـفاع مـانومتری بـه دست دهـد.



شکل ۴۸-۳

حل:

با انتخاب نقطه (1) در ارتفاع z_1 از سطح مبنا و نقطه (2) در ارتفاع z_2 از سطح مبنا داریم:

معادله فشار بین دو نقطه: (h_1 و h_2 فواصل نقاط (1) و (2) از سطح سیال مانومتری می‌باشند).

$$P_1 + \gamma h_1 - R\gamma_m - h_2\gamma = P_2 \Rightarrow P_1 - P_2 = R\gamma_m + (h_2 - h_1)\gamma$$

با توجه به شکل: $(h_2 - h_1) = |z_1 - z_2| - R$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = R\gamma_m + (|z_1 - z_2| - R)\gamma$$

$$z_2, z_1 < 0 \quad , \quad z_2 < z_1 \quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2| = z_2 - z_1$$

معادله انرژی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

با جاگذاری رابطه بدست آمده برای اختلاف فشار داریم:

$$\Rightarrow \frac{R\gamma_m + [z_2 - z_1 - R]\gamma}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

$$\Rightarrow R\left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \Rightarrow R\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \qquad (I)$$

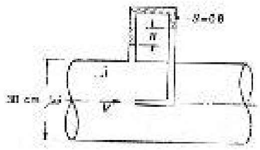
معادله پیوستگی بین دو مقطع (1) و (2) عبارت است از:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = V_2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \qquad (II)$$

$$R\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) = \frac{V_2^2 - V_2^2 \left(D_2/D_1\right)^4}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right] \quad \Rightarrow V_2^2 = \frac{2gR\left(\rho_m/\rho - 1\right)}{1 - \left(D_2/D_1\right)^4}$$

$$Q = V_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad Q = A_2 \left(\frac{2gR\left(\rho_m/\rho - 1\right)}{1 - \left(D_2/D_1\right)^4}\right)^{1/2}$$

۳-۲۳. در شکل ۴۹-۳، $R = 22\,cm$ است. سرعت V چقدر است؟



شکل ۴۹-۳

حل:

دو نقطه (1) و (2) را که بر روی امتداد یک خط جریان قرار دارند، مطابق شکل انتخاب می‌کنیم. باید توجه داشت که فشار در نقطه (2) بیش از نقطه (1) می‌باشد چون سرعت سیال در محل ورود به لوله صفر شده و تمام انرژی جنبشی سیال با فرض عدم وجود تلفات انرژی به انرژی فشاری تبدیل می‌شود.

رابطه فشار: $P_1 - 0.8\gamma R + \gamma R = P_2 \;\Rightarrow\; P_2 - P_1 = R(\gamma - 0.8\gamma) \;\Rightarrow P_2 - P_1 = 0.2\gamma R$

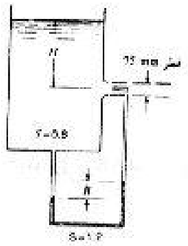
معادله انرژی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + 0 = \frac{P_2}{\gamma} + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2 - P_1}{\gamma} = \frac{V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{0.2\gamma R}{\gamma} \times 2g = 2g \times 0.2\,R = 2 \times 9.806 \times 0.2 \times 0.22 = 0.863 \;\Rightarrow V = 0.93\,m/s$$

۳-۲۴. در شکل ۵۰-۳، H را بر حسب R به دست آورید از تلفات صرفنظر کنید.



شکل ۵۰-۳
مسایل ۳-۲۲، ۱۳، ۳-۵۲

حل:

نقاط (1) و (2) و (3) را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم.

معادله فشار بین P_2 و P_3 در درون لوله

$$P_3 + (x + R)\gamma_1 - R\gamma_2 - L\gamma_1 = P_2 \qquad (I)$$

معادله فشار بین P_1 و P_3 در درون مخزن :

$$P_3 = (L - x + H)\gamma_1 + P_1 , P_1 = 0 \;\Rightarrow\; P_3 = (L - x + H)\gamma_1 \qquad (II)$$

معادله انرژی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم. باید توجه داشت که سرعت سیال در نقطه 2 صفر می‌باشد زیرا در برخورد به ابتدای لوله سیال ساکن شده و انرژی جنبشی آن (با فرض عدم تلفات) به انرژی فشاری تبدیل می‌شود.

$$\frac{P_1}{\gamma_1} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma_1} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \;\Rightarrow\; 0 + 0 + H = \frac{P_2}{\gamma_1} + 0 + 0 \;\Rightarrow\; P_2 = \gamma_1 H \qquad (III)$$

با جاگذاری مقادیر P_2 و P_3 از دو رابطه (II) و (III) در رابطه (I) داریم:

$$(L - x + H)\gamma_1 + (x + R)\gamma_1 - R\gamma_2 - L\gamma_1 = \gamma_1 H \;\Rightarrow\; R(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$$

با توجه به اینکه $\gamma_2 \neq \gamma_1$ می‌باشد بنابراین $R = 0$ خواهد بود.

۳ـ۲۵. خط لوله‌ای $0.6\,m^3/s$ آب را از یک مخزن به مخزن دیگری منتقل می‌کند. سطح مخزن دوم $12\,m$ پایین‌تر از سطح مخزن اول است. تلفات را بر حسب متر-نیوتن بر کیلوگرم و همچنین بر حسب کیلووات به دست آورید.

حل:

با فرض اینکه نقطه (1) در سطح آب مخزن بالایی و نقطه (2) در سطح آب مخزن پایینی باشد معادله انرژی را بین این دو نقطه می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + losses_{1-2} \;\Rightarrow\; 0 + 0 + 12 = 0 + 0 + 0 + losses_{1-2}$$

$$\Rightarrow losses_{1-2} = 12\ N.m/N = 12 \times 9.806 = 117.672\ N.m/N$$

$$\dot{m} = \rho Q = 1000 \times 0.6 = 600\,kg/s$$

$$losses_{1-2} = 117.672 \times 600 = 70603\ N.m/S = 70603\,W = 70.603\,kW$$

۳ـ۲۶. پمپی که $3\,m$ بالاتر از سطح آب دریاچه قرار دارد، $15\,L/s$ آب را به صورت یک جت قائم تخلیه می‌کند که $16\,m$ بالا می‌رود. قدرت مصرفی الکتروموتور $3.5\,kW$ است. راندمان مجموعهٔ الکتروپمپ را به دست آورید. تلفات مجموعه اگر سطح دریاچه و نقطه اوج جت مقایسه شود، چقدر است؟ تلفات با توجه به اینکه آب دوباره به سطح دریاچه سقوط می‌کند، چقدر است؟

حل:

با انتخاب سطح مبنای z در سطح آب دریاچه و نقطه (1) بر روی این سطح و نقطه (2) در بالاترین نقطه جت قائم داریم:

$$z_1 = 0 \;,\; z_2 = 16 + 3 = 19\,m$$

معادله انرژی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم. باید توجه داشت که فشار در درون جت صفر می‌باشد چون انرژی

فشاری به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود همچنین فشار در سطح آب دریاچه هم صفر می‌باشد.

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+losses_{1-2}$$

$$0+0+0+W_p=0+0+19+losses_{1-2}$$

با فرض اینکه W_p کار مفید پمپ بوده و از کلیه تلفات به جز تلفات مربوط به خود پمپ (مانند تلف شدن انرژی در خطوط لوله و مقاومت هوا و...) صرفنظر شود $losses_{1-2}=0$ خواهد بود بنابراین داریم:

$$W_p=19\,W/kg$$

$$Q=0.015\,m^3/s \quad\Rightarrow\quad m=\rho Q=0.015\times 9806=147.09\ kg/s$$

$$\Rightarrow\ W_p=147.09\times 19=2794.71\ W \quad \text{کار مفید پمپ}$$

$$\eta=\frac{W_p}{\text{کار داده شده}}=\frac{2794.71}{3500}=0.798 \quad\Rightarrow\quad \eta=79.8\% \qquad \text{راندمان:}$$

اتلاف انرژی توسط پمپ و موتور عبارت است از $3500-2794.71=708.29\,W$

$$708.29\,W=708.29\,kgm/s\times\frac{1}{147.09\,kg/s}=4.79\,m.N/N$$

در برگشت آب به داخل دریاچه کلیه انرژی آب (قرارگرفته در بالاترین نقطه جت) به گرما تبدیل شده و تلف می‌شود و این انرژی موجود در آب که به صورت انرژی پتانسیل می‌باشد عبارت خواهد بود از: $19\,W/kg$

بنابراین تلفات انرژی در حالتی که آب دوباره به دریاچه برگردد عبارت خواهد بود از:

$$4.79+19=23.79\ m.N/N$$

۳.۲۷ یک دمنده $2\,m^3/s$ هوا $(\rho=1.3\,kg/m^3)$ را جابجا می‌کند و فشار آن را به اندازهٔ 150 میلی‌متر آب می‌افزاید. راندمان دمنده 72 درصد است. تلفات در دمنده را بر حسب متر-نیوتن بر کیلوگرم و تیز بر حسب کیلووات به دست آورید. سرعت دورانی دمنده $1800\,rpm$ است. گشتاور روی محور دمنده را تعیین کنید.

حل:

هرگاه فرض کنیم که سرعت و ارتفاع هوا در ورودی و خروجی یکسان باشد و تنها تغییر صورت گرفته در انرژی هوا به تغییرات فشار آن مربوط شود با نوشتن معادله انرژی و ساده کردن آن خواهیم داشت:

$$\Delta P=0.15\,mH_2O=0.15\,mH_2O\times\frac{1.01325\times 10^5 Pa}{10.34\,mH_2O}=1469.9\ Pa$$

$$W=\frac{\Delta P}{\rho}=\frac{1469.9}{1.3}=1130.7\ N.m/kg$$

$$losses=\frac{1130.7}{0.72}\times 0.28=440\ N.m/kg \qquad \text{تلفات:}$$

$m=\rho Q=1.3\times 2=2.6\,kg/s$

$losses=2.6\times 440=1144\dfrac{N.m}{s}\ (w)=1.144\,kW$

$W=T\omega\ \Rightarrow\ T\times 1800\times\dfrac{2\pi}{60}=1130.7\times 2.6$

$\Rightarrow T=15.6\,N.m$ گشتاور روی محور دمنده

۳.۲۸. سرعت جریان در لوله‌ای به قطر $6m$ برابر $3\,m/s$ است. این لوله با یک زانویی کاهنده به لوله دیگری به قطر $5m$ متصل شده است. فرض کنید تلفات با مجذور سرعت متناسب باشند. به ازای $1000m$ طول لوله، تلفات در لولهٔ دوم چند برابر تلفات در لولهٔ اول است.

حل:

با نوشتن معادله پیوستگی داریم:

$$V_1A_1=V_2A_2\ \Rightarrow\ V_2=V_1\frac{A_1}{A_2}=V_1\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2=3\times\left(\frac{6}{5}\right)^2=4.32\,m/s$$

$$losses\propto V^2\ \Rightarrow\ \frac{losses_2}{losses_1}=\frac{V_2^2}{V_1^2}=\frac{4.32^2}{3^2}=2.07$$

۳.۲۹. توزیع سرعت برای جریان آرام در لوله با رابطه زیر داده می‌شود:

$$v=V_{max}\left[1-(r/r_0)^2\right]$$

سرعت متوسط و ضریب تصحیح انرژی جنبشی را به دست آورید.

حل:

با توجه به شکل مقابل داریم: $dA=2\pi r\,dr$

$$V=\frac{1}{A}\int_A v\,dA=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}v\,2\pi r\,dr=\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0}v\,r\,dr=\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0}V_{max}\left[r-\frac{r^3}{r_0^2}\right]dr$$

$$=\frac{2V_{max}}{r_0^2}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4r_0^2}\right]_0^{r_0}=\frac{2V_{max}}{r_0^2}\times\frac{r_0^2}{4}=\frac{V_{max}}{2}$$

$$\alpha=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{v}{V}\right)^3dA=\frac{8}{\pi r_0^2}\int_0^{r}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^3 2\pi r\,dr=\frac{16}{r_0^2}\int_0^{r_0}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^3 r\,dr$$

$$=\frac{16}{r_0^2}\int_0^{r_0}\left[r-\frac{3r^3}{r_0^2}+\frac{3r^5}{r_0^4}-\frac{r^7}{r_0^6}\right]dr=\frac{16}{r_0^2}\left[\frac{r_0^2}{2}-\frac{3r_0^4}{4r_0^2}+\frac{1}{2}\times\frac{r_0^6}{r_0^4}-\frac{1}{8}\times\frac{r_0^8}{r_0^6}\right]=2$$

۳.۳۰. برای جریان بسیار درهم، توزیع سرعت با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\frac{v}{v_{max}}=\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/9}$$

r_0 شعاع لوله و y فاصله از دیواره آن است. ضریب تصحیح انرژی جنبشی را تعیین کنید.

حل:

مطابق شکل داریم:

$$r = r_0 - y \qquad \Rightarrow \qquad dr = -dy$$

$$V = \frac{1}{A}\int_A v dA = \frac{1}{\pi r_0^2}\int V_{max}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/9} 2\pi r dr$$

$$V = \frac{1}{r_0^2}\int V_{max}\left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)^{1/9} 2r dr = \frac{2V_{max}}{r_0^2 r_0^{1/9}}\int_0^{r_0} r(r_0 - r)^{1/9} dr$$

$$(r_0 - r)^{1/9} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{9}(r_0 - r)^{-8/9}(-1)dr = du \Rightarrow dr = -9(r_0 - r)^{8/9} du \quad , \quad r = r_0 - u^9$$

$$\Rightarrow V = \frac{2V_{max}}{r_0^{1/9}}\int_{r_0^{1/9}}^{0}(r_0 - u^9)(-9)(r_0 - r)^{8/9}(r_0 - r)^{1/9} du$$

$$= \frac{2V_{max}}{r_0^{19/9}} \times (-9)\int_{r_0^{1/9}}^{0}(r_0 - u^9)u^9 du = \frac{-18V_{max}}{r_0^{1/9}}\int_{r_0^{1/9}}^{0}\frac{1}{9}(r_0 u^9 - u^{18})du = \frac{-18V_{max}}{r_0^{19/9}4}\left(\frac{r_0}{10}u^{10} - \frac{1}{19}u^{19}\right)_{r_0^{1/9}}^{0}$$

$$= \frac{-18V_{max}}{r_0^{19/9}} \times \left(\frac{9}{190}\right) \times r_0^{19/9} \Rightarrow V = \frac{81}{95} V_{max}$$

$$\alpha = \frac{1}{A}\int\left(\frac{v}{V}\right)^3 dA = \frac{1}{\pi r_0^2} \times \left(\frac{-95}{81}\right)^3 \int\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/3} 2\pi r dr = \frac{-3.2266}{r_0^2 \times r_0^{1/3}}\int_0^{r_0} r(r_0 - r)^{1/3} dr$$

$$u = (r_0 - r)^{1/3} \Rightarrow du = \frac{1}{3}(r_0 - r)^{-2/3}(-1)dr \ \Rightarrow \ dr = -3(r_0 - r)^{2/3} du \quad , \quad r = r_0 - u^3$$

$$\alpha = \frac{-3.2266}{r_0^{7/3}}\int_{r_0^{1/3}}^{0}(r_0 - u^3)(r_0 - r)^{1/3}(-3)(r_0 - r)^{2/3} du$$

$$\alpha = \frac{9.6798}{r_0^{7/3}}\int_{r_0^{1/3}}^{0}(r_0 u^3 - u^6)du = \frac{9.6798}{r_0^{7/3}}\left(\frac{r_0}{4}u^4 - \frac{1}{7}u^7\right)_{r_0^{1/3}}^{0} = \frac{9.6798}{r_0^{7/3}} \times \frac{3}{28} \times r_0^{7/3} = 1.037$$

۳.۳۱. در شکل ۳-۴۳ تلفات از مقطع A تا مقطع B برابر $0.6\,m.N/N$ است. دو عمق ممکن در مقطع B را به دست آورید.

حل:

مانند مسئله ۱۵ معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + losses_{1-2}$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{5^2}{2 \times 9.806} + (1.7 + 1.3) = 0 + \frac{V_2^2}{2 \times 9.806} + y + 0.6 \quad \Rightarrow \ y + \frac{V_2^2}{19.612} = 3.675 \ (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع (1) و (2): از مسئله ۱۵: $\Rightarrow V_2 = \dfrac{6.5}{y} \qquad (II)$

$$(II) \text{ و } (I) \text{ روابط} \Rightarrow y + \frac{6.5^2}{19.612 \times y^2} = 3.675 \Rightarrow y^3 - 3.675y^2 + 2.154 = 0$$

از حل معادله بالا $y_1 = 0.88\, m \;,\; y_2 = 3.5\, m$

ریشه سوم از لحاظ فیزیکی بی‌معنی است.

۳.۳۲. در شکل ۴۴-۳ در اثر تلفات، دمای آب از A تا B به اندازهٔ $0.0006°C$ افزایش می‌یابد. عمق کمتر جریان در مقطع B را به دست آورید.

حل:

$$m = \rho VA = 1000 \times 9.806 \times 0.5 \times 2 = 9806\, kg/s$$

$$q = mc_p\Delta t \qquad c_p = 1\frac{cal}{g\,°c} = 1\frac{cal}{g\,°c} \times \frac{4.184J}{1cal} \times \frac{1000g}{1\,kg} = 4184\frac{J}{kgc}$$

گرمای حاصل شده:

$$q = 9806 \times 4184 \times 0.0006 = 24617\; J/s$$

$$\Rightarrow q = 4184 \times 0.0006 = 2.51\frac{N.m}{kg} = losses$$

مانند مسئله ۱۶ معادله انرژی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + losses_{1-2}$$

$$0 + \frac{9.806^2}{2} + 9.806 \times 0.5 = 0 + \frac{V_2^2}{2} + 9.806(2.5 + y) + 2.51$$

$$\Rightarrow 9.806 + \frac{V_2^2}{2} = 25.96 \quad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع:

$$V_1A_1 = V_2A_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{4.903}{y} \qquad (II)$$

$$(II) \text{ و } (I) \text{ روابط} \Rightarrow 9.806y + \left(\frac{4.903}{y}\right)^2 \times \frac{1}{2} = 25.96$$

$$\Rightarrow 9.806y^3 - 25.96y^2 + 12.02 = 0 \Rightarrow y^3 - 2.647y^2 + 1.23 = 0$$

از حل معادله فوق دو ریشه $y = 0.821\, m$ و $y = 2.440\, m$ حاصل می‌شود که جواب موردنظر مسئله $y = 0.821\, m$ می‌باشد.

۳.۳۳. در شکل ۴۴-۳ عرض کانال از $2\, m$ در مقطع A به $3\, m$ در مقطع B افزایش می‌یابد. تلفات بین A و B برابر $0.3\, m.N/N$ است. دو عمق ممکن در B را به دست آورید.

حل:

معادله انرژی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + losses_{1-2}$$

$$0 + \frac{9.806^2}{2 \times 9.806} + 0.5 = 0 + \frac{V_2^2}{2 \times 9.806} + (2.5 + y) + 0.3 \Rightarrow y + \frac{V_2^2}{2g} = 2.603 \qquad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع عبارت است از:

$$V_1A_1 = V_2A_2 \Rightarrow 9.806\times(2\times0.5) = V_2\times(3\times y) \Rightarrow V_2 = \frac{3.269}{y} \qquad (II)$$

$$(II) \text{ و } (I) \text{ روابط} \Rightarrow y + \left(\frac{2.269}{y}\right)^2 \times \frac{1}{2\times9.806} = 2.603$$

$$\Rightarrow y^3 - 2.603y^2 + 0.545 = 0$$

$$\text{از حل معادله فوق}: y_1 = 0.510\,m \quad , \quad y_2 = 2.517\,m$$

ریشه سوم از لحاظ فیزیکی بی‌معنی است.

۳-۳۴. در یک خط انتقال آب در مقطع A، قطر $1\,m$، فشار $98\,kPa$ و سرعت $1\,m/s$ است. در مقطع B که $2\,m$ بالاتر از A است، قطر $0.5\,m$ و فشار $20\,kPa$ است. جهت جریان را تعیین کنید.

حل:

انرژی ($Head$) در مقطع A:

$$H_A = \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{98000}{9806} + \frac{1^2}{2\times9.806} + 0 = 10.045\ N.m/N$$

معادله پیوستگی:

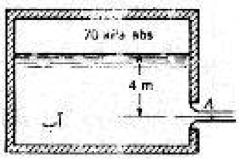
$$V_1A_1 = V_2A_2 \Rightarrow V_2 = V_1\frac{A_1}{A_2} = V_1\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 1\times\left(\frac{1}{0.5}\right)^2 = 4\ m/s$$

انرژی ($Head$) در مقطع B:

$$H_B = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B = \frac{20000}{9806} + \frac{4^2}{2\times9.806} + 2 = 4.86\ N.m/N$$

بنابراین جریان از مقطع A به مقطع B خواهد بود $\Rightarrow H_B < H_A$

۳-۳۵. در شکل ۵۱-۵ سرعت جریان در A را به دست آورید. تلفات $0.1\,mN/N$ است. بارومتر عدد $750\,mmHg$ را نشان می‌دهد.



شکل ۵۱-۳

حل:

با انتخاب سطح A به عنوان سطح مبنا و انتخاب نقطه (1) در سطح آزاد آب معادله انرژی را بین نقطه (1) و A می‌نویسیم.

$$P_A = 750\,mmHg \times \frac{1.01325\times10^5\,Pa}{760\,mmHg} = 99991.8\ Pa$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + losses_{1\text{-}A}$$

$$\Rightarrow \frac{70000}{9806} + 0 + 4 = \frac{99991.8}{9806} + \frac{V^2}{2\times9.806} + 0 + 0.1$$

$$\Rightarrow V^2 = 16.49 \ \Rightarrow\ V = 4.06\,m/s$$

۳-۳۶. در شکل ۳-۵۲ به ازای $H = 8m$ تلفات برابر $3V^2/2gm.N/N$ است. دبی را به دست آورید.

شکل ۳-۵۲

مسایل ۳-۳۶، ۳-۳۷، ۳-۳۸

حل:

نقطه (1) را در سطح آب و نقطه (2) را در خروجی لوله فرض می‌کنیم و معادله انرژی را برای ایندو نقطه می‌نویسیم.

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+losses_{1-2}$$

$$0+0+H=0+\frac{V^2}{2g}+0+\frac{3V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{4V^2}{2g}=H \Rightarrow \frac{4V^2}{2\times 9.806}=8 \Rightarrow V^2=39.22 m/s \Rightarrow V=6.263\ m/s$$

$$Q=AV=\frac{\pi}{4}(0.15)^2\times 6.263=0.1107\ m^3/s=110.7\ L/s$$

۳-۳۷. در شکل ۳-۵۲ برای دبی $50\,L/s$، H را حساب کنید. تلفات $10V^2/2gm.N/N$ است.

حل:

$$Q=AV \Rightarrow V=\frac{Q}{A}=\frac{0.05}{\pi\times 0.15^2/4}=2.83\ m/s$$

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+losses_{1-2}$$

$$0+0+H=0+\frac{V^2}{2g}+0+\frac{10V^2}{2g} \Rightarrow H \Rightarrow \frac{11V^2}{2g}=\frac{11\times 2.83^2}{2\times 9.806}=4.49\ m$$

۳-۳۸. در شکل ۳-۵۲ دبی $100\,L/s$ و ارتفاع $H=10m$ است. تلفات در سیستم را بر حسب ارتفاع سرعتی یعنی به صورت $KV^2/2g$ بیان کنید.

حل:

$$Q=VA \Rightarrow V=\frac{Q}{A}=\frac{0.1}{\pi\times 0.15^2/4}=5.6588\ m/s$$

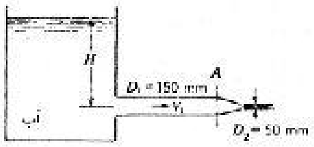
معادله انرژی بین نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+losses_{1-2}$$

$$0+0+H=0+\frac{V^2}{2g}+0+\frac{kV^2}{2g}$$

$$\Rightarrow H=(k+1)\frac{V^2}{2g} \Rightarrow 10=(k+1)\frac{5.6588^2}{2\times 9.806} \Rightarrow k=5.125$$

۳-۳۹. در شکل ۳-۵۳ تلفات تا مقطع A به صورت $5V_1^2/2g$ و تلفات در نازل به صورت $0.05V_2^2/2g$ بیان می‌شود. دبی را به دست آورید. فشار در A را حساب کنید. $H=8m$



شکل ۳-۵۳
مسایل ۳-۳۹ و ۳-۴۰

حل:

مطابق شکل نقطه (1) را در مقطع A و نقطه (2) را در جت خروجی و نقطه (3) را در روی سطح آزاد آب انتخاب می‌کنیم. معادله انرژی را بین دو نقطه (2) و (3) می‌نویسیم:

$$\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+losses_{3\text{-}2}$$

$$0+0+H=0+\frac{V_2^2}{2g}+0+\frac{5V_1^2}{2g}+0.05\times\frac{V_2^2}{2g}\Rightarrow 0.021V_2^2+V_1^2=31.38 \qquad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع: $$V_1A_1=V_2A_2\Rightarrow V_1\times\frac{\pi}{4}\times0.15^2=V_2\times\frac{\pi}{4}\times0.05^2$$

$$\Rightarrow V_2=9V_1 \qquad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow 0.021\,(9V_1)^2+V_1^2=31.38$

$$V_1^2=1.74\Rightarrow V_1=1.32\ m/s$$

$$Q_1=Q_2=A_1V_1=\frac{\pi}{4}\times0.15^2\times1.32=0.0233\ m^3/s=23.3\,L/s$$

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (3) عبارت است از:

$$\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3=\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+losses_{3\text{-}1}$$

$$0+0+H=\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+0+\frac{5V_1^2}{2g}$$

$$\Rightarrow\frac{P_1}{\gamma}=8-\frac{6}{2g}\times1.32^2=7.467\,N.m/N$$

$$\Rightarrow P_1=7.467\times9806=73.221\ kPa\ (gage)$$

۳-۴۰. در شکل ۳-۵۳ فشار در A برابر $25\,kPa$ است. تلفات در مسأله قبل داده شده است. ارتفاع، H و دبی را تعیین کنید.

حل:

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+losses_{1\text{-}2}$$

مطابق مسئله قبل: $$\frac{25000}{9806}+\frac{V_1^2}{2\times9.806}+0=0+\frac{V_2^2}{2\times9.806}+0+0.05\frac{V_2^2}{2\times9.806}$$

$$\Rightarrow 1.05\ V_2^2 - V_1^2 = 50 \qquad (I)$$

از مسئله قبل داریم

$$Q_1 = Q_2 \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = 9V_1 \qquad (II)$$

$$\Rightarrow 1.05\,(9V_1)^2 - V_1^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad 84.05\,V_1^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0.771\ m/s$$

$$Q = Q_1 = V_1 \times \frac{\pi}{4} \times 0.15^2 = 0.0136\,m^3/s = 13.6\ L/s$$

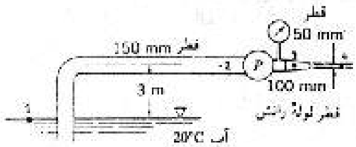
معادله انرژی بین نقاط (3) و (1) عبارت است از:

$$\frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + losses_{3-1}$$

$$0 + 0 + H = \frac{25000}{9806} + \frac{0.771^2}{2 \times 9.806} + 0 + \frac{5 \times 0.771^2}{2 \times 9.806}$$

$$\Rightarrow H = 2.731\ m$$

۴۱-۳. در شکل ۵۴-۳ هنگامی که فشار در لوله رانش $35\,kPa$ باشد، کاویتاسیون در دهانه ورودی پمپ در آستانه وقوع است. طول لوله مکش را به دست آورید. تلفات درلوله مکش را می‌توان به صورت $(V_1^2/2g)(0.03\,L/D)$ بیان کرد. توانی را که پمپ به سیال می‌دهد به دست آورید. چند درصد از این توان صرف غلبه بر تلفات می‌شود. فشار بارومتریک $760\,mmHg$ است.



شکل ۵۴-۳

حل:

با انتخاب نقاط (1) و (2) و (3) و (4) مطابق شکل بالا داریم:

$$P_3 = 35\,kPa \quad , \qquad P_4 = 0$$

معادله انرژی بین نقاط (3) و (4) عبارت است از:

$$\frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 = \frac{P_4}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2g} + z_4$$

$$\frac{35000}{9806} + \frac{V_3^2}{2 \times 9.806} + 3 = 0 + \frac{V_4^2}{2 \times 9.806} + 3 \Rightarrow V_4^2 - V_3^2 = 70 \qquad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع (3) و (4):

$$V_3 A_3 = V_4 A_4$$

$$\Rightarrow V_3 \times \frac{\pi}{4}(0.10)^2 = V_4 \times \frac{\pi}{4}(0.150)^2 \quad \Rightarrow \quad V_4 = 4V_3 \ (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow (4V_3)^2 - V_3^2 = 70 \quad \Rightarrow V_3 = 2.16\,m/s$

معادله پیوستگی بین دو مقطع (2) و (3):

$$V_2 A_2 = V_3 A_3 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{V_3 A_3}{A_2}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{2.16 \times 0.1^2}{0.15^2} = 0.96\ m/s$$

معادله انرژی بین نقاط (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\left[\frac{V_2^2}{2g}\right]\ (0.03\,L/D)$$

فشار در نقطه 2 عبارت است از فشار بخار آب در دمای ذکر شده که $20°C$ می‌باشد.

از جدول کتاب برای آب در دمای $20c$ داریم: $\frac{P_v}{\gamma}=0.25\ ,\ \gamma=9789\,N/m^3$

$$\Rightarrow P_v=0.25\times 9789 \Rightarrow P_2=2447.25\,Pa$$

$$P_1=P_{bar}=760\,mmHg\ =1.01325\times 10^5 Pa$$

با جاگذاری در معادله انرژی داریم:

$$\frac{1.01325\times 10^5}{9806}+0+0=\frac{2447.25}{9806}+\frac{0.96^2}{2\times 9.806}+3+\frac{0.96^2}{2\times 9.806}\times\frac{0.03L}{0.15}\Rightarrow L-748\ m$$

معادله انرژی را بین دو نقطه (2) و (3) می‌نویسیم:

$$\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+W_p=\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3+losses_{2\text{-}3}$$

$$\frac{2447.25}{9806}+\frac{0.96^2}{2\times 9.806}+3+W_p=\frac{35000+1.01325\times 10^5}{9806}+\frac{2.16^2}{2\times 9.806}+3$$

$$\Rightarrow W_p=13.84\ N.m/N$$

$$m=\rho Q=\rho V_2 A_2=998.2\times 0.96\times\frac{\pi}{4}\times 0.15^2=16.93\,kg/s$$

$$\Rightarrow W_p=13.84\times 16.93=234.3\ \ N.m/s=234.3\times 9.806=2297.5\ W$$

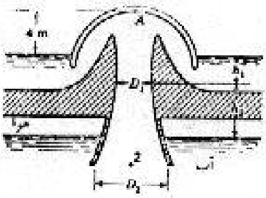
تلفات انرژی $losses=\frac{V_2^2}{2g}\times\frac{0.03\,L}{D}=\frac{0.96^2}{2\times 9.806}\times\frac{0.03\times 748}{0.15}=7.03\ \ Nm/N$

$$\Rightarrow losses=7.03\times 16.93=119\,W$$

کل توان ایجاد شده توسط پمپ که صرف سیال شده است $=2297.5+119=2416.5\,W$

درصد توان مصرفی جهت تلفات $=\frac{119}{2416.5}\times 100=4.92\,\%$

۳-۴۲. در سیفون شکل ۵۵-۳ داریم $h_1=1\,m$، $h_2=3\,m$، $D_1=3\,m$ و $D_1=5m$ تلفات تا مقطع 2 معادل $2.6\,V_2^2/2g$ است و 10 درصد تلفات قبل از مقطع 1 رخ می‌دهد. دبی را تعیین کنید. فشار در مقطع 1 رخ می‌دهد. دبی را تعیین کنید. فشار در مقطع 1 را به دست آورید.



شکل ۵۵-۳

حل:

با انتخاب نقاط (3) و (4) روی سطح آب مطابق شکل داریم:

معادله انرژی بین دو نقطه (3) و (4) عبارت است از:

$$\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3=\frac{P_4}{\gamma}+\frac{V_4^2}{2g}+z_4+losses_{3\text{-}4}$$

$$losses_{3\text{-}4}=losses_{3\text{-}2}+losses_{2\text{-}4}=\frac{2.6\,V_2^2}{2g}+losses_{2\text{-}4}$$

$$\Rightarrow 0+0+4=0+0+0+\frac{2.6V_2^2}{2g}+losses_{2\text{-}4}\Rightarrow losses_{2\text{-}4}=4-\frac{2.6V_2^2}{2g}$$

معادله انرژی بین دو نقطه (2) و (4) عبارت است از:

$$\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2=\frac{P_4}{\gamma}+\frac{V_4^2}{2g}+z_4+losses_{2\text{-}4}$$

$$\frac{V_2^2}{2g}=0+0+0+4-\frac{2.6\,V_2^2}{2g}\Rightarrow\frac{3.6\,V_2^2}{2g}=4\Rightarrow V_2=4.6681\ m/s$$

$$Q=Q_1=Q_2=V_2A_2=4.6681\times\frac{\pi}{4}\times5^2=91.66\,m^3/s$$

$$Q_1=Q_2\Rightarrow V_1A_1=V_2A_2\Rightarrow V_1\times\frac{\pi}{4}\times3^2=4.6681\times\frac{\pi}{4}\times5^2\Rightarrow V_1=12.967\ m/s$$

معادله انرژی بین نقاط (3) و (1) عبارت است از:

$$\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3=\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+losses_{3\text{-}1}$$

$$0+0+4=\frac{P_1}{\gamma}+\frac{12.967^2}{2g}+3+0.1\times2.6\times\frac{4.6681^2}{2g}$$

$$\Rightarrow P_1=-77098\,Pa=-77.098\,kPa$$

۳-۴۳. در مسألهٔ قبل فشار در نقطه A را به دست آورید. نقطهٔ A نقطه سکون است (سرعت در A صفر است).

حل:

معادله انرژی بین نقاط (3) و (A) عبارت است از:

$$\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3=\frac{P_A}{\gamma}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A$$

$$0+0+4=\frac{P_A}{\gamma}+0+8$$

$$\Rightarrow\frac{P_A}{\gamma}=-4\Rightarrow P_A=-4\times9806=-39224\,Pa=-39.224\,kPa$$

۳-۴۴. به انتهای سیفون شکل ۳-۱۸ در مقطع 3 یک نازل به طول 150mm متصل می‌کنیم که قطر دهانهٔ خروجی آن 150mm است. با صرفنظر کردن از تلفات، دبی را تعیین کنید. فشار در مقاطع 2 و 3 را به دست آورید.

حل:

معادله انرژی بین نقاط (1) و (4) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_4}{\gamma}+\frac{V_4^2}{2g}+z_4+losses_{1-4}$$

$$0+0+(1.5+0+0.15)=0+\frac{V_4^2}{2g}+0+0 \Rightarrow V_4=5.689\ m/s$$

$$Q=V_4A_4=5.689\times\frac{\pi}{4}\times(0.15)^2=0.101\ m^3/s=101\ litr/s$$

$$\Rightarrow Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=V_3\times\frac{\pi}{4}(0.2)^2=0.101 \Rightarrow V_3=V_2=3.2\ m/s$$

معادله انرژی بین نقاط (1) و (3) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3$$

$$\Rightarrow 0+0+(1.5+0.15)=\frac{P_3}{\gamma}+\frac{3.2^2}{2\times 9.806}+0.15$$

$$\Rightarrow \frac{P_3}{\gamma}=0.978 \Rightarrow P_3=0.978\times 9806=9590Pa=9.59kPa$$

معادله انرژی بین نقاط (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$\Rightarrow 0+0+(1.5+0.15)=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{3.2^2}{2\times 90806}+(2+1.5+0.15)$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{\gamma}=-2.52 \Rightarrow P_2=-2.52\times 9806=-24730Pa=-24.73kPa$$

۴۵-۳. در مسألهٔ قبل فرض کنید تلفات از 1 تا 2 به صورت $1.7\,V_2^2/2g$ و از 2 تا 3 به صورت $0.9\,V_2^2/2g$ و در نازل به صورت $0.06\,V_E^2/2g$ بیان شود. V_E سرعت خروجی از نازل است. دبی را تعیین کنید. فشار در مقاطع 2 و 3 را به دست آورید.

حل:

با توجه به مسئله قبل داریم:

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (4) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_4}{\gamma}+\frac{V_4^2}{2g}+z_4+losses_{1-4}$$

$$0+0+(1.5+0.15)=0+\frac{V_4^2}{2g}+0+1.7\frac{V_2^2}{2g}+0.9\frac{V_2^2}{2g}+0.06\frac{V_E^2}{2g}\quad,\quad V_E=V_4$$

$$\Rightarrow \frac{1.06V_E^2}{2g}+\frac{2.6V_2^2}{2g}=1.65 \qquad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع (1) و (4):

$$Q_2=Q_4 \Rightarrow V_2\times\frac{\pi}{4}(0.2)^2=V_E\times\frac{\pi}{4}(0.15)^2$$

$$\Rightarrow V_2 = 0.5625V_E\,,\quad V_E = V_4 \quad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow \dfrac{1.06\,V_E^2}{2\times 9.806} + \dfrac{2.6}{2\times 9.806}\left(0.5625\,V_E\right)^2 = 1.65$

$$\Rightarrow 0.096\,V_E^2 = 1.65 \;\Rightarrow V_E = 4.146\ m/s$$

$$Q = Q_2 = Q_3 = Q_4 = V_E \times \frac{\pi}{4} \times (0.15)^2 = 0.073\ m^3/s = 73\ L/s$$

$$Q_2 = Q_4 \Rightarrow V_2 \times \frac{\pi}{4}(0.2)^2 = V_E \times \frac{\pi}{4}(0.15)^2$$

$$\Rightarrow V_2 = 2.332\ m/s \;\Rightarrow V_2 = V_3 = 2.332\ m/s$$

معادله انرژی بین نقاط (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + losses_{1-2}$$

$$0 + 0 + (1.5 + 0.15) = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{2.332^2}{2\times 9.806} + 3.65 + \frac{1.7\times 2.332^2}{2\times 9.806}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{\gamma} = -2.749 \Rightarrow P_2 = -2.749\times 9806 = -2695.\,Pa = -26.95\ kPa$$

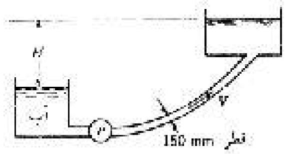
معادله انرژی بین نقاط (1) و (3) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 + losses_{1-3}$$

$$0 + 0 + (1.5 + 0.15) = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{2.332^2}{2\times 9.806} + 0.15 + \frac{1.7\times 2.332^2}{2\times 9.806} + \frac{0.9\times 2.332^2}{2\times 9.806}$$

$$\Rightarrow \frac{P_3}{\gamma} = 0.5018 \Rightarrow P_3 = 0.5018\times 9806 = 4920\,Pa = 4.92\,kPa$$

۴۶-۳. در شکل ۵۶-۳ پمپ $30\,L/s$ آب را جابه جا می‌کند. راندمان پمپ 80 درصد است. توان روی محور پمپ را به دست آورید. تلفات سیستم به استثنای تلفات پمپ به صورت $12\,V_2^2/2g$ بیان می‌شود. $H = 16m$



شکل ۳-۵۶ مسائل ۳-۴۶ ، ۳-۴۷

حل:

مطابق شکل نقاط (1) و (2) را در سطح آزاد آب انتخاب می‌کنیم.

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.03}{\pi\times 0.15^2/4} = 1.698\ m/s$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + W_p = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + losses_{1-2}$$

$$losses_{1-2} = 12\frac{V^2}{2g} = 12\frac{(1.698)^2}{2\times 9.806} = 1.766\ N.m/N$$

$$0+0+0+W_p=0+0+16+1.766 \Rightarrow W_p=16+1.766=17.766\ N.m/N$$

$$W_p=\frac{17.76}{0.8}=22.20\ N.m/N$$

نرخ وزنی جریان $= \gamma Q = 9806 \times 0.03 = 294.18\ N/s$

$$W_p = 294.18 \times 22.2 = 6530\ W = 6.53\ kW$$

۳-۴۷. در شکل ۳-۵۶ توان تولیدی پمپ یعنی $\gamma Q H_P$ برابر $7kW$ است. $H=20m$ است و تلفات سیستم $8V^2/2g$ می‌باشد. دبی پمپ و ارتفاع آن، H_P را به دست آورید. خط تراز انرژی را رسم کنید.

حل:

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+H_p=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+losses_{1-2}$$

$$0+0+0+H_p=0+0+20+\frac{8V^2}{2g} \Rightarrow H_p=20+\frac{8V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{7000}{\gamma Q}=20+\frac{8V^2}{2g} \Rightarrow \frac{7000}{9806\,V \times \pi(0.15)^2/4}=20+\frac{8V^2}{2g}$$

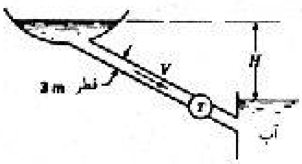
$$\Rightarrow \frac{40.4}{V}=20+\frac{8V^2}{2g} \Rightarrow 0.408V^3+20V-40.4=0$$

از حل معادله بالا $V = 1.88\ m/s$ بدست می‌آید.

$$Q=VA=1.88 \times \frac{\pi}{4} \times 0.15^2=0.0332\ m^3/s=33.2\ L/s$$

$$H_p=\frac{7000}{\gamma Q}=\frac{7000}{9806 \times 0.0332}=21.5\,m$$

۳-۴۸. در شکل ۳-۵۷ راندمان کلی سیستم منجمله توربین 80 درصد است. $H=60m$ است و $Q=30m^3/s$ می‌باشد. توان تولیدی چقدر است؟



شکل ۳-۵۷ مسایل ۳-۴۸ و ۳-۴۹

حل:

مطابق شکل نقاط (1) و (2) را در سطح آزاد آب انتخاب می‌کنیم.

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+W_T$$

$$0+0+0=0+0-60+W_T$$

$$\Rightarrow W_T=60m \quad \Rightarrow W_T=60 \times 0.8=48\,N.m/N$$ کارگرفته شده از توربین

نرخ وزنی جریان $= \gamma Q = 9806 \times 30 = 294180\,N/s$

$W_T = 294180 \times 48 = 1.412 \times 10^7\ J/s\,(W) = 14.12\ MW$

۳-۴۹. در شکل ۵۷-۳ تلفات سیستم به استثنای توربین به صورت $4V^2/2g$ بیان می‌شود. راندمان توربین 90 درصد است. توربین با سرعت $240rpm$ دوران می‌کند. $H = 100m$ است. برای ایجاد توان $750kW$ دبی را تعیین کنید. گشتاور روی محور توربین چقدر است؟ خط تراز انرژی را رسم کنید.

حل:

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + W_T + losses_{1-2}$$

$$0 + 0 + 0 = 0 + 0 - 100 + W_T + \frac{4V^2}{2g} \Rightarrow W_T = 100 - \frac{4V^2}{2g}$$

$$W_T = (100 - \frac{4V^2}{2g}) \times 0.9\ N.m/N$$ کار دریافتی از توربین:

نرخ وزنی جریان $= \gamma Q = 9806 \times V \times \frac{\pi}{4}(3)^2 = 69314\ N/s$

$$\Rightarrow W_T = 69314 \times 0.9(100 - \frac{4V^2}{2g})V = 750 \times 10^3 W$$

از حل معادله بالا $\Rightarrow V = 0.12\ m/s$

$$Q = VA = 0.12 \times \frac{\pi}{4}(3)^2 = 0.848\ m^3/s = 848\ L/s$$

$$W_T = T\omega \Rightarrow T = \frac{W_T}{\omega} \quad , \quad \omega = 240 \times \frac{2\pi}{60} = 25.13 s^{-1}$$

$$W_T = (100 - \frac{4(0.12)^2}{2 \times 9.806}) \times 0.9 = 90\ \frac{mN}{N} \Rightarrow W_T = 90 \times 9806 \times 0.85 = 750159\ m.N/N$$

$$T = \frac{750159}{25.13} = 29850\ N.m = 29.85\ kN.m$$

۳-۵۰. در شکل ۴۷-۳ تلفات بین مقاطع 1 و 2 به صورت $0.2V_1^2/2g$ بیان می‌شود. دبی را به دست آورید.

حل:

با توجه به مسئله ۲۱ رابطه فشار: $P_1 - P_2 = 0.2\gamma$

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + losses_{1-2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + 0 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + 0 + 0.2\frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2 + 0.2V_1^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\frac{V_2^2 - 0.8V_1^2}{2 \times 9.806} = \frac{0.2\gamma}{\gamma} = 0.2 \Rightarrow V_2^2 - 0.8V_1^2 = 3.9224 \quad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع (1) و (2):

$$V_1A_1 = V_2A_2$$

$$\Rightarrow V_1 \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} = V_2 \times \frac{\pi \times 0.15^2}{4} \;\Rightarrow\; V_1 = 0.25\,V_2$$

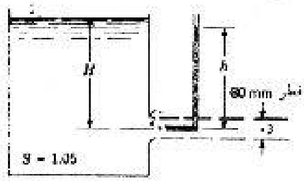
با جایگذاری در معادله‌ای که بدست آوردیم:

$$V_2^2 - 0.8\,(0.25\,V_2)^2 = 3.9224$$

$$\Rightarrow 0.95\,V_2^2 = 3.9224 \;\Rightarrow\; V_2 = 2.032\ m/s$$

$$Q = 2.032\,\left(\frac{\pi}{4} \times 0.15^2\right) = 0.0359\ m^3/s = 35.9\ lit/s$$

۳-۵۱. در شکل ۳-۵۸، $H = 6m$ است و $h = 5.75m$ می‌باشد. دبی را تعیین کنید. تلفات بر حسب متر-نیوتن بر نیوتن و بر حسب وات چقدر است؟



شکل ۳-۵۸

حل:

نقاط (1) و (2) و (3) و سطح مبنای $z=0$ را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم. در نقطه (2) که محل ورود سیال به لوله می‌باشد سرعت سیال صفر بوده و تمام انرژی جنبشی آن به انرژی فشاری تبدیل می‌شود که این فشار توسط لوله مورد نظر نشان داده شده است و عبارت است از:

$$P_2 = \gamma h = 5.75\,\gamma$$

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + losses$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + 6 = \frac{5.75\gamma}{\gamma} + 0 + 0 + losses \Rightarrow losses = 6 - 5.75 = 0.25\ N.m/N$$

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (3) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 + losses$$

$$0 + 0 + 6 = 0 + \frac{V_3^2}{2g} + 0 + 0.25$$

$$\Rightarrow \frac{V_3^2}{2g} = 5.75 \;\Rightarrow\; V_3 = 10.619\ m/s$$

$$Q = V_3A_3 = 10.619 \times \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{80}{1000}\right)^2 = 0.0534\ m^3/s = 53.4\ L/s$$

نرخ وزنی جریان$=\gamma Q = 1.05 \times 9806 \times 0.534 = 549.8\ N/s \Rightarrow losses = 0.25 \times 549.8 = 137.45\,W$

۳-۵۲. در شکل ۳-۵۰ تلفات در نازل $0.1\,H$ است. اختلاف ارتفاع مانومتری یعنی R را بر حسب H به دست آورید.

حل:

مطابق مسئله ۲۴ که در آن در رابطه زیر حاصل شده داریم:

$P_3+(x+R)\gamma_1-R\gamma_2-L\gamma_1=P_2$ (I) رابطه

$P_3=(L-x+H)\gamma_1$ (II) رابطه

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+losses$$

$$0+0+H=\frac{P_2}{\gamma}+0+0+0.1H \Rightarrow P_2=0.9\gamma_1 H \qquad (III)$$

با جاگذاری مقادیر P_2 و P_3 از روابط (II) و (III) در رابطه (I) داریم:

$$(L-x+H)\gamma_1+(x+R)\gamma_1-R\gamma_2-L\gamma_1=0.9\gamma_1 H \Rightarrow 0.1H\gamma_1=R(\gamma_2-\gamma_1)$$

$$\Rightarrow R=\frac{0.1H\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}=0.1H\times\frac{1.2}{3-1.2}=0.0667H$$

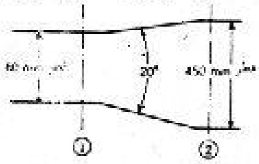
۵۳-۳. مایعی در یک لوله طویل جریان دارد. در $30m$ طول لوله، تلفات $6m.N/N$ است. شیب خط تراز هیدرولیک و خط تراز انرژی چقدر است؟

حل:

شیب خط تراز انرژی: $m=\frac{6}{30}=0.2$

می‌دانیم که عامل کاهش فشار در یک خط لوله افقی افت انرژی می‌باشد در اینجا هم با فرض اینکه سطح مقطع لوله ثابت مانده (در نتیجه سرعت تغییر نکند). همان مقدار افت انرژی سبب کاهش فشار می‌شود بنابراین شیب خط تراز هیدرولیک هم برابر 0.2 خواهد بود.

۵۴-۳. در شکل ۵۹-۳، $100\,L/s$ آب در دیفیوز جریان دارد. تلفات از مقطع 1 تا مقطع 2 به صورت $0.4\,(V_1-V_2)^2/2g$ بیان می‌شود. $p_1=80\,kPa$ است. p_2 را حساب کنید. خط تراز انرژی و خط تراز هیدرولیک را برای دیفیوز رسم کنید.



شکل ۵۹-۳

حل:

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+losses_{1-2}$$

$$Q=V_1A_1 \Rightarrow V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{0.1}{\pi\times 0.3^2/4}=1.4147\ m/s$$

$$Q=V_2A_2 \Rightarrow V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{0.1}{\pi\times 0.45^2/4}=0.6288\ m/s$$

معادله انرژی بین دو نقطه (1) و (2) عبارت است از:

$$\Rightarrow \frac{80000}{9806}+\frac{1.4147^2}{2\times 9.806}+0=\frac{P_2}{9806}+\frac{0.6288^2}{2\times 9.806}+0+\frac{0.4(1.4147-0.6288)^2}{2\times 9.806}$$

$$\Rightarrow P_2 = 80680\ Pa = 80.68\,kPa$$

۳-۵۵. در یک جریان ایزوترم بازگشت‌پذیر دبی جرمی $200kg/s$ و دما $90°C$ و نرخ حرارت ورودی $3kJ/s$ است. افزایش انتروپی را حساب کنید.

حل:

$$\Delta S = \frac{q}{T} = \frac{3\times10^3/200}{(90+273)} = 0.0413\ J/kg.k$$

۳-۵۶. در یک جریان ایزوترم با دمای $10°C$ تلفات در $100m$ طول لوله برابر $20N.m/kg$ است. برای اینکه دما ثابت بماند، لازم است که در طول $100m$ حرارتی به اندازهٔ $85J/s$ از سیال گرفته شود. تغییرات انتروپی بر حسب متر-نیوتن به کیلوگرم کلوین چقدر است؟ دبی جریان $4kg/s$ می‌باشد.

حل:

برای $100\ m$ طول لوله داریم:

حرارت از دست رفته: $q_1 = +20\,m.N/kg$

حرارت گرفته شده: $q_2 = -85\times\dfrac{1}{4\ kg/s} = -21.25\ m.N/k$

$$q_t = q_1 + q_2 = 20 - 21.25 = -1.25\ m.N/kg$$

$$\Delta S = \frac{q}{T} = \frac{-1.25}{(10+273)} = -0.00442\ J/kg.k$$

۳-۵۷. ضریب تصحیح مومنتم را برای توزیع سرعت داده شده در مسألهٔ ۳-۲۹ به دست آورید.

حل:

طبق مسئله ۲۹ داشتیم: $v = \dfrac{V_{max}}{2}$

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} V_{max}^2\left[1-(r/r_0)^2\right]^2 \times \frac{1}{V_{max}^2/4}\,2\pi r\,dr$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{8}{r_0^2}\int_0^{r_0}\left[1-(r/r_0)^2\right]^2 r\,dr = \frac{8}{r_0^2}\int_0^{r_0}\left(r - 2r\,(r/r_0)^2 + r\,(r/r_0)^4\right)dr$$

$$= \frac{8}{r_0^2}\int_0^{r_0}\left(r - \frac{2r^3}{r_0^2} + \frac{r^5}{r_0^4}\right)dr = \frac{8}{r_0^2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{2}{4r_0^2}r^4 + \frac{r^6}{6r_0^4}\right]_0^{r_0} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

۳-۵۸. توزیع سرعت در یک لوله با رابطهٔ $\dfrac{v}{v_{max}} = \left(\dfrac{y}{r_0}\right)^{1/n}$ داده شده است، r_0 شعاع لوله و y فاصله از دیوارهٔ آن است. سرعت متوسط و ضریب تصحیح مومنتم را به دست آورید.

حل:

مانند حالتی که در مسئله ۳۰ داشتیم:

$$r = r_0 - y$$

$$V=\frac{1}{A}\int_A v dA=\frac{1}{\pi r_0^2}\int V_{max}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/n}2\pi r dr$$

$$V=\frac{1}{r_0^2}\int V_{max}\left(\frac{r_0-r}{r_0}\right)^{1/n}2r dr=\frac{2V_{max}}{r_0^2\times r_0^{1/n}}\int_0^{r_0} r\,(r_0-r)^{1/n}\,dr$$

$$(r_0-r)^{1/n}=u\Rightarrow\frac{1}{n}\,(r_0-r)^{(1-n)/n}(-1)dr=du$$

$$\Rightarrow dr=-n\,(r_0-r)^{(n-1)/n}du,\ r=r_0-u^n$$

$$V=\frac{2V_{max}}{r_0^{(2n+1)/n}}\int_0^{r_0}(r_0-u^n)\,(-n)\,(r_0-r)^{(n-1)/n}(r_0-r)^{1/n}du$$

$$=\frac{-2n\,V_{max}}{r_0^{(2n+1)/n}}\int_{r_0^{1/n}}^{0}(r_0-u^n)u^n du=\frac{-2n\,V_{max}}{r_0^{(2n+1)/n}}\int_{r_0^{1/n}}^{0}(r_0u^n-u^{2n})du$$

$$=\frac{-2n\,V_{max}}{r_0^{(2n+1)/n}}\left(\frac{r_0}{n+1}u^{n+1}-\frac{1}{2n+1}u^{2n+1}\right)_{r_0^{1/n}}^{0}=\frac{-2nV_{max}}{r_0^{(2n+1)/n}}\times\left(\frac{n}{(2n+1)(n+1)}\right)r_0^{(2n+1)/n}$$

$$\Rightarrow V=\frac{-2n^2}{(2n+1)(n+1)}V_{max}$$

$$=\frac{-(2n+1)^3(n+1)^3}{n^6\times 4r_0^2\times r_0^{3/n}}\int_0^{r_0} r\,(r_0-r)^{3/n}\,dr$$

$$\alpha=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{v}{V}\right)^3 dA=\frac{1}{\pi r_0^2}\int\left(\frac{V_{max}(y/r_0)^{1/n}}{\frac{-2n^2}{(2n+1)(n+1)}V_{max}}\right)^3 2\pi r dr$$

با فرض $N=\frac{-(2n+1)^3(n-1)^3}{n^6\times 4r_0^2\times r_0^{3/n}}$ داریم:

$$u=(r_0-r)^{3/n}\Rightarrow du=\frac{3}{n}\,(r_0-r)^{(3-n)/n}(-1)dr$$

$$\Rightarrow dr=-\frac{n}{3}(r_0-r)^{(n-3)/n}du,\ r=r_0-u^{n/3}$$

$$\alpha=N\int_{r_0^{3/n}}^{0}\left(r_0-u^{n/3}\right)\ (r_0-r)^{3/n}\left(\frac{-n}{3}\right)\ (r_0-r)^{(n-3)/n}du=$$

$$N=\int_{r_0^{3/n}}^{0}\left(\frac{-n}{3}\right)\ \left(r_0u^{n/3}-u^{2n/3}\right)\ du=\frac{-nN}{3}\left(\frac{3r_0}{n+3}u^{(n+3)/3}-\frac{3}{2n+3}u^{(2n+3)/3}\right)_{r_0^{3/n}}^{0}$$

$$\alpha=\frac{3n\,(2n+1)^3(n+1)^3}{3\times 4n^6\times r_0^2\times r_0^{3/n}}\times\frac{n}{(2n+3)(n+3)}\times r_0^{(2n+3)/n}\Rightarrow\alpha=\frac{(2n+1)^3(n+1)^3}{4n^4(2n+3)(n+3)}$$

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA = \frac{1}{r_0^2}\int \left(\frac{V_{max}\times (y/r_0)^{1/n}}{\frac{2n^2}{(2n+1)(n+1)}V_{max}}\right)^2 2\pi r dr = \frac{(2n+1)^2(n+1)^2}{2r_0^2\times n^4\times r_0^{2/n}}\int_0^{r_0} r(r_0-r)^{2/n}dr$$

$$u=(r_0-r)^{2/n} \Rightarrow du = \frac{2}{n}(r_0-r)^{(2-n)/n}(-1)\,dr\,,\ r = r_0 - u^{n/2} \Rightarrow dr = \frac{-n}{2}(r_0-r)^{(n-2)/n}du$$

با فرض $M = \frac{(2n+1)^2(n+1)^2}{2r_0^{2/n}\times n^4\times r_0^{2/n}}$ داریم:

$$\beta = -M\int \left(r_0 - u^{n/2}\right)(r_0-r)^{2/n}\left(\frac{n}{2}\right)(r_0-r)^{(n-2)/n}du$$

$$= \frac{-nM}{2}\int_{r_0^{2/n}}^{0}\left(r_0-u^{n/2}\right)u^{n/2}du = \frac{-nM}{2}\int_{r_0^{2/n}}^{0}\left(r_0u^{n/2}-u^n\right)du = \frac{-nM}{2}\left(\frac{2r_0}{n+2}u^{(n+2)/2} - \frac{1}{(n+1)}u^{n+1}\right)_{r_0^{2/n}}^{0}$$

$$\beta = \frac{n}{2}\times\frac{(2n+1)^2(n+1)^2}{2n^4\times r_0^2\times r_0^{2/n}}\times r_0^{(2n+2)/n}\times\frac{n}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow \beta = \frac{(2n+1)^2(n+1)}{4n^2(n+2)}$$

۵۹-۳. در مسألهٔ ۵-۳ نیروی وارد به سیال داخل مکعب در امتداد z چقدر است؟ محور z را در خلاف جهت اثر نیروی ثقل بگیرید.

حل:

در صفحه $x=1$

$$v_z = -1z \quad , \quad V.dA = 5dA$$

$$\Rightarrow p = \int \rho(-1z)\times 5dA = -50\rho\int_0^1 z\times(1dz) = -25\rho$$

به همین ترتیب

در صفحه $y=1$: $p = -25\rho$

در صفحه $z=1$:

$$v_z = -10 \qquad V.dA = -10dA$$

$$p = \int \rho(-10)(-10)\,dA = 100\rho$$

$\Rightarrow$ نرخ خروج مومنتم در جهت z $= -25\rho - 25\rho + 100\rho = 50\rho$

معادله اندازه حرکت در جهت z: $F_z - (\rho g) = 50\rho \Rightarrow F_z = 50\rho + \rho g = \rho(50+g)$

۶۰-۳. در مسألهٔ ۶-۳ نیروی وارد به حجم کنترل در امتداد y چقدر است؟ محور y را در خلاف جهت اثر نیروی ثقل بگیرید.

حل:

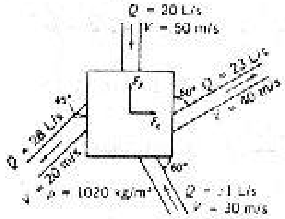
با توجه به مسئله ۷۳ نرخ خروج مومنتم برابر با 182ρ است

معادله اندازه حرکت:

$$F_y + (-\rho g) = 182\rho$$

$$\Rightarrow F_y = \rho(182+g)N$$

۶۱-۳. در شکل ۶۰-۳ مؤلفه‌های نیروی لازم برای ساکن نگه‌داشتن جعبه را به دست آورید. در تمام مقاطع فشار نسبی صفر است.



شکل ۶۰-۳

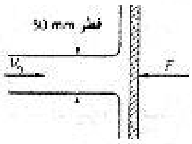
حل:

با توجه به اینکه فشار نسبی در تمام مقاطع صفر می‌باشد بنابراین در معادلات وارد نمی‌گردد.

$$F_x = \rho(0.023)\times 40 sin60 + \rho(0.028)20\times sin45 + \rho(-0.031)(-30)\times cos60$$
$$\Rightarrow F_x = 0.86576\rho = 0.86576\times 1020 = 883.07\ N$$

$$F_y = \rho(-0.020)(-50) + \rho\times 0.023\times 40cos60 + \rho(0.031)(-30)sin60 + \rho(-0.028)20cos45$$
$$\Rightarrow F_y = 0.2586\rho = 0.25862\times 1020 = 263.79\ N$$

۶۲-۳. در شکل ۶۱-۳ جت روغن با سرعت $V_0 = 20 m/s$ به صفحه برخورد می‌کند. نیروی لازم برای نگه‌داشتن صفحه را به دست آورید. چگالی روغن 0.83 است.



شکل ۶۱-۳

حل:

با فرض اینکه جهت مثبت محور x به طرف راست باشد داریم:

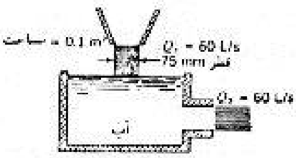
$$A = \frac{\pi}{4}\times(0.05)^2 = 1.963\times 10^{-3} m^2$$

$$\rho = 0.83\times 1000 = 830\ kg/m^3$$

$$F = \rho\times V_0\times(-V_0 A) = 830\times 20(-20\times 1.963\times 10^{-3}) = -652 N = -0.652 kN$$

مقدار بدست آمده نیروی وارد شده بر سیال از طرف دیواره می‌باشد و بنا به قانون سوم نیوتن نیرویی برابر با آن و در خلاف جهت آن از طرف سیال بر دیواره وارد می‌شود بنابراین نیروی لازم جهت نگه‌داشتن صفحه نیرویی برابر با آن و در خلاف جهت آن می‌باشد که عبارت خواهد بود از مقدار بدست آمده برای F در بالا

۶۳-۳. در شکل ۶۲-۳ در اثر ورود جت آب به داخل مخزن، وزن ظاهری مخزن چقدر افزایش می‌یابد؟



شکل ۶۲-۳

حل:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.060}{\frac{\pi}{4}(0.075)^2} = 13.581\ m/s$$

با فرض اینکه جهت مثبت محورها yها رو به بالا باشد معادله اندازه حرکت را در جهت y می‌نویسیم هرگاه W وزن سیال داخل مخزن F_y نیروی وارد شده بر حجم کنترل از طرف ظرف باشد که همان نیروی نگهدارنده مخزن می‌باشد داریم:

$$\text{افزایش وزن ظاهری مخزن} = F_Y - W = \rho(-Q)\times(-V) = 1000\times(-0.06)\times(-13.581) = 814.8\,N$$

۶۴-۳. اتصال نازل به انتهای شلنگ آتش‌نشانی، شلنگ را تحت کشش قرار می‌دهد یا تحت فشار؟

حل:

مطابق معادله اندازه حرکت بر سیال درون حجم معیار از طرف محفظه نیرویی در جهت حرکت سیال وارد شد و نیرویی برابر با همین نیرو درخلاف جهت آن (طبق قانون سوم نیوتن) از طرف سیال بر محفظه وارد می‌شود که این نیرو شیلنگ را تحت فشار قرار می‌دهد اما با توجه به اینکه فشار درون شیلنگ آتش‌نشانی خیلی زیاد می‌باشد نیروی فشاری ذکر شده توسط این نیرو خنثی شده و شیلنگ را تحت کشش قرار می‌دهد.

۶۵-۳. در یک قایق آتش‌نشانی برای کمک به مانور حرکت از جت خروجی از نازل استفاده می‌شود. آیا اگر امتداد جت به صورتی باشد که به یک سطح جامد در اسکله برخورد کند، نیروی رانش نسبت به حالتی که جت در هوا تخلیه می‌شود، بیشتر خواهد شد؟

حل:

با توجه به اینکه در عمل برخورد جت سیال به سطح جامد سرعت ورودی و خروجی آن نسبت به حجم کنترل اعمال شده که محفظه نازل می‌باشد تغییری نمی‌کند ولی معادله اندازه حرکت تغییری نسبت به وضعیت قبلی حاصل نکرده و بنابراین نیروی رانش جت تغییر نخواهد کرد.

۶۶-۳. مثال ۱۲-۳ را برای جریانی با جهت معکوس حل کنید. نتایج را مقایسه کنید.

حل:

با توجه به مثال ۱۲-۳ داریم:

$$Q = 0.02004\ m^3/s$$

$$V_1 = 4.537\ m/s\ ,\ V_2 = 40.822\ m/s$$

معادله اندازه حرکت را در جهت x می‌نویسیم:

$$P_1A_1 - P_x = \rho(-A_2V_2)(-V_2) + \rho(A_1V_1)(-V_1) = \rho Q(V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow 0.7\times10^6\times\frac{\pi\times0.075^2}{4} - P_x = 1000\times0.85\times0.02004\times(40.832 - 4.537)$$

$$\Rightarrow P_x = 2474\,N$$

بنابراین نتایج حاصله یکسان است.

۶۷-۳. در زانویی کاهندهٔ شکل ۲۲-۳ داریم $D_1 = 4m$، $D_2 = 3m$، $\theta = 135°$، $Q = 50m^3/s$، $W = 392.2kN$، $z = 2m$، $p_2 = 1.4MPa$ و $x = 2.2m$ از تلفات صرفنظر کنید و مؤلفه‌ها و خط اثر نیرویی را که باید یک بلوک

نگهدارنده تحمل کند بیابید.

حل:

معادله انرژی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{50}{\pi\times 4^2/4}=3.979\,m/s \quad , \quad V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{50}{\pi\times 3^2/4}=7.074\,m/s$$

$$\frac{P_1}{9806}+\frac{3.979^2}{2\times 9.806}+0=\frac{1.4\times10^6}{9806}+\frac{7.074^2}{2\times 9.806}+2 \Rightarrow P_1=1.437\times10^6 Pa=1.437\,MPa$$

معادله اندازه حرکت را در جهت x می‌نویسیم:

$$P_1A_1-P_2A_2\cos\theta-F_x=\rho Q(V_2\cos\theta-V_1)$$

$$1.437\times10^6\times\pi\times2^2-1.4\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times3^2\times\cos135-F_x=$$

$$=1000\times50(7.074\cos135-3.979)18057874-9896017\times(-0.707)-F_x=50000(-5.002-3.979)$$

$$\Rightarrow F_x=25.5\times10^6 N=25.5MN$$

معادله اندازهٔ حرکت در جهت y عبارت است از:

$$\sum F_y=\rho Q(V_{y_2}-V_{y_1}) \Rightarrow F_y-W-P_2A_2\sin\theta=\rho QV_2\sin\theta$$

$$F_y-392200-1.4\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times3^2\sin135=1000\times50\times7.074\sin135$$

$$\Rightarrow F_y=7.64\times10^6 N=7.64MN$$

۳-۶۸. $600\,L/s$ آب در یک لوله به قطر $50cm$ جریان دارد. یک زانویی افقی $90°$ در لوله وجود دارد. فشار در ورودی زانویی $140kPa$ است. مؤلفه‌های نیروی لازم برای نگه‌داشتن زانویی را در امتداد سرعت ورودی و در امتداد عمود بر آن به دست آورید. از تلفات صرفنظر کنید.

حل:

$$Q=AV \Rightarrow V=\frac{Q}{A}=\frac{0.6}{\pi\times0.5^2/4}=3.056\ m/s$$

با توجه به اینکه سطح مقطع لوله و دبی تغییر نکرده است بنابراین سرعت در هر دو بخش یکسان است. معادله انرژی را در یک مقطع قبل از ورود به زانوئی و نقطه ورودی به زانوئی می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$V_1=V_2 \quad , \quad z_1=z_2 \quad \Rightarrow \quad P_1=P_2=140\,kPa$$

معادله اندازه حرکت در امتداد محور xها عبارت است از:

$$P_1A_1+F_x=\rho Q\times(-V_1)$$

$$\Rightarrow 140000\times\frac{\pi}{4}\times0.5^2+F_x=1000\times0.6\times(-3.056) \quad \Rightarrow F_x=-29322.5\,N$$

مقدار بالا نیروی وارد شده بر سیال از طرف لوله را نشان می‌دهد بنابراین برای نگه داشتن زانوئی نیرویی برابر با آن نیرو

در جهت خلاف لازم است.

معادله اندازه حرکت در امتداد محور yها عبارت است از:

$$F_y - P_2A = \rho Q V_2$$

$$F_y - 140000 \times \frac{\pi}{4} \times 0.5^2 = 1000 \times 0.6 \times 3.056 \qquad \Rightarrow F_y = 29322.5\ N$$

با توجه به اینکه زانوئی به طور افقی قرارگرفته نیروی وزن در محاسبات وارد نشد.

۳-۶۹. $0.6\ m^3/s$ روغن با چگالی 0.83 در یک زانویی $90°$ که قطر ورودی آن $400\ mm$ و قطر خروجی آن $600\ mm$است، جریان دارد. فشار در ورودی زانویی $130\ kPa$ است. مؤلفه‌های نیروی لازم برای نگهداری زانویی را در امتداد سرعت ورودی و امتداد عمود بر آن به دست آورید. از تلفات صرفنظر کنید.

حل:

مانند مسئله قبل نقطه (1) را در محل ورودی زانوئی و نقطه (2) را در خروجی زانوئی انتخاب کرده و معادله انرژی را بین این دو نقطه می‌نویسیم.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.6}{\pi \times 0.4^2/4} = 4.775\ \ m/s \quad , \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.6}{\pi \times 0.6^2/4} = 2.122\ \ m/s$$

$$\Rightarrow \frac{130000}{0.83 \times 9806} + \frac{4.775^2}{2 \times 9.806} + 0 = \frac{P_2}{0.83 \times 9806} + \frac{2.122^2}{2 \times 9.806} + 0$$

$$\Rightarrow P_2 = 137594\ Pa = 137.594\ kPa$$

معادله اندازه حرکت در جهت xرا می‌نویسیم.

$$P_1A_1 + F_x = \rho Q(-V_1)$$

$$130000 \times \frac{\pi}{4} \times 0.4^2 + F_x = 0.83 \times 1000 \times 0.6\,(-4.775) \Rightarrow F_x = -18710\ N = -18.71\ kN$$

معادله اندازه حرکت در جهت yعبارت است از:

$$-P_2A_2 + F_y = \rho Q V_2$$

$$-137594 \times \frac{\pi}{4} \times 0.6^2 + F_y = 0.83 \times 1000 \times 0.6 \times (2.122)$$

$$\Rightarrow \quad F_y = 39960\ N = 39.96\ kN$$

۳-۷۰. در مسألهٔ قبل فرض کنید تلفات در زانویی $0.6\,V_1^2/2g$ باشد. V_1 سرعت در ورودی زانویی است. نتایج رامقایسه کنید.

حل:

مطابق مسئله قبل داریم:

$$V_1 = 4.775\ \ m/s \quad , \quad V_2 = 2.122\ \ m/s$$

معادله انرژی بین دو نقطه 1 و 2 عبارت است از:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{0.6\,V_1^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{130000}{0.83\times 9806}+\frac{4.775^2}{2\times 9.806}+0=\frac{P_2}{0.83\times 9806}+\frac{2.122^2}{2\times 9.806}+0+\frac{0.6\times 4.775^2}{2\times 9.806}$$

$$\Rightarrow P_2=131920\,Pa=131.92\,kPa$$

معادله اندازه حرکت در جهت x:

$$P_1A_1+F_x=\rho Q(-V_1)$$

$$130000\times\frac{\pi}{4}\times 0.4^2+F_x=0.83\times 1000\times 0.6(-4.775)$$

$$\Rightarrow F_x=-18710\,N=-18.71\,kN$$

معادله اندازه حرکت در جهت y:

$$-P_2A_2+F_y=\rho QV_2$$

$$-131920\times\frac{\pi}{4}\times 0.6^2+F_y=0.83\times 1000\times 0.6\times 2.122\Rightarrow F_y=38360\,N=38.36\,kN$$

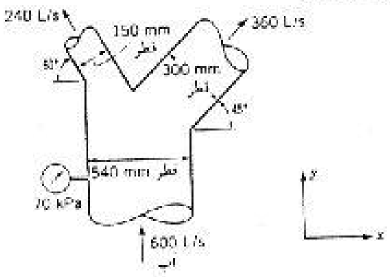
۳-۷۱. بخار اشباع در لوله‌ای به قطر $100\,mm$ با سرعت $425\,m/s$ جریان دارد. $0.1\,kg/s$ آب توسط بخار کشیده می‌شود. نیروی لازم برای نگهداری یک زانویی $90°$ در اثر جریان آب چقدر است؟

حل:

با توجه به عدم وجود نیروهای فشاری داریم: $F=\rho QV=1000\times 0.1\times 10^{-3}\times 425=42.5\,N$

۳-۷۲. در شکل ۳-۶۳ مؤلفه‌های نیروی لازم برای نگهداری سه راهی Y شکل را در امتدادهای x و y به دست آورید. سه راهی در صفحه افقی قرار دارد. از تلفات صرفنظر کنید.

حل:



شکل ۶۳-۳

$$V_1=\frac{Q_1}{A_1}=\frac{0.6}{\pi\times 0.54^2/4}=2.620\,m/s$$

$$V_2=\frac{Q_2}{A_2}=\frac{0.24}{\pi\times 0.15^2/4}=13.581\,m/s$$

$$V_3=\frac{Q_3}{A_3}=\frac{0.36}{\pi\times 0.3^2/4}=5.093\,m/s$$

معادله انرژی را بین نقاط (1) و (2) می‌نویسیم.

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$\frac{70\times 10^3}{9806}+\frac{2.65^2}{2\times 9.806}+0=\frac{P_2}{9806}+\frac{13.581^2}{2\times 9.806}+0\Rightarrow P_2=-18790\,Pa$$

معادله انرژی را بین نقاط (1) و (3) را می‌نویسیم.

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3$$

$$\frac{70\times10^3}{9806}+\frac{2.62^2}{2\times9.806}+0=\frac{P_3}{9806}+\frac{5.93^2}{2\times9.806}+0 \Rightarrow P_3=60463\ Pa$$

معادله اندازه حرکت در جهت x :

$$P_2A_2\cos60-P_3A_3\cos45+F_x=\rho\left[-V_2\cos60(V_2A_2)+V_3\cos45(V_3A_3)\right]$$

$$-18790\times\frac{\pi\times0.15^2}{4}\times\cos60-60463\times\frac{\pi\times0.3^2}{4}\times\cos45+F_x=1000\left[-13.581\times\cos60\times0.24+5.093\times\cos45\times0.36\right]$$

$$\Rightarrow F_x=2855N$$

معادله اندازه حرکت در جهت y :

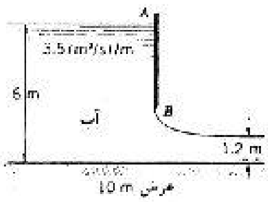
$$P_1A_1-P_2A_2\sin60-P_3A_3\sin45+F_y=\rho\left[V_1\times(-V_1A_1)+V_2\sin60\times(V_2A_2)+V_3\sin45\times(V_3A_3)\right]$$

$$70\times10^3\times\left(\frac{\pi\times0.54^2}{4}\right)-(-18790)\times\left(\frac{\pi\times0.15^2}{4}\right)\times\sin60-60463\times\left(\frac{\pi\times0.3^2}{4}\right)\times\sin45$$

$$=1000\left[-2.62\times0.6+13.581\times\sin60\times0.24+5.093\times\sin45\times0.36\right] \Rightarrow F_y=-10750N$$

(توجه: در جاگذاری مقادیر عددی در روابط بالا به جای V_1A_1 و V_2A_2 و V_3A_3 به ترتیب از Q_1 و Q_2 و Q_3 استفاده شده است)

۳.۷۳. در شکل ۶۴-۳ نیروی خالص وارد به دریچه کشویی را به دست آورید. از تلفات صرفنظر کنید. با توجه به اینکه فشار در نقاط A و B برابر فشار اتمسفر است، توزیع فشار روی سطح AB را رسم کنید. آیا این توزیع فشار به صورت هیدرواستاتیک است؟ توزیع فشار با نیروی محاسبه شده چه رابطه‌ای دارد؟



شکل ۶۴-۳

حل:

$$V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{3.5}{6\times1}=0.5833\ \ m/s\quad,\quad V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{3.5}{1.2\times1}=2.9167\ \ m/s$$

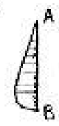
معادله اندازه حرکت را در جهت x می‌نویسیم.

$$P_1A_1-P_2A_2+F=\rho Q(-V_1)+\rho Q(V_2)$$

$$\Rightarrow 9806\times\frac{6}{2}\times6\times10-9806\times\frac{1.2}{2}\times1.2\times10+F=1000\times(3.5\times10)(2.9167-0.5833)$$

$$1765080-70603.2+F=35000(2.3334)$$

$$\Rightarrow F=-1612808N=-1.613MN$$

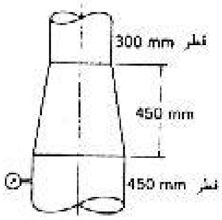


سرعت سیال پس از برخورد با دریچه صفر می‌شود یعنی تمام انرژی جنبشی به انرژی فشاری تبدیل می‌گردد (با صرفنظر کردن از جریانهای گردابی). همچنین با توجه به تغییرات اندازه حرکت سیال تغییرات و توزیع فشار

نمی‌تواند به صورت هیدروستاتیک باشد اما توزیع فشار و نیروی محاسبه شده توسط رابطه زیر به هم مربوط هستند.

$$F=\int_A^B P(y)A=\int_A^B P(y)\,bdy$$

۳.۷۴. $0.5\,m^3/s$ روغن با چگالی 0.86 در تبدیل کاهندهٔ شکل ۶۵-۳ به طرف بالا جریان دارد. فشار در مقطع ورودی تبدیل $200\,kPa$ است. نیروی وارد به تبدیل را حساب کنید. از تلفات صرفنظر کنید اما وزن را در نظر بگیرید.



شکل ۶۵-۳

حل:

حجم کنترل را در قسمت انقباض انتخاب می‌نمائیم.

$$V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{0.5}{\pi\times 0.45^2/4}=3.144\ m/s\quad,\quad V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{0.5}{\pi\times\ 0.3^2/4}=7.074\ m/s$$

معادله انرژی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$\frac{200000}{0.86\times 9806}+\frac{(3.144)^2}{2\times 9.806}+0=\frac{P_2}{0.86\times 9806}+\frac{(7.074)^2}{2\times 9.806}+0.45$$

$$\Rightarrow P_2=178938\ Pa=178.938\ kPa$$

معادله اندازه حرکت در جهت y عبارت است از:

$$P_1A_1-P_2A_2-W+F=\rho Q(V_2-V_1)$$

W وزن قسمت انقباض می‌باشد و برای محاسبه آن داریم:

$$W=\gamma V$$

$$V=\frac{1}{3}\pi h\,(a^2+ab+b^2)=\frac{1}{3}\pi\times 0.45\left[(\frac{0.45}{2})^2+\frac{0.45}{2}\times\frac{0.3}{2}+(\frac{0.3}{2})^2\right]=0.0504\,m^3$$

$$\Rightarrow W=0.86\times 9806\times 0.0504=425\ N$$

$$\Rightarrow 200000\times\frac{\pi}{4}(0.45)^2-(178938)\times\frac{\pi}{4}(0.3)^2-425+F=1000\times 0.86\times 0.5(7.074-3.144)$$

$$\Rightarrow F=-17045\,N=-17.045\,kN$$

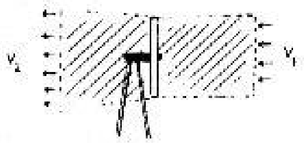
نیروی بدست آمده نیرویی است که از طرف جداره بر سیال وارد می‌گردد بنابراین طبق قانون سوم نیوتن از طرف سیال نیرویی در خلاف جهت آن به جداره (محل انقباض) وارد می‌گردد.

۳.۷۵. معادلات مومنتم و انرژی را برای یک آسیای بادی بنویسید. توجه کنید که در عبور از پره‌ها، سرعت کم می‌شود و حدود مرزی منبسط می‌گردد. نشان دهید که سرعت در صفحهٔ پره‌ها، میانگین سرعت در بالا دست و پایین دست مرزهای جریان است. راندمان تئوریک را (با صرفنظر کردن از کلیه تلفات) به صورت نسبت توان خروجی به توان موجود در یک جت با مقطع ملخ تعریف کنید. حداکثر راندمان تئوریک آسیای بادی را

به دست آورید.

حل:

با نوشتن معادله انرژی داریم:



$$P=\int_{cs}\left(\frac{V^2}{2}\right)\rho V dA$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\rho AV^3 \qquad (I)$$

معادله اندازه حرکت را برای جریان نشان داده شده در شکل می‌نویسیم:

نیروی رانش وارده از ملخ به سیال : $F=\dot m(V_2-V_1)$

توان اعمال شده از ملخ به سیال : $P=FV=\dot m\, V(V_2-V_1)$

معادله انرژی را برای حجم کنترل می‌نویسیم

$$P_{air}+\frac{1}{2}\dot m\, V_1^2=\frac{1}{2}\dot m\, V_2^2 \quad\Rightarrow\quad P=\frac{1}{2}\dot m\,(V_1^2-V_1^2)$$

$$\Rightarrow \dot m\, V(V_2-V_1)=\frac{1}{2}\dot m\,(V_1^2-V_2^2) \quad\Rightarrow\quad V=\frac{V_1+V_2}{2}$$

$$P=\dot m\, V(V_2-V_1)=\rho AV^2(V_1-V_2)=\rho A\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)^2(V_1-V_2)$$

$$\Rightarrow P=\frac{\rho AV_1^3}{4}\left[\left(1+\frac{V_2}{V_1}\right)^2\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)\right]$$

فرض: $\frac{V_2}{V_1}=m \quad\Rightarrow\quad P=\frac{\rho AV_1^3}{4}\left[(1+m)^2(1-m)\right]=\frac{\rho AV_1^3}{4}\left[(1+m)(1-m^2)\right]$

$$\frac{dP}{dm}=\frac{\rho AV_1^3}{4}\left[(1-m^2)\times 1+(-2m)(1+m)\right]=\frac{\rho AV_1^3}{4}\left(-3m^2-2m+1\right)$$

$$\frac{dp}{dm}=0 \quad\Rightarrow\quad -3m^2-2m+1=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} m=1/3 & \text{حداکثر توان:} \\ m=-2 & \text{حداقل توان:} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{max}=\frac{\rho AV_1^3}{4}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\right]=\frac{16}{27}\left[\frac{\rho AV_1^3}{2}\right]$$

با توجه به معادله (I) کل توان قابل دسترسی از باد عبارت است از: $P=\frac{\rho AV_1^3}{2}$

$$\eta=\frac{P_{max}}{P}=\frac{16}{27}=0.5926 \quad \text{یا} \quad \%59.26$$

۷۶-۳. یک هواپیمای ملخی با سرعت $320\,km/h$ در هوای ساکن $(\rho=1.1\,kg/m^3)$ حرکت می‌کند. قطر ملخ $2.5\,m$ و سرعت هوا در عبور از آن نسبت به هواپیما $450\,km/h$ است. الف) نیروی رانش را به دست آورید. ب) انرژی جنبشی باقیمانده در مرزهای جریان را به دست آورید. ج) توان تئوریک لازم برای گرداندن ملخ را به دست آورید. د) راندمان ملخ را تعیین کنید. هـ) اختلاف فشار طرفین ملخ را حساب کنید.

حل:

$$V_1 = 320\ km/h \times \frac{1}{3.6} = 88.889\ m/s$$

$$V = 450\ km/h \times \frac{1}{3.6} = 125\ m/s$$

$$Q = VA = 125 \times \frac{\pi}{4} \times 2.5^2 = 613.59\ m^3/s$$

$$V_4 = 2V - V_1 = 2 \times 125 - 88.889 = 161.11\ m/s$$

الف) $F = \rho Q(V_4 - V_1) = 1.1 \times 613.59(161.11 - 88.889) = 48750N = 48.75kN$

ب) $\text{انرژی جنبشی باقیمانده در مرزهای جریان} = \frac{\rho Q (V_4 - V_1)^2}{2} = \frac{1.1 \times 613.59(161.11 - 88.889)^2}{2}$

$= 1.7602 \times 10^6\ W = 1.7602\ MW$

ج) $\text{توان تئوریک لازم} = \frac{FV_1}{e_1} = \frac{48750 \times 88.889}{0.711} = 6.09 \times 10^6\ W = 6.09MW$

د) $e_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{88.889}{125} = 0.711$ یا $71.1\ \%$

ه) $P_3 - P_2 = \rho V(V_4 - V_1) = 1.1 \times 125(161.11 - 88.889) = 9930\ Pa$

۳-۷۷. یک کشتی که با سرعت $40\ km/h$ حرکت می‌کند دارای پروانه‌ای به قطر $500\ mm$ است که $4.5\ m^3/s$ آب راجابه‌جا می‌کند. نیروی رانش وارد به کشتی را حساب کنید. راندمان تئوریک سیستم پیشران را تعیین کنید. توان ورودی پروانه را به دست آورید.

حل

$V_1 = 40km/h \times \frac{1}{3.6} = 11.11m/s \quad , \quad V = \frac{Q}{A} = \frac{4.5}{\pi \times 0.5^2/4} = 22.92\ m/s$

$$V_2 = 2V - V_1 = 2 \times 22.92 - 11.11 = 34.73\ m/s$$

$$F = \rho Q(V_4 - V_1) = 1000 \times 4.5(34.73 - 11.11) = 106300\ kN = 106.3\ kN$$

$e_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{11.11}{22.92} = 0.485$ یا $48.5\ \%$

$\text{توان} = FV_1 = 106300 \times 11.11 = 1.18 \times 10^6 W = 1.18\ MW$

$\text{توان لازم} = \frac{FV_1}{e_1} = \frac{106300 \times 11.11}{0.485} = 2.4348 \times 10^6 W = 2.4348\ MW$

۳-۷۸. قطر پروانه یک کشتی $1\ m$ و راندمان تئوریک آن 60 درصد است. اگر کشتی با سرعت $32\ km/h$ حرکت کند، نیروی رانش ایجادی چقدر است؟ توان لازم چقدر است؟

حل:

$$V_1 = 32km/h \times \frac{1}{3.6} = 8.89\ m/s$$

$e=\frac{V_1}{V}=0.6 \Rightarrow V=\frac{V_1}{0.6}=\frac{8.89}{0.6}=14.82\ m/s$

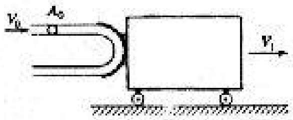
$Q=VA=14.82\times\frac{\pi}{4}(1)^2=11.64\,m^3/s$

$V_4=2V-V_1=2\times14.82-8.89=20.75\,m/s$

$F=\rho Q(V_4-V_1)=1000\times11.64\,(20.75-8.89)=138050\,N=138.05\,kN$

توان لازم $=\frac{FV_1}{e}=\frac{138050\times8.89}{0.6}=2.045\times10^6\,W=2.045\,MW$

۳-۷۹. در شکل ۶۶-۳ جت مایع با سطح مقطع $A_0=18.6\,cm^2$ و سرعت $V_0=30\,m/s$ به پره برخورد می‌کند و به‌اندازهٔ $180°$ منحرف می‌شود. دانسیتهٔ مایع $\rho=1020\,kg/m^3$ است. فرض کنید گاری بدون اصطکاک بوده و بتواند آزادانه در امتداد افقی حرکت کند. جرم گاری $90\,kg$ است. 10 ثانیه پس از برخورد جت، سرعت گاری چقدر است؟ مسافت پیموده شده در این مدت چقدر است؟



شکل ۳-۶۶ مسایل ۳-۷۹ ، ۳-۱۱۸

حل:

$v_r=V_0-V_1 \quad , \quad Q=(V_0-V_1)A_0$

$F=\rho\left[-Q(V_0-V_1)-Q(V_0-V_1)\right] \Rightarrow -2\rho A_0(V_0-V_1)^2=F=m\frac{dV_1}{dt}$

$\Rightarrow -2\times1020\times18.6\times10^{-4}(30-V_1)^2=90\frac{dV_1}{dt} \Rightarrow -23.719\frac{dV_1}{(30-V_1)^2}=dt$

$\Rightarrow -23.719\int_0^V\frac{dV_1}{(30-V_1)^2}=\int_0^t dt$

$23.719\left[\frac{1}{30-V_1}\right]_0^V=t \quad \Rightarrow \quad 23.719\left(\frac{1}{30-V}-\frac{1}{30}\right)=t \qquad (I)$

$t=10s \quad \Rightarrow 23.719\left(\frac{1}{30-V}-\frac{1}{30}\right)=10 \quad \Rightarrow V=27.80\ m/s$

از رابطهٔ $(I) \Rightarrow \frac{1}{30-V}=\frac{t}{23.719}+\frac{1}{30} \quad \Rightarrow 30-V=\frac{1}{0.0422t+0.033} \quad \Rightarrow V=\frac{1.266t}{0.0422t+0.033}$

$t=10s \ \Rightarrow V=27.8\ m/s$

$V=\frac{dx}{dt} \ \Rightarrow dx=\frac{1.266t}{0.0422t+0.033}dt$

$$\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{1.266t}{0.0422t + 0.033}\, dt$$

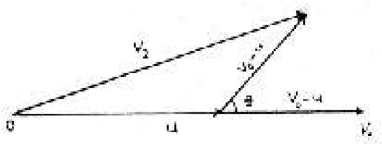
$$\Rightarrow x = 1.266 \left[\frac{t}{0.0422} - \frac{0.033}{(0.0422)^2}\, ln\ (0.0422t + 0.033) \right]_0^t$$

$$t = 10s \quad \Rightarrow x = 1.266 \left(\frac{1}{0.0422} - \frac{0.033}{0.0422^2} \quad \left[ln\,(0.0422 \times 10 + 0.033) - ln(0.033) \right] \right)$$

$$\Rightarrow x = 238\ m$$

۳-۸۰. پره‌ای که زاویهٔ آن θ است بر روی جت سیال کار انجام می‌دهد. دیاگرام قطبی سرعتها را رسم کنید. تمام بردارها را علامتگذاری کنید.

حل:



دیاگرام بالا برای حالتی است که پره با سرعت u حرکت می‌کند در این حالت V_2 سرعت نهایی سیال خواهد بود. برای حالتی که پره ثابت بوده و حرکتی نداشته باشد u حذف خواهد گردید.

۳-۸۱. در شکل ۳-۲۶ داریم $A_0 = 100\,cm^2$، $V_0 = 30\,m/s$، $\theta = 60°$، $\gamma = 9.4\,kN/m^3$. برآیند نیروهای وارد به پره‌را به دست آورید. خط اثر نیرو را چگونه می‌توان تعیین کرد؟

حل:

$$F_x = \rho V_0 cos\theta V_0 A_0 + \rho V_0(-V_0 A_0)$$

$$F_x = \frac{9400}{9.806} \times 30 \times cos60 \times 30 \times 0.01 + \frac{9400}{9.806} \times 30 \times (-30 \times 0.01) \Rightarrow F_x = -4313.7\,N$$

$$F_y = \rho V_0 sin\theta V_0 A_0 = \frac{9400}{9.806} \times 30 \times sin60 \times 30 \times 0.01 = 7471.5\ N$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{4313.7^2 + 7471.5^2} = 8627\,N$$

$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{7471.5}{4313.70} = 1.732 \Rightarrow \alpha = 60°$$

۳-۸۲. در شکل ۳-۲۷، 45 درصد از دبی جریان به یک طرف منحرف می‌شود زاویه صفحه، θ را تعیین کنید.

حل:

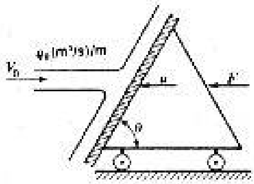
با توجه به مثال ۲۱-۳.

$$Q_1 = \frac{Q_0}{2}(1+\cos\theta)\ , \quad Q_2 = \frac{Q_0}{2}(1-\cos\theta)$$

$$Q_2 = 0.45Q_0 \quad \Rightarrow \quad 0.45\,Q_0 = \frac{Q_0}{2}(1-\cos\theta) \ \Rightarrow\ \cos\theta = 0.1 \ \Rightarrow\ \theta = 84.26^\circ$$

$$Q_1 = 0.45\,Q_0 \quad \Rightarrow\ 0.45Q_0 = \frac{Q_0}{2}(1+\cos\theta) \ \Rightarrow\ \cos\theta = -0.1 \ \Rightarrow\ \theta = 95.74^\circ$$

۳-۸۳. در شکل ۶۷-۳ صفحه با سرعت u به طرف جت حرکت می‌کند. رابطه‌ای بنویسید که توان لازم برای حرکت صفحه را به دست دهد.



شکل ۶۷-۳
مسایل ۸۳-۳ و ۸۴-۳

حل:

$$v_r = V_0 + u \quad , \quad A_0 = \frac{q_0}{V_0}$$

$$\sum F_s = 0 \quad \sum F_R = F_R = \rho A_0 (V_0 + u) \times \left[-(V_0 + u)\sin\theta\right]$$

$$F_R = -\rho A_0 (V_0 + u)^2 \sin\theta$$

$$F = F_R \sin\theta = -\rho A_0 (V_0 + u)^2 \sin^2\theta$$

(با توجه به اینکه نیروی وارد، در جهت منفی محورهای مختصات اعمال می‌شود علامت F_R منفی خواهد شد.)

توان لازم $P = F.u = \rho A_0 (V_0 + u)^2 \sin^2\theta \times u = \rho \dfrac{u}{V_0} q_0 (V_0 + u)^2 \sin^2\theta$

۳-۸۴. در شکل ۶۷-۳ برای اینکه حداکثر توان از جت گرفته شود، گاری با چه سرعتی باید از جت دور شود؟

حل:

بنا به مسئله قبل:

$v_r = (V_0 - u)$ برای این حالت

$$F = \rho A_0 (V_0 - u)^2 \sin^2\theta$$

توان لازم $P = \rho \dfrac{u}{V_0} q_0 (V_0 - u)^2 \sin^2\theta \ \Rightarrow\ \dfrac{dp}{du} = \rho \dfrac{q_0}{V_0} \sin^2\theta \dfrac{d}{du}(V_0^2 u - 2V_0 u^2 + u^3)$

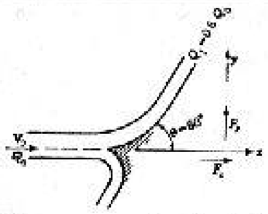
$$\frac{dp}{du} = \rho \frac{q_0}{V_0} \sin^2\theta (V_0^2 - 4V_0 u + 3u^2) = 0 \quad \Rightarrow\ 3u^2 - 4V_0 u + V_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{2V_0 \pm \sqrt{4V_0^2 - 3V_0^2}}{3} = \frac{2V_0 \pm V_0}{3} = \frac{V_0}{3}\ , V_0$$

$u = \dfrac{V_0}{3}$ جواب مورد قبول:

۳-۸۵. در شکل ۶۸-۳ داریم $Q_0 = 80\ L/s$، $\rho = 1000\ kg/m^3$ و $V_0 = 120\ m/s$. مؤلفه‌های نیروی لازم

برای ساکن نگه داشتن پره یعنی F_x , F_y را تعیین کنید.



شکل ۶۸-۳

مسایل ۸۵-۳ , ۸۶-۳.

حل:

با توجه به تساوی فشار در هر سه مقطع فوق می‌توان با استفاده از معادله انرژی تحقیق نمود که سرعت در دو مقطع خروجی یکسان خواهد بود.

$$Q_1 = 0.6\ Q_0 = 0.6 \times 0.08 = 0.048\ \ m^3/s$$

$$Q_2 = 0.4\ Q_0 = 0.4 \times 0.08 = 0.032\, m^3/s$$

معادله اندازه حرکت در جهت محور xها :

$$F_x = \rho Q_0(-V_0) + \rho Q_1(V_0 cos60) + \rho(-Q_2)(V_0 cos60)$$

$$F_x = 1000\times0.08(-120)+1000\times0.048\times120cos60 - 1000\times0.32\times120cos60 \Rightarrow F_x = -8640N$$

معادله اندازه حرکت در جهت محور yها :

$$F_y = \rho Q_1 V_0 sin60 + \rho(-Q_2)V_0 sin\ 60$$

$$F_y = 1000 \times 0.048\times120sin60 + 1000(-0.032)120sin60\ \ \Rightarrow F_y = 1663\,N$$

۸۶-۳. در شکل ۶۸-۳ پره با سرعت $u = 13\ m/s$ در امتداد x حرکت می‌کند. به ازای مقادیر $Q_0 = 55\ L/s$، $\rho = 1000\ kg/m^3$ و $V_0 = 40\ m/s$، مؤلفه‌های F_x و F_y را به دست آورید.

حل:

بنا به مسئله قبل سرعت در کلیه مقاطع یکسان است.

$$v_r = V_0 - u = 40 - 13 = 27\ m/s$$

$$Q_1 = 0.6\, Q_0 = 0.6 \times 0.055 = 0.033\, m^3/s$$

$$Q_2 = 0.4\, Q_0 = 0.4 \times 0.055 = 0.022\, m^3/s$$

$$A = \frac{Q}{V} \Rightarrow A_0 = \frac{0.055}{27} = 2.0370\times10^{-3} m^2, A_1 = \frac{0.033}{27} = 1.2222\times10^{-3} m^2, A_2 = \frac{0.022}{27} = 0.8148\times10^{-3} m^2$$

معادله اندازه حرکت در جهت محور xها :

$$F_x = \rho A_0 v_r(-v_r) + \rho A_1 v_r(v_r cos60) + \rho(-v_r)A_2 v_r cos60 = \rho v_r^2(-A_0 + A_1 cos60 - A_2 cos60)$$

$$= 1000\times27^2\times(-2.037\times10^{-3} + 1.2222\times10^{-3}\times0.5 - 0.8148\times10^{-3}\times0.5) = -1336.5\,N$$

معادله اندازه حرکت در جهت محور yها :

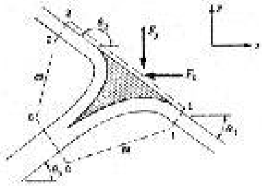
$$F_y = \rho A_1 v_r(v_r cos60) + \rho(-v_r)A_2 v_r cos60$$

$$= \rho v_r^2(A_1 cos60 - A_2 cos60) = 1000\times27^2\times(1.2222\times10^{-3}\times0.866 - 0.8184\times10^{-3}\times0.866)$$

$$= 257.2\,N$$

۸۷-۳. در شکل ۶۹-۳ به ازای مقادیر $Q_0 = 10\ L/s$، $Q_1 = 3\ L/s$، $\theta_0 = 45°$، $\theta_1 = 30°$، $\theta_2 = 120°$

، $V_0 = 10\,m/s$ و $\rho = 830\,kg/m^3$، مؤلفه‌های نیرو را به دست آورید.



شکل ۶۹-۳

حل:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q_0 - Q_1 = 10 - 3 = 7\,L/s$$

با توجه به متساوی فشار در هر سه مقطع فوق سرعت سیال در هر سه مقطع برابر V_0 خواهد بود.

معادله اندازه حرکت در جهت محور xها :

$$-F_x = \rho Q_0 cos\theta_0(-V_0) + \rho Q_1 cos\theta_1 V_0 + \rho\, Q_2 cos\theta_2 V_0$$

$$\Rightarrow -F_x = \rho V_0(-Q_0 cos\theta_0 + Q_1 cos\theta_1 + Q_2 cos\theta_2)$$

$$-F_x = 830 \times 10(-0.01\,cos45 + 0.003\,cos30 + 0.007\,cos120) \Rightarrow F_x = 66.18\,N$$

معادله اندازه حرکت در جهت محور yها :

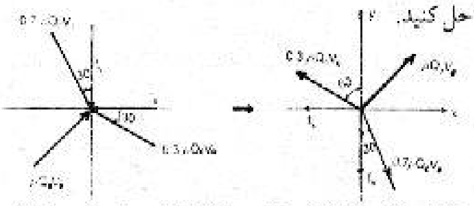
$$-F_y = \rho Q_0 sin\theta_0(-V_0) + \rho(-Q_1)sin\theta_1 V_0 + \rho(+Q_2)sin\theta_2 V_0$$

$$\Rightarrow -F_y = -\rho V_0(-Q_0 sin\theta_0 - Q_1 sin\theta_1 + Q_2 sin\theta_2)$$

$$= -830 \times 10(-0.01\,sin45 - 0.003\,sin30 + 0.007\,sin120) \Rightarrow F_y = 20.82\ N$$

۳.۸۸. مسألهٔ قبل را به روش ترسیمی جمع بردارها حل کنید.

حل:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \rho Q_0 V_0(cos45 + 0.7\,sin\,30 - 0.3\,cos30) - F_x = 0$$

$$\Rightarrow F_x = 830 \times 0.01 \times 10(cos45 + 0.7sin30 - 0.3cos30) = 66.18\,N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \rho Q_0 V_0(cos45 + 0.3\,cos60 - 0.7cos30) - F_y = 0$$

$$\Rightarrow F_y = 830 \times 0.01 \times 10\,(cos45 + 0.3cos60 - 0.7cos30) = 20.82\,N$$

۳.۸۹. در شکل ۲۸-۳ پره باید با چه سرعتی حرکت کند تا حداکثر توان را از جت اخذ نماید؟ برای اخذ حداکثر توان ممکن، زاویه θ باید چقدر باشد؟

حل:

با توجه به متن درس و شکل مربوطه:

$$F_x = \rho\,(V_0 - u)^2 A_0\,(1 - cos\theta)$$

با توجه به اینکه در جهت محور yها حرکتی وجود ندارد پس انجام کاری صورت نمی‌گیرد بنابراین:

$$F = F_x = \rho(V_0 - u)^2 A_0(1 - cos0)$$

توان لازم عبارت است:

$$P = Fu = \rho A_0(V_0 - u)^2 u\,(1 - cos\theta)$$

$$P = \rho A_0 (1-\cos\theta)(V_0^2 u - 2V_0 u^2 + u^3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \rho A_0 (1-\cos\theta)(V_0^2 - 4V_0 u + 3u^2)$$

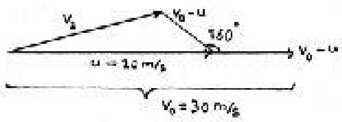
$$\frac{\partial p}{\partial u} = 0 \Rightarrow 3u^2 - 4V_0 u + V_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow u = \frac{V_0}{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho A_0 (V_0 - u)^2 u \sin\theta$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \quad \theta = 180°$$

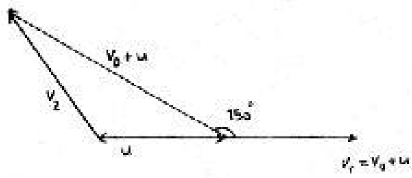
۳-۹۰. در شکل ۲۸-۳ به ازای مقادیر $V_0 = 30\,m/s$، $u = 20\,m/s$ و $\theta = 160°$ دیاگرام قطبی سرعتها را رسم کنید.

حل:



۳-۹۱. در شکل ۲۸-۳ به ازای مقادیر $V_0 = 40\,m/s$، $u = -20\,m/s$ و $\theta = 150°$ دیاگرام قطبی سرعتها را رسم کنید.

حل:



۳-۹۲. در شکل ۲۸-۳ به ازای مقادیر $A_0 = 65\,cm^2$، $V_0 = 80\,m/s$، $u = 26\,m/s$ و $\theta = 173°$، توان تولیدی را برای (الف) یک پره و (ب) یک دسته پره به دست آورید. سیال آب است.

حل:

الف)

$$P = uF_x = u \times \rho (V_0 - u)^2 A_0 (1-\cos\theta)$$

$$P = 26 \times 1000 \times (80 - 26)^2 \times (65 \times 10^{-4}) \times (1-\cos 173) = 981934.71\,W = 982\,kW$$

ب)

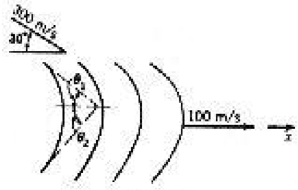
$$F_x = \rho Q_0 (V_0 - u)(1-\cos\theta) \quad , Q_0 = V_0 A_0$$

$$P = uF_x \;\Rightarrow\; P = u\rho V_0 A_0 (V_0 - u)(1-\cos\theta)$$

$$P = 26 \times 1000 \times 80 \times (65 \times 10^{-4}) \times (80-26)(1-\cos 173)$$

$$P = 1454718\,W = 1455\,kKW$$

۳.۹۳. در شکل ۷۰-۳ زوایای پره، یعنی θ_1 و θ_2 را طوری تعیین کنید که اولاً سیال بطور مماسی وارد پره شود وثانیاً سرعت مطلق آن در خروج مؤلفه‌ای در امتداد x نداشته باشد.



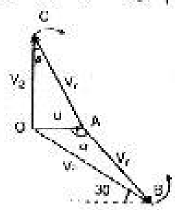
شکل ۷۰-۳

حل:

برای بدست آوردن زوایای θ_1 و θ_2 نمودار برداری قطبی را رسم می‌نمائیم و توجه خواهیم داشت که θ_1 زاویه v_r ورودی با خط افق و θ_2 زاویه v_r خروجی با افق است.

$u = 100\ m/s\ ,\ V_0 = 300 m/s\ ,\ v_r = V_0 - u$

بردار V_2 در راستای قائم می‌باشد (تا مؤلفه‌ای در جهت x نداشته باشد) با استفاده از شکل در مثلث OAB می‌توان نوشت:



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \cos A$$
$$v_r^2 = 100^2 + 300^2 - 2\times100\times300 \cos 30$$
$$\Rightarrow v_r^2 = 48035.5 \quad \Rightarrow \quad v_r = 219.17 \quad m/s$$

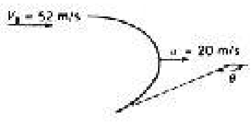
برای تعیین زاویه $<OAB$ داریم:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2\times OA \times AB \cos\alpha$$
$$\Rightarrow 300^2 = 100^2 + 219.17^2 - 2\times100\times219.14 \cos\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = -0.7292 \ \Rightarrow \alpha = 136.81 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 180 - 136.81 = 43.19^\circ$$

برای تعیین زاویه θ_2 داریم: با توجه به شکل مثلث OAC در رأس O قائم‌الزاویه بوده و $AC = v_r$ می‌باشد بنابراین

$$\cos\beta = \frac{OA}{AC} = \frac{100}{219.17} = 0.4563 \quad \Rightarrow \quad \beta = 62.86^\circ \Rightarrow \theta_2 = 62.86^\circ$$

۳.۹۴. در شکل ۷۱-۳ زاویه پره چقدر باشد تا سرعت مطلق به اندازهٔ 130° منحرف شود.

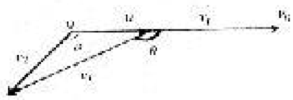


شکل ۷۱-۳

حل:

در این مسئله هم می‌توان مانند مسئله قبل از روش نمودار بردار قطبی استفاده کرد

$$v_r = V_0 - u = 52 - 20 = 32 m/s$$



با توجه به شکل داریم: $v_r^2 = u^2 + V_2^2 - 2uV_2 \cos\alpha$

$$32^2 = 20^2 + V_2^2 - 2 \times 20 \times V_2 \cos 130 \Rightarrow V_2^2 + 25.71 V_2 - 624 = 0$$

از حل معادله فوق $\Rightarrow V_2 = 15.2\ m/s$ همچنین $V_2^2 = u^2 + v_r^2 - 2uv_r \cos(180-\theta)$

$$15.2^2 = 20^2 + 52^2 - 2\times 20 \times 52 \cos(180-\theta) \Rightarrow \cos(180-\theta) = 0.931 \Rightarrow 180-\theta = 21.4 \Rightarrow \theta = 158.6$$

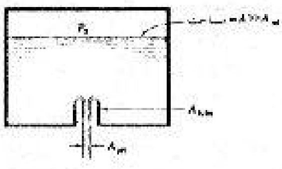
۳.۹۵. در مسألهٔ ۱۸-۳ سرعت لوکوموتیو $60\ km/h$ است. برای برداشت $40\ L/s$ آب، چه نیرویی به قاشقک وارد می‌شود.

حل:

$$V_0 = 60\ km/h \times \frac{1}{3.6} = 16.667\ m/s$$

با این فرض که لوکوموتیو ساکن بود و آب حرکت کند داریم:

معادله اندازه حرکت در جهت افقی: $F = \rho Q V_0 \Rightarrow F = 1000 \times 0.04 \times 16.667 = 667\ N$


شکل ۳-۷۲

۳.۹۶. لولهٔ کوتاهی که در شکل ۷۲-۳ نشان داده شده به نام لولهٔ تورفته یا لوله بوردا معروف است. سرعت سیال در نزدیکی کف مخزن تقریباً صفر است. نسبت سطح جت به سطح لوله را حساب کنید.

حل:

معادله برنولی را بین دو نقطه (1) و (2) می‌نویسیم.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \Rightarrow \frac{P_0}{\gamma} + L = \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_{jet}^2 = V_2^2 = \frac{(P_0 + L\gamma)}{\gamma} \times 2g \qquad (I)$$

از V_1 در مقابل V_{jet} صرفنظر می‌کنیم. $V_1 \cong 0 \Rightarrow V_1 << V_{jet} \Rightarrow A >> A_{jet}$

معادله اندازه حرکت در راستای قائم: $-P_0A - W + P(A - A_{tube}) = -\rho Q V_{jet}$

$P = P_0 + L\gamma$ فشار کف مخزن $\qquad W = V\gamma = L \times A \times \gamma$ وزن سیال

$$\Rightarrow \quad -P_0A - LA\gamma + (P_0 + L\gamma)(A - A_{tube}) = \rho A_{jet} V_{jet}^2$$

$$\Rightarrow -P_0A - LA\gamma + P_0A_{tube} + LA\gamma - L\gamma A_{tube} = \rho A_{jet} V_{jet}^2 \Rightarrow -A_{tube}(P_0 + L\gamma) = \rho A_{jet} V_{jet}^2 \qquad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow A_{tube}(P_0 + L\gamma) = \rho A_{jet} \Rightarrow \rho A_{jet} \times \frac{(P_0 + L\gamma)}{\gamma} \times 2g$

$$\Rightarrow \frac{A_{jet}}{A_{tube}} = \frac{\gamma}{2g\rho} = \frac{\gamma}{2\gamma} = \frac{1}{2}$$

۳.۹۷. $140\ L/s$ از مایعی با دانسیتهٔ $825\ kg/m^3$ در یک انبساط ناگهانی جریان دارد. قطر ورودی $300\ mm$ و قطر خروجی $600\ mm$ است. تلفات را بر حسب متر-نیوتن بر کیلوگرم به دست آورید. $g = 9.7\ m/s^2$.

حل:

$$A_1 = \frac{\pi \times 0.3^2}{4} = 0.0225\pi \ , \quad A_2 = \frac{\pi \times 0.6^2}{4} = 0.09\pi \quad V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.14}{0.0225\pi} = 1.98\ m/s$$

$$h_l = \frac{V_1^2}{2g}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \frac{1.98^2}{2 \times 9.7}\left(1 - \frac{0.0225\pi}{0.09\pi}\right)^2 = 0.11367\ mN/kg$$

۳-۹۸. هوا در کانالی به قطر $650\,mm$ با سرعت $V = 60\,m/s$ جریان دارد. فشار $70\,kPa$ و دما $10°C$ است. کانال بطور ناگهانی تا قطر $800\,mm$ منبسط می‌شود. هوا را تراکم‌ناپذیر فرض کنید و تلفات را بر حسب متر-نیوتن بر نیوتن حساب کنید. اختلاف فشار را بر حسب سانتی‌متر ستون آب به دست آورید.

حل:

$$h_f = \frac{V_1^2}{2g}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = \left(\frac{650}{800}\right)^2 = 0.66 \quad , \quad V_1 = 60\,m/s$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{60^2}{2\times 9.806}(1-0.66)^2 = 21.22\,\frac{N.m}{N}$$

معادله انرژی بین دو نقطه از مقاطع فوق را می‌نویسیم:

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_f$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \;\Rightarrow\; V_2 = V_1\frac{A_1}{A_2} = 60 \times 0.66 = 39.6\ m/s$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{(39.6)^2 - 60^2}{2\times 9.806} + 21.195 = -82.4\ \frac{N.m}{N}$$

$$P = \rho RT \quad \Rightarrow \quad \rho_{air} = \frac{P}{RT} = \frac{70000}{287 \times 283} = 0.863\,kg/m^3$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = -82.4 \times 0.863 \times 9.806 = -697.3\,Pa$$

$$P_1 - P_2 = -697.3\,Pa \times \frac{1034\,cmH_2O}{101325\,Pa} = -7.116\,cmH_2O$$

۳-۹۹. $4\,m^3/s$ آب از یک لولهٔ غوطه‌ور به قطر $1.5\,m$ به داخل مخزنی تخلیه می‌شود. تلفات را حساب کنید.

حل:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{4}{\pi \times 1.5^2/4} = 2.2636\,m/s$$

با توجه به اینکه سطح مقطع مخزن در مقایسه با سطح مقطع لوله بسیار بزرگ می‌باشد در نتیجه سرعت سیال در سطح آن دو برابر سرعت سیال درلوله بسیار کم بوده و قابل صرفنظر کردن می‌باشد یعنی $V_2 \cong 0$

$$h_f = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{(2.2636 - 0)^2}{2\times 9.806} = 0.261\,\frac{N.m}{N}$$

$$\text{تلفات} = \gamma Q h_f = 9806 \times 4 \times 0.261 = 10240\ W = 10.24\,kW$$

۳-۱۰۰. نشان دهید که معادله (۳-۷-۱۱) برای حالت حدی $y_2 = y_1$ به رابطه $V = \sqrt{gy}$ تبدیل می‌شود.

حل:

با استفاده از معادله (3.7.11) داریم :

$$y_2 = -\frac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{2V_1^2 y_1}{g}}$$

$$y=y_1=y_2 \Rightarrow y=\frac{-y}{2}+\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2+\frac{2V^2y}{g}} \quad \Rightarrow \left(\frac{3}{2}y\right)^2=\frac{y^2}{4}+\frac{2V^2y}{g}$$

$$\Rightarrow 2y^2=\frac{2V^2y}{g} \quad \Rightarrow \quad V^2=gy \quad \Rightarrow \quad V=\sqrt{gy}$$

۳.۱۰۱. $15\, m^3/s$ آب در کانالی به عرض $6\, m$ جریان دارد. عمق جریان $300\, mm$ است. پرش هیدرولیکی رخ می‌دهد. y^2 و V^2 را به دست آورید. تلفات را بر حسب متر-نیوتن بر نیوتن و بر حسب کیلووات حساب کنید.

حل:

$$y_1=0.3\, m$$

$$Q=V_1A_1 \quad \Rightarrow \quad V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{15}{0.3\times 6}=\frac{25}{3}\, m/s$$

$$y_2=-\frac{y_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2+\frac{2V_1^2y_1}{g}}=-\frac{0.3}{2}+\sqrt{\left(\frac{0.3}{2}\right)^2+\frac{2\times\left(\frac{25}{3}\right)^2\times 0.3}{9.806}} \Rightarrow y_2=1.916\, m$$

$$V_1A_1=V_2A_2 \quad \Rightarrow V_1y_1=V_2y_2 \Rightarrow V_2=\frac{V_1y_1}{y^2}=\frac{\left(\frac{25}{3}\right)\times 0.3}{1.916}=1.304\, m/s$$

$$h_f=\frac{(y_2-y_1)^3}{4y_1y_2}=\frac{(1.916-0.3)^3}{4\times 1.916\times 0.3}=1.838\, m.N/N$$

$$h_f=\gamma Q\times 1.838=9806\times 15\times 1.838=270350\, W=270.35\, kW$$

۳.۱۰۲. مقطع یک کانال روباز به شکل مثلث متساوی‌الساقین است که نسبت به محور قائم متقارن می‌باشد. برای پرش هیدرولیکی در این کانال رابطه‌ای به دست آورید.

حل:

$$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

مساحت کانال: $A=\frac{a}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$$A_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2\ ,\ A_2=\frac{\sqrt{3}}{4}a_2^2\ ,\ y_1=h_1=\frac{\sqrt{3}}{2}a_1\ ,\ y_2=h_2=\frac{\sqrt{3}}{2}a_2$$

$$V_1A_1=V_2A_2 \quad \Rightarrow \quad V_1a_1^2=V_2a_2^2 \quad \Rightarrow \quad V_1=\frac{a_2^2}{a_1^2}V_2 \qquad (I)$$

معادله اندازه حرکت را می‌نویسیم:

$$\frac{\gamma h_1}{2}\times A_1-\frac{\gamma h_2}{2}\times A_2=\rho V_2(A_2V_2)+\rho V_1(-A_1V_1)$$

$$g\frac{\sqrt{3}}{8}(a_1^3-a_2^3)=V_2^2a_2^2-V_1^2a_1^2 \qquad (II)$$

معادله انرژی عبارت است از:

$$\frac{V_1^2}{2g}+h_1=\frac{V_2^2}{2g}+h_2+h_j$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2g}+\frac{\sqrt{3}}{2}a_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{\sqrt{3}}{2}a_2+h_j \Rightarrow h_j=\frac{V_1^2}{2g}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1-\frac{V_2^2}{2g}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2 \quad (III)$$

(II) و (I) رابطه $\Rightarrow V_1^2\left[\frac{a_1^4}{a_2^2}-a_1^2\right]=g\frac{\sqrt{3}}{8}\left(a_1^3-a_2^3\right) \quad \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g}=\frac{\sqrt{3}}{16}\,\frac{a_2^2}{a_1^2}\,\frac{a_1^3-a_2^3}{a_1^2-a_2^2}$

به همین ترتیب:

$$\frac{V_2^2}{2g}=\frac{\sqrt{3}}{16}\,\frac{a_1^2}{a_2^2}\,\frac{a_1^3-a_2^3}{a_1^2-a_2^2}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه (III) داریم:

$$h_j=\frac{\sqrt{3}}{16}\,\frac{a_2^2}{a_1^2}\,\frac{a_1^3-a_2^3}{a_1^2-a_2^2}-\frac{\sqrt{3}}{16}\,\frac{a_1^2}{a_2^2}\,\frac{a_1^3-a_2^3}{a_1^2-a_2^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2+\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$$

$$\Rightarrow h_j=\frac{\sqrt{3}}{16}\,\frac{a_1^3-a_2^3}{a_1^2-a_2^2}\left(\frac{a_2^4-a_1^4}{a_1^2-a_2^2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}a_1-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2=\frac{\sqrt{3}}{16}\left(a_1^3-a_2^3\right)\left(1/a_1^2+1/a_2^2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}a_1-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2$$

$$\Rightarrow h_j=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a_1-a_2\right)\left|\frac{1}{8}\left[a_1^2+a_1a_2+a_2^2\right]\left[1/a_1^2+1/a_2^2\right]+1\right|$$

۳.۱۰۳. معادله (۱۲-۷-۳) را به دست آورید.

حل:

معادله اندازه حرکت عبارت است از:

$$\frac{\gamma y_1^2}{2}-\frac{\gamma y_2^2}{2}=\rho V_2^2y_2-\rho V_1^2y_1$$

$$\Rightarrow \frac{gy_1^2}{2}-\frac{gy_2^2}{2}=V_2^2y_2-V_1^2y_1$$

$$V_1y_1=V_2y_2 \Rightarrow V_2=\frac{V_1y_1}{y_2} \quad \Rightarrow V_2^2y_2-V_1^2y_1=V_1^2\frac{y_1^2}{y_2^2}\times y_2-V_1^2y_1=V_1^2\left(\frac{y_1^2-y_1y_2}{y_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2g}=\frac{y_2}{4}\left(y_1^2-y_2^2\right)/\left(y_1^2-y_1y_2\right), \quad \frac{V_2^2}{2g}=\frac{y_1^2}{4y_2}\left(y_1^2-y_2^2\right)/\left(y_1^2-y_1y_2\right)$$

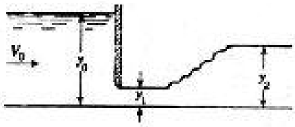
با جایگذاری در معادله انرژی داریم:

$$h_j=\frac{V_1^2}{2g}-\frac{V_2^2}{2g}+y_1-y_2$$

$$\Rightarrow h_j=\frac{(y_1^2-y_2^2)}{4y_1(y_1-y_2)}\left[y_2-\frac{y_1^2}{y_2}\right]+(y_1-y_2)$$

$$h_j=\frac{-(y_1^2-y_2^2)^2}{4y_1y_2(y_1-y_2)}+(y_1-y_2)=\frac{-(y_1-y_2)}{4y_1y_2}\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]=\frac{(y_2-y_1)}{4y_1y_2}(y_2-y_1)^2=\frac{(y_2-y_1)^3}{4y_1y_2}$$

۳.۱۰۴. در شکل ۷۳-۳ فرض کنید تلفات در عبور جریان از زیر دریچه صفر باشد و از $V_0^2/2g$ نیز صرفنظر کنید. به ازای مقادیر $y_0 = 6m$ و $y_1 = 60cm$، مقدار y_2 و تلفات در پرش هیدرولیکی را به دست آورید. مبنای چشم‌پوشی از $V_0^2/2g$ چیست؟



شکل ۷۳-۳ مسایل ۱۰۴، ۱۰۳ و ۱۰۶-۳

حل:

معادله انرژی را بین دو مقطع جریان در y_1 و y_0 می‌نویسیم:

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + z_0 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1$$

$$0 + 0 + y_0 = 0 + \frac{V_1^2}{2g} + y_1 \Rightarrow y_0 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = y_0 - y_1 = 6 - 0.6 = 5.4m$$

$$\Rightarrow V_1^2 = 5.4 \times 2 \times 9.806 = 105.905$$

$$y_2 = -\frac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{2V_1^2 y_1}{g}} = -\frac{0.6}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.6}{2}\right)^2 + \frac{2\times 105.905 \times 0.6}{9.806}} = 3.312m$$

$$h_l = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} = \frac{(3.312 - 0.6)^3}{4\times 0.6\times 3.312} = 2.509\ m.N/N$$

با توجه به اینکه مقطع جریان در y_0 بسیار بیشتر از مقطع آن در y_1 می‌باشد بنابراین V_0 خیلی کمتر از V_1 خواهد بود و می‌توان از آن صرفنظر کرد.

۳.۱۰۵. برای شکل ۷۳-۳ با فرضیات مسألهٔ ۱۳۳-۳، به ازای $y_1 = 400mm$ و $y_2 = 2m$ مقدار y_0 را به دست آورید.

حل:

مانند مسئله قبل با نوشتن معادله انرژی بین دو مقطع جریان در y_0 و y_1 داریم:

$$\frac{V_1^2}{2g} = y_0 - y_1 = y_0 - 0.4 \Rightarrow V_1^2 = 2g(y_0 - 0.4)$$

$$y_2 = \frac{-y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{2V_1^2 y_1}{g}} \Rightarrow 2 + \frac{0.4}{2} = \sqrt{\left(\frac{0.4}{2}\right)^2 + \frac{2V_1^2 \times 0.4}{g}}$$

$$\Rightarrow 2.2^2 = 0.2^2 + \frac{2V_1^2 \times 0.4}{g} \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = 3$$

$$\Rightarrow (y_0 - 0.4) = 3 \Rightarrow y_0 = 3.4m$$

۳.۱۰۶. برای شکل ۷۳-۳ با فرضیات مسألهٔ ۱۳۳-۳، به ازای $y_0 = 6m$ و $y_2 = 2.6m$ دبی بر واحد عرض کانال را به دست آورید.

حل:

مانند مسئله ۱۰۴ با نوشتن معادله انرژی بین دو مقطع جریان در y_0 و y_1 داریم:

$$\frac{V_1^2}{2g}=y_0-y_1=(6-y_1)$$

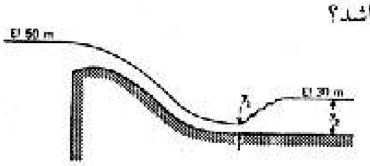
$$y_2=\frac{-y_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2+\frac{2V_1^2y_1}{g}} \quad \Rightarrow \left(2.6+\frac{y_1}{2}\right)^2=\left(\frac{y_1}{2}\right)^2+4(6-y_1)y_1$$

$$\Rightarrow 6.76-21.4y_1+4y_1^2=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1=0.337 \\ y_1=5.013 \end{cases}$$

$$V_1^2=2\times9.806\times(6-0.337)=111.063 \Rightarrow V_1=10.539\,m/s$$

$$Q=V_1A_1=10.539\times(0.337\times1)=3.55\,m/s$$

۳-۱۰۷. در شکل ۷۴-۳ دبی بر واحد عرض $10m^3/s$ و تلفات در پایین سرریز $2m.N/N$ است. برای آنکه پرش هیدرولیکی رخ دهد، ارتفاع کف سرریز بایستی چقدر باشد؟



شکل ۷۴-۳

حل:

$$h_j=\frac{(y_2-y_1)^3}{4y_1y_2}=50-30-2=18\,m.N/N \Rightarrow 18=\frac{(y_2-y_1)^3}{4y_1y_2} \qquad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع : $Q=V_1y_1=V_2y_2 \quad \Rightarrow V_2=\frac{10}{y_2} \quad , \quad V_1=\frac{10}{y_1}$

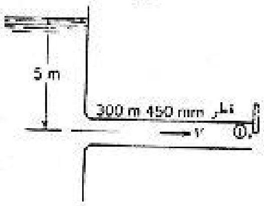
روابط (I) و (II) $\Rightarrow y_2=6.329\,m$

$$y_2=-\frac{y_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2+\frac{2V_1^2y_1}{g}}=-\frac{y_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2+\frac{200}{gy_1}} \qquad (II)$$

$$\Rightarrow V_2=\frac{10}{6.329}=1.58\,m/s$$

$$30-H=y_2+\frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow H=30-6.329-\frac{(1.58)^2}{2\times9.806}=23.544\,m$$

۳-۱۰۸. در لولهٔ شکل ۷۵-۳ آب با سرعت $V=2.6\,m/s$ جریان دارد و تلفات تا مقطع I معادل $3\,m.N/N$ است. مانع انتهای لوله را بررسی داریم. شتاب آب در لوله را حساب کنید.



شکل ۷۵-۳

حل:

روش اول

موقعی که مانع انتهای لوله را برداریم فشار در نقطه (1) برابر با فشار اتمسفریک می‌گردد

معادلهٔ انرژی را بین نقاط (1) و (2) می‌نویسیم:
$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+h_{losses}=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$\Rightarrow 0+\frac{V_1^2}{2g}+0+3=0+0+5 \quad \Rightarrow V_1=6.26\ m/s$$

با این فرض که شتاب حرکت آب برای تغییر سرعت از $V_1'=2.6\ m/s$ به $V_1=6.26\ m/s$ ثابت می‌ماند، از معادلهٔ مستقل از زمان حرکت شتابدار با شتاب ثابت داریم:

$$V_1^2-V_1'^2=2aL \Rightarrow \quad a=\frac{V_1^2-V_1'^2}{2L}=\frac{(6.26)^2-(2.6)^2}{2\times300} \Rightarrow a=0.054\ m/s^2$$

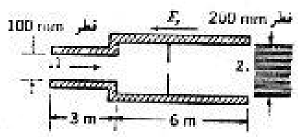
روش دوم:
$$P_2=\gamma(H-\frac{V^2}{2g}) \qquad \text{تلفات}=\gamma A\times3$$

با توجه به معادله اندازه حرکت:
$$\gamma A(H-\frac{V^2}{2g})-\gamma A\times3=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\gamma}{g}ALV)$$

$$\Rightarrow 5-\frac{2.6}{2g}-3=\frac{300}{9.806}\times\frac{\partial V}{\partial t} \quad \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t}=0.054$$

$$a=\frac{\partial V}{\partial t}=0.054\ m/s^2$$

۱۰۹-۳. در شکل ۷۶-۳ آب لوله را پر کرده است. در یک لحظه $p_1=70\,kPa$، $p_2=0$ و $V_1=3\,m/s$ است و دبی با شدت $3.2\,L/s^2$ در حال افزایش است. نیروی F_x لازم برای ساکن نگه داشتن مجموعه را تعیین کنید.



شکل ۷۶-۳

حل:

داریم: $\frac{\partial Q}{\partial t}=3.2\,L/s^2$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}=\frac{\partial Q/\partial t}{A_1}=\frac{3.2\times10^{-3}}{\pi\times0.1^2/4}=0.407\ m/s^2 \quad , \quad \frac{\partial V_2}{\partial t}=\frac{\partial Q/\partial t}{A_2}=\frac{3.2\times10^{-3}}{\pi\times0.2^2/4}=0.102\ m/s^2$$

$$Q=A_1V_1=\frac{\pi\times0.1^2}{4}\times3=0.02356\ m^3/s$$

$$A_1V_1=A_2V_2 \Rightarrow V_2=V_1\frac{A_1}{A_2}=3\times(\frac{0.1}{0.2})^2=0.75\ m/s$$

معادله اندازه حرکت در جهت x عبارت است از:

$$P_1A_1-P_2A_2-F_x=\rho\mathbf{V}_1\frac{\partial V_1}{\partial t}+\rho\mathbf{V}_2\frac{\partial V_2}{\partial t}+\rho Q(V_2-V_1)$$

$$\mathbf{V}_1=\pi\times0.05^2\times3=0.02356\,m^3 \quad , \quad \mathbf{V}_2=\pi\times0.1^2\times6=0.1885\,m^3$$

$$\Rightarrow 70000\times\frac{\pi\times0.1^2}{4}-0-F_x=1000\left[0.02356\times0.407+0.1885\times0.102+0.02356(0.75-3)\right]$$

$$\Rightarrow F_x=574N$$

۳-۱۱۰. در شکل ۳-۶۳، Q_2 برابر $30\,L/s$ است. نیروی قائم لازم برای نگهداری مخزن چقدر است؟ فرض کنید آب از مخزن سرریز نمی‌کند. وزن مخزن $90\,N$ و عمق آب در آن $30\,cm$ است.

حل:

معادله اندازه حرکت را در جهت محور yها می‌نویسیم:

$$\sum F_y=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho v_y dV+\int_{cs}\rho v_y V dA$$

$$\Rightarrow F_y-[W_{1(\text{وزن مخزن})}+W_{2(\text{وزن آب})}]=\rho V_{y_0}\frac{dV}{dt}+\rho V_{y_1}V_{y_1}A=\rho V_{y_0}(Q_1-Q_2)+\rho V_{y_1}Q_1$$

مخزن را به عنوان حجم کنترل در نظر می‌گیریم.

سرعت بالا آمدن سطح آب در تانک برابر است با:

$$V_{y_0}=\frac{Q_1-Q_2}{A_0}=\frac{0.06-0.03}{0.1}=0.3\,m/s$$

$$V_{y_1}=\frac{Q_1}{A_1}=\frac{0.06}{\pi\times0.075^2/4}=13.581\,m/s$$

$$\Rightarrow F_y-90-0.3\times0.1\times9806=1000\times0.3\times(0.06-0.03)+1000\times13.581\times0.06$$

$$\Rightarrow F_y=1208N$$

۳-۱۱۱. شکل ۳-۳۷ یک پروانه پمپ سانتریفوژ را نشان می‌دهد که دبی $0.2\,m^3/s$ آب را تخلیه می‌کند. $r_1=120\,mm$، $r_2=160\,mm$، $v_{t1}=0$ و $v_{t2}=3\,m/s$. گشتاوری که لازم است به پروانه اعمال شود چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله (3.8.4) داریم:

$$T=\int_{A2}\rho_2 r_2 v_{t2}v_{n2}dA_2-\int_{A1}\rho_1 r_1 v_{t1}v_{n1}dA_1$$

$$\rho_1=\rho_2=\rho \quad , \quad Q=v_{n1}A_1=v_{n2}A_2$$

$$\Rightarrow T=\rho Q(v_{t2}r_2-v_{t1}R_1)$$

$$\Rightarrow T=1000\times0.2(3\times0.16-0\times0.12)=96\,N.m$$

۳-۱۱۲. در یک پمپ سانتریفوژ $25\,L/s$ آب پروانه را با سرعت مماسی $10\,m/s$ ترک می‌کند. قطر پروانه $200\,mm$ است. آب در امتداد شعاعی وارد پروانه می‌شود. برای سرعت دورانی $1200\,rpm$ گشتاور روی محور پمپ، توان ورودی و انرژی افزوده شده به جریان را بر حسب متر-نیوتن محاسبه کنید. از کلیه تلفات صرفنظر کنید.

حل:

(جریان در امتداد شعاعی است) $v_{t1} = 0$

$$T = \rho Q(v_{t2}r_2 - v_{t1}r_1) = 1000 \times 0.025(10 \times 0.02/2 - 0) = 25\,N.m$$

$$P_w = \omega T = 25 \times 1200 \times \frac{2\pi}{60} = 3140\,W = 3.14\,kW$$

$$H = \frac{P}{\gamma Q} = \frac{3.14 \times 10^3}{9806 \times 0.025} = 12.81\,m$$

۳-۱۱۳. یک توربین آبی با سرعت $240\,rpm$ دوران می‌کند و $40\,m^3/s$ آب را تخلیه می‌کند. برای تولید توان $42\,MW$ مؤلفه مماسی سرعت در ورودی به چرخ توربین را به دست آورید. شعاع ورودی $r = 1.6\,m$ است. جریان خروجی از توربین بدون چرخش است. از کلیه تلفات صرفنظر کنید. هد لازم توربین چقدر است؟

حل:

جریان خروجی از توربین بدون چرخش است پس داریم $v_{t2} = 0$

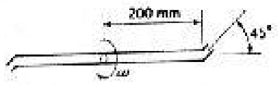
گشتاور اعمال شده $\quad T = \frac{P_w}{\omega} = \frac{42 \times 10^6}{240 \times 2\pi/60} = 1.67 \times 10^6\,N.m$

از طرفی داریم : $T = \rho Q(v_{t2}r_2 - v_{t1}r_1)\quad,\quad v_{t2} = 0$

$$\Rightarrow v_{t1} = \frac{T}{\rho Q r_1} = \frac{1.67 \times 10^6}{1000 \times 40 \times 1.6} = 26.11\,m/s$$

هد توربین : $H = \frac{P}{\gamma Q} = \frac{42 \times 10^6}{9806 \times 40} = 107.1\,m$

۳-۱۱۴. در شکل ۷۷-۳ یک آبپاش متقارن نشان داده شده است که دبی کل خروجی آن $0.9\,L/s$ است. آبپاش بدون اصطکاک است. سرعت دورانی آبپاش را بر حسب rpm حساب کنید. قطر دهانه $6\,mm$ می‌باشد.



شکل ۳-۷۷ مسائل ۳-۱۱۲ تا ۳-۱۱۷

حل:

دبی خروجی از هر سر آبپاش برابر $Q = \frac{0.9}{2} = 0.45\,L/s$ باشد و بنابراین سرعت خروج آب نسبت به سر آبپاش عبارت است از :

$$v_{r_1} = v_{r_2} = \frac{Q}{A} = \frac{0.45 \times 10^{-3}}{\pi \times 0.006^2/4} = 15.92\,m/s$$

اگر سرعت مماسی مطلق خروج آب از دو سر آبپاش برابر با v_t باشد، با توجه به اینکه آب ورودی هیچگونه گشتاوری ندارد، گشتاور ممنتم خروجی کل باید صفر باشد پس داریم:

$$\rho Q_1 r_1 v_{t1} + \rho Q_2 r_2 v_{t2} = 0$$

از طرفی داریم : $v_{t1} = v_{t2} = v_r sin45 - r\omega$

که $v_r sin\,45$ مؤلفهٔ مماسی سرعت خروجی آب نسبت به دهانهٔ آبپاش است.

$$\Rightarrow \rho Qr \times 2\,(v_r sin45 - r\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_r sin\,45}{r}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{15.92 \times sin45}{0.2} \times \frac{60}{2\pi} = 537.3 \; rpm$$

۳-۱۱۵. گشتاور لازم برای ساکن نگه داشتن آبپاش مسألهٔ قبل را به دست آورید. دبی کل را $2\,L/s$ بگیرید.

حل:

چون آبپاش ساکن است، نیروی خالصی که آب هنگام خروج به هر سر آبپاش وارد می‌کند برابر است با:

$$F = \rho v_r^2 A \quad , \quad v_r = \frac{Q}{A}$$

گشتاور کل وارد شده از طرف دو نیروی فوق نسبت به مرکز آبپاش برابر است با:

$$T = 2r \times F\,sin\theta$$

$$\Rightarrow T = 2r\rho v_r^2 A sin\theta = 2 \times 0.2 \times 1000 \times \frac{(1 \times 10^{-3})^2}{\pi \times 0.006^2/4}\; sin45 = 10\; N.m$$

۳-۱۱۶. در مسألهٔ ۱۱۴ اگر گشتاور مقاوم روی محور $0.7\,N.m$ باشد، سرعت دورانی چقدر است؟

حل:

با مراجعه به مسالهٔ ۱۱۴ معادلهٔ مربوط به گشتاور مممنتم را در این مساله بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\rho Q_1 r_1 v_{t1} + \rho Q_2 r_2 v_{t2} - 0.7 = 0$$

$$v_{t1} = v_{t2} = v_r sin45 - r\omega \;\; , \;\; Q_1 = Q_2 = Q \;\; , \;\; r_1 = r_2 \;\; , v_r = \frac{Q}{A}$$

$$\Rightarrow 2\rho Qr(v_r sin45 - r\omega) - 0.7 = 0$$

$$\Rightarrow v_r sin45 - r\omega = \frac{0.7}{2\rho Qr} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_r}{r} sin45 - \frac{0.7}{2\rho Qr^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{25.92}{0.2} sin45 - \frac{0.7}{2 \times 1000 \times (0.45 \times 10^{-3}) \times 0.2^2} = 36.8\, Rad/s \times \frac{60}{2\pi} = 351.6\, rpm$$

۳-۱۱۷. در مسألهٔ ۱۴۳-۳ گشتاور مقاوم روی محور به صورت $0.01\omega^2$ بیان می‌شود. سرعت دورانی آبپاش را به دست آورید.

حل:

در اینحالت نیز معادلهٔ اندازه حرکت را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$2\rho Qr(v_r sin45 - r\omega) - 0.01\,\omega^2 = 0$$

$$2 \times 1000 \times 0.45 \times 10^{-3} \times 0.2 \times (15.92 \times 0.707 - 0.2\omega) - 0.01\omega^2 = 0$$

$$\omega^2 + 3.6\,\omega - 202.57 = 0$$

با حل معادله فوق $\omega = 12.55\ Rad/s \times \frac{60}{2\pi} = 119.7\ rpm$

۳-۱۱۸. ***

۳-۱۱۹. ضریب هدایت حرارتی بتون خشک در دمای $20\,C$ برابر $0.128\ W/m.k$ است. مقدار این ضریب بر حسب $W/cm.c$ و $Btu/h.ft.f$ چقدر است؟

حل:

$$K = 0.128\ W/m.k \times \frac{1m}{100cm} \times \frac{1k}{1c} = 0.00128\ W/cm.c$$
$$= 0.128\ W/m.k \times \frac{0.5778\ Btu/hr.ft.f}{1\ W/m.k} = 0.07396\ Btu/hr.ft.f$$

۳-۱۲۰. ضریب هدایت حرارتی پشم شیشه در دمای $20c$ برابر $0.202\ Btu/h.ft.f$ است مقدار این ضریب بر حسب وات بر سانتیمتر بر درجه سانتی‌گراد چقدر است؟

حل:

$$K = 0.202\ Btu/hr.ft.f \times \frac{1\ W/m.k}{0.5778\ Btu/hr.ft.f} \times \frac{1m}{100cm} \times \frac{1k}{1C} = 0.003496\ W/cm.c$$

۳-۱۲۱. اختلاف دمای سطح داخلی و خارجی یک دیوار بتونی $25\,c$ است اگر ضخامت دیواره $25.4\,cm$ و ضریب هدایت حرارتی آن $0.98\ W/mk$ باشد اتلاف حرارتی بر واحد سطح دیوار را محاسبه کنید.

حل:

$$N_{cx} = \frac{q_c}{A} = -K\frac{\partial T}{\partial x} = -K\frac{\Delta T}{L} = 0.98 \times \frac{25}{0.254} = 96.46\ W/m^2$$

۳-۱۲۲. اگر ضریب هدایت حرارتی یک مایع تابعی خطی از دما باشد یک رابطه جبری برای توزیع دما به صورت تابعی از نرخ انتقال حرارت q_H و سطح مقطع A فاصله x برای حالت یک بعدی و پایا بدست آورید.

حل:

فرض: $k = \alpha_1 T + \alpha_0$

$$\frac{q_H}{A} = -K\frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{q_H}{A} = -(\alpha_1 T + \alpha_0)\frac{dT}{dx}$$
$$\frac{q_H}{A}\,dx = -(\alpha_1 T + \alpha_0)dT \Rightarrow q_H(x/A) = \int_{T_0}^{T} -(\alpha_1 T + \alpha_0)dT$$
$$\Rightarrow q_H(x/A) = \left[1/2\,\alpha_1 T^2 + \alpha_0 T\right]_{T}^{T_0} = \frac{1}{2}\alpha_1 T_0^2 + \alpha_0 T_0 - \frac{1}{2}\alpha_1 T^2 - \alpha_0 T$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\alpha_1 T^2 + \alpha_0 T = \frac{1}{2}\alpha_1 T_0^2 + \alpha_0 T_0 - q_H(x/A)$$

۳-۱۲۳. آب با دمای $35\,C$ با آب $6\,C$ با هم مخلوط می‌شوند در نتیجه $10\,kg$ آب با دمای $18\,C$ حاصل می‌شود. جرم آب با دمای $35\,C$ را بدست آورید.

حل:

معادله پیوستگی: $m_1+m_2=m_3 \quad \Rightarrow \quad m_1+m_2=10 \quad (1)$

معادله گرما: $m_1c_pT_1+m_2c_pT_2=m_3c_pT_3 \quad \Rightarrow \quad m_1T_1+m_2T_2=m_3T_3$

$\Rightarrow \quad m_1\times 35+m_2\times 6=10\times 18 \quad (2)$

(1) و $(2) \Rightarrow m_1=4.138\ kg \ , \quad m_2=5.862\ kg$

۳.۱۲۴. ضریب تبدیل بین $1\,cal$ و $1\,Btu$ را بدست آورید.

حل:

$1Btu=251.996\ cal$

۳.۱۲۵. یک قطعه پلاتین (Pt) با دمای اولیه T_{pt} در یک ظرف شامل جیوه با دمای T_{Hg} انداخته می‌شود. قطعه پلاتین دیگری با جرم یکسان با قبلی در ظرف دیگری شامل دو برابر مقدار جیوه قبلی با دمای T'_{Hg} انداخته می‌شود. اگر دمای نهایی پلاتین به ترتیب T_{pt1} و T'_{pt2} باشد دمای اولیه پلاتین T'_{pt} را در آزمایش دوم بدست آورید.

حل:

فرض می‌کنیم در هر دو حالت پلاتین و جیوه به تعادل گرمایی رسیده باشند:

هرگاه m_1 و m'_1 جرم پلاتین و جیوه در حالت اول باشند داریم:

حالت اول: $m_1c_{pt}(T_{pt_1}-T_{pt})=m'_1c_{Hg}(T_{Hg}-T_{pt_1})$

حالت دوم: $m_1c_{pt}(T'_{pt_2}-T'_{pt})=2m'_1c_{Hg}(T'_{Hg}-T'_{pt_2})$

طرفین دو رابطه بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{T_{pt_1}-T_{pt}}{T'_{pt_2}-T'_{pt}}=\frac{1}{2}\ \frac{T_{Hg}-T_{pt_1}}{T'_{Hg}-T'_{pt_2}}$$

$$\Rightarrow T'_{pt}=T'_{pt_2}-\frac{2(T'_{Hg}-T'_{pt_2})}{T_{Hg}-T_{pt_1}}(T_{pt_1}-T_{pt})$$

۳.۱۲۶. سه ظرف یکسان به ترتیب شامل آب به جرم m_1 آب به جرم m_2 و گلیسیرین به جرم m_3 موجود می‌باشد. به هر سه ظرف مقدار حرارت یکسان Q اضافه می‌شود اگر افزایش دما در سه ظرف به ترتیب ΔT_1، ΔT_2 و ΔT_3 باشد گرمای ویژه گلیسیرین را بدست آورید.

حل:

با توجه به اینکه باید از مقادیر مربوط به هر سه ظرف استفاده کنیم داریم:

$Q=m_1c_w\Delta T_1=m_2c_w\Delta T_2=m_3c_G\Delta T_3$

$\Delta T_1-\Delta T_2=(\Delta T_3-\Delta T_2)+(\Delta T_1-\Delta T_3)$

طرفین را به Q ضرب می‌کنیم: $Q(\Delta T_1-\Delta T_2)=Q(\Delta T_3-\Delta T_2)+Q(\Delta T_1-\Delta T_3)$

$$\Rightarrow m_3 c_G \Delta T_3 (\Delta T_1 - \Delta T_2) = m_1 c_w \Delta T_1 (\Delta T_3 - \Delta T_2) + m_2 c_w \Delta T_2 (\Delta T_1 - \Delta T_3)$$

$$\Rightarrow c_G = \frac{c_w \left[m_1 \Delta T_1 (\Delta T_3 - \Delta T_2) + m_2 \Delta T_2 (\Delta T_1 - \Delta T_3) \right]}{m_3 \Delta T_3 (\Delta T_1 - \Delta T_2)}$$

۳-۱۲۷. آب با نرخ $6.85\ L/min$ از یک مبدل حرارتی عبور می‌کند دمای آب در داخل $58C$ و در خارج $14C$ است، مقدار حرارت منتقل شده بر ثانیه در مبدل حرارتی چقدر است؟

حل:

$$q_H = m c_{pw} (T_{out} - T_{in})$$

$$m = 6.85 L/min \times 1 kg/L \times 1 min/60s = 0.114167 kg/s$$

$$q_H = 0.114167 \times 4184 \times (14 - 58) = -21018 W$$

۳-۱۲۸. یک قطعه فولاد ضدزنگ به جرم $0.95\ kg$ و در دمای $65\ C$ در یک مبدل حرارتی شامل $0.4\ kg$ آب با دمای $15\ c$ انداخته می‌شود اگر گرمای ویژه فولاد ضدرنگ $460\ J/kg.k$ باشد دمای نهایی آن چقدر است؟

حل:

با فرض تعادل گرمایی داریم:

$$m_s c_{ps} (T_s - T) = m_w c_{pw} (T - T_w)$$

$$0.95 \times 460 \times (65 - T) = 0.4 \times 4190 \times (T - 15) \Rightarrow T = 25.34\ C$$

۳-۱۲۹. دو ظرف به ترتیب شامل آب در دماهای $20c$ و $92c$ می‌باشند چه مقدار آب باید از دو ظرف با هم مخلوط شوند تا $362\ L$ آب با دمای $30c$ بدست آید.

حل:

$$362 L \times 1 kg/L = 362 kg$$

معادله پیوستگی:

$$m_1 + m_2 = m$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 = 362 \quad (I)$$

معادله گرما:

$$m_1 c_{p_1} (T_f - T_1) = m_2 c_{p_2} (T_2 - T_f)$$

$$\Rightarrow m_1 (30 - 20) = m_2 (92 - 30) \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow m_1 = 311.722 kg, m_2 = 50.278 kg$$

۳-۱۳۰. یک مبدل حرارتی ساخته شده از مس (Cu) به جرم $325\ g$ شامل $0.4\ kg$ روغن بادمای اولیه $20c$ است. یک قطعه کروم ضدزنگ به جرم $100\ g$ و دمای $85\ c$ در این مخزن انداخته می‌شود گرماهای ویژه مس $410\ J/kgk$ و کروم ضدزنگ $460\ J/kg.k$ است. هرگاه دمای نهایی روغن $28\ c$ باشد گرمای ویژه روغن را بدست آورید.

حل:

با فرض تعادل گرمایی داریم:

$$m_{cu}c_{cu}(T - T_{cu}) + m_{oil}c_{oil}(T - T_{oil}) = m_{cs}c_{cs}(T_{cs} - T)$$

$$\Rightarrow 0.325 \times 410 \times (28 - 20) + 0.4 \times c_{oil} \times (28 - 20) = 0.1 \times 460 \times (85 - 28)$$

$$\Rightarrow c_{oil} = 486.25\ J/kg.k$$

۳-۱۳۱. یک قطعه روی (Zn) با دمای $85c$ در داخل گلیسیرین با دمای $15c$ انداخته می‌شود. جرم کل گلیسیرین و روی $0.4\,kg$ می‌باشد و دمای تعادلی $22c$ است اگر گرماهای ویژه گلیسیرین و روی به ترتیب $2428\,J/kgk$ و $0.094\,Btu/lb_mF$ باشند جرم گلیسیرین و روی را محاسبه کنید.

حل:

معادله پیوستگی:

$$m_{gl} + m_{zn} = m$$

$$\Rightarrow m_{gl} + m_{zn} = 0.4 \qquad (1)$$

معادله گرما:

$$m_{gl}c_{gl}(T - T_{gl}) = m_{zn}c_{zn}(T_{zn} - T)$$

$$m_{gl} \times 2428 \times (22 - 15) = m_{zn} \times (0.094 \times 4187) \times (85 - 22)$$

$$\Rightarrow m_{gl} = 1.4589\ m_{zn} \qquad (2)$$

(2) و $(1) \Rightarrow m_{gl} = 0.23732\ kg\ ,\ m_{zn} = 0.16267\ kg$

۳-۱۳۲. دمای آب در یک ظرف در مدت 200 ثانیه از $70c$ به $60c$ افت می‌کند. چه مقدار زمان برای افت دما از $59c$ به $55c$ لازم است؟

حل:

$$P = \frac{W}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{mc\Delta T_1}{t_1} = \frac{mc\Delta T_2}{t_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T_1}{t_1} = \frac{\Delta T_2}{t_2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \Delta T_2 . t_1 / \Delta T_1$$

$$\Delta t_2 = (59 - 55) \times 200/(70 - 60) = 80s$$

۳-۱۳۳. دماسنجی ابتدا دمای $82c$ را نشان می‌دهد. این دماسنج از ماده‌ای با گرمای ویژه $0.84\,kj/kgk$ ساخته شده است. آنرا در داخل یک سیال مبدل حرارتی با دمای $23c$ و گرمای ویژه $0.41\,kj/kgk$ می‌اندازیم. اگر جرم دماسنج $75g$ و جرم سیال موجود در مبدل حرارتی $6.5\,kg$ باشد دمای تعادلی نهایی خوانده شده از دماسنج را بدست آورید.

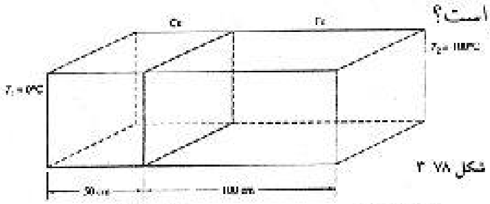
حل:

معادله گرما:

$$m_{th}c_{th}(T_{th} - T) = m_f c_f (T - T_f)$$

$$0.075 \times 0.84 \times (82 - T) = 6.5 \times 0.41 \times (T - 23) \Rightarrow T = 24.36^{\circ C}$$

۳.۱۳۴. یک شمش ساخته شده از مس (Cu) و یک شمش آهنی (Fe) مطابق شکل ۷۸-۳ به هم متصل شده‌اند. دو انتهای سیستم به ترتیب در دماهای ثابت $T_1 = 0c$ و $T_2 = 100c$ نگهداشته می‌شوند. سطح مقطع سیستم $15\,cm^2$ و $k_{Cu} = 25.32\,W/mk$ و $k_{Fe} = 52\,W/mk$ می‌باشند. شار حرارتی در این سیستم چقدر است؟ جریان حرارت در کدام جهت برقرار است؟



شکل ۳-۷۸

حل:

$$Q_{cu} = K_{cu}A\frac{T_x - T_1}{l_{cu}} \quad , \quad Q_{Fe} = k_{Fe}A\frac{T_2 - T_x}{l_{Fe}}$$

(T_x دمای محل اتصال می‌باشد)

در حالت پایا: $Q_{cu} = Q_{Fe} = Q \Rightarrow k_{Cu}\dfrac{T_x - T_1}{l_{Cu}} = k_{Fe}\dfrac{T_2 - T_x}{l_{Fe}}$

$$\Rightarrow 25.32 \times \frac{T_x - 0}{0.5} = 52 \times \frac{100 - T_x}{1} \qquad \Rightarrow T_x = 50.66^{\,c}$$

$$\Rightarrow Q = 25.32 \times \frac{50.66 - 0}{0.5} = 2565.4\ W/m^2$$

جهت انتقال گرما از قسمت گرم به سرد می‌باشد.

۳.۱۳۵. درصد تبدیل یک راکتور 73 درصد می‌باشد و زمان اقامت آن $28.5\,S$ است. برای جریان پایا و واکنش از درجه اول * ضریب شدت واکنش (k) را برای این مخزن بدست آورید.

حل:

داریم:

$$V\frac{dC}{dt} = V_1A_1C_1 - V_2A_2C_2 - VKC$$

در حالت پایا: $\dfrac{dC}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow V_1A_1C_1 - V_2A_2C_2 - VKC_2 = 0$

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2 \qquad , \qquad t_R = \frac{V}{Q}$$

با استفاده از سه رابطه بالا داریم:

$$C_1 - C_2 - t_R K C_2 = 0$$

هرگاه x ضریب تبدیل باشد داریم:

$$C_2 = C_1(1-x)$$

$$\Rightarrow 1 - (1-x) - t_R k(1-x) = 0 \qquad \Rightarrow k = \frac{x}{t_R(1-x)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{0.73}{28.5(1-0.73)} = 0.09487 \quad s^{-1}$$

۳.۱۳۶. یک عملیات کارآمد برای تصفیه پساب یک کارخانه مورد نیاز است. در اولین مرحله پساب از n راکتور هم‌اندازه سری می‌گذرد و در راکتورها اختلاط کامل صورت می‌گیرد. اگر غلظت مواد جامد معلق در

ورودی C_0 و شدت جریان عبوری از سیستم Q باشد غلظت مواد جامد معلق را در خروجی بدست آورید.

حل:

با توجه به اینکه زمان اقامت متوسط برای کلیه راکتورهای مخلوط‌کن یکسان، برابر می‌باشد و $Q=A_1V_1=A_2V_2=\ldots=A_nV_n$ پس α و βها برای همه راکتورها برابر است و داریم:

$$\frac{C_n}{C_0}=\frac{C_1}{C_0}\times\frac{C_2}{C_1}\times\ldots\times\frac{C_n}{C_{n-1}}=\left\{\beta/\alpha+(1-\beta/\alpha)e^{-\alpha t}\right\}^n$$

$$\Rightarrow C_n=C_0\left\{\beta/\alpha+(1-\beta/\alpha)e^{-\alpha t}\right\}^n$$

۳-۱۳۷. برای یک راکتور معلوم شده است که غلظت حالت پایا در خروجی $22\,mg/L$ است اگر غلظت در ورودی $100\,mg/L$ باشد غلظت درخروجی را پس از 2.5 دقیقه بدست آورید. زمان اقامت راکتور 8 دقیقه است.

حل:

داریم:

$$V\frac{dC}{dt}=V_1A_1C_1-V_2A_2C_2-VkC_2$$

برای حالت پایا: $\frac{dc}{dt}=0\Rightarrow V_1A_1C_1-V_2A_2C_2-VkC_2=0$

$$Q=A_1V_1=A_2V_2 \quad , \quad t_R=\frac{V}{Q}$$

با استفاده از سه رابطه بالا داریم:

$$C_1-C_2-t_RkC_2=0$$

$$\Rightarrow k=\frac{C_1-C_2}{t_RC_2}=\frac{100-22}{8\times22}=0.4432\ min^{-1}$$

با استفاده از از رابطه $(3.9.17a)$ داریم:

$$C_2=\beta\frac{C_1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})+C_1e^{-\alpha t}$$

$$\beta=\frac{V_1A_1}{V}=\frac{Q}{V}=\frac{1}{t_R}=\frac{1}{8}=0.125\ min^{-1}$$

$$\alpha=k+\frac{V_2A_2}{V}=k+\frac{Q}{V}=k+\frac{1}{t_R}=0.4432+\frac{1}{8}=0.5682\ min^{-1}$$

$$\Rightarrow C_2=0.125\times\frac{100}{0.5682}\times\left[1-exp(-0.5682\times2.5)+100exp(-0.5682\times2.5)\right]=40.845\ mg/litr$$

۳-۱۳۸. در مسئله 137 حجم مخزن $25m^3$ است شدت جریان در ورودی و زمان لازم جهت رسیدن به حالت پایا را بدست آورید.

حل:

$$t_R=\frac{V}{Q}\Rightarrow Q=\frac{V}{t_R}=\frac{25}{8\times60}=0.0521\ m^3/s$$

با استفاده از معادله $(3.9.17a)$ داریم:

$$C_2=\beta\frac{C_1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})+C_1e^{-\alpha t}$$

$$\alpha=k+\frac{1}{t_R}=0.4432+\frac{1}{8}=0.5682\ min^{-1}\ ,\quad \beta=\frac{1}{t_R}=\frac{1}{8}=0.125\ min^{-1}$$

غلظت در حالت پایا: $C_1 = 100\,mg/L \quad , \quad C_2 = 22\,mg/L$

$$\Rightarrow 22 = 0.125 \times \frac{100}{0.5682} \times (1 - e^{-0.5682 \times t}) + 100 \times e^{-0.5682 \times t}$$

از حل معادله فوق: $t = 20.44\,min$

۳-۱۳۹. مخلوط دو گاز A و B در یک لوله جریان دارد. غلظت دو جزء به ترتیب C_A و C_B و سرعت مولی متوسط U_M است. فشار جابجایی کل N_A را بصورت تابعی از N_B, C, C_A بدست آورید. C غلظت کل می‌باشد.

حل.

$$\begin{cases} N_A = C_A U_m \\ N_B = C_B U_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_A + N_B = U_m (C_A + C_B) = U_m C \quad \Rightarrow \quad N_A = U_m C - N_B$$

$$U_m = \frac{N_B}{C_B} = \frac{N_B}{C - C_A}$$

$$\Rightarrow N_A = \frac{N_B}{C - C_A} C - N_B = N_B \left(\frac{C}{C - C_A} - 1 \right) = N_B \frac{C_A}{C - C_A}$$

۳-۱۴۰. مخلوط گازی شامل دو جزء A و B در یک لوله موجود است در دو مقطع (1) و (2) فشار جزئی A به ترتیب P_1 و P_2 است یک عبارت جبری برای فشار نفوذ J_A به صورت تابعی از P_1 و P_2 بدست آورید. (فرض کنید حالت پایا برقرار باشد).

حل:

با استفاده از معادله (3.9.9) داریم:

$$J_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x}$$

با فرض اینکه نفوذ فقط در جهت x (در طول لوله) باشد داریم:

$$J_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dx}$$

با توجه به رابطه $C_A = \frac{n_A}{V} = \frac{P_A}{RT}$ برای گازهای ایده‌ال داریم:

$$J_A = \frac{-D_{AB}}{RT} \frac{dP_A}{dx} \Rightarrow J_A RT \int_{x_1}^{x_2} dx = -D_{AB} \int_{P_1}^{P_2} dP_A$$

$$\Rightarrow J_A RT (x_2 - x_1) = -D_{AB} (P_2 - P_1) \qquad \Rightarrow J_A = D_{AB} (P_1 - P_2) / RT\Delta x$$

۳-۱۴۱. داده‌های زیر از یک راکتور مخلوط کن ایده‌ال بدست آمده‌اند.

[illegible]	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7
C_2 (mg/L)	8.50	7.20	6.50	4.95	3.78	2.50	1.32
dC_2/dt (mg/L.hr)	1.90	2.60	3.75	4.10	5.00	7.00	7.44

که C_2 غلظت در خروجی می‌باشد. غلظت در ورودی $23\,mg/L$ است. زمان اقامت L_R و ضریب شدت واکنش k را محاسبه کنید.

حل:

داریم:

$$V\frac{dC_2}{dt}=V_1A_1C_1-V_2A_2C_2-kVC_2$$

$$Q=A_1V_1=A_2V_2 \quad , t_R=\frac{V}{Q} \Rightarrow \frac{dC_2}{dt}=\frac{1}{t_R}C_1-\frac{1}{t_R}C_2-kC_2$$

$$\Rightarrow \frac{dC_2}{dt}=\frac{1}{t_R}C_1-(\frac{1}{t_R}+k)C_2 \qquad (I)$$

رابطه (I) یک رابطه خطی بین $\frac{dC_2}{dt}$, C_2 است.

با استفاده از داده‌های جدول dC_2/dt را بر حسب C_2 خطی‌سازی می‌کنیم.

نتیجه بدست آمده از خطی‌سازی عبارت است از:

$$\begin{cases}\frac{C_1}{t_R}=8.45936\\ \frac{1}{t_R}+k=0.78922\end{cases} \Rightarrow t_R=2.719\ time \ , k=0.4214\,time^{-1}$$

۳-۱۴۲. اگر حالت پایا برای شرایط توصیف شده در مسئله 141 به راندمان 45 درصد برسد زمان لازم جهت رسیدن به حالت پایا را محاسبه کنید.

حل:

با ضریب تبدیل $x=0.45$ برای C_2 داریم:

$$C_2=C_1(1-x)=23(1-0.45)=12.65 \quad mg/litr$$

از رابطه (I) مسئله ۱۴۱ داریم:

$$\frac{dC_2}{dt}=8.45936-0.78922\,C_2$$

$$\Rightarrow \int_{C_1=23}^{C_2=12.65}\frac{dC_2}{-8.45936+0.78922\,C_2}=-\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{0.78922}\,ln\left(-8.45936+0.78922C_2\right)\Big]_{23}^{12.65}=2.34\ hr$$

۴ معادلات دیفرانسیل اصلی حاکم

۴-۱. برای هر دو بردار a و b ثابت کنید $|a-b|^2+|a+b|^2=2\left(|a|^2+|b|^2\right)$

حل:

$$|a-b|^2+|a+b|^2=(a-b).(a-b)+(a+b).(a+b)=a.a-a.b-b.a+b.b+a.a+a.b+b.a+b.b=$$
$$=2(a.a+b.b)=2\left(|a|^2+|b|^2\right)$$

۴-۲. زاویه بین دو بردار $a=10i+3j+2k$ و $b=-i+2j+3k$ را بدست آورید.

حل:

$$\cos\theta=\frac{a.b}{|a|\ |b|}=\frac{10\times(-1)+3\times 2+2\times 3}{\sqrt{10^2+3^2+2^2}\times\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}}=0.0503$$
$$\Rightarrow\theta=87.12^\circ$$

۴-۳. برای سه بردار $u=-2i+5j$ و $v=i+2j+3k$ و $w=2i+3k$ مطلوب است حاصل:

الف) $u.(v\times w)$ ب) $(u\times v).w$

حل:

الف)

$$v\times w=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=i(2\times 3-3\times 0)-j(1\times 3-3\times 2)+k(1\times 0-2\times 2)=6i+3j-4k$$

$$u.(v\times w)=(-2)\times 6+5\times 3+0\times(-4)=3$$

ب)

$$u\times v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=i(5\times 3-0\times 2)-j((-2)\times 3-0\times 1)+k((-2)\times 2-5\times 1)=15i+6j-9k$$

$$(u\times v).w=15\times 2+6\times 0+(-9)\times 3=3$$

۴-۴. هرگاه دو بردار $a=3i+4j-k$ و $b=2i+5k$ داده شده باشد مقدار α را طوری تعیین کنید که $a+\alpha b$ بر b عمود باشد

حل:

$$a+\alpha b=3i+4j-k+2\alpha i+5\alpha k=(3+2\alpha)i+4j+(5\alpha-1)k$$

$$b=2i+5k$$

برای عمود بودن دو بردار باید ضرب داخلی آن دو بردار برابر صفر باشد:

$$(a+\alpha b).b=0\Rightarrow 2(3+2\alpha)+5(5\alpha-1)=0$$

$$\Rightarrow 6+4\alpha+25\alpha-5=0\Rightarrow \alpha=-\frac{1}{29}$$

۴-۵. مطلوب است حاصل: الف) $i.i$, $j.j$, $i.j$, $j.k$ ب) $j\times k$, $k\times i$, $i\times j$

حل:

$$i.i=1\times 1\times \cos 0=1\ ,\ j.j=1\times 1\times \cos 0=1$$

$$k.k=1\times 1\times \cos 0=1\ ,\ j.k=1\times 1\times \cos 90=0$$

$$j\times k=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i\times 1+0+0=i$$

به همین ترتیب: $k\times i=j$, $i\times j=k$

۴-۶. هرگاه $\mathbf{u}=x^2yz^{1/2}$، گرادیان $\mathbf{u}$ را بدست آورید.

حل:

$$\nabla\mathbf{u}=i\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}+j\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}+k\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}=(2xyz^{1/2})i+(x^2z^{1/2})j+(\frac{1}{2}x^2yz^{-1/2})k$$

۴-۷. هرگاه $\mathbf{u}=xi+y^2j+3zk$، دیورژانس $\mathbf{u}$ را بدست آورید.

حل:

$$\nabla.\mathbf{u}=div\ \mathbf{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=1+2y+3=4+2y$$

۴-۸. سرعت $\mathbf{v}=ui+vj+wk$ داده شده است الف) حاصل $\mathbf{v}.\nabla$ یک بردار است یا اسکالر؟ ب) بیان $\mathbf{v}.\nabla$ بر حسب مولفه‌های سرعت در مختصات کارتزین چگونه است؟ ج) تعبیر فیزیکی عبارت $\mathbf{v}.\nabla$ چیست؟

حل:

با توجه به اینکه حاصلضرب داخلی دو بردار یک اسکالر است $\nabla.\mathbf{v}$ اسکالر می‌باشد.

$$\mathbf{v}.\nabla=(ui+vj+wk).(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z})=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

تعبیر فیزیکی $\nabla.\mathbf{v}$ نرخ حجمی خالص جریان سیال از یک حجم معیار بسیار کوچک بر واحد حجم می‌باشد.

۴-۹. توزیع سرعت با عبارت $\mathbf{v}=2x^2yi-3yj+8tk$ داده شده است توزیع شتاب جریان را محاسبه کنید. مقدار $x=8i+12j$, $t=6sec$ کدام است؟

حل:

$$\mathbf{a}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+u\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}+v\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}+w\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=8 \quad , \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}=4xyi \quad , \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}=2x^2i-3j \quad , \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}=0$$

در $x=8i+12j$ و $t=6s$ داریم:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}=4\times8\times12i=384i \quad , \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}=2\times8^2i-3j=128i-3j$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}=0 \quad , \quad u=2\times8^2\times12=1536 \quad , \quad v=-3\times12=-36 \quad , \quad w=8\times6=48$$

$$\Rightarrow\mathbf{a}=8k+1536\times384i+(-36)\times(128i-3j)+0=585216i+108j+8k$$

۴-۱۰. اگر توزیع سرعت با عبارت $\mathbf{v}=10i-(x^2+y^2)j-2xyzk$ داده شده باشد توزیع شتاب را در $x=2i-3j+2k$ بدست آورید.

حل:

$$a=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial x}=2xj-2yzk \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}=2yj-2xzk \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial z}=-2xyk$$

در $x=2i-3j+2k$ داریم:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}=2\times2j-2\times(-3)\times2k=4j+12k$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}=2\times(-3)j-2\times2\times2k=-6j-8k$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}=-2\times2\times(-3)k=12k$$

$$u=10 \quad , \quad v=2^2+(-3)^2=13 \quad , \quad w=-2\times2\times(-3)\times2=24$$

$$\Rightarrow\mathbf{a}=0+10\times(4j+12k)+13(-6j-8k)+24\times12k=-38j+304k$$

۴-۱۱. بردار سرعت $\mathbf{v}=ui+vj+wk$ داده شده است. ثابت کنید شتاب ذرات سیال به وسیلهٔ معادله $\mathbf{a}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right)+\Gamma\times\mathbf{v}$ بدست می‌آید. Γ چرخش است

حل:

داریم: $\mathbf{a}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}$

بنابراین باید ثابت کنیم: $(\mathbf{v}.\nabla)=\nabla\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right)+\Gamma\times\mathbf{v}$

$$(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}=\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right).(ui+vj+wk)$$

$$=\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)i+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)j+\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)k$$

$$\nabla\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}.\mathbf{v})=\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)i+\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial y}\right)j+\left(u\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)k$$

$$\Gamma=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)k$$

$$\Gamma\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \\ u & v & w \end{vmatrix}=$$

$$=i\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)w-\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)v\right]-j\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)w-\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)u\right]+k\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)v-\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)u\right]$$

$$=i\left(w\frac{\partial u}{\partial z}-w\frac{\partial w}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+j\left(-w\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+k\left(v\frac{\partial w}{\partial y}-v\frac{\partial v}{\partial z}-u\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\nabla\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right)+\Gamma\times\mathbf{v}=\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial u}{\partial z}-w\frac{\partial w}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+$$

$$+\left(u\frac{\partial u}{\partial y}-v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}\right)j+\left(u\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z}+v\frac{\partial w}{\partial y}-v\frac{\partial v}{\partial z}-u\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial w}{\partial x}\right)k$$

$$=\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)i+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)j+\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)k=(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}$$

۴-۱۲. بردار $\mathbf{v}=-1.5i+3j-4.5k$ داده شده است. بردار واحد در جهت $\mathbf{v}$ را بدست آورید.

حل:

$$n=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{-1.5i+3j-4.5k}{\sqrt{(-1.5)^2+3^2+(-4.5)^2}}=-0.2673i+0.5345j-0.8018k$$

۴-۱۳. یک جریان دو بعدی با روابط $u=-y/b^2$ و $v=x/a^2$ معرض شده است نشان دهید که این جریان مربوط به یک سیال تراکم ناپذیر است. همچنین نشان دهید که بیضی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ یکی از خطوط جریان است.

حل: $\nabla\vec{\mathbf{v}}=0$ برای سیال تراکم‌ناپذیر

$$\nabla=i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{v}=ui+vj+wk \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}=-\frac{y}{b^2}i+\frac{x}{b^2}j$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(-y/b^2)=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x/a^2)=0 \qquad\qquad \Rightarrow\nabla\mathbf{v}=0$$

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}=\frac{-b^2x}{a^2y}$$ معادله خط جریان

برای نشان دادن اینکه بیضی داده شده یک خط جریان می‌باشد $\frac{dy}{dx}$ را برای آن حساب می‌کنیم و در صورت تساوی با مقدار محاسبه شده در بالا حکم ما ثابت است.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{b}{2}\left(\frac{-2x}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

بنابراین بیضی داده شده یکی از خطوط جریان است.

۴-۱۴. تابع دلخواه Ψ داده شده است به طوریکه: $u(x,y)=\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ و $v(x,y)=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}$

چرخش Γ را بر حسب Ψ بدست آورید. Ψ را تابع جریان می‌نامند.

حل:

داریم: $\omega_x=\omega_y=0$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)=-\frac{1}{2}\nabla^2(\Psi)$$

$$\Gamma=2\times\left(-\frac{1}{2}\nabla^2(\Psi)\right)=-\nabla^2(\Psi)$$

۴-۱۵. برای چرخش در هر جریان ثابت کنید $\nabla.\Gamma=0$

حل:

$$\nabla.\Gamma=\nabla.(\nabla\times\mathbf{v})$$

با توجه به دو خاصیت زیر در جبر بردارها داریم:

$$\begin{cases} a.(b\times c)=(a\times b).c \\ a\times a=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla.\Gamma=\nabla.(\nabla\times\mathbf{v})=(\nabla\times\nabla).\mathbf{v}=0.\mathbf{v}=0$$

۴-۱۶. آیا توزیع سرعت $\mathbf{v}=5xi+5yj+(-10z)k$ در معادله پیوستگی برای جریان تراکم‌ناپذیر صدق می‌کند؟

حل:

$$u=5x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(5x)=5$$

$$v=5y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(5y)=5$$

$$w=-10z \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(-10z)=-10$$

$$\Rightarrow \nabla.\mathbf{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=5+5-10=0$$

بنابراین در معادله پیوستگی صدق می‌کند.

۴-۱۷. مکعبی را در نظر بگیرید که طول هر ضلع آن 1m است و در ربع اول دستگاه مختصات قرار دارد. اضلاع مکعب به موازات محورها هستند و یکی از گوشه‌هایش بر مبدأ مختصات منطبق است. برای توزیع سرعت داده شده در مسأله قبل، دبی عبوری از هر یک از وجوه مکعب را بدست آورید. نشان دهید که اگر دانسیته سیال ثابت باشد، هیچ جرمی در داخل مکعب انباشته نمی‌شود.

حل:

به حل مسئله ۵-۳ مراجعه شود.

۴-۱۸. مربعی را در نظر بگیرید که گوشه های آن در نقاط $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$ قرار دارد توزیع سرعت به صورت $\mathbf{v} = i\,(16y-12x)+j\,(12y-9x)$ داده شده‌است. دبی عبوری از هر یک از اضلاع مربع (به‌ازای واحد طول در امتداد z) را بدست آورید و نشان دهید که معادلهٔ پیوستگی برقرار است.

حل:

به حل مسئله ۶-۳ مراجعه شود.

۴-۱۹. نشان دهید که توزیع سرعت $v = i\dfrac{4x}{x^2+y^2}+j\dfrac{4y}{x^2+y^2}$ در تمام نقاط غیر از مبدأ مختصات، در معادلهٔ پیوستگی صدق می‌کند.

حل:

$$u=\frac{4x}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4x}{x^2+y^2}\right)=\frac{4(x^2+y^2)-2x(4x)}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v=\frac{4y}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4y}{x^2+y^2}\right)=\frac{4(x^2+y^2)-2x(4x)}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4x^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\nabla.\mathbf{v}=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}=\frac{4y^2-4x^2+4x^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2}=0\Rightarrow$$ *معادله پیوستگی برقرار است.*

$\mathbf{x}\neq 0 \quad , \quad \mathbf{y}\neq 0$

۴-۲۰. توزیع سرعتی که در مسأله قبل معرفی شد، بیانگر جریانی است که سرعت آن در تمام نقاط در امتداد شعاعی و به طرف خارج از مبدأ است و مقدار آن $v_r = 4/r$ می‌باشد نشان دهید که دبی عبوری از دوایری که مرکز آنها مبدأ مختصات است (به ازای واحد طول در امتداد z) یکسان است.

حل:

سطح مذبور به صورت استوانه‌ای به طول واحد (در امتداد z) و شعاع r می‌باشد و داریم:

$$A=2\pi r L=2\pi r\times 1=2\pi r$$

با توجه به اینکه سطح موردنظر استوانه‌ای است بنابراین باید سرعت شعاعی باشد: $\mathbf{v}_r=\dfrac{4}{\mathbf{r}}$

$$m=\rho VA=\rho\times\frac{4}{r}\times 2\pi r=8\pi\rho=cte$$

۴-۲۱. روابط زیر بین مختصات دکارتی و قطبی برقرار می‌باشد.

$$x^2+y^2=r^2\ ,\quad \frac{y}{x}=tan\theta\quad ,\quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$u=v_r cos\theta-v_\theta sin\theta\qquad v=v_r sin\theta+v_\theta cos\theta$$

با استفاده از این روابط شکل معادله پیوستگی را برای مختصات قطبی بدست آورید. آیا سرعت داده شده در معادله بدست آمده صدق می‌کند؟

حل:

$$x^2+y^2=r^2\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\quad ,\quad\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$$

$$\frac{y}{x}=tan\theta\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-sin\theta cos\theta}{x}\quad ,\quad\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{cos^2\theta}{x}$$

$$x^2+y^2=r^2\quad\Rightarrow\quad 1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{y^2}{x^2}=1+tan^2\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}(v_r cos\theta-v_\theta sin\theta)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}(v_r cos\theta-v_\theta sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$=(cos\theta\frac{\partial v_r}{\partial r})\times\frac{x}{r}+(-sin\theta v_r-sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-cos\theta v_\theta)(\frac{-sin\theta cos\theta}{x})$$

$$=\frac{xcos\theta}{r}\ \frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{sin^2\theta cos\theta}{x}v_r+\frac{sin^2\theta cos\theta}{x}\ \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{sin\theta cos^2\theta v_\theta}{x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}(v_r sin\theta+v_\theta cos\theta)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}(v_r sin\theta+v_\theta cos\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$=(sin\theta\frac{\partial v_r}{\partial r})\frac{y}{r}+(v_r cos\theta+cos\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-sin\theta v_\theta)\frac{cos^2\theta}{x}$$

$$=\frac{ysin\theta}{r}\ \frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{cos^3\theta}{x}v_r+\frac{cos^3\theta}{x}\ \frac{\partial v\theta}{\partial\theta}-\frac{sin\theta cos^2\theta v_\theta}{x}$$

$$\nabla .v=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow\nabla=\frac{xcos\theta}{r}\ \frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{sin^2\theta cos\theta}{x}v_r+\frac{sin^2\theta cos\theta}{x}\ \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{ysin\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{cos^3\theta}{x}v_r+\frac{cos^3\theta}{x}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}$$

$$=\frac{xcos\theta+ysin\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{sin^2\theta cos\theta+cos^3\theta}{x}v_r+\frac{sin^2\theta cos\theta+cos^3\theta}{x}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}$$

$$\frac{xcos\theta+ysin\theta}{r}=\frac{xcos\theta+x\frac{sin\theta}{cos\theta}\times sin\theta}{r}=\frac{x}{rcos\theta}$$

$$\frac{sin^2\theta cos\theta+cos^3\theta}{x}=\frac{cos\theta}{x}(sin^2\theta+cos^2\theta)=\frac{cos\theta}{x}$$

$$\Rightarrow \nabla \mathbf{v} = \frac{x}{r\cos\theta}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{x}v_r + \frac{\cos\theta}{x}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{x}{r\cos\theta} \times \frac{x}{r\cos\theta}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{x^2}{r^2\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)} = \frac{1}{\cos^2\theta+\cos^2\theta\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = 1$$

معادله پیوستگی در مختصات قطبی:

$$\Rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

۴-۲۲. اگر در یک جریان یک بعدی $\mathbf{v} = u(x,t)i + 0j + 0k$ و دانسیته ثابت نبوده و با رابطه $\rho = \rho_0(1.5+\cos wt)$ داده شده باشد سرعت $\mathbf{v}$ را پیدا کنید طوریکه $u(0,t)=U$ (a ثابت‌است.)

حل:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\rho_0 w \sin wt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0(1.5+\cos wt).u) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\rho_0 w \sin wt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0(1.5+\cos wt).u) = 0$$

با انتگرال‌گیری و ساده‌کردن: $(1.5+\cos wt)u = x w \sin wt + c$

$$u(0,t) = U \Rightarrow c = U(1.5+\cos wt)$$

$$\Rightarrow u = \frac{x\,\omega \sin wt}{1.5+\cos wt} + U$$

۴-۲۳. تابع دلخواه $\phi(x,y)$ داده شده است به طوریکه: $u(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ و $v(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}$
نشان دهید برای یک جریان تراکم ناپذیر تابع پتانسیل در معادله لاپلاس $\nabla^2\phi = 0$ صادق است.

حل:

با توجه به معادله پیوستگی برای جریان تراکم‌پذیر داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

۴-۲۴. پتانسیل یک جریان $\phi(x,y) = x$ است. سرعتهای $u(x,y)$ و $v(x,y)$ را بدست آورده و توزیع سرعت جریان را رسم کنید

حل:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$$

۴-۲۵. مسأله قبل را برای $\phi(x,y) = \ln(x^2+y^2)/4\pi$ تکرار کنید.

حل:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{4\pi}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

۴-۲۶.برای یک سیال تراکم ناپذیر مولفه‌های سرعت $u(x,y,z)$ و $w(x,y,z)$ به صورت زیر داده شده

است $0 \le x,y,z \le 1$ $w=0$ و $u=(1+xy)(a_0+a_1x+a_2x^2)$

مولفه سرعت $v=(x,y,z)$ را بدست آورید. ایااین توزیع جریان معقول است؟

حل:

با استفاده از معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_1+2a_2x+y(a_0+2a_1x+3a_2x^2) \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=-a_1-2a_2x-y(a_0+2a_1x+3a_2x^2)$$

$$\Rightarrow v=-y(a_1+2a_2x)-\frac{y^2}{2}(a_0+2a_1x+3a_2x^2)+c$$

۴-۲۷. نشان دهید برای یک سیال تراکم ناپذیر نرخ تغییر حجم صفر است.

حل:

با توجه به معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{dm}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\rho V)}{dt}=0 \quad , \quad \rho=const \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}=0$$

۴-۲۸. توزیع تنش به صورت زیر داده شده است:

$$\tau_{xx}=16x^2-8xy \ , \ \tau_{yy}=16y^2+8xy \ , \ \tau_{xy}=-5x^2 \ , \ \tau_{zz}=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$$

تابعی برای تنش حجمی به صورت توزیع اسکالر بدست آورید. مقدار تنش حجمی در نقطه $2i+4j+3k$ چقدر است؟

حل:

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{3}(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})=\frac{1}{3}(16x^2-8xy+16y^2+8xy+0)=\frac{16}{3}(x^2+y^2)$$

درنقطه $2i+4i+3k$ داریم:

$$\bar{\sigma}=\frac{16}{3}\times(2^2+4^2)=106.67$$

۴-۲۹. هرگاه $p=xy+(x+z^2)+10$ داده شده باشد. نیرو بر واحد حجم در جهت $n=2i+3j$ را بدست آورید.

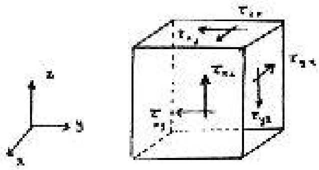
حل:

$$F=-\nabla p=-(y+1)i-xj-2zk$$

$$F.n=-(y+1)\times 2-x\times 3=-2y-3x-2$$

۴-۳۰. تنش‌های موثر روی المان جسم نشان داده شده در شکل ۱۲-۴ را مشخص کنید.

حل:



شکل ۱۲-۴

۴-۳۱. توزیع تنش به صورت زیر داده شده است:

$\sigma_{xx}=2x^2+4xy-3y^2,\ \tau_{xy}=3x^2-6xy-2y^2$

$\sigma_{yy}=2y^2-4xy+3x^2,\ \sigma_{zz}=\tau_{xy}=\tau_{yz}=0$

تعیین کنید آیا در غیاب نیروی بدنی تعادل وجود دارد؟

حل:

برای حالت تعادل داریم:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=0 \quad (2)$$

$(1) \quad : \quad 4x+4y-6x-4y=-2x\neq 0$

$(2) \quad : \quad 6x-6y+4y-4x=2x-2y\neq 0$ تعادل برقرار نیست

۴-۳۲. برای یک جریان دو بعدی مشخص شده است که نیروی بدنی وجود نداشته و برای توزیع تنش $\sigma_{zz}=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$ می‌باشد. نشان دهید که تابع دلخواه $\phi(x,y)$ وجود دارد به طوریکه

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}$$

حل:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=\frac{\partial^3\phi}{\partial x\,\partial y^2}+\left(-\frac{\partial^3\phi}{\partial y^2\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\phi}{\partial y\,\partial x^2}=0$$

۴-۳۳. تابع دلخواه $\phi(x,y)$ در مسأله قبل به صورت $\phi=x^2y^3-e^{-xy}$ داده شده است. تانسور تنش را در نقطه $(x,y)=(2.7)$ در غیاب نیروی بدنی بدست آورید.

حل:

تانسور تنش عبارت است از:

$$\tau_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

$\tau_{xy}=\tau_{yx} \quad , \quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=0 \quad , \quad \tau_{yz}=\tau_{zy}=0$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + ye^{-xy}) = -(6xy^2 + (e^{-xy} + y\times -e^{-xy})) = -6xy^2 - e^{-xy} - xye^{-xy}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 6x^2y - x^2e^{-xy}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2y^3 - y^2e^{-xy}$$

در نقطه $(x,y)=(2,7)$ داریم:

$$\tau_{xy} = -6\times 2\times v^2 - e^{-2\times 7} - 2\times 7\times e^{-2\times 7} = -588$$

$$\sigma_{xx} = 6\times 2^2\times 7 - 2^2\times e^{-2\times 7} = 168$$

$$\sigma_{yy} = 2\times 7^3 - 7\times e^{-2\times 7} = 686$$

۴-۳۴. توزیع فشار برای یک سیال به صورت $P=\alpha(x^2+y^2)$ داده شده است که در آن α مقدار ثابتی است.

الف) دیمانسیون ثابت α چیست؟ ب) مقدار گرادیان فشار چقدر است؟

حل:

$$P=\alpha(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow [\alpha]=[P]/L^2=FL^{-2}/L^2=FL^{-4}$$

گرادیان فشار:

$$\nabla .P = 2x\alpha i + 2y\alpha j$$

مقدار گرادیان فشار:

$$\Rightarrow \nabla .P = \sqrt{(2x\alpha)^2 + (2y\alpha)^2} = 2\alpha\sqrt{x^2+y^2}$$

۴-۳۵. $\nabla.\mathbf{v}$ را برای بردار سرعت مسأله ۱۹-۴ بدست آورید.

حل:

با توجه به حل مسأله ۱۹ داریم:

$$\nabla.\mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

۴-۳۶. برای توزیع سرعت $\mathbf{v}=112.5\,(y^2i+x^2j)$ (برحسب m/s) گرادیان فشار را در نقطه $(1.25\ ,\ 2)$ محاسبه کنید. چگالی سیال 1.4 بوده و اثرات لزجت قابل صرفنظر کردن است.

حل:

با استفاده از معادله $(4.4.8)$ و با صرفنظر کردن از اثرات ویسکوز داریم:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}\right) = -\rho g\nabla h - \nabla P$$

$$\Rightarrow \nabla P = -\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}\right) - \rho g\nabla h$$

$$(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v} = u\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 112.5\,xy^2\times 2xj + 112.5\,xx^2\times 2yi + 0 = 225x^2yi + 225xy^2j$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla P = -1400(0 + 225x^2y\,i + 225xy^2j) - 1400\times 9.806k$$

در نقطه (1.25,2) داریم:

$$\nabla P = -1400(225\times 1.25^2 \times 2i + 225\times 1.25\times 2^2 j) - 1400\times 9.806k$$

$$= -9.84(10^5)i - 15.75(10^5)j - 0.14(10^5)k \quad N/m^3$$

۴-۳۷. در مساله ۱۷-۴ نرخ مومنتم عبوری در امتداد x از مکعب را بدست آورید.

تذکر: هر شش وجه مکعب را در نظر بگیرید.

حل:

معادله اندازه حرکت در راستای محور xها عبارت است از: $p = \int_{cs} \rho v_x \, v.dA$

بنا به مسأله ۲۵ مقدار اندازهٔ حرکت در صفحات x=0 و y=0 و z=0 برابر صفر می‌باشد.

در صفحه y=1: $v_x = 5x \qquad v.dA = v_y dA = 5dA$

$$p = \int \rho.5x.5dA = \int_0^1 25\rho x\ (1.dx) = \frac{25}{2}\rho = 12.5\rho$$

در صفحه x=1: $P = 25\rho$

در صفحه z=1: $P = -25\rho$

نرخ عبور مومنتم در امتداد x $= 12.5\rho + 25\rho - 25\rho = 12.5\rho$

۴-۳۸. در مساله ۱۷-۴ نرخ مومنتم خروجی در جهت y از شکل مذبور برای سرعت داده شده را بدست آورید.

حل:

معادله اندازه حرکت در راستای عمود yها عبارت است از: $P = \int_{cs} \rho v_y \, v.dA$

برای صفحه x=0: $v_y = (12y - 9\times 0) = 12y \qquad v.dA = (16y - 12\times 0)dA = 16y dA$

$$P = \int \rho \times 12y \times 16y dA = \int_0^1 192\rho y^2 (1.dy) = \frac{192}{3}\rho = 64\rho$$

به همین ترتیب خواهیم داشت

صفحه x=1: $P = 28\rho$

صفحه y=0: $P = 27\rho$

صفحه y=1: $v_y = (12 - 9x) \qquad v.dA = (12 - 9x)dA$

$$p = \int_{cs} (12-9x)\rho \times (12-9x)dA = \int_0^1 (144 - 216x + 81x^2)\rho(1.dx) = (144 - 108 + 27)\rho = 63\rho$$

$\Rightarrow$ نرخ خروج مومنتم در جهت y $= (64 + 28 + 27 + 63)\rho = 182\rho$

۴-۳۹. در مساله ۱۷-۴ نیروی وارد به سیال داخل مکعب در امتداد z چقدر است؟ محور z را در خلاف

جهت اثر نیروی ثقل بگیرید.

حل:

به حل مسئله ۵-۳ مراجعه شود.

۴۰-۴. در مساله ۱۸-۴ نیروی وارد به حجم کنترل در امتداد y چقدر است؟ محور y را در خلاف جهت اثر نیروی ثقل بگیرید.

حل:

به حل مسئله ۵-۳ مراجعه شود.

۴۱-۴. نشان دهید برای یک جریان دو بعدی توزیع چرخش در معادله زیر صادق است:
$$\frac{D\Gamma}{Dt}=\nu\nabla^2\Gamma$$

حل:

با توجه به معادله ناویراستوکس داریم:
$$\rho\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right)=-\rho g\nabla h-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{v}$$
$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}$$

کرل طرفین معادله فوق را تعیین می‌کنیم
$$\Rightarrow\nabla\times\left[\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\rho(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}\right]=\mu\nabla\times\nabla^2\mathbf{v}$$

(توجه: کرل توابع اسکالر و اعداد ثابت برابر صفر است)
$$\nabla\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{v}=\frac{\partial\Gamma}{\partial t}$$
$$\nabla\times\left[(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}\right]=(\mathbf{v}.\nabla)\Gamma-(\Gamma.\nabla)\mathbf{v}$$
$$\nabla\times\nabla^2\mathbf{v}=\nabla^2(\nabla\times\mathbf{v})=\nabla^2\Gamma$$

با تقسیم طرفین بر ρ $\Rightarrow\dfrac{D\Gamma}{Dt}=(\Gamma.\nabla)\mathbf{v}+\nu\nabla^2\Gamma$

برای حالت دو بعدی: $\omega_x=\omega_y=0 \quad , \quad w=0$
$$(\Gamma.\nabla)\mathbf{v}=0$$
$$\Rightarrow\frac{D\Gamma}{Dt}=\nu D^2\Gamma$$

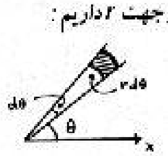
۴۲-۴. معادله پیوستگی را برای پایا، دوبعدی، و تراکم ناپذیر در مختصات قطبی بدست آورید.

حل:

با انتخاب المان سطح به شکل زیر داریم: (با فرض سیال تراکم‌ناپذیر)

دبی حجمی خالص خروجی از المان $=0$

در جهت r داریم:



$$-(v_r)rd\theta+\left[v_r+\frac{\partial(v_r)}{\partial r}dr\right](r+dr)d\theta=v_rdrd\theta+\frac{\partial(v_r)}{\partial r}rdrd\theta+\frac{\partial(v_r)}{\partial r}(dr)^2d\theta=$$
$$=\frac{\partial}{\partial r}(v_r)drd\theta$$

در جهت θ داریم :

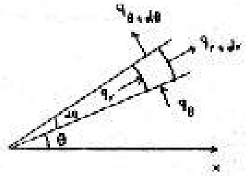
$$-(v_\theta)d\theta+\left[v_\theta+\frac{\partial(v_\theta)}{\partial\theta}d\theta\right]dr=\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}dr$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)drd\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}drd\theta=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=0$$

۴-۴۳- معادله انتقال حرارت را برای جریان پایا، دو بعدی و تراکم ناپذیر در مختصات قطبی بدست آورید.

حل:

با توجه به شرایط ذکر شده در مسأله داریم:



$E_{in}-E_{out}=0$: موازنه انرژی

$$q_r-q_{r+dr}+q_\theta-q_{\theta+d\theta}=0$$

$$q_{r+dr}=q_r+\frac{\partial q_r}{\partial r}dr\quad,\quad q_{\theta+d\theta}=q_\theta+\frac{\partial q_\theta}{\partial\theta}d\theta$$

$$q_r=-k(rd\theta)\frac{dT}{\partial r}\qquad,\qquad q_\theta=-k(dr)\frac{\partial T}{r\partial r}$$

$$q_r-q_r-\frac{\partial q_r}{\partial r}dr+q_\theta-q_\theta-\frac{\partial q_\theta}{\partial\theta}d\theta=0\ :\ -\frac{\partial q_r}{\partial r}dr-\frac{\partial q_\theta}{\partial\theta}d\theta=0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[krd\theta\frac{\partial T}{\partial r}\right]dr+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[kdr\frac{\partial T}{r\partial\theta}\right]d\theta=0$$

$$d\theta dr\frac{\partial}{\partial_r}\left[kr\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{1}{r}drd\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[k\frac{\partial T}{\partial\theta}\right]=0$$

$$k=const\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2}=0$$

توجه: این مسأله را می‌توانیم از طریق مستقیم یعنی از طریق تبدیل مختصات دکارتی به قطبی حل کنیم. این طریق در مسأله بعدی که مربوط به معادلات انتقال جرم می‌باشد آورده شده است.

۴-۴۴- معادله انتقال جرم را برای شرایط یکسان با مسأله قبل در مختصات قطبی بدست آورید.

حل:

معادله انتقال جرم برای شرایط داده شده: (با توجه به معادله 4.8.10a)

$$(\mathbf{v}.\nabla)c=D\nabla^2c$$

$$\begin{cases}i_r=i\cos\theta+j\sin\theta\\ i_\theta=-i\sin\theta+j\cos\theta\end{cases}$$

$$\frac{\partial i_r}{\partial r}=\frac{\partial i_\theta}{\partial r}=0\ ,\ \frac{\partial i_r}{\partial\theta}=-i\sin\theta+j\cos\theta=i_\theta\ ,\ \frac{\partial i_\theta}{\partial\theta}=-i\cos\theta-j\sin\theta=-i_r$$

$$(\mathbf{v}.\nabla)=(i_ru_r+i_\theta u_\theta)\left(i_r\frac{\partial}{\partial_r}+i_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=i_ru_ri_r\frac{\partial}{\partial r}+i_ru_ri_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+i_\theta u_\theta i_r\frac{\partial}{\partial r}+i_\theta u_\theta i_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-$$

$$=u_r\frac{\partial}{\partial_r}+\frac{1}{r}u_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$(\mathbf{v}.\nabla)c = u_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\ \frac{\partial c}{\partial \theta}$$

$$\nabla^2 = \nabla.\nabla = (i_r \frac{\partial}{\partial_r} + i_\theta \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}).(i_r \frac{\partial}{\partial r} + i_\theta \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + i_\theta \frac{1}{r} (\frac{\partial i_r}{\partial \theta}\ \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\partial i_\theta}{\partial \theta} \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta} + i_\theta \frac{1}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2})$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + i_\theta . \frac{1}{r} . i_\theta \frac{\partial}{\partial r} + i_\theta \frac{1}{r} . i_r \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + i_\theta \frac{1}{r} (-i_r) \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta} + i_\theta . \frac{1}{r} . i_\theta . \frac{1}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} =$$

$$= \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial_r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\nabla^2 c = \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial_r} (r \frac{\partial c}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2}$$

$$\Rightarrow u_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\ \frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial c}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2}$$

۴-۴۵. برای سیال توصیف شده در مسأله ۴-۲۶ توزیع دما به صورت $T = T_0 e^{-kt} \sin ax \cos by$ داده شده است که در آن k و a و b مقادیر ثابت هستند. یک عبارت جبری برای نرخ تغییر دمای کلی (DT/Dt) بدست آورید.

حل:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla T = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -kT_0 e^{-kt} \sin ax \cos by \ ,\ \frac{\partial T}{\partial x} = aT_0 e^{-kt} \cos ax \cos by ,\ \frac{\partial T}{\partial y} = -bT_0 e^{-kt} \sin ax \sin by ,\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$u = (1+xy)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\ ,\ v = -y(a_1 + 2a_2 x) - y^2/2 \times (a_0 + a_1 x + a_2 x^2), w = 0$$

$$\Rightarrow \frac{DT}{Dt} = T_0 e^{-kt} \left(-k \sin ax \cos by + a(1+xy)(a_0 + a_1 x - a_2 x^2) \cos ax \cos by + b[y(a_1 + 2a_2 x) + y^2/2 \times (a_0 + 2a_1 x + 3a_2 x^2)] \sin ax \sin by \right)$$

۴-۴۶. با استفاده از معادلات ناویراستوکس، این معادلات را برای جریان یک بعدی، پایا، لزج و تراکم‌ناپذیر بدست آورید.

حل:

برای حالت یک بعدی: $\mathbf{v} = u(x) i$

معادله پیوستگی: $\frac{du}{dx} = 0$

با توجه به معادله ناویراستوکس داریم:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\rho g \nabla h - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = u\frac{du}{dx} \ , \nabla p = \frac{dp}{dx} \ , \ \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{d^2 u}{dx^2} \ , \ \rho g \nabla h = 0$$

$$\Rightarrow \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dx^2}$$

۴-۴۷. با استفاده از معادله دیفرانسیل انتقال حرارت، معادله دیفرانسیل حاکم بر شرایط یک بعدی، پایا، برای دیواره بدون تولید گرما بدست آورید.

هرگاه دما در یک سطح دیواره برابر T_1 و در سطح دیگر برابر T_2 نگهداشته شود و ضخامت دیواره d باشد توزیع دما را در این دیواره بدست آورید.

حل:

داریم:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$T = C_1 x + C_2$: **با دوبار انتگرالگیری**

ثابتهای C_1 و C_2 با توجه به شرایط مرزی زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} x=0 \ , \ T=T_1 \\ x=d \ , \ T=T_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{d} \quad , \quad C_2 = T_1$$

$$\Rightarrow T = \frac{T_2 - T_1}{d} x + T_1$$

۴-۴۸. مایعی روی یک صفحه پهن نازک با حلالیت اندک جریان دارد. در ناحیه‌ای که نفوذ در آن وجود دارد ممکن است سرعت مایع به موازات صفحه فرض شده و با معادله $u=y^2/2$ داده شده باشد y فاصله از صفحه و D_{AW} ثابت می‌باشد. نشان دهید معادله حاکم بر انتقال جرم با برخی فرضیات ساده کننده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D_{AW}\left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2}\right) = \frac{y^2}{2} \frac{\partial c_A}{\partial x}$$

فرضیات ساده کننده را بیان کنید.

حل:

فرضیات:

الف) یک بعدی $v=w=0$ **ب) حالت پایا** $\frac{\partial c_i}{\partial t} = 0$

ج) بدون واکنش شیمیایی د) به علت ضخامت کم صفحه از تغییرات غلظت در جهت z صرفنظر می‌شود.

$$\Rightarrow u\frac{\partial c_A}{\partial x}=D_{AW}\left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2}\frac{\partial c_A}{\partial x}=D_{Aw}\left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2}\right)$$

۴-۴۹. $0.01kg/s$ هیدروژن در لوله‌ای به قطر $50\ mm$ جریان دارد. در مقطعی فشار $280\ kPa\ abs$ و دما $25c$ است سرعت متوسط چقدر است؟

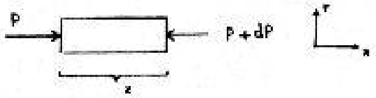
حل:

به حل مسئله ۳-۳ مراجعه شود.

۴-۵۰. سیالی در یک لوله استوانه‌ای افقی طویل به شعاع R در جریان است. سیال دارای لزجت μ است. نشان دهید $u=C(R^2-r^2)/4\mu$ که در آن r فاصله شعاعی از محور مرکزی لوله و C مقدار ثابت است.

حل:

المان استوانه‌ای کوچکی از سیال را در نظر می‌گیریم با توجه به اینکه در جریان دائمی با وجود تغییر شکل المان نیروهای وارد بر آن در حال تعادل می‌باشند داریم:



(F نیروی اصطکاک)

$$\sum F=0 \Rightarrow PA-(P+dP)A+F=0 \Rightarrow -dP.A+F=0$$ درجهت جریان

$$F=\tau.A=\mu\frac{du}{dr}.(2\pi r\,dx)$$

$$\Rightarrow -dP.(\pi r^2)+\mu\frac{du}{dr}.(2\pi r)dx=0$$

توجه: $\frac{du}{dr}$ ثابت می‌باشد چون پروفیل سرعت در جهت جریان ثابت می‌ماند

$$\Rightarrow dP=\frac{2\mu}{r}\frac{du}{dr}.dx \Rightarrow \Delta P=\frac{2\mu}{r}\frac{du}{dr}.(x_2-x_1)=\frac{2\mu L}{r}\frac{du}{dr}$$

$$du=\frac{\Delta P.r}{2\mu L}dr \Rightarrow u=\frac{\Delta P r^2}{4\mu L}+c_1$$

با توجه به شرط: $r=R \Rightarrow u=0 \Rightarrow c_1=-\frac{\Delta P.R^2}{4\mu L}$

$$\Rightarrow u=\frac{\Delta P r^2}{4\mu L}-\frac{\Delta P R^2}{4\mu L}=-\frac{\Delta P}{4\mu L}(R^2-r^2)$$

$$-\frac{\Delta P}{L}=C \Rightarrow u=\frac{C(R^2-r^2)}{4\mu}$$

۴-۵۱. در شرایط داده شده مسأله قبل، سرعت متوسط جریان در لوله را محاسبه کنید نرخ جرمی جریان چقدر است؟

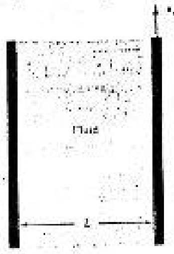
حل:

$$m=\int_{cs}\rho u.dA=\int_0^R \rho \frac{C(R^2-r^2)}{4\mu}.2\pi r dr=\frac{\pi C\rho}{2\mu}\int_0^R r(R^2-r^2)dr$$

$$=\frac{\pi C\rho}{2\mu}\left[\frac{R^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^R=\frac{\pi C\rho R^4}{8\mu}\quad kg/s$$

$$m=\rho A V_{av}\Rightarrow V_{av}=\frac{m}{\rho A}=\frac{\pi C\rho R^4}{8\mu}/(\rho.\pi R^2)=\frac{CR^2}{8\mu}$$

۴-۵۲. در شکل ۱۳-۴ یک سیال تراکم‌ناپذیر بین دو صفحه قایم موازی محدود شده است. صفحه سمت چپ ساکن بوده و صفحه سمت راست با سرعت v_w به سمت بالا حرکت می‌کند. با فرض اینکه جریان آرام باشد پروفیل سرعت را برای این سیال بدست آورید.



شکل ۱۳-۴

حل:

با استفاده از معادله ناویراستوکس داریم:

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\rho g\nabla h-\nabla P+\mu\nabla^2\mathbf{v}$$

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\rho\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+u\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+w\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right\}=0$$

$$\mu\nabla^2\mathbf{v}=\mu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial x^2}j \quad , \quad \nabla P=\frac{\partial P}{\partial y}.j$$

$$\Rightarrow 0=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial x^2}$$

($\frac{\partial P}{\partial y}$ مقدار ثابتی است)

معادله دیفرانسیل بالا را می‌توان از طریق جداسازی متغیرها و با دوبار انتگرال‌گیری حل نمود:

با انتگرالگیری $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{x}{\mu}\left\{-\rho g-\frac{\partial p}{\partial y}\right\}=c_1$

با انتگرالگیری دوباره $\Rightarrow v+\frac{x^2}{2\mu}\left\{-\rho g-\frac{\partial p}{\partial y}\right\}=c_1x+c_2$

ثوابت c_1 و c_2 را با استفاده از شرایط زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow v=0 \\ x=L \Rightarrow v=v_w \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1=\frac{v_w}{L}+\frac{L}{2\mu}\left\{-\rho g-\frac{\partial p}{\partial y}\right\} \quad , \quad c_2=0$$

با جاگذاری c_1 و c_2 و ساده کردن $\Rightarrow v=\frac{x}{L}v_w-\frac{\rho g+\partial p/\partial y}{2\mu}(Lx-x^2)$

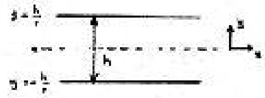
۴-۵۳. با استفاده از معادلات ناویراستوکس و پیوستگی پروفیل سرعت را برای جریان سیال لزج و تراکم‌ناپذیر بین دو صفحه موازی بدست آورید.

حل:

با استفاده از معادله ناویر-استوکس داریم:

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\rho g\nabla h-\nabla P+\mu\nabla^2\mathbf{v}$$

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=0\ ,\ \nabla p=\frac{\partial p}{\partial x}\ ,\ \mu\nabla^2\mathbf{v}=\mu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2}$$



$$0=-\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}(P+\rho gz)=-C\ \text{مقدار ثابت}$$

با دوبار انتگرالگیری داریم:

$$u=-\frac{C}{2\mu}y^2+c_1y+c_2$$

ثوابت c_1 و c_2 را با توجه به شرایط زیر تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases}y=\frac{h}{2}\ \Rightarrow\ u=0\\ y=-\frac{h}{2}\ \Rightarrow\ u=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1=0\ ,c_2=\frac{Ch^2}{8\mu}$$

$$\Rightarrow u=\frac{C(h^2-4y^2)}{8\mu}$$

۴-۵۴. مسأله ۴-۴۶ را (تحت شرایط یکسان) برای جریان دو بعدی در مختصات xy تکرار کنید.

حل:

برای حالت دو بعدی داریم:

$$\mathbf{v}=u(x,y)i+v(x,y)j$$

$$\text{معادله پیوستگی:}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

با توجه به معادله ناویراستوکس داریم:

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\rho g\nabla h-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{v}$$

در جهت x

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\ ,\ \rho g\nabla h=0\ ,\nabla p=\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\nabla^2\mathbf{v}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\qquad\nabla^2 u$$

$$\Rightarrow \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u$$

در جهت y

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\rho g\nabla h=0 \quad , \quad \nabla p=\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\nabla^2\mathbf{v}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad \nabla^2 v$$

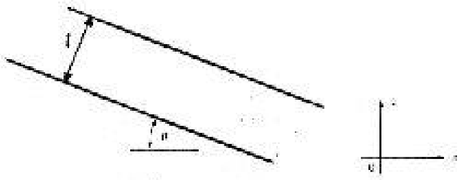
$$\Rightarrow \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v$$

۵۵-۴. توزیع سرعت در یک لوله با رابطه $\frac{v}{V_{max}}=\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/n}$ داده شده است، r_0 شعاع لوله و y فاصله از دیوارهٔ آن است. سرعت متوسط و ضریب تصحیح مومنتم را بدست آورید.

حل:

به حل مسئله ۵۸-۳ مراجعه شود.

۵۶-۴. لایه نازکی از یک مایع نیوتنی به ضخامت *t* بر روی یک سطح شیبدار به طرف پایین جریان دارد (شکل ۱۴-۴). با فرض عدم وجود اثرات انتهایی بر روی پروفیل سرعت، معادله پروفیل سرعت رایج به صورت تابعی از x بدست آورید.



شکل ۱۴-۴

حل:

با انتخاب محورهای مختصات مطابق شکل زیر داریم:

معادله اندازه حرکت را در جهت z می‌نویسیم:

$$\sum F_z=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho v_z\,dv+\int_{cs}\rho v_z\,\mathbf{v}.dA$$

$$\Rightarrow \tau_{xz}\Delta z\,\big|_x-\tau_{xz}\Delta z\,\big|_{x+\Delta x}+\rho g\,\Delta z\Delta x\sin\alpha=0+\rho v_z^2\,\Delta x\,\big|_{z=L}-\rho v_z^2\,\Delta x\,\big|_{z=0}$$

با توجه به اینکه مقدار v_z در z=0 و z=L برای هر مقدار x یکسان است طرف دوم معادله بالا برابر صفر است.

با تقسیم طرفین بر $\Delta x\Delta z$ داریم:

$$\frac{\tau_{xz}\Delta z\,\big|_x-\tau_{xz}\Delta z\,\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x}+\rho g\sin\alpha=0$$

موقعی که $y \to 0$ میل کند داریم:

$$\frac{d}{dx}\tau_{xz} = \rho g \sin\alpha$$

$\tau_{xz} = \rho g x \sin\alpha + c_1$:با انتگرال‌گیری از رابطه بالا

$x = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = 0$:با توجه به شرط

$$\Rightarrow c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \rho g x \sin\alpha$$

با توجه به قانون لزجت نیوتن داریم:

$$\tau_{xz} = -\mu\frac{dv_z}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_z}{dx} = -\frac{\tau_{xz}}{\mu} = -\frac{\rho g x \sin\alpha}{\mu}$$

$v_z = -\dfrac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}x^2 + c_2$:با انتگرال‌گیری

$x = t \Rightarrow v_z = 0$:با توجه به شرط

$$\Rightarrow v_z = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}(t^2 - x^2) \Rightarrow v_z = \frac{g\sin\alpha}{2\nu}(t^2 - x^2)$$

۴-۵۷. برای پروفیل سرعت بدست آمده در مسأله قبل سرعت متوسط جریان را بدست آورید. دبی جریان Q چقدر است؟

حل:

$$Q = \int_A v dA = \int_0^t \frac{g\sin\alpha}{2\nu}(t^2 - x^2).b.dx =$$

$$= \frac{bg\sin\alpha}{2\nu}\int_0^t (t^2 - x^2)dx = \frac{bg\sin\alpha}{2\nu}\left(t^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_0^t = \frac{bgt^3\sin\alpha}{3\nu}$$

(b عرض صفحه می‌باشد)

$$Q = AV_{av} \Rightarrow V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{bgt^3\sin\alpha/3\nu}{t.b} = \frac{gt^2\sin\alpha}{3\nu}$$

۴-۵۸. برای پروفیل سرعت بدست آمده در مسأله ۴-۵۶ توزیع τ_{xz} را بدست آورید.

حل:

حل در مسئلهٔ ۴-۵۶ می‌باشد.

۴-۵۹. مسأله ۱۵-۳ را با استفاده از معادله برنولی درباره حل کنید.

حل:

معادله برنولی را بین نقاط (1) و (2) می‌نویسیم.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$0 + \frac{5^2}{2\times 9.806} + (1.7 + 1.3) = 0 + \frac{V_2^2}{2\times 9.806} + y \quad \Rightarrow y + \frac{V_2^2}{19.612} = 4.275 \qquad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع (1) و (2) عبارت است از:

$$Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad V_1A_1 = V_2A_2$$

$$\Rightarrow 5\times(3\times 1.3) = V_2\times(y\times 3) \Rightarrow \quad V_2 = \frac{6.5}{y} \quad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow y + \dfrac{6.5^2}{19.612\times y^2} = 4.275 \quad \Rightarrow y^3 - 2.154y^2 + 11.473 = 0$

از حل معادله بالا: $y_1 = 0.786\,m \quad , \quad y_2 = 4.15\,m$

ریشه سوم از لحاظ فیزیکی بی‌معنی است.

۴-۶۰. مسأله ۱۶-۳ را بااستفاده از معادله برنولی دوباره حل کنید.

حل:

مانند مسئله قبل با انتخاب دو نقطه 1 و 2 در دو مقطع از جریان و نوشتن معادله برنولی داریم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$0 + \frac{9.806^2}{2g} + 0.5 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + (2.5+y) \Rightarrow y + \frac{V_2^2}{2g} = 2.903 \quad (I)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع عبارت است از: $V_1A_1 = V_2A_2$

$$\Rightarrow 9.806\times(0.5\times 2) = V_2\times(y\times 2) \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{4.903}{y} \quad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow y + \left(\dfrac{40903}{y}\right)^2\times\dfrac{1}{2\times 9.806} = 2.903$

$$\Rightarrow y + \frac{1.2257}{y^2} = 2.903 \quad \Rightarrow y^3 - 2.903y^2 + 1.226 = 0$$

از حل معادله بالا: $y_1 = 2.74\,m \quad , \quad y_2 = 0.755\,m$

ریشه سوم از لحاظ فیزیکی بی‌معنی است.

۴-۶۱. مسأله ۱۷-۳ را با استفاده از معادله برنولی دوباره حل کنید.

حل:

با توجه به حل مسئله ۵۹ داریم:

معادله برنولی بین نقاط (1) و (2) $\Rightarrow y + \dfrac{V_2{}^2}{19.612} = 4.275 \qquad (I)$

معادله پیوستگی بین دو مقطع: $Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad V_1A_1 = V_2A_2$

$$5\times(1.3\times 3) = V_2(y\times 2) \quad \Rightarrow \quad V_2y = 9.75 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{9.75}{y} \quad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow y + \dfrac{9.75^2}{19.612\times y^2} = 4.275 \quad \Rightarrow y^3 - 4.275y^2 + 4.847 = 0$

از حل معادله بالا : $y_1 = 1.27\,m \quad , \quad y_2 = 3.97\,m$

ریشه سوم از لحاظ فیزیکی بی معنی است.

۴-۶۲. با صرفنظر کردن از مقاومت هوا ارتفاعی را که یک جت قائم آب با سرعت $20m/s$ می رسد محاسبه کنید.

حل:

درنقطه‌ای که جت قائم به حداکثر ارتفاع خود می‌رسد تمام انرژی جنبشی آن به انرژی پتانسیل تبدیل می‌گردد بنابراین سرعت جت در نقطه موردنظر صفر می‌شود.

معادله برنولی را بین نقطه شروع حرکت (1) و نقطه اوج جت قائم (2) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2 \quad \Rightarrow \quad 0+\frac{V_1^2}{2g}+0=0+0+z_2$$

$$\Rightarrow z_2=\frac{V_1^2}{2g}=\frac{20^2}{2\times 9.806}=20.4\,m$$

۴-۶۳. اگر جت آب ذکر شده در مسئلهٔ قبل با افق زاویهٔ 45 درست کند و مقاومت هوا قابل صرف نظر باشد تا چه ارتفاعی بالا رفته و سرعت آن در این ارتفاع چقدر است.

حل:

در نقطه اوج مولفه قائم سرعت برابر صفر بوده و فقط مولفهٔ افقی آن وجود دارد.

$$V_1=20\,m/s \quad , \quad V_2=V_1 \cos 45=20\times 0.7071=14.14\,m/s$$

معادله برنولی را بین نقطه شروع حرکت (1) و نقطه اوج (2) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2 \quad \Rightarrow \quad 0+\frac{V_1^2}{2g}+0=0+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$\Rightarrow z_2=\frac{V_1^2-V_2^2}{2g}=\frac{20^2-14.14^2}{2\times 9.806}=10.2\,m$$

۴-۶۴. یک زیر دریایی با سرعت $4.5\ m/s$ در عمق $21\ m$ در دریای اتلانتیک حرکت می‌کند. فشار در نقطه سکون دماغه زیر دریایی چقدر است؟

حل:

فرض می‌کنیم زیردریایی ساکن است و آب از روی آن عبور می‌کند دراینصورت سرعت جریان در دماغه صفر و در سطح آب $4.5\ m/s$ است.

معادله برنولی را بین نقطه (1) در دماغه زیردریایی و نقطه (2) در سطح آب می‌نویسیم

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{9806}+0+0=0+\frac{4.5^2}{2\times 9.806}+21 \Rightarrow P_1=216051\,Pa$$

۴-۶۵. ضریب تصحیح انرژی جنبشی α را برای جریان آرام دو بعدی بین دو صفحه موازی را بدست آورید.

(به مسأله ۵۲-۴ مراجعه کنید)

حل:

با فرض $A = -\dfrac{\rho g + \partial p/\partial y}{2\mu}$ داریم:

$$v = \frac{x}{L} v_w + A(Lx - x^2)$$

$$Q = \int_0^L u\,dx = \int_0^L \left[\frac{x}{L} v_w + A(Lx - x^2)\right] dx = \frac{L}{2} v_w - \frac{AL^3}{6}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Lv_w/2 - AL^3/6}{L} = \frac{v_w}{2} - \frac{AL^2}{6}$$

$$\alpha = \frac{1}{L}\int\left(\frac{v}{V}\right)^3 dx = \frac{1}{L}\int_0^L \left[\frac{x v_w/L - A(Lx - x^2)}{v_w/2 - AL^2/6}\right]^3 dx$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق عبارت مربوط به α بدست می آید: $\left[\dfrac{1.54285(A^3L^6 - 7A^2L^4 v_w + 21AL^2 v_w^2 - 35 v_w^3)}{(AL^2 - 3v_w)^3}\right]$

۴-۶۶. ضریب تصحیح انرژی جنبشی α را برای جریان آرام در یک لوله دایره‌ای بدست آورید.

(به مسأله ۵۰-۴ مراجعه کنید)

حل:

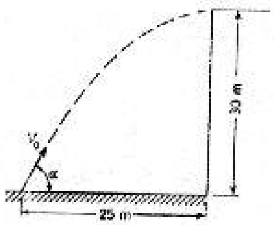
$$\alpha = \frac{1}{A}\int\left(\frac{v}{V}\right)^3 dA$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \left[\frac{C(R^2 - r^2)/4\mu}{CR^2/8\mu}\right]^3 2\pi r\,dr =$$

$$= \frac{16}{R^8}\int_0^R r(R^2 - r^2)^3 dr = \frac{16}{R^8}\int_0^R (2R^6 + 3R^2 r^5 - 3R^4 r^3 - r^7)dr$$

$$= \frac{16}{R^8}\left[\frac{r^2R^6}{2} + \frac{3R^2 r^6}{6} - \frac{3R^4 r^4}{4} - \frac{r^8}{8}\right]_0^R = \frac{16}{R^8} \times \frac{R^8}{8} = 2$$

۴-۶۷. در شکل ۱۵-۲ می‌خواهیم جت با کمترین سرعت اولیه، V_0، به سقف ساختمان برسد زاویه جت α باید چقدر باشد؟ مقدار V_0 چقدر است؟



شکل ۱۵-۲

حل:

سرعت اولیه V_0 جت موقعی که حداقل می‌شود که مؤلفه قائم سرعت در بالای ساختمان برابر صفر شود یعنی در بالای ساختمان سرعت تنها دارای مولفه افقی $V_0\cos\alpha$ خواهد بود.

معادله برنولی را بین دو نقطه 1 و 2 می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

با توجه به اینکه سیال به صورت جت می‌باشد $P_1=P_2=0$ بنابراین:

$$\Rightarrow 0+\frac{V_0^2}{2g}+0=0+\frac{(V_0\cos\alpha)^2}{2g}+30\Rightarrow\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}=30\Rightarrow V_0^2=\frac{60g}{\sin^2\alpha}\quad (I)$$

رابطه فوق را می‌توان با نوشتن معادله حرکت در جهت قائم نیز بدست آورد.

در جهت قائم داریم:

$$V-V_0=-gt\Rightarrow t=\frac{V_0-V}{g}=\frac{V_0\sin\alpha-0}{g}=\frac{V_0\sin\alpha}{g}$$

در جهت افقی داریم:

$$x=V.t\Rightarrow 25=(V_0\cos\alpha)\left(\frac{V_0\sin\alpha}{g}\right)=\frac{V_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow V_0^2=\frac{25g}{\sin\alpha\cos\alpha}\quad (II)$$

$$\text{(II) و (I) روابط}\Rightarrow\frac{25g}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{60g}{\sin^2\alpha}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{60}{25}=2.4\Rightarrow\alpha=67.38^\circ$$

با جاگذاری مقدار α در یکی از معادلات (I) یا (II) داریم: $V_0=26.28\text{m/s}$

۶۸-۴. یک قائم به قطر 6m و ارتفاع 15m با آب پر شده است. انرژی پتانسیل آب داخل لوله چقدر است؟ مبنای ارتفاع را ارتفاع را 3m پایین‌تر از کف لوله بگیرید.

حل:

به حل مسئله ۹-۳ مراجعه شود.

۶۹-۴. در مسأله آب داخل لوله از یک توربین عبور می‌کند و به داخل مخزنی تخلیه می‌شود که 10m پایین‌تر از کف لوله است. راندمان توربین را 100 درصد فرض کنید و کار تولیدی را محاسبه کنید.

حل:

به حل مسئله ۱۰-۳ مراجعه شود.

۷۰-۴. نرخ عبور انرژی جنبشی از مکعبی که در مسأله ۱۱-۳ گفته شد را برای توزیع سرعتی که در مسألهٔ ۱۰-۳ داده شد، بدست آورید.

حل:

به حل مسئله ۱۴-۳ مراجعه شود.

۷۱-۴. در شکل ۱۶-۴ روغن در A از یک شیار دو بعدی تخلیه می‌شود و در B از زیر یک دریچه عبور کرده، روی یک بستر تخلیه می‌شود. از تمام تلفات صرفنظر کنید. دبی عبوری از A و B را به ازای واحد عرض به دست آورید. علت اختلاف این دو مقدار چیست؟

شکل ۱۶-۴

حل:

I) محاسبه دبی در B:

در مقطع B سرعت در تمام نقاط مقطع ثابت می‌باشد.

معادله برنولی را بین نقطه (1) در سطح آزاد و نقطه‌ای در مقطع B می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_B}{\gamma}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B$$

$$P_1=P_2=0 \quad , \quad V_1=0 \quad , \quad z_B=0$$

$$\Rightarrow 3=\frac{V_B^2}{2g}\Rightarrow V_B=\sqrt{3\times 2\times 9.806}=7.67\,m/s$$

$$Q_B=A_B V_B=(0.7\times 1)\times 7.67=5.369\,m^3/s$$

II) محاسبه دبی در A:

در مقطع A سرعت از بالا تا پایین مقطع متغیر بود (یعنی به ارتفاع z بستگی دارد) و در نتیجه محاسبه دبی باید از طریق انتگرالگیری یا از طریق مقدار متوسط سرعت در مقطع موردنظر صورت گیرد.

معادله برنولی را بین نقطه (1) در سطح آزاد و نقطه‌ای در مقطع A می‌نویسیم.

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_A}{\gamma}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A$$

$$P_1=P_A=0 \quad , \quad V_1=0 \quad , \quad z_A=z$$

$$3.7=\frac{V_A^2}{2g}+z\Rightarrow V_A=4.4285\sqrt{3.7-z}$$

$$Q=\int V_A\,dA=\int_0^{0.7}4.4285\sqrt{3.7-z}\times 1\times dz=5.674\,m^3/s$$

اگر بخواهیم از مقدار متوسط سرعت استفاده کنیم داریم:

$$\bar{z}=\frac{0.7}{2}=0.35\,m$$

$$\bar{V}_A=4.4285\times\sqrt{3.7-0.35}=8.106\,m/s$$

$$Q_A=A\bar{V}_A=(0.7\times 1)\times 8.106=5.674\,m^3/s$$

۴-۷۲. در یک خط لوله انتقال آب در مقطع A، قطر 1m، فشار 98kPa و سرعت 1m/s است. در مقطع B که 2m بالاتر از A است، قطر 0.5m و فشار 20kPa است. جهت جریان را تعیین کنید.

حل:

به حل مسئله ۳۴-۳ مراجعه شود.

۴-۷۳. در شکل ۱۷-۴ به ازای $H=8m$ تلفات برابر $3V^2/2g\ m.N/N$ است دبی را بدست آورید.

حل:

به حل مسئله ۳۶-۳ مراجعه شود.

۷۴-۴. در شکل ۱۷-۴ برای دبی 50L/s، H را حساب کنید تلفات $10V^2/2g\ m.N/N$ است.

حل:

به حل مسئله ۳۷-۳ مراجعه شود.

۷۵-۴. در شکل ۱۷-۴ دبی $100l/s$ و ارتفاع $H=10m$ است تلفات در سیستم را بر حسب ارتفاع سرعتی یعنی به صورت $KV^2/2g$ بیان کنید.

حل:

به حل مسئله ۳۸-۳ مراجعه شود.

۷۶-۴. در شکل ۵۴-۳ هنگامی که فشار در لوله رانش 35kPa باشد، کاویتاسیون در دهانه ورودی پمپ در آستانهٔ وقوع است. طول لوله مکش را بدست آورید. تلفات در لوله مکش را می‌توان به صورت $(V_1^2/2g)(0.03\,L/D)$ بیان کرد. توانی را که پمپ به سیال می‌دهد بدست آورید. چند درصد از این توان صرف غلبه بر تلفات می‌شود. فشار بارومتریک 760mmHg است.

حل:

به حل مسئله ۴۱-۳ مراجعه شود.

۷۷-۴. در سیفون شکل ۵۵-۳ داریم $h_1=1m$، $h_2=3m$، $D_1=3m$ و $D_2=5m$ و تلفات تا مقطع 2 معادل $2.6\,V_2^2/2g$ است و 10 درصد تلفات تا قبل از مقطع 1 رخ می‌دهد. دبی را تعیین کنید فشار در مقطع 1 را بدست آورید.

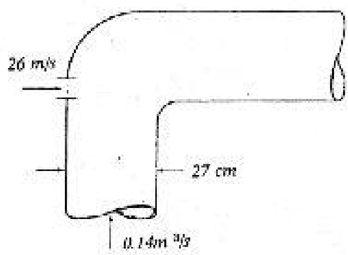
حل:

به حل مسئله ۴۲-۳ مراجعه شود.

۷۸-۴. در مسأله قبل فشار در نقطهٔ A را بدست آورید نقطه A، نقطه سکون است (سرعت در A صفر است).

حل:

به حل مسئله ۴۳-۳ مراجعه شود.



۷۹-۴. یک جت آب با سطح مقطع $93\ cm^2$ و سرعت $26\ m/s$ وجود دارد. جت آب دیگری نیز با سرعت $1.5\ m/s$ موجود است (شکل ۱۸-۴ را ببیند) قطر لوله $27\ cm$ است سرعت متوسط در مقطع 2 چقدر است؟ فرض کنید. در مقطع 2 اختلاط کامل صورت گرفته است.

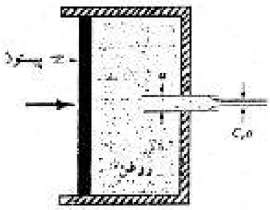
حل:

معادله پیوستگی:

$$Q_1+Q_1'=Q_2\Rightarrow Q+A_1'V_1'=A_CV_2$$

$$\Rightarrow 0.14+0.0093\times 26=\pi\times 0.27^2/4\times V_2\Rightarrow V_2=6.67\ m/s$$

۸۰-۴. پیستونی با سطح مقطع A روغن با دانسیته ρ را از طریق لوله کوچکی با سطح مقطع a به اتمسفر تخلیه می‌کند. سطح مقطع جت روغن $C_c a$ است. نشان دهید ضریب C_c به صورت $C_c=1/(2-a/A)$ داده می‌شود.



حل:

حجم کنترل را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم.

معادله برنولی بین نقاط (۱) و (۳):

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3$$

$$z_1=z_2\ ,\ p_3=0$$

$$\frac{P_1}{\gamma}=\frac{V_3^2-V_1^2}{2g}\quad\Rightarrow\quad p_1=\rho\left(\frac{V_3^2-V_1^2}{2}\right)\qquad(1)$$

معادله اندازه حرکت:

$$P_1A_2=\rho Q(V_3-V_1)\Rightarrow P_1=\frac{\rho Q}{A_2}(V_3-V_1)\qquad(2)$$

معادله پیوستگی:

$$Q=AV_1=\alpha V_2=\alpha C_cV_3\qquad(3)$$

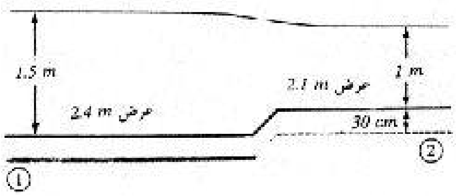
$$(3),(2)\ \Rightarrow P_1=\frac{\rho\alpha V_2}{\alpha}(V_3-V_1)=\rho V_2(V_3-V_1)\qquad(4)$$

$$(4),(1)\Rightarrow\frac{V_3^2-V_1^2}{2}=V_2(V_3-V_1)\Rightarrow V_2=\frac{V_1+V_3}{2}$$

$$2V_2=V_1+V_3\Rightarrow\frac{2V_2}{V_2}=\frac{V_1}{V_2}+\frac{V_3}{V_2}$$

$$\Rightarrow 2=\frac{\alpha}{A}+\frac{1}{C_c}\Rightarrow\frac{1}{C_c}=2-\frac{\alpha}{A}\Rightarrow C_c=\frac{1}{2-\alpha/A}$$

۸۱-۴. آب در یک کانال رو باز مستطیلی شکل به عرض $2.4m$ جریان دارد. در یک مقطع باریک شده در پایین دست جریان عرض کانال به $2.1\ m$ کاهش یافته در حالیکه ارتفاع کف کانال $30\ cm$ افزایش یابد. (شکل ۲۰-۴) اگر عمق آب در بالادست جریان $1.5\ m$ و در قسمت باریک شده $1\ m$ باشد دبی جریان را محاسبه کنید.



شکل ۲۰-۴

حل:

معادله پیوستگی: $Q=A_1V_1=A_2V_2$

$\Rightarrow 1.5\times 2.4\times V_1=2.1\times 1\times V_2 \Rightarrow V_1=0.583\,V_2 \quad (1)$

معادله برنولی را بین نقاط (1) و (2) می‌نویسیم:

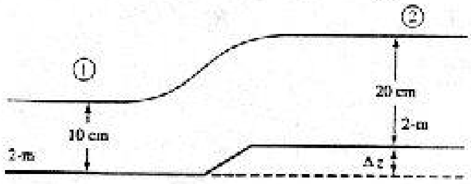
$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$0+\frac{V_1^2}{2g}+1.5=0+\frac{V_2^2}{2g}+1.3\Rightarrow\frac{V_2^2-V_1^2}{2g}=0.2 \quad \Rightarrow V_2^2-V_1^2=2\times 0.2\times 9.806=3.9224 \qquad (2)$$

$(2),\ (1)\ \Rightarrow V_1=1.4211\,m/s \quad , \ V_2=2.4376\,m/s$

$Q=A_1V_1=1.5\times 2.4\times 1.4211=5.116\,m^3/s$

۴-۸۲. آب در یک کانال رو باز مستطیلی به عرض $2\ m$ در عمق $10\ cm$ جریان دارد. ارتفاع کف کانال به تدریج به میزان $\Delta z=5cm$ زیاد می‌شود. به نحوی که ارتفاع آب پس از بلند شدن کف کانال $10\ cm$ زیاد شود. (شکل ۲۱-۴) دبی جریان چقدر است؟



شکل ۲۱-۴

حل:

معادله پیوستگی: $Q=A_1V_1=A_2V_2$

$\Rightarrow 2\times 0.1\times V_1=2\times 0.2\times V_2\Rightarrow V_1=2V_2 \quad (1)$

معادله برنولی را بین نقاط (1) و (2) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$0+\frac{V_1^2}{2g}+0.1=0+\frac{V_2^2}{2g}+0.25\Rightarrow\frac{V_1^2-V_2^2}{2g}=0.15 \ \Rightarrow V_1^2-V_2^2=2\times 9.806\times 0.15=2.942 \qquad (2)$$

از (1) و (2) $\Rightarrow V_1=1.98\ m/s \quad , \quad V_2=0.99\ m/s$

$Q=A_1V_1=2\times 0.1\times 1.98=0.396\,m^3/s$

۴-۸۳. معادله $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\nabla T+R$ را برای حالت یک بعدی با $T=T_0$ در $x=0$ و $T=T_1$ در $x=L$ حل کنید تولید حرارت بر واحد حجم (R) مطابق معادله $R=R_0e^{-bx/L}$ تغییر می‌کند

حل:

با توجه به اینکه دو شرط مرزی داده شده و شرط اولیه داده نشده است فرض می‌کنیم $\frac{\partial T}{\partial t}=0$ (شرایط پایا)

$$\Rightarrow \alpha\nabla^2 T + R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + R_0 e^{-bx/L} = 0 \qquad \Rightarrow \alpha\frac{d^2 T}{dx^2} + R_0 e^{-bx/L} = 0$$

با انتگرال‌گیری : $\alpha\dfrac{dT}{dx} - \dfrac{R_0 L}{b} e^{-bx/L} = C_1 \qquad (1)$

با انتگرال‌گیری دوباره : $\alpha T + \dfrac{R_0 L^2}{b^2} e^{-bx/L} = C_1 x + C_2 \qquad (2)$

ثابت‌های C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی زیر تعیین می‌شوند.

$$\begin{cases} x=0 \ , \ T=T_0 \\ x=L \ , \ T=T_L \end{cases}$$

$$\alpha T_0 + \frac{R_0 L^2}{b^2} \times e^0 = C_1 \times 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \alpha T_0 + \frac{R_0 L^2}{b^2}$$

$$\alpha T_L + \frac{R_0 L^2}{b^2} e^{-b\times L/L} = C_1 L + \alpha T_0 + \frac{R_0 L^2}{b^2} \ \Rightarrow C_1 = \frac{\alpha(T_L - T_0)}{L} + \frac{R_0 L}{b^2}(e^{-b} - 1)$$

با جاگذاری ثابتهای C_1 و C_2 در معادله (2):

$$\alpha T + \frac{R_0 L^2}{b^2} e^{-bx/L} = \left[\frac{\alpha(T_L - T_0)}{L} + \frac{R_0 L}{b^2}(e^{-b} - 1)\right] x + \alpha T_0 + \frac{R_0 L^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow T - T_0 = \frac{x}{L}(T_L - T_0) + \frac{R_0 L^2}{b^2 \alpha}\left[\frac{x}{L} e^{-b} - e^{-bx/L} + 1 - \frac{x}{L}\right]$$

۴-۸۴. مسأله ۸۳ را با شرایط مرزی $T=T_0$ در $x=0$ و $\dfrac{dT}{dx}=0$ در $x=L$ دوباره حل کنید.

حل:

با توجه به شرایط مرزی داده شده:

$$(2): x=0 \ , \ T=T_0 \Rightarrow \alpha T_0 + \frac{R_0 L^2}{b^2} \times e^0 = C_1 \times 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \alpha T_0 + \frac{R_0 L^2}{b^2}$$

$$(1): x=L \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \alpha \times 0 - \frac{R_0 L}{b} e^{-b\times L/L} = C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{R_0 L}{b} e^{-b}$$

با جاگذاری ثابتهای C_1 و C_2 در معادله (2):

$$\alpha T + \frac{R_0 L^2}{b^2} e^{-bx/L} = -\frac{R_0 L}{b} e^{-b} x + \alpha T_0 + \frac{R_0 L^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow T - T_0 = R_0 L^2 \left(1 - \frac{bx}{L} e^{-b} - e^{-bx/L}\right)/\alpha b^2$$

۴-۸۵. مسأله ۸۳ را با شرایط مرزی $T=T_0$ در $x=0$ و $\dfrac{dT}{dx}=c$ در $x=L$ (ثابت $=c$) دوباره حل کنید.

حل:

با استفاده از شرایط مرزی داده شده :

$$x=0 \quad , \quad T=T_0 \quad \Rightarrow \quad C_2=\alpha T_0+\frac{RL^2}{b^2}$$

$$x=L \quad , \quad \frac{dT}{dx}=c \quad \Rightarrow \quad C_1=\alpha c-\frac{RL}{b}e^{-b}$$

با جاگذاری ثابتهای C_1 و C_2 در معادله (2):

$$\alpha T+\frac{R_0L^2}{b^2}e^{-bx/L}=\alpha cx-\frac{RLx}{b}e^{-b}+\alpha T_0+\frac{RL^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow T-T_0=cx+\frac{RL^2}{\alpha b^2}\left[1-e^{-bx/L}-\frac{bx}{L}e^{-b}\right]$$

۸۶-۴. مسأله ۴۷ را با فرض تولید گرمای داخلی یکنواخت دوباره حل کنید.

حل:

داریم:

$$\alpha\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{q_H}{\rho C_p}=0 \quad , \quad \alpha=\frac{K}{\rho C_p}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{q_H}{K}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2T}{dx^2}+\frac{q_H}{K}=0$$

با انتگرالگیری: $\frac{dT}{dx}+\frac{q_H}{K}x=C_1 \qquad (1)$

با انتگرالگیری دوباره: $T+\frac{q_H}{2K}x^2=C_1x+C_2 \qquad (2)$

ثابت‌های C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی زیر تعیین می‌شوند.

$$\begin{cases}x=0 \ , \ T=T_1\\ x=d \ , \ T=T_2\end{cases}$$

$$T_1+0=C_1\times 0+C_2\Rightarrow C_2=T_1$$

$$T_2+\frac{q_H}{2K}.d^2=C_1d+T_1\Rightarrow C_1=\frac{T_2-T_1}{d}+\frac{q_Hd}{2K}$$

با جاگذاری ثابتهای C_1 و C_2 در معادله (2):

$$T+\frac{q_H}{2k}x^2=\left(\frac{T_2-T_1}{d}+\frac{q_Hd}{2K}\right)x+T_1$$

$$\Rightarrow T=-\frac{1}{2K}q_Hx^2+\left(T_2-T_1+\frac{1}{2}q_H\ d^2/K\right)(x/d)+T_1$$

۸۷-۴. برای شرایط ذکر شده در مسأله ۸۶ ماکزیمم دما در دیواره و نیز محلی که در آن $T=T_{max}$ است بیابید.

حل:

با توجه به مسأله ۸۶ داریم:

$$\frac{dT}{dx}+\frac{q_Hx}{K}=C_1$$

$$\frac{dT}{dx}=0\Rightarrow\frac{q_Hx}{K}=C_1\Rightarrow x=\frac{C_1K}{q_H}$$

$$x=\left(\frac{T_2-T_1}{d}+\frac{q_Hd}{2K}\right)\times\frac{K}{q_H}=\frac{K(T_2-T_1)}{q_Hd}+\frac{d}{2}$$

با جاگذاری x در رابطه بدست آمده در مسأله ۸۶ برای توزیع دما داریم:

$$T=-\frac{1}{2}\frac{q_H}{K}\left[\frac{K(T_2-T_1)}{q_H d}+\frac{d}{2}\right]^2+(T_2-T_1+\frac{q_H d^2}{2K})\left[\frac{K(T_2-T_1)}{q_H d}+\frac{d}{2}\right]/d+T_1$$

۸۸-۴. یک کامیون بزرگ لجن ($sp\ gr=1.8$) را در مخزن استوانه‌ای به ارتفاع $50\ ft$ و قطر $10ft$ حمل می‌کند. کامیون با سرعت ثابت $55\ mph$ حرکت می‌کند. نرخ تولید باکتری در لجن متناسب با غلظت باکتری C_b فرض شده است. با فرض یک فرایند پایا معادله حاکم را که توزیع غلظت باکتری‌ها را در لجن توصیف می‌کنند بدست آورید.

حل:

داریم:

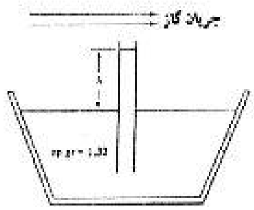
$$\frac{\partial C_i}{\partial t}+(v.\nabla)C_i=D_{iw}\nabla^2 C_i+s_i$$

شرایط پایا $\frac{\partial C_i}{\partial t}=0$ ، $u=v=w=0$

$\delta_i=kC_B$ **(ثابت تناسب:** k**)**

$$\Rightarrow 0=D_B\nabla^2 C_B+KC_B \Rightarrow \nabla^2 C_B=-\frac{K}{D_B}\ C_B$$

۸۹-۴. یک لوله با قطر کم در یک ظرف پر از مایع با $sp\ gr=1.32$ غوطه ورگشته است (شکل ۲۲-۴)
یک جت گاز در دری دهانه لوله جریان یافته و بخارات گازی مایع داخل ظرف را به اطراف پراکنده می‌کند.
با فرض اینکه تبخیر مایع یک فرآیند پایا باشد معادله دیفرانسیل حاکم را که پدیده انتقال را توصیف می‌کند بدست آورید. فرضیات مورد نیاز جهت بدست آوردن معادله حاکم را ذکر کنید.



شکل ۲۲-۴

حل:

فرضیات:

الف) شرایط پایا $\frac{\partial C_A}{\partial t}=0$

ب) انتقال جرم در یک جهت صورت می‌گیرد: $u=v=0$

ج) تغییرات غلظت تنها در جهت z می‌باشد. $\frac{\partial C_i}{\partial r}=0$

د) بدون تولید جزء A: $s_i=0$

بنابراین با فرضیات بالا معادله (4.8.10a) به صورت زیر درمی‌آید.

$$w\frac{\partial C_A}{\partial z}=D_{iw}\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}$$

۹۰-۴. تقسیم سلول یک میکروارگانیسم که در سیال راکد قرارگرفته است و از واکنش درجه اول $M\rightarrow 2M$ پیروی می‌کند صورت می‌گیرد. معادله دیفرانسیلی را که پروفیل غلظت میکروارگانیسم راتوصیف‌می‌کندبدست آورید.

حل:

با اعمال موازنه جرم داریم:

تولید = تجمع + خروجی - ورودی

$$N_{Mr}\,|_{r+\Delta r}.4\pi(r+\Delta r)^2 - N_{Mr}\,|_r.4\pi r^2 + 4\pi r^2.\Delta r\frac{\partial C_M}{\partial t} = 4\pi r^2\Delta r.R_M$$

طرفین را بر $4\pi\Delta r$ تقسیم کرده و حد عبارت را موقعی که $\Delta r \to 0$ میل کند را تعیین می‌کنیم.

$$\Rightarrow lim\frac{(r^2N_{Mr})\,|_{r+\Delta r} - (r^2N_{Mr})\,|_r}{\Delta r} + r^2\frac{\partial C_M}{\partial t} - r^2R_M = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2N_{Mr}) + r^2\frac{\partial C_M}{\partial t} - r^2R_M = 0 \quad , \quad R_M = kC_M$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_M}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial(r^2N_{Mr})}{\partial r} + kC_M$$

از طرفی داریم: $N_{Mr} = -D\frac{\partial C_M}{\partial r}$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_M}{\partial t} = D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial C_M}{\partial r}\right) + kC_M$$

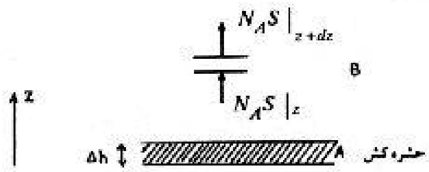
توجه: این معادله را می‌توان از طریق نوشتن معادله انتقال جرم در مختصات کروی (یک بعدی) نیز بدست آورد.

۴-۹۱. یک کامیون بزرگ حامل حشره‌کش در اثر تصادف در جاده I-270 واژگون شده و حشره‌کش از آن بر روی محدوده تصادف ریخته می‌شود مایع پس از یک ساعت شروع به تبخیر به هوای اطراف می‌کند فرض کنید تبخیر حشره‌کش به محیط یک تحول پایدار باشد معادله حاکم برای توصیف این پدیده را بدست آورید.

حل:

فرض A: حشره‌کش و B: هوا

با استفاده از معادله (7-8-4) داریم:



$$N_i = -\rho D_{iw}\nabla\omega_i + c_iV$$

$$\Rightarrow N_i = -cD_{iw}\frac{d\omega_i}{dz} + \omega_i\sum N_i$$

$$\Rightarrow N_A = -cD_{AB}\frac{d\omega_A}{dz} + \omega_A(N_A+N_B)$$

$$\frac{\partial(N_AS)}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(N_BS)}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow N_A, N_B = \text{ctc}$$

$$N_B = 0 \Rightarrow N_A = -cD_{AB}\frac{d\omega_A}{dz} + \omega_AN_A$$

$$\int_{\omega_{A1}}^{\omega_{A2}}\frac{d\omega_A}{1-\omega_A} = \frac{N_A}{cD_{AB}}\int_{z_1}^{z_2}dz \Rightarrow ln\frac{1-\omega_{A2}}{1-\omega_{A1}} = \frac{N_Az}{cD_{AB}} \;\Rightarrow\; N_A = \frac{cD_{AB}}{z}\,ln\frac{1-\omega_{A2}}{1-\omega_{A1}}$$

برای محاسبه زمان لازم جهت تبخیر حشره‌کش داریم:

شدت تبخیر $\frac{dm}{dt}=N_AS \ , \ \frac{dm}{dt}=\frac{d(\rho V)}{dt}=\rho S\frac{dz}{dt} \Rightarrow \rho\frac{dz}{dt}=N_A$

$$\Rightarrow \int_0^t dt=\int_{h_1}^{h_2}\frac{\rho}{N_A}\,dz \Rightarrow t=\frac{\rho\Delta h}{N_A}$$

۵ آنالیز ابعادی و تشابه

۱-۵ نشان دهید که معادلات (۱۱-۵-۴) و (۵-۶-۴) و (۱-۷-۳) از نظر ابعادی همگن هستند.

حل:

معادله $(4\text{-}5\text{-}11)$: $gz+\frac{V^2}{2}+\frac{P}{\rho}=const$

$$\begin{cases}[g]=LT^{-2},[z]=L\Rightarrow[gz]=LT^{-2}\times L=L^2T^{-2}\\ [V]=LT^{-1}\Rightarrow[V^2/2]=(LT^{-1})^2=L^2T^{-2}\\ [P]=ML^{-1}T^{-2},[\rho]=ML^{-3}\Rightarrow[P/\rho]=L^2T^{-2}\end{cases}$$

بنابراین تشابه ابعادی برقرار است.

معادله $(4\text{-}6\text{-}5)$: $Tds=du+Pd(1/\rho)$

$$\begin{cases}[T]=T,[ds]=L^2T^{-3}\Rightarrow[T.ds]=T\times L^2T^{-3}=L^2T^{-2}\\ [du]=L^2T^{-2}\\ [P]=ML^{-1}T^{-2},[\frac{1}{\rho}]=M^{-1}L^3\Rightarrow[Pd\frac{1}{\rho}]=ML^{-1}T^{-2}\times M^{-1}L^3=L^2T^{-2}\end{cases}$$

بنابراین تشابه ابعادی برقرار است.

معادله $(3\text{-}7\text{-}1)$: $F=\rho Q(V_4-V_1)=(P_3-P_2)A$

$$\begin{cases}[F]=MLT^{-2}\\ [\rho]=ML^{-3},[Q]=L^3T^{-1},[V]=LT^{-1}\Rightarrow[\rho Q(V_4-V_1)]=ML^{-3}\times L^3T^{-1}\times LT^{-1}=MLT^{-2}\\ [P]=ML^{-1}T^{-2},[A]=L^2\Rightarrow[(P_3-P_2)A]=ML^{-1}T^{-2}\times L^2=MLT^{-2}\end{cases}$$

بنابراین تشابه ابعادی برقرار است.

۲-۵ کمیات زیر را به صورت پارامترهای بی بعد در آورید. الف) ΔP , ρ , V ب) ρ , g , V , F ج) μ , F , Δp , t

حل:

الف) ρ , V را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم:

$\Delta P:(ML^{-1}T^{-2})\quad,\ \rho:(ML^{-3})\quad,\ V:(LT^{-1})$

$\Pi=\rho^{x}V^{y}\Delta P=(ML^{-3})^{x}(LT^{-1})^{y}(ML^{-1}T^{-2})=M^{0}L^{0}T^{0}$

$$\begin{cases} M: x+1=0 \\ T: -y-2=0 \\ L: -3x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=-1, y=-2 \quad \Rightarrow \Pi=\rho^{-1}V^{-2}\Delta P=\frac{\Delta P}{\rho V^{2}}$$

ب) V و ρ و g را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم

$F:(MLT^{-2})\ ,\ g:(LT^{-2}),\ V:\ (LT^{-1}),\ \rho:(ML^{-3})$

$\Rightarrow \Pi=g^{x}\rho^{y}V^{z}F=(LT^{-2})^{x}(ML^{-3})^{y}(LT^{-1})^{z}(MLT^{-2})=M^{0}L^{0}T^{0}$

$$\begin{cases} M: y+1=0 \\ L: x-3y+z+1=0 \\ T: -2x-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=2, y=-1, z=-6 \Rightarrow \Pi=g^{2}\rho^{-1}V^{-6}F=\frac{Fg^{2}}{\rho V^{6}}$$

ج) t و F و μ را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم.

$t:(T),\ F:(MLT^{-2}),\ \Delta P:(ML^{-1}T^{-2}),\ \mu:(ML^{-1}T^{-1})$

$\Pi=t^{x}F^{y}\mu^{z}\Delta P=T^{x}(MLT^{-2})^{y}(ML^{-1}T^{-1})^{z}(ML^{-1}T^{-2})\ =M^{0}L^{0}T^{0}$

$$\begin{cases} M: y+z+1=0 \\ L: y-z-1=0 \\ T: x-2y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow x=1\ , y=0\ , z=-1 \quad \Rightarrow \Pi=t\mu^{-1}\Delta P=\frac{t\,\Delta P}{\mu}$$

۳-۵ با بررسی، گروههای زیر را به صورت پارامترهای بی بعد در آورید.

الف) t, l, a ب) t, l, v ج) ω, Q, A د) A, ρ, K

حل:

الف) t و l را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم.

$\Pi=t^{x}l^{y}a \qquad a:(LT^{-2}),\ l:(L)\ ,\ t:(T)$

$\Pi=T^{x}L^{y}(LT^{-2})=T^{0}L^{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} T: x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ L: y+1=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \Pi=t^{2}l^{-1}a=\frac{at^{2}}{l}$$

ب) t و l را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم:

$v:(L^2T^{-1})\ ,\ l:(L)\ ,\ t:(T)$

$\Pi = t^x l^y v = T^x L^y (L^2T^{-1}) = T^0L^0$

$$\begin{cases} T: x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ L: y+2=0 \Rightarrow y=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Pi = t^1 l^{-2} v = \frac{vt}{l^2}$$

ج) A و ω را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم

$A:(L^2)\ ,\ Q:(L^3T^{-1})\ ,\ \omega:(T^{-1})$

$\Pi = A^x \omega^y Q = (L^2)^x (T^{-1})^y (L^3T^{-1}) = L^0T^0$

$$\begin{cases} L: 2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \\ T: -y-1=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow \Pi = A^{-3/2}\omega^{-1}Q = \frac{Q}{\omega A^{3/2}}$$

د) A و σ را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم

$A:(L^2)\ ,\ \sigma:(MT^{-2})\ ,\ K\ (ML^{-1}T^{-2})$

$\Pi = A^x \sigma^y K = (L^2)^x (MT^{-2})^y (ML^{-1}T^{-2}) = L^0M^0T^0$

$$\begin{cases} L: 2x-1=0 \\ M: y+1=0 \\ T: -2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \ x=\frac{1}{2}, y=-1 \qquad \Rightarrow \Pi = A^{1/2}\sigma^{-1}K = \frac{KA^{1/2}}{\sigma} \qquad \Pi = \frac{K^2A}{\sigma^2}$$

۵-۴. واحد طول را سانتی متر، واحدزمان را دقیقه و واحد نیرو را تن بگیرید. واحد جرم سازگار با این آحاد چیست؟

حل:

با استفاده از رابطه $F=ma$ داریم:

$(F)=ton\ ,(a)=cm/min^2 \Rightarrow$ واحد جرم: $(m)=(\frac{F}{a})=\frac{ton.min^2}{cm}$

۵-۵. دیمانسیون کمیات زیر را بر حسب T, L, M بیان کنید: رادیان سرعت زاویه‌ای، توان، کار، گشتاور و گشتاور مومنتم.

حل:

$W=F\times l \Rightarrow W:(MLT^{-2})\times(L)=ML^2T^{-2}$ رادیان: $\frac{L}{r}=\frac{L}{L}$ بدون بعد

گشتاور $F\times l \Rightarrow$ گشتاور: $(MLT^{-2})\times(L)=ML^2T^{-2}$ سرعت زاویه‌ای $\omega=\frac{2\pi}{t}\Rightarrow\omega:(T^{-1})$

گشتاور مومنتم: $(ML^2T^{-2})\times(T)=ML^2T^{-1}$ توان: $p=\frac{w}{t}\Rightarrow p:\frac{(ML^2T^{-2})}{(T)}=MLT^{-3}$

۵-۶. دیمانسیون کمیات مسألهٔ قبل را در سیستم FLT بنویسید.

حل: ω سرعت زاویه‌ای: T^{-1} ، (بی‌بعد): رادیان

توان $p=\frac{W}{t}=\frac{F.l}{t} \Rightarrow p=\frac{F\times(L)}{(T)}=FLT^{-1}$

کار $W=F.l \Rightarrow W:F\times(L)=FL$

گشتاور $= F.l \Rightarrow$ گشتاور: $F\times(L)=FL$

گشتاور مومنتم: $FL.(T)=FLT$

۵-۷. مثال ۲-۴ را با انتخاب Q و H به عنوان متغیرهای تکراری حل کنید.

حل:

$$f(Q,H,g,V_0,\phi)=0$$

$$\Pi_1=H^{x_1}Q^{y_1}g=L^{x_1}(L^3T^{-1})^{y_1}(LT^{-2})=L^0T^0$$

$$\Pi_2=H^{x_2}Q^{y_2}V_0=L^{x_2}(L^3T^{-1})^{y_2}(LT^{-1})=L^0T^0$$

$$\begin{cases}L: x_1+3y_1+1=0\\ T: -y_1-2=0\end{cases} \Rightarrow x_1=5 \ , \ y_1=-2$$

$$\begin{cases}L: x_2+3y_2+1=0\\ L: -y_2-1=0\end{cases} \Rightarrow x_2=2 \ , \ y_2=-1$$

$$\Pi_1=H^5Q^{-2}g=\frac{gH^5}{Q^2} \ ,\Pi_2=H^2Q^{-1}V_0=\frac{V_0H^2}{Q} \ , \ \Pi_3=\phi$$

$$f\left(\frac{gH^5}{Q^2},\frac{V_0H^2}{Q},\phi\right)=0$$

۵-۸. متغیرهای مناسب برای جریان در لوله‌های صاف عبارتند از $g,\mu,\rho,\Delta h/l,D,Q$ این متغیرها را به صورت پارامترهای بی بعد مرتب کنید. μ,ρ,Q را به عنوان متغیرهای تکراری انتخاب کنید.

حل:

$f(Q,D,\frac{\Delta h}{l},\rho,\mu,g)=0 \Rightarrow m=6,n=3$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $=6-3=3$

واضح است که $\frac{\Delta h}{l}$ بدون بعد است بنابراین یکی از پارامترهای بدون بعد $\Pi_1=\frac{\Delta h}{l}$ می‌باشد.

$$\Pi_2=Q^{x_1}\rho^{y_1}\mu^{z_1}D$$

$$\Rightarrow \Pi_2=(L^3T^{-1})^{x_1}(ML^{-3})^{y_1}(ML^{-1}T^{-1})^{z_1}(L)=L^0T^0M^0$$

$$\begin{cases} L: 3x_1 - 3y_1 - z_1 + 1 = 0 \\ T: -x_1 - z_1 = 0 \\ M: -3y_1 + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -1 \;,\; y_1 = -1 \;,\; z_1 = 1$$

$$\Rightarrow \Pi_2 = Q^{-1}\rho^{-1}\mu^{1}D = \frac{\mu D}{\rho Q}$$

$$\Pi_3 = Q^{x_2}\rho^{y_2}\mu^{z_2}g$$

$$\Rightarrow \Pi_3 = (L^3T^{-1})^{x_2}(ML^{-3})^{y_2}(ML^{-1}T^{-1})^{z_2}(LT^{-2}) = L^0T^0M^0$$

$$\begin{cases} L: 3x_2 - 3y_2 - z_2 + 1 = 0 \\ T: -x_2 - z_2 - 2 = 0 \\ M: y_2 + z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3 \;,\; y_2 = 5 \;,\; z_2 = -5$$

$$\Rightarrow \Pi_3 = Q^3\rho^5\mu^{-5}g = \frac{Q^3\rho^5 g}{\mu^5}$$

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0 \Rightarrow f\left[\frac{\Delta h}{l}, \frac{\mu D}{\rho Q}, \frac{Q^3\rho^5 g}{\mu^5}\right] = 0$$

۵-۹. می‌دانیم که درجریان آرام یک بعدی، تنش برشی τ، به‌لزجت μ ونرخ تغییر شکل زاویه‌ای du/dy بستگی دارد. با استفاده از آنالیز ابعادی شکل قانون لزجت نیوتن را به دست آورید.

حل:

$$f(\tau, \mu, du/dy) = 0$$

$$\tau : (ML^{-1}T^{-2}) \;,\; \mu : (ML^{-1}T^{-1}) \;,\; \tau = k\mu^a (du/dy)^b \;,\; du/dy : (T^{-1})$$

$$\Rightarrow ML^{-1}T^{-2} = k(ML^{-1}T^{-1})^a (T^{-1})^b = k(M)^a (L)^{-a} (T)^{-a-b}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ -a = -1 \\ -a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \;,\; b = 1 \Rightarrow \tau = k\mu\, du/dy$$

۵-۱۰. می‌دانیم که در مایعات ساکن، تغییرات فشار ΔP، به وزن مخصوص γ و اختلاف ارتفاع Δz بستگی دارد. با استدلال ابعادی فرم قانون هیدرواستاتیک تغییرات فشار را تعیین کنید.

حل:

$$f(\Delta P, \gamma, \Delta z) = 0$$

$$\Delta P = k\gamma^a \Delta z^b \Rightarrow (ML^{-1}T^{-2}) = k(ML^{-2}T^{-2})^a (L)^b = k(M)^a (L)^{-2a+b} (T)^{-2a}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ -1 = -2a + b \\ -2 = -2a \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 1 \Rightarrow \Delta P = k\gamma\Delta z$$

روش دوم:

γ و Δz به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم.

$$\Delta z = L \Rightarrow L = \Delta z$$
$$\gamma = ML^{-2}T^{-2} \Rightarrow M = \gamma \Delta z^2 T^{-2}$$
$$\Delta P = ML^{-1}T^{-2} = \gamma \Delta z^2 T^2 . \Delta z^{-1} T^{-2} = \gamma \Delta z$$

۵-۱۱. اگر از اثرات لزجت و کشش سطحی صرفنظر کنیم، سرعت مایع خروجی از یک مخزن معین V، فقط به افت فشار مایع ΔP و دانسیتهٔ آن ρ بستگی دارد شکل رابطه‌ای که V را به دست می‌دهد، تعیین کنید.

حل:

$$f(V, \Delta P, \rho) = 0$$
$$V = k \Delta P^a \rho^b \Rightarrow LT^{-1} = k(ML^{-1}T^{-2})^a (ML^{-3})^b = k(M)^{a+b}(L)^{-a-3b}(T)^{-2a}$$
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a - 3b = 1 \\ -2a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow V = k(\Delta P)^{1/2}(\rho)^{-1/2} \Rightarrow V = k\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

۵-۱۲. می‌دانیم که نیروی شناوری F_B، وارد به یک جسم به حجم جابه جا شده و وزن مخصوص سیال γ بستگی دارد. شکل معادله نیروی شناوری را به دست آورید.

حل:

$$f(F_B, V, \rho, \gamma) = 0 \ , \ n = 4 \ , \ m = 3 \Rightarrow \text{تعداد پارامترهای بی‌بعد} = 4\text{-}3 = 1$$
$$F_B = kV^a\gamma^b$$

$$\Rightarrow MLT^{-2} = k(L^3)^a (ML^{-2}T^{-2})^b = k(L)^{3a-2b}(M)^b(T)^{-2b}$$
$$\begin{cases} b = 1 \\ 3a - 2b = 1 \\ -2b = -2 \end{cases} \Rightarrow b = 1 \ , \ a = 1 \Rightarrow F_B = kV\gamma$$

۵-۱۳. سیالی را در نظر بگیرید که مانند جسم صلب با سرعت زاویه‌ای ثابت حول یک محور قائم دوران می‌کند. افزایش فشار در امتداد شعاعی، به سرعت زاویه‌ای ω، شعاع r، دانسیته سیال ρ، بستگی دارد. شکل معادله‌ای که P را به دست می‌دهد، تعیین کنید.

حل:

$$f(\Delta P, \omega, \gamma, \rho) = 0 \ , \ n = 4 \ , \ m = 3 \Rightarrow \text{تعداد پارامترهای بی‌بعد} = 4\text{-}3 = 1$$

$$\Delta P=k\omega^a r^b \rho^c \Rightarrow ML^{-1}T^{-2}=(T^{-1})^a (L)^b (ML^{-3})^c = k\ (M)^c (L)^{b-3c} (T)^{-a} = M^0 L^0 T^0$$

$$\begin{cases} c=1 \\ b-3c=-1 \\ -a=-2 \end{cases} \Rightarrow a=2\ ,b=2,c=1 \quad \Rightarrow \Pi_1=\frac{\Delta P}{\omega^2 r^2 \rho} \Rightarrow \Delta P = k\omega^2 r^2 \rho$$

۵-۱۴ در مثال ۳-۴ با ترکیب مجدد پرامترهای بی بعد، دو دسته پارامتر بی بعد دیگر بسازید.

حل:

در مثال ۳-۴ داشتیم: $\Pi_1=\frac{\mu}{VD\rho} \quad , \quad \Pi_2=\frac{\Delta P/l}{\rho V^2/D}$

می‌دانیم با اعمال ریاضی نظیر ضرب و تقسیم و به توان رساندن دسته پارامترهای بالا دسته پارامترهای دیگری بدست می‌آوریم برای نمونه داریم:

$$\Pi_1' = \frac{\Pi_2}{\Pi_1} = \frac{\frac{\Delta P/l}{\rho V^2/D}}{\frac{\mu}{VD\rho}} = \frac{D^2 \Delta P/l}{\mu V}$$

$$\Pi_2' = (\Pi_1 \Pi_2)^{1/2} = \left(\frac{\mu}{VD\rho} \times \frac{\Delta P/l}{\rho V^2/D}\right)^{1/2} = \frac{\mu^{1/2} \Delta P/l^{\ 1/2}}{V^{3/2}\rho}$$

۵-۱۵ پارامترهای بی بعد مثال ۴-۴ را با استفاده از ΔP, ρ, l، به عنوان متغیرهای تکراری به دست آوردید.

حل: $f(V,\rho,l,l_1,l_2,\Delta P,g,\mu,\sigma,k)=0$

$n=10 \quad , \quad m=3 \quad \Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $= 10-3=7$

متغیرهای تکراری عبارتند از ρ و l و ΔP

$$\Pi_1=\Delta P^{x_1}\rho^{y_1} l^{z_1} g\ ,\ \Pi_2=\Delta P^{x_2}\rho^{y_2} l^{z_2}\mu\ ,\ \Pi_3=\Delta P^{x_3}\rho^{y_3} l^{z_3}\sigma\ ,\ \Pi_4=\Delta P^{x_4}\rho^{y_4} l^{z_4} k$$

$$\Pi_5=\Delta P^{x_5}\rho^{y_5} l^{z_5} V\ ,\ \Pi_6=\frac{l}{l_1} \quad , \quad \Pi_7=\frac{l}{l_2}$$

$$\Pi_1=(ML^{-1}T^{2})^{x_1}(ML^{-3})^{y_1}(L)^{z_1}(LT^{-2})=M^0L^0T^0$$

$$\begin{cases} M: x_1+y_1=0 \\ L: -x_1-3y_1+z_1+1=0 \\ T: 2x_1-2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1=1\ ,y_1=-1\ ,z_1=-3 \Rightarrow \Pi_1=\frac{\Delta P g}{\rho l^3}$$

$$\Pi_2=(ML^{-1}T^{2})^{x_2}(ML^{-3})^{y_2}(L)^{z_2}(ML^{-1}T^{-1})=M^0L^0T^0$$

۵-۱۶ عدد ماخ برای جریان گاز کامل در لوله به نسبت گرمای ویژه یعنی k (بی بعد)، فشار P دانسیته ρ و سرعت V بستگی دارد. با آنالیز ابعادی شکل رابطه‌ای را که عدد ماخ را به دست می‌دهد، تعیین کنید.

حل:

با توجه به اینکه عدد ماخ نسبت دو سرعت می‌باشد بنابراین بدون بعد است: $\Pi_1 = M \;\;,\;\; \Pi_2 = k$

$$V = P^a \rho^b \Rightarrow LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^a (ML^{-3})^b$$

$$\begin{cases} L: -a - 3b = 1 \\ T: -2a = -1 \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \Pi_3 = \frac{V}{P^{1/2}\rho^{-1/2}} = \frac{V}{\sqrt{P/\rho}} \\ M: a + b = 0 \end{cases}$$

$$g(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0 \Rightarrow g(M, k, \frac{V}{\sqrt{P/\rho}}) = 0 \Rightarrow M = f(\frac{V}{\sqrt{P/\rho}}, k)$$

۵-۱۷ یک دیسک به شعاع r در سیالی با لزجت μ با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. درز بین دیسک و صفحهٔ ثابت، y است. گشتاور لازم برای گرداندن دیسک T است. نسبت مقیاس را برای گشتاور به دست آورید.

حل:

$$f(T, r, \mu, \omega, y) = 0$$

$n = 5 \;\;, m = 3 \Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $= 5 - 3 = 2$

ابتدا پارامترهای بی‌بعد را تعیین می‌کنیم.

r, μ, ω را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر گیریم $\quad \Pi_1 = r^{x_1}\omega^{y_1}\mu^{z_1}T \;,\;\; \Pi_2 = r^{x_2}\omega^{y_2}\mu^{z_2}y$

$$\Pi_1 = (L)^{x_1}(T^{-1})^{y_1}(ML^{-1}T^{-1})^{z_1}(ML^2T^{-2}) = M^0L^0T^0$$

$$\begin{cases} L: x_1 - z_1 + 2 = 0 \\ M: z_1 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow z_1 = -3, y_1 = -1, z_1 = -1 \Rightarrow \Pi_1 = \frac{T}{r^3\omega\mu} \\ T: -y_1 - z_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Pi_2 = (L)^{x_2}(T^{-1})^{y_2}(ML^{-1}T^{-1})^{z_2}L = M^0L^0T^0$$

$$\begin{cases} L: x_2 - z_2 + 1 = 0 \\ M: z_2 = 0 \qquad \Rightarrow x_2 = -1, y_2 = 0, z_2 = 0 \Rightarrow \Pi_2 = \frac{y}{r} \\ T: -y_2 - z_2 = 0 \end{cases}$$

$$g(\Pi_1,\Pi_2)=0 \Rightarrow g(\frac{T}{r^3\omega\mu},\frac{y}{r})=0 \;\Rightarrow\; \frac{T}{r^3\omega\mu}=f(y/r) \Rightarrow T=\omega\mu r^3 f(y/r)$$

۵-۱۸ در یک نقطه از مدل سرریز یک سد سرعت جریان $1\ m/s$ است. نسبت ابعاد سد به مدل 10 به 1 می‌باشد. در شرایط مشابه سرعت جریان در نقطه متناظر در نمونه چقدر است؟

حل:

عدد فرود باید برای نمونه و مدل برابر باشد.

$$\lambda=\frac{l_p}{l_m}=10$$

$$\frac{V_m^2}{g_m l_m}=\frac{V_p^2}{g_p l_p} \Rightarrow V_p=V_m\sqrt{\lambda} \;\Rightarrow\; V_p=1\sqrt{10}=3.162\,m/s$$

۵-۱۹ توان مصرفی یک پمپ به دبی Q، افزایش فشار ΔP، دانسیتهٔ سیال ρ، اندازهٔ پمپ D و راندمان آن e بستگی دارد. بااستفاده از آنالیز ابعادی رابطه‌ای برای توان به دست آورید.

حل:

ابتدا پارامترهای بی‌بعد را تعیین می‌کنیم.

$$f(P,\Delta P,Q,\rho,D,e)=0$$

$n=6 \;\;, m=3 \Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $=6-3=3$

Q,ρ,D را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم

روش اول:

$$\Pi_1=e$$

$$\Pi_2=\rho^{x_1}D^{y_1}Q^{z_1}\Delta P=(ML^{-3})^{x_1}(L)^{y_1}(L^3T^{-1})^{z_1}(ML^{-1}T^{-2})=M^0L^0T^0$$

$$\begin{cases} M: x_1+1=0 \\ L: -3x_1+y_1+3z_1-1=0 \\ T: -z_1-2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1=-1, y_1=4, z_1=-2 \qquad \Rightarrow \Pi_2=\frac{D^4\Delta P}{\rho Q^2}$$

$$\Pi_3=\rho^{x_2}D^{y_2}Q^{z_2}P=(ML^{-3})^{x_2}(L)^{y_2}(L^3T^{-1})^{z_2}(ML^2T^{-3})=M^0L^0T^0$$

$$\begin{cases} M: x_2+1=0 \\ L: -3x_2+y_2+3z_2=0 \Rightarrow x_2=-1, y_2=4, x_2=-3 \qquad \Rightarrow \Pi_3==\frac{D^4P}{\rho Q^3} \\ T: -z_2-3=0 \end{cases}$$

روش دوم:

$D = L \Rightarrow L = D$

$\rho = ML^{-3} = MD^{-3} \Rightarrow M = \rho D^3$

$Q = L^3 T^{-1} = D^3 T^{-1} \Rightarrow T = D^3 Q^{-1}$

$\Pi_1 = e$

$\Delta P = ML^{-1}T^{-2} = \rho D^3 \times D^{-1} \times D^{-6} Q^2 = \rho D^{-4} Q^2 \Rightarrow \Pi_2 = \dfrac{D^4 \Delta P}{\rho Q^2}$

$P = ML^2 T^{-3} = \rho D^3 \times D^2 \times D^{-9} Q^3 = \rho D^{-4} Q^3 \Rightarrow \Pi_3 = \dfrac{PD^4}{\rho Q^3}$

$g(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0 \Rightarrow g(e, \dfrac{D^4 \Delta P}{\rho Q^2}, \dfrac{D^4 P}{\rho Q^3}) = 0 \Rightarrow \dfrac{D^4 P}{\rho Q^3} = f(\dfrac{D^4 \Delta P}{\rho Q^2}, e)$

$\Rightarrow P = \dfrac{\rho Q^3}{D^4} f(\dfrac{D^4 \Delta P}{\rho Q^2}, e)$

۵-۲۰. گشتاور تولید توربین آبی به دبی Q، ارتفاع H، وزن مخصوص γ، سرعت زاویه‌ای ω و راندمان e بستگی دارد. صورت معادله گشتاور را به دست آورید.

حل:

$f(T, Q, H, \gamma, \omega, e) = 0$

$n = 6 \quad , m = 3 \Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $= 6 - 3 = 3$

ω, H, γ را به عنوان متغیرهای تکراری انتخاب می‌کنیم.

$\Pi_1 = \omega^{x_1} H^{y_1} \gamma^{z_1} Q = (T^{-1})^{x_1} (L)^{y_1} (ML^{-2}T^{-2})^{z_1} L^3 T^{-1} = M^0 L^0 T^0$

$$\begin{cases} M: z_1 = 0 \\ L: y_1 - 2z_1 + 3 = 0 \\ T: -x_1 - 2z_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -1, y_1 = -3, z_1 = 0 \Rightarrow \Pi_1 = \omega^{-1} H^{-3} Q \qquad \Pi_1 = \frac{\omega H^3}{Q}$$

$\Pi_2 = \omega^{x_2} H^{y_2} \gamma^{z_2} T = (T^{-1})^{x_2} (L)^{y_2} (ML^{-2}T^{-2})^{z_2} (ML^2 T^{-2}) = M^0 L^0 T^0$

$$\begin{cases} M: z_2 + 1 = 0 \\ L: y_2 - 2z_2 + 2 = 0 \\ T: x_2 - 2z_2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0 \;,\; y_2 = -4 \;,\; z_2 = -1 \Rightarrow \Pi_2 = H^{-4} \gamma^{-1} T = \frac{T}{H^4 \gamma}$$

$\Pi_3 = e$

$g(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0 \Rightarrow g(\dfrac{\omega H^3}{\sigma}, \dfrac{T}{\gamma H^4}, e) = 0 \Rightarrow \dfrac{T}{\gamma H^4} = f(\dfrac{\omega H^3}{Q}, e)$

$\Rightarrow T = \gamma H^4 f(\dfrac{\omega H^3}{Q}, e)$

روش دوم

$\omega = T^{-1} \Rightarrow T = \omega^{-1}$

$H = L \Rightarrow L = H$

$\gamma = ML^{-2}T^{-2} = MH^{-2}\omega^{2} \Rightarrow M = \gamma H^{2}\omega^{-2}$

$$Q = L^{3}T^{-1} = H^{3}.\omega \Rightarrow \Pi_1 = \frac{\omega H^3}{Q}$$

$$T = ML^{2}T^{-2} = \gamma H^{2}\omega^{-2} \times H^{2} \times \omega^{2} = \gamma H^{4} \Rightarrow \Pi_2 = \frac{T}{\gamma H^4}$$

$\Pi_3 = e$

۵-۲۱. مطالعات تجربی بر روی مسئلهٔ انتقال حرارت جابجایی روی میله‌های استوانه‌ای مشخص کرده‌است که ضریب انتقال حرارت h_c به یک سری متغیرهای ذکر شده در جدول زیر بستگی دارد.

نشانه	نام	واحد
u	سرعت	m/s
ρ	دانسیته	kg/m^3
μ	لزجت	kg/ms
d	قطر	m
k	هدایت حرارتی	$kg.m/s^3.k$
c_p	حرارت ویژه	m^2/s^2k
h_c	ضریب انتقال حرارت	$kg/s^3.k$

با بکار بردن متغیرهای فوق تمام اعداد بدون بعدی راکه می‌توانند برای توصیف چنین شرایط فیزیکی بکار روند بدست آورید.

حل:

$f(u, \rho, \mu, d, k, c_p, h_c) = 0$

$n = 7\ ,\ m = 4 \Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $= 7 - 4 = 3$

d، k، u و μ را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم.

روش اول:

$$\Pi_1 = d^{x_1}u^{y_1}\mu^{z_1}k^{s_1}\rho = L^{x_1}(LT^{-1})^{y_1}(ML^{-1}T^{-1})^{z_1}(MLT^{-3}\theta^{-1})^{s_1}(ML^{-3}) = M^0L^0T^0\theta^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_1 + y_1 - z_1 + s_1 - 3 = 0 \\ M: z_1 + s_1 + 1 = 0 \\ T: -y_1 - z_1 - 3s_1 = 0 \\ \theta: -s_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = -1 \\ s_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{\rho u d}{\mu} = Re$$

$$\Pi_2 = d^{x_2}u^{y_2}\mu^{z_2}k^{s_2}h_c = L^{x_2}(LT^{-1})^{y_2}(ML^{-1}T^{-1})^{z_2}(MLT^{-3}\theta^{-1})^{s_2}(MT^{-3}\theta^{-1}) = M^0L^0T^0\theta^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_2+y_2-z_2+s_2=0 \\ M: z_2+s_2+1=0 \\ T: -y_2-z_2-3s_2-3=0 \\ \theta: -s_2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=0 \\ z_2=0 \\ s_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_2=\frac{h_c d}{k}=Nu$$

$$\Pi_3=d^{x_3}u^{y_3}\mu^{z_3}k^{s_3}c_p=L^{x_3}(LT^{-1})^{y_3}(ML^{-1}T^{-1})^{z_3}(MLT^{-3}\theta^{-1})^{s_3}(L^2T^{-2}\theta^{-1})=M^0L^0T^0\theta^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_3+y_3-z_3+s_3+2=0 \\ M: z_3+s_3=0 \\ T: -y_3-z_3-3s_3-2=0 \\ \theta: -s_3-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=0 \\ y_3=0 \\ z_3=1 \\ s_3=-1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_3=\frac{\mu c_p}{k}=P_r$$

روش دوم:

$$d=L\Rightarrow L=d$$

$$u=LT^{-1}=dT^{-1}\Rightarrow T=\frac{d}{u}$$

$$\mu=ML^{-1}T^{-1}=M\frac{l}{d}.\frac{u}{d}=M\frac{u}{d^2}\Rightarrow M=\frac{\mu d^2}{u}$$

$$k=MLT^{-3}\theta^{-1}=\frac{\mu d^2}{u}\times d\times\frac{u^3}{d^3}\times\theta^{-1}=\mu u^2\theta^{-1}\Rightarrow\theta=\frac{\mu u^2}{k}$$

$$\rho=ML^{-3}=\frac{\mu d^2}{u}\times\frac{1}{d^3}=\frac{\mu}{ud}\Rightarrow\Pi_1=\frac{\rho ud}{\mu}=Re$$

$$h_c=MT^{-3}\theta^{-1}=\frac{\mu d^2}{u}\times\frac{u^3}{d^3}\times\frac{k}{\mu u^2}=\frac{k}{d}\Rightarrow\Pi_2=\frac{h_c D}{k}=Nu$$

$$c_p=L^2T^{-2}\theta^{-1}=d^2\times\frac{u^2}{d^2}\times\frac{k}{\mu u^2}=\frac{k}{\mu}\Rightarrow\Pi_3=\frac{c_p\mu}{k}=p_r$$

۵-۲۲. می خواهیم ارتباط بین اعداد بدون بعد پیدا شده در مسئلهٔ قبل را تعیین کنیم توضیح دهید تعیین رابطهٔ کمی چگونه ممکن است و چه تعداد داده برای شرایط داده شده در مسئلهٔ قبل مورد نیاز است؟

حل: به عهده دانشجو گذاشته می‌شود

۵-۲۳. دسته متغیرهایی که انتقال حرارت گذرا بدون تولید گرمای داخلی در صفحات بی‌نهایت را توصیف می‌کنند عبارتند از ضریب انتقال حرارت h_c، نفوذ حرارتی α، فاصله x ضریب هدایت حرارتی k، دمای T، دمای مرجع T_{ref} و زمان T .

کلیه پارامترهای بی‌بعد مناسب را برای این مسئله بدست آورید.

حل:

$f(h_c, \alpha, x, k, T, T_{ref}, t)=0$

$n=7\ ,\ m=4\ \Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $=7-4=3$

x و T و t و k را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم:

روش اول:

$$\Pi_1 = x^{x_1} T^{y_1} t^{z_1} k^{s_1} \alpha = L^{x_1} \theta^{y_1} T^{z_1} (MLT^{-3}\theta^{-1})^{s_1} (L^2T^{-1}) = M^0L^0T^0\theta^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_1+s_1+2=0 \\ M: s_1=0 \\ T: z_1-3s_1-1=0 \\ \theta: y_1-s_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=0 \\ z_1=1 \\ s_1=0 \end{cases} \Rightarrow \Pi_1=\frac{\alpha t}{x^2}$$

$$\Pi_2 = x^{x_2} T^{y_2} t^{z_2} k^{s_2} h_c = L^{x_2} \theta^{y_2} T^{z_2} (MLT^{-3}\theta^{-1})^{s_2} (MT^{-3}\theta^{-1}) = M^0L^0T^0\theta^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_2+s_2=0 \\ M: s_2+1=0 \\ T: z_2-3s_2-3=0 \\ \theta: y_2-s_2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=0 \\ z_2=0 \\ s_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_2=\frac{h_c x}{k}$$

$$\Pi_3=\frac{T}{T_{ref}}$$

روش دوم:

$$x=L \Rightarrow L=x$$
$$T=\theta \Rightarrow \theta=T$$
$$t=T \Rightarrow T=t$$
$$k=MLT^{-3}\theta^{-1}=Mxt^{-3}T^{-1} \Rightarrow M=\frac{kt^3T}{x}$$
$$\alpha=L^2T^{-1}=x^2\frac{1}{t} \Rightarrow \Pi_1=\frac{\alpha t}{x^2}$$
$$h_c=MT^{-3}\theta^{-1}=\frac{kt^3T}{x}\times\frac{1}{t^3}\times\frac{1}{T}=\frac{k}{x} \Rightarrow \Pi_2=\frac{h_c x}{k}$$
$$T_{ref}=\theta=T \Rightarrow \Pi_3=\frac{T}{T_{ref}}$$

۵-۲۴ مسئلهٔ قبل را با فرض وجود یک منبع حرارتی و در نتیجه تولید گرمای داخلی q_H دوباره حل کنید.

حل:

در این مسئله ۴ پارامتر بی‌بعد داریم که ۳ تای آنها همان پارامترهای بی‌بعد به دست آمده در مسئله قبل می‌باشد.

$[q_H]=ML^2T^{-2}\theta^{-1}\times L^{-3}=ML^{-1}T^{-2}\theta^{-1}$

$\Rightarrow q_H=\frac{kt^3T}{x}\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{t^2}\times\frac{1}{T}=\frac{kt}{x^2}\Rightarrow\Pi_4=\frac{q_Hx}{kt}$

۲۵-۵. سرد کردن یک گلوله کوچک (یک فرآیند زمان متغیر) که از داخل یک کوره در دمای یکنواخت T_f بیرون آورده شده، و بطور ناگهانی در آب سرد با دمای یکنواخت T_w فرو برده می‌شود به وسیلهٔ ضریب انتقال حرارت متوسط $\bar{h}_c$، نفوذ حرارتی α، هدایت حرارتی k، دانسیته گلوله ρ، سطح مقطع گلوله A و بالاخره طول L توصیف می‌شود کلیه پارامترهای بی بعد را برای این مسئله بدست آورید.

حل:

$f(T_f,T_w,\bar{h}_c,\alpha,k,\rho,A,L)=0$

n=8 , m=4 $n=8$, $m=4$ $\Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی بعد $=8-4=4$

$\bar{h}_c,\rho,T_f,L$ را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم:

$\Pi_1=L^{x_1}T_f^{y_1}\rho^{z_1}\bar{h}_c^{s_1}k=L^{x_1}\theta^{y_1}(ML^{-3})^{z_1}(MT^{-3}\theta^{-1})^{s_1}(MLT^{-3}\theta^{-1})=M^0L^0T^0\theta^0$

$$\Rightarrow\begin{cases}M: z_1+s_1+1=0\\L: x_1-3z_1+1=0\\T: -3s_1-3=0\\\theta: y_1-s_1-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\y_1=0\\z_1=0\\s_1=-1\end{cases}\Rightarrow\Pi_1=\frac{k}{L\bar{h}_c}$$

$\Pi_2=L^{x_2}T_f^{y_2}\rho^{z_2}\bar{h}_c^{s_2}\alpha=L^{x_2}\theta^{y_2}(ML^{-3})^{z_2}(MT^{-3}\theta^{-1})^{s_2}(L^2T^{-1})=M^0L^0T^0\theta^0$

$$\Rightarrow\begin{cases}M: z_2+s_2=0\\L: x_2-3z_2+2=0\\T: -3s_2-1=0\\\theta: y_2-s_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-1\\y_2=-1/3\\z_2=1/3\\s_2=-1/3\end{cases}\Rightarrow\Pi_2=\frac{\rho^{1/3}\alpha}{LT_f^{1/3}\bar{h}_c^{1/3}}\quad\Pi_2=\frac{\rho\alpha^3}{L^3T_f\bar{h}_c}$$

روشن است که: $\Pi_3=\frac{T_f}{T_w}$, $\Pi_4=\frac{L^2}{A}$

۲۶-۵. مشخص شده است که ضریب انتقال جرم k_c به یک سری متغیرهای ذکر شده در زیر بستگی دارد:

نشانه	نام	واحد
u	سرعت	m/s
ρ	دانسیته	kg/m^3
μ	لزجت	kg/ms
L_{ref}	طول مرجع	m
D	ضریب نفوذ	m^2/s
k_c	ضریب انتقال جرم	kg/m^2s

حل:

$$f(u,\rho,\mu,l_{ref},D,k_c)=0$$

$n=6, m=3 \Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $= 6-3=3$

L_{ref} و ρ و D را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم.

روش اول:

$$\Pi_1 = L_{ref}^{x_1}\rho^{y_1}D^{z_1}u = L^{x_1}(ML^{-3})^{y_1}(L^2T^{-1})^{z_1}(LT^{-1}) = M^0L^0T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_1 - 3y_1 + 2z_1 + 1 = 0 \\ M: y_1 = 0 \\ T: -z_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{L_{ref}u}{D}$$

$$\Pi_2 = L_{ref}^{x_2}\rho^{y_2}D^{z_2}\mu = L^{x_2}(ML^{-3})^{y_2}(L^2T^{-1})^{z_2}(ML^{-1}T^{-1}) = M^0L^0T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_2 - 3y_2 + 2z_2 - 1 = 0 \\ M: y_2 + 1 = 0 \\ T: -z_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -1 \\ z_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho D} \qquad \frac{\rho D}{\mu}$$

$$\Pi_3 = L_{ref}^{x_3}\rho^{y_3}D^{z_3}k_c = L^{x_3}(ML^{-3})^{y_3}(L^2T^{-1})^{z_3}(ML^{-2}T^{-1}) = M^0L^0T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_3 - 3y_3 + 2z_3 - 2 = 0 \\ M: y_3 + 1 = 0 \\ T: -z_3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = -1 \\ z_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_3 = \frac{L_{ref}k_c}{\rho D} \qquad \frac{\rho D}{L_{ref}k_c}$$

روش دوم:

$$L_{ref} = L \Rightarrow L = L_{ref}$$

$$\rho = ML^{-3} = ML_{ref}^{-3} \Rightarrow M = \rho L_{ref}^3$$

$$D = L^2T^{-1} = L_{ref}^2T^{-1} \Rightarrow T = L_{ref}^2/D$$

$$u = LT^{-1} = L_{ref} \times \frac{D}{L_{ref}^2} = \frac{D}{L_{ref}} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{uL_{ref}}{D}$$

$$\mu = ML^{-1}T^{-1} = \rho L_{ref}^3 \times \frac{1}{L_{ref}} \times \frac{D}{L_{ref}^2} = \rho D \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\rho D}{\mu}$$

$$k_c = ML^{-2}T^{-1} = \rho L_{ref}^3 \times \frac{1}{L_{ref}^2} \times \frac{D}{L_{ref}^2} = \frac{\rho D}{L_{ref}} \Rightarrow \Pi_3 = \frac{\rho D}{k_c L_{ref}}$$

۵-۲۷. میزان رسوب در فیلترهای جداکننده به ذره و مشخصه های مبانی نظیر قطر ذره d_s، دانسیته ذره ρ_s سرعت حد ذره w_s، ضریب نفوذ ذره D_s، سرعت گاز u، دانسیته ρ، لزجت μ، قطرصفحهٔ فیلتر d_f و شتاب

جاذبهٔ g بستگی دارد. پارامترهای بی بعد برای رسوب سازی در فیلترهای جداکننده کدامند؟

حل:
$f(d_s, \rho_s, w_s, D_s, u, \rho, \mu, d_f, g)=0$

$n=9$ و $m=3 \Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی بعد $=9-3=6$

d_s ، ρ_s ، u را بعنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم:

$$\Pi_1=d_s^{x_1}\rho_s^{y_1}u^{z_1}D_s=L^{x_1}(ML^{-3})^{y_1}(LT^{-1})^{z_1}(L^2T^{-1})=M^0L^0T^0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M: y_1=0\\ L: x_1-3y_1+z_1+2=0\\ T: -z_1-1=0\ 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ y_1=0\\ z_1=-1\end{cases}\Rightarrow\Pi_1=\frac{D_s}{ud_s}$$

$$\Pi_2=d_s^{x_2}\rho_s^{y_2}u^{z_2}\mu=L^{x_2}(ML^{-3})^{y_2}(LT^{-1})^{z_2}(ML^{-1}T^{-1})=M^0L^0T^0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M: y_2+1=0\\ L: x_2-3y_2+z_2-1=0\\ T: -z_2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-1\\ y_2=-1\Rightarrow\Pi_2=\dfrac{\mu}{\rho u d_s}\\ z_2=-1\end{cases}$$

$$\Pi_3=d_s^{x_3}\rho_s^{y_3}u^{z_3}g=L^{x_3}(ML^{-3})^{y_3}(LT^{-1})^{z_3}(LT^{-2})=M^0L^0T^0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M: y_3=0_3=0\\ L: x_3-3y_3+z_3+1=0\\ T: -z_3-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=1\\ y_3=0\\ z_3=-2\end{cases}\Rightarrow\Pi_3=\frac{gd_s}{u^2}$$

روشن است که: $\Pi_4=\dfrac{d_s}{d_f}$ ، $\Pi_5=\dfrac{\rho_s}{\rho}$ ، $\Pi_6=\dfrac{w_s}{u}$

۵-۲۸. شکل بی بعد معادله انتقال حرارت را در حالت دوبعدی (صفحه xy) را با بکار بردن نرمالیزاسیون تک مقیاسی بدست آورید. کلیه جزئیات را بیان کنید.

حل:

$$x_*=\frac{x}{L}\ ,\ y_*=\frac{y}{L}\ ,\ T_*=\frac{T}{T_m}\ ,\ u_*=\frac{u}{u_m}\ ,\ v_*=\frac{v}{v_m}\ ,\ t_*=\frac{t}{t_{ref}}$$

معادله انتقال حرارت در دو بعد به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}.\nabla T=\frac{k}{\rho c_p}\nabla^2 T+S_T \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_*}\frac{\partial t_*}{\partial t}=\frac{1}{t_{ref}}\frac{\partial}{\partial t_*}\qquad,\qquad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x_*}\frac{\partial x_*}{\partial x}=\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x_*}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x_*}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial x_*^2}$$

به همین ترتیب: $\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial y_*^2}$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{t_{ref}}\frac{\partial}{\partial t_*}(T_* T_m)=\frac{T_m}{t_{ref}}\frac{\partial T_*}{\partial t_*} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x}=\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x_*}(T_* T_m)=\frac{T_m}{L}\frac{\partial T_*}{\partial x_*}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial x_*^2}(T_* T_m)=\frac{T_m}{L^2}\frac{\partial^2 T_*}{\partial x_*^2}$$

به همین ترتیب: $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{T_m}{L^2}\frac{\partial^2 T_*}{\partial y_*^2}$

معادله(I) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]+S_T$$

$$\Rightarrow\left(\frac{T_m}{t_{ref}}\right)\frac{\partial T_*}{\partial t_*}+\left(\frac{u_m T_m}{L}\right)u_*\frac{\partial T_*}{\partial x_*}+\left(\frac{u_m T_m}{L}\right)v_*\frac{\partial T_*}{\partial y_*}=\alpha\left[\left(\frac{T_m}{L^2}\right)\frac{\partial^2 T_*}{\partial x_*^2}+\left(\frac{T_m}{L^2}\right)\frac{\partial^2 T_*}{\partial y_*^2}\right]+(S_{mT})S_T^*$$

$$\nabla_*=i\frac{\partial}{\partial x_*}+j\frac{\partial}{\partial y_*}+k\frac{\partial}{\partial z_*}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{T_m}{t_{ref}}\right)\frac{\partial T_*}{\partial t_*}+\left(\frac{u_m T_m}{L}\right)\mathbf{v}_*.\nabla_* T_*=\left(\frac{\alpha T_m}{L^2}\right)\nabla_*^2 T_*+(S_{mT})S_T^*$$

با انتخاب $t_{ref}=\frac{L}{u_m}$ و تقسیم طرفین بر $\frac{u_m T_m}{L}$ داریم: $\quad ((S_{mT})S_T^*=S)$

$$\frac{\partial T_*}{\partial t_*}+\mathbf{v}_*.\nabla_* T_*=\left(\frac{\alpha}{L u_m}\right)\nabla_*^2 T_*+\left(\frac{L}{u_m T_m}\right)S$$

$$\frac{\alpha}{L u_m}=\frac{1}{pe}\Rightarrow\frac{DT_*}{Dt_*}=\frac{1}{p_e}\nabla^2 T_*+(L/u_m T_m)S$$

۵-۲۹. در جریان پشت اجسام جامد، نیروی وارد برجسم بوسیلهٔ حرکت سیال به سرعت سیال u، دانسیتهٔ ρ، لزجت μ و بعد اصلی جسم L بستگی دارد. پارامترهای بی بعد برای شرایط داده شده، کدامند؟

حل: $f=g(u,\rho,\mu,L)$

تعداد پارامترهای بی‌بعد $= 5-3=2$

L و u و ρ را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر می‌گیریم:

$$\Pi_1=L^{x_1}u^{y_1}\rho^{z_1}\mu=L^{x_1}(LT^{-1})^{y_1}(ML^{-3})^{z_1}(ML^{-1}T^{-1})=M^0L^0T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_1+y_1-3z_1-1=0 \\ M: z_1+1=0 \\ T: -y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=-1 \\ z_1=-1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_1=\frac{\mu}{\rho u L} \qquad \Pi_1=\frac{\rho u L}{\mu}=Re$$

$$\Pi_2=L^{x_2}u^{y_2}\rho^{z_2}f=L^{x_2}(LT^{-1})^{y_2}(ML^{-3})^{z_2}(MLT^{-2})=M^0L^0T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L: x_2+y_2-3z_2+1=0 \\ M: z_2+1=0 \\ T: -y_2-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-2 \\ z_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_2=\frac{f}{\rho L^2 u^2}$$

روش دوم:

$$L=L$$
$$u=LT^{-1} \Rightarrow T=L/u$$
$$\rho=ML^{-3} \Rightarrow M=\rho L^3$$
$$\mu=ML^{-1}T^{-1}=\rho L^3\times\frac{1}{L}\times\frac{u}{L}=\rho uL\Rightarrow \Pi_1=\frac{\rho uL}{\mu}=Re$$
$$f=MLT^{-2}=\rho L^3\times L\times\frac{u^2}{L^2}=\rho L^2u^2\Rightarrow \Pi_2=\frac{f}{\rho L^2u^2}$$

۵-۳۰. ضریب دراگ C_D نشاندهنده نسبت تنش برشی سطح به انرژی جنبشی جریان آزاد می‌باشد آب روی یک سطح صاف با طول مشخصهٔ L جریان دارد و تنش برشی موضعی به صورت $\tau(x)=0.3(\rho\mu/x)^{1/2}u^{3/2}$ داده شده‌است که x فاصله از لبهٔ انتهایی و u سرعت جریان آزاد است با استفاده از معادلهٔ فوق روابط بی بعد را برای ضریب دراگ C_D موضعی و متوسط بدست آورید.

حل:

$$C_D=\frac{\tau}{\rho u^2/2}$$

محاسبه ضریب دراگ موضعی:

$$x^*=\frac{x}{L}\Rightarrow x=Lx^*$$

$$C_{D,x}=\frac{\tau(x)}{\rho u^2/2}=\frac{0.3(\rho\mu/x)^{1/2}u^{3/2}}{\rho u^2/2}=0.6\left(\frac{\rho ux}{\mu}\right)^{-1/2}=$$

$$=0.6\left(\frac{\rho uL}{\mu}\right)^{-1/2}.x_*^{-1/2}=0.6Re_L^{-1/2}.x_*^{-1/2}$$

محاسبه ضریب دراگ کلی:

$$\overline{C}_D=\frac{\overline{\tau}}{\rho u^2/2}$$

$$\overline{\tau}=\frac{1}{L}\int_0^L\tau(x)dx=\frac{1}{L}\int_0^L 0.3(\rho\mu/x)^{1/2}u^{3/2}dx=$$

$$=\frac{1}{L}\left[2\times0.3\times(\rho\mu x)^{1/2}u^{3/2}\right]_0^L=0.6(\rho\mu/L)^{1/2}u^{3/2}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_D = \frac{0.6(\rho\mu/L)^{1/2}u^{3/2}}{\rho u^2/2} = 1.2\,(\rho u L/\mu)^{-1/2} = 1.2 Re_L^{-1/2}$$

۵-۳۱. پارامترهای بی بعد R و Pr را بر حسب دما برای آب رسم کنید. طول مشخصهٔ $L=4.5\ m$ و سرعت مشخصهٔ $u=3.2m/s$ را بکار ببرید.

حل: به عهده دانشجو گذاشته می‌شود.

۵-۳۲ برای جریان بالای صفحات افقی مشخص شده است که رابطهٔ زیر برقرار است $Nu=\alpha R^{\beta} Pr^{\gamma}$ که اعداد بی بعد بر اساس طول L صفحه بدست آمده است ارزیابی چنین جریانی نیازمند اطلاعات مربوط به ضرایب β, α, γاست تعداد داده های مورد نیاز برای محاسبهٔ این ضرایب را تعیین کنید

حل:

حداقل 4 داده تجربی مورد نیاز است

۵-۳۳ فرض کنید در مسألهٔ قبل یک سری داده های تجربی موجود باشند و یک مهندس نیازمند پیدا کردن مقادیر ضرایب β, α, γاست آیا شما می توانید روشی برای محاسبهٔ این ضرایب ارائه دهید؟

حل:

$$Nu=\alpha R^{\beta} Pr^{\gamma}$$
$$\Rightarrow \log Nu = \log\alpha + \beta \log R + \gamma \log Pr$$

می‌دانیم عدد بی‌بعد Pr تنها تابع خواص سیال است

یک بار برای یک سیال در Pr های ثابت آزمایش می‌کنیم و $logNu$را بر حسب $logR$رسم می‌کنیم.

β = شیب خط حاصل

$\log\alpha+\gamma \log Pr$ = عرض از مبدأ

در قسمت دوم برای چندین سیال در Rهای ثابت آزمایش می‌کنیم و $logNu$را بر حسب $logPr$رسم می‌کنیم.

γ = شیب خط حاصل

$\log\alpha+\beta \log R$ = عرض از مبدأ

β بدست آمده از آزمایشات سری اول را در عبارت مربوط به عرض از مبدأ خط حاصل از آزمایشات سری دوم قرار داده و αرا بدست می آوریم.

لازم به تذکر است که برای هر سری از آزمایشات حداقل 2 داده تجربی مورد نیاز است پس برای تعیین α, β, γحداقل 4 داده تجربی لازم است.

۵-۳۴. رابطهٔ زیر برای توزیع غلظت جزء A در مقدار زیادی آب فرض شده است $C_A(z,t) = C_A \alpha e^{-z^2/D_A t}$
که α ضریب تصحیح برای تغییر دما است. آیا معادله فوق به شکل بی بعد است؟ اگر نیست شکل بی بعد آن کدام است؟

حل:

با توجه به شکل معادله مورد نظر آن در شکل بی‌بعد نمی‌باشد شکل بی‌بعد این معادله به صورت زیر است:

$$C_A(z,t)/C_A = \alpha e^{-z^2/D_A t}$$

۵-۳۵. پارامترهای بدون بعد $Nu, R_x^{1/2} Pr^{1/3}$ را برای جریان آب $45^\circ c$ روی یک صفحهٔ نازک با بکار بردن داده های زیر بدست آورید: $h_c = 17.034\ W/m^2.k, k=0.6386\ W/m.k, c_p=4176\ J/kg.k, x=7.62m$, $u=1\ m/s$.

حل:

برای آب در دمای $45^\circ c$ داریم: $\mu = 0.599 \times 10^{-3} N.s/m^2$

$$\nu = 0.605 \times 10^{-6}\ m^2/s$$

$$R_x = \frac{ux}{\nu} = \frac{1 \times 7.62}{0.605 \times 10^{-6}} = 1.2595 \times 10^7$$

$$p_r = \frac{\mu c_P}{k} = \frac{0.599 \times 10^{-3} \times 4176}{0.6386} = 3.917$$

$$R_x^{1/2} P_r^{1/3} = (1.2595 \times 10^7)^{1/2} \times (3.917)^{1/3} = 5594$$

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = \frac{17.034 \times 7.62}{0.6386} = 203.25$$

۵-۳۶. پارامترهای بدون بعد $(R.Pr)^{1/2}, Pr, R$ برای جریان آب روی یک صفحهٔ نازک به طول $3\ m$ را بکار بردن داده های زیر بدست آورید

$$u=2.18\ m/s,\ k=0.615\ W/m.k,\ h_c=17.034\ W/m^2k, c_p= 4176\ J/kgk, T=27C^\circ$$

حل:

برای آب در $27C$ داریم:

$$\begin{cases} \mu = 0.857\ N.s/m^2 \\ \nu = 0.860\ m^2/s \end{cases}$$

$$R=\frac{uL}{v}=\frac{7.1522\times 9.8425}{0.929\times 10^{-5}}=7.577\times 10^6$$

$$Pr=\frac{\mu c_p}{k}=\frac{0.578\times 10^{-3}\times 0.997}{0.355}\times 3600=5.84$$

$$(R.Pr)^{1/2}=(7.577\times 10^6\times 5.84)^{1/2}=6652$$

۵-۳۷. مدلی از یک لوله ونتوری با مقیاس یک پنجم نمونه اصلی ساخته شده‌است در نمونه اصلی آب $20c$ و در مدل آب $95c$ جریان دارد قطر گلوگاه نمونه اصلی $600mm$ و سرعت در آن $60m/s$ است برای برقراری تشابه دینامیکی، دبی عبوری از مدل باید چقدر باشد؟

حل:

عدد رینولدز باید برای نمونه و مدل برابر باشد

$$\lambda=l_p/l_m=5$$

$$R_m=R_p\Rightarrow \frac{V_mD_m}{\nu_m}=\frac{V_pD_p}{\nu_p}\Rightarrow V_m=V_p\frac{D_p}{D_m}\frac{\nu_m}{\nu_p}$$

از جدول کتاب برای آب داریم:

$$\begin{cases} t=95^\circ c:\nu_m=0.311\times 10^{-6}m^2/s \\ t=20^\circ c:\nu_p=1.007\times 10^{-6}m^2/s \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_m=6\times 5\times\frac{0.311\times 10^{-6}}{1.007\times 10^{-6}}=9.265\,m/s$$

$$\frac{D_p}{D_m}=5\Rightarrow D_m=\frac{D_p}{5}=\frac{0.6}{5}=0.12\,m$$

$$Q_m=V_mA_m=9.265\times\frac{\pi\times 0.12^2}{4}=0.1047\,m^3/s=104.7L/s$$

۵-۳۸. نیروی دراگ وارد به یک پرتابهٔ پرسرعت پرتابه V، دانسیته سیال ρ، سرعت صوت c، قطر پرتابه D و لزجت سیال μ بستگی دارد. رابطه‌ای برای دراگ بنویسید.

حل:

$$f(F,V,\rho,c,D,\mu)=0$$

$n=6$, $m=3$ $\Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $=6-3=3$

D,V,ρ را به عنوان متغیرهای تکراری انتخاب می‌کنیم.

$$\rho:(ML^{-3}),V:(LT^{-1}),D:(L)$$

$$\Rightarrow L=D,T=\frac{L}{V}=\frac{D}{V},M=\rho L^3=\rho D^3$$

$$F=\frac{ML}{T^2}=\frac{\rho D^3DV^2}{D^2}\Rightarrow\Pi_1=\frac{F}{\rho V^2D^2}$$

عدد ماخ: $c=\frac{L}{T}=V \Rightarrow \Pi_2=\frac{V}{c}=M$

عدد رینولدز: $\mu=\frac{M}{LT}=\rho VD \Rightarrow \Pi_3=\frac{\rho VD}{\mu}=R$

$$f(\frac{F}{\rho V^2 D^2}, M, R)=0 \Rightarrow F=\rho V^2 D^2 f'(M, R)$$

۵-۳۹. دراگ موجی وارده به مدل یک کشتی در سرعت $3m/s$ برابر $16N$ است. ابعاد نمونه اصلی پانزده برابر ابعاد مدل است. سرعت نمونه و دراگ موجی وارد به آن را تعیین کنید. سیال در دو حالت یکسان است.

حل:

$$\lambda=\frac{l_p}{l_m}=15$$

عدد فرود باید برای نمونه و مدل برابر باشد.

با توجه به یکسان بودن شرایط دو مایع خواص فیزیکی آن نیز یکسان خواهد بود

$$\frac{V_m^2}{g_m l_m}=\frac{V_p^2}{g_p l_p} \Rightarrow V_p=V_m\sqrt{\lambda}=3\times\sqrt{15}=11.62\,m/s$$

نیروی مقاوم $F \propto \rho V^2 L^2 \Rightarrow \frac{F_p}{F_m}=\frac{\rho_p V_p^2 l_p^2}{\rho_m V_m^2 l_m^2}$

$$\Rightarrow F_p=F_m\times\frac{\rho_p}{\rho_m}\times\frac{V_p^2}{V_m^2}\times\left(\frac{l_p}{l_m}\right)^2=16\times1\times\frac{11.62^2}{3^2}\times15^2=54000N=54kN$$

۵-۴۰. یک ذرهٔ کروی به قطر $D=0.13\ mm$ در هوای $0^\circ C$ با سرعت $U=0.1\ m/s$ سقوط می‌کند. چگالی این ذره را تعیین کنید. نیروی دراگ وارد به کره‌های کوچک در جریان آرام با رابطه $F=3\pi\mu DU$ داده می‌شود.

حل:

از منحنی کتاب برای هوا در $0^\circ C$

$$\rho_{air}=1.24\,kg/m^3$$
$$\mu_{air}=1.708\times10^{-5}\,Pa\,s$$

از موازنه نیروها داریم:

$$W=F_D+F_B$$

$$W=\frac{1}{6}\pi D^3\gamma_s \ ,\ F_B=\frac{1}{6}\pi D^3\gamma_{air}\ ,\ F_D=3\pi\mu DU$$

$$\frac{1}{6}\pi D^3\gamma_s=3\pi\mu DU+\frac{1}{6}\pi D^3\gamma_{air}$$

$$\frac{D^3}{6}\gamma_s=3\mu DU+\frac{D^3}{6}\gamma_{air}$$

$$\gamma_s=\gamma_{air}+\frac{18\mu U}{D^2}=(1.24\times 9.806)+\frac{18\times(1.708\times 10^{-5})\times 0.1}{(0.13\times 10^{-3})^2}=1831\,N/m^3$$

$$s=\frac{\gamma_s}{\gamma_w}=\frac{1831}{9806}=0.1867$$

۵-۴۱. قطره‌ای از یک مایع به شکل کره به شعاع r_0 با سرعت U در مایع دیگری، با دانسیتهٔ ρ و لزجت μ سقوط می‌کند. آزمایشات در لوله‌های قائم با شعاع r انجام شده است. با استفاده زا آنالیز ابعادی یک دسته پارامتر بی بعد برای تعیین تأثیر دیوارهٔ لوله بر سرعت سقوط قطرات به دست آورید.

حل:

$$f(r_0,\rho_0,U,\rho,\mu,r)=0$$

$n=6\ ,\ m=3\ \Rightarrow$ تعداد پارامترهای بی‌بعد $=6-3=3$

$$r:(L)\ ,\ \rho:(ML^{-3})\ ,\ U:(LT^{-1})$$

$$L=r\ \rho=ML^{-3}=Mr^{-3}\Rightarrow M=\rho r^3,\ U=LT^{-1}=rT^{-1}\Rightarrow T=\frac{r}{U}$$

روشن است که: $\Pi_1=\frac{r}{r_0},\ \Pi_2=\frac{\rho}{\rho_0}$

$$\mu=ML^{-1}T^{-1}=\rho r^3(r)^{-1}\left(\frac{r}{U}\right)^{-1}=\rho rU\Rightarrow\Pi_3=\frac{\rho rU}{\mu}=R$$

۵-۴۲. گاز $(\mu=0.0002pa.s,\rho=40kg/m^3)$ با سرعت $V=25\ m/s$ در یک لوله به قطر $1.2m$ جریان دارد. قرار است با انجام آزمایش با آب $20^\circ C$ بر روی مدل تلفات در یک سه راهی تعیین شود. در آزمایشگاه می‌توانیم دبی $75\ L/s$ تأمین کنیم. مدل را باید با چه مقیاسی ساخت؟ نتایج چگونه به تلفات نمونه مربوط می‌شوند.

حل:

عدد رینولدز باید برای نمونه و مدل برابر باشد.

از جدول کتاب برای آب در دمای $20^\circ C$ $\quad \nu_m=1.007\times 10^{-6}m^2/s$

$$\nu_p=\frac{\mu_p}{\rho_p}=\frac{0.0002}{40}=5\times 10^{-6}m^2/s$$

$$\frac{V_pD_p}{\nu_p}=\frac{V_mD_m}{\nu_m}\Rightarrow V_mD_m=\frac{V_pD_p}{\nu_p}\nu_m=\frac{25\times 1.2}{5\times 10^{-6}}(1.007\times 10^{-6})=6.042$$

$$\Rightarrow V_m=\frac{6.042}{D_m}$$

$$Q_m=VA=V\times\frac{\pi}{4}D_m^2=\frac{6.042}{D_m}\times\frac{\pi}{4}D_m^2=0.075\,m^3/s$$

$$\Rightarrow D_m=0.075\times\frac{4}{\pi\times 6.042}=0.016m$$

بنابراین باید با مقیاس $\frac{1}{75}$ یا کمتر ساخته شود. $\Rightarrow \lambda = \frac{l_p}{l_m} = \frac{D_p}{D_m} = \frac{1.2}{0.016} = 75$

۵-۴۳ سرعت انتشار امواج سطحی کوچک به کشش سطحی و دانسیته سیال و طول موج بستگی دارد. با استفاده از آنالیز ابعادی شکل ۱-۴ را برای طول موجهای کوچک تأیید کنید.

حل:

$f(c,\sigma,\rho,\lambda)=0$

$c = k\sigma^x\rho^y\lambda^z \Rightarrow LT^{-1} = (MT^{-2})^x(ML^{-3})^y(L)^z$

$$\begin{cases} M: x+y=0 \\ L: -3y+z=1 \\ T: -2x=-1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = k\sigma^{1/2}\rho^{-1/2}\lambda^{-1/2} = k\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\lambda}}$$

هرگاه برای طول موجهای کوچک منحنی تغییرات V را برحسب λ رسم کنید شکل ۴-۱ تایید خواهد شد.

۵-۴۴ سرعت انتشار امواج در آبهای بسیار عمیق به طول موج بستگی دارد اما در آبهای کم عمق مستقل از آن است. سرعت پیشروی موج در آب کم عمق به چه متغیرهایی بستگی دارد؟ آیا شکل ۱-۴ با این مسأله تطبیق دارد؟

حل:

سرعت پیشروی موج در آب کم عمق به شتاب جاذبه (g) و عمق سیال (h) بستگی دارد موقعی که طول موج (λ) افزایش می‌یابد رابطه بدست آمده در مسئله قبل صادق نخواهد بود بنابراین منحنی تغییرات V برحسب λ تغییر خواهد یافت اگر این منحنی را رسم کنیم شیب منحنی پس از یک مینیمم موضعی افزایش یافته و بعداً ثابت خواهد ماند ناحیه موردنظر ما این ناحیه است یعنی ناحیه‌ای که در آن سرعت به طول موج بستگی ندارد.

۵-۴۵ اگر یک مجرای دایره‌ای قائم که کاملاً پر نشده است با سرعت زیادی دوران نماید، سیال همچنان که به طرف پایین جریان می‌یابد، بطور یکنواخت به دیواره داخلی مجرا می‌چسبد (بخش ۹-۲ را نگاه کنید). در این شرایط، شتاب شعاعی سیال یک میدان نیروی شعاعی ایجاد می‌کند که مشابه جاذبه ثقل است و یک پرش هیدرولیکی می‌تواند در داخل لوله رخ دهد که در آن ضخامت لایه سیال بطور ناگهانی تغییر می‌نماید. یک دسته پارامتر بی بعد برای مطالعهٔ این پرش هیدرولیکی دوار تعیین کنید.

حل:

$f(\omega, r_1, r_2, R, V, y) = 0$

$n=6$, $m=2$ $\Rightarrow$ *تعداد پارامترهای بی‌بعد* $=6-2=4$

روشن است که:

$$\Pi_1=\frac{r_1}{R},\Pi_2=\frac{r_2}{R}$$

$$\omega=T^{-1},V=LT^{-1}=R\omega\Rightarrow\Pi_3=\frac{R\omega}{V}$$

$$g=LT^{-2}=R\omega^2\Rightarrow\Pi_4=g/R\omega^2$$

۴۶-۵. یک قطرهٔ تقریباً کروی در حین سقوط نوسان می‌کند. کشش سطحی نقش اصلی و غالب را ایفا می‌کند. پارامتر بی بعد معنادار رابرای فرکانس طبیعی این نوسان تعیین کنید.

حل:

$$f(D,\sigma,\omega,\rho)=0$$

$n=4,\ m=3\Rightarrow$ **تعداد پارامترهای بی‌بعد** $=4-3=1$

$$\Pi=D^x\sigma^y\omega^z\rho\Rightarrow L^x(MT^{-2})^y(T^{-1})^z(ML^{-3})=M^0L^0T^0$$

$$\begin{cases}L: x-3=0\\ M: y+1=0\\ T: -2y-z=0\end{cases}\Rightarrow x=3,y=-1,z=2$$

$$\Rightarrow\Pi=\frac{D^3\omega^2\rho}{\sigma}$$

هر توان از عدد بی‌بعد نیز می‌تواند یک عدد بی‌بعد باشد: $\Pi=\dfrac{D^{3/2}\omega\rho^{1/2}}{\sigma^{1/2}}$

۴۷-۵. در شکل ۱۷-۶ ضرایب لیفت و دارگ برای یک بال نشان داده شده است. اگر وتر بال $3m$ باشد، لیفت و دراگ بر واحد طول بال را به دست آورید. بال تحت زاویه حمله صفر قرار گرفته است. عدد رینولدز بر اساس طول وتر در هوای $10^{\circ}C$ برابر 4.5×10^7 است. اگر آزمایشات در آب $20^{\circ}C$ انجام شود، نیروی وارده به مدلی به مقیاس $1:20$ چقدر است؟ سرعت آب چقدر خواهد بود؟ در مورد مطلوب بودن انجام آزمایش مدل در آب توضیح دهید.

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای $20^{\circ C}$ $\nu=1.007\times10^{-6}m^2/s$

$\rho=998.2kg/m^3$

$$R=4.5\times10^7\Rightarrow C_D=0.012\quad,\quad C_L=0.2$$

$$R_m=R_p\ ,R_m=4.5\times10^7\Rightarrow\frac{V_mD_m}{\nu_m}=\frac{V_pD_p}{\nu_p}\Rightarrow\frac{V_mD_m}{\nu_m}=4.5\times10^7$$

$$\Rightarrow V_m=\frac{4.5\times10\times1.007\times10^{-6}}{3/20}=302.1\,m/s$$

$$L=C_LA\rho\frac{V^2}{2}\Rightarrow L=0.195\times998.2\times\frac{302.1^2}{2}=1333\times10^3N/m=1333kN/m$$

$$D=C_DA\rho\frac{V^2}{2}\Rightarrow D=0.012\times\frac{3}{20}\times998.2\times302.1^2/2=82000N/m=82kN/m$$

۵-۴۸. قرار است مدلی به مقیاس $1:5$ از سیستم لوله‌کشی یک استگاه پمپاژ مورد آزمایش قرارگیرد تا کل افت ارتفاع تعیین شود. هوا در دمای $25^{\circ}C$ و فشار $100kpa$ وجود دارد. سرعت در نمونه در یک مقطع به قطر $4m$ برابر $500mm/s$ است. دمای آب $15^{\circ}C$ است. سرعت هوا و دبی لازم را تعیین کنید. نتایج آزمایش روی مدل را چگونه به تلفات نمونه مربوط می‌کنید؟

حل:

عدد رینولدز باید برای نمونه و مدل برابر باشد.

$\lambda = 5$

$$R_m = R_p \Rightarrow \frac{V_m D_m}{\nu_m} = \frac{V_p D_p}{\nu_p}$$

از جدول کتاب داریم:

$$\begin{cases} air: 25^{\circ}c, 100kPa \Rightarrow \nu_m = 1.688 \times 10^{-5} m^2/s \\ water: 15^{\circ}c \Rightarrow \nu_p = 1.141 \times 10^{-6} m^2/s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{V_m D_m}{1.688 \times 10^{-5}} = \frac{0.5 \times D_p}{1.141 \times 10^{-6}}$$

$$\lambda = \frac{D_p}{D_m} \Rightarrow D_m = \frac{4}{5} = 0.8m \Rightarrow V_m = 36.98 m/s$$

$$Q = V_m A_m = 36.98 \times \frac{\pi}{4} \times 0.8^2 = 18.59 m^3/s$$

۵-۴۹. قرار است هیدروفویل یک قایق با مقیاس اصلی در یک تونل باد مورد آزمایش قرار گرفته، لیفت و دراگ آن تعیین شود. قایق با سرعت $55km/h$ در آب $15^{\circ}C$ حرکت خواهد کرد. برای تعیین لیفت و دراگ، سرعت هوا $(t=32^{\circ}C,\ p=200\ kpa\ abs)$ چقدر باید باشد؟ تذکر: ضریب لیفت C_L بدون بعد است و نیروی لیفت با رابطهٔ $L= C_L A\rho V^2/2$ بیان می‌شود.

حل:

عدد رینولدز باید برای نمونه و مدل برابر باشد

$$R_m = R_p \Rightarrow \frac{V_p D_p}{\nu_p} = \frac{V_m D_m}{\nu_m}$$

$$V_p = 55 km/h = 15.28 m/s$$

از جدول کتاب داریم:

$$T = 15^{\circ C} \Rightarrow \nu_{H_2O} = 1.141 \times 10^{-6} m^2/s$$

$$T = 32^{\circ c}, P = 200kPa \Rightarrow \nu_{air} = 1.8 \times 10^{-5} m^2/s$$

$$\Rightarrow \frac{15.28 \times D_p}{1.2 \times 10^{-6}} = \frac{V_m D_p}{1.8 \times 10^{-5}}, D_p = D_m \Rightarrow V_m = 241 m/s$$

۵-۵۰. قرار است مقاومت در مقابل صعود یک بالون با مطالعهٔ صعود یک مدل به مقیاس $1:50$ در آب مورد مطالعه قرار گیرد. آزمایش چگونه باید انجام شود و نتایج چگونه به نمونه تبدیل شوند؟

حل:
به عهده دانشجو گذاشته می‌شود.

۵-۵۱. قرار است گشتاور وارده از سکان به زیردریایی با آزمایش مدلی به مقیاس *1:20* در تونل آب مورد مطالعه قرارگیرد. اگر برای سرعت آب در تونل برابر *15 m/s* گشتاور برابر *5N.m* روی مدل اندازه‌گیری شده باشد، گشتاور و سرعت نمونه چقدر است؟

حل:
عدد رینولدز باید برای نمونه و مدل یکسان باشد.

$$\lambda = 20$$

$$R_m = R_p \Rightarrow \frac{V_m D_m}{v_m} = \frac{V_p D_p}{v_p} \Rightarrow V_m D_p \Rightarrow V_p = \frac{D_m}{D_p} \times V_m$$

با فرض اینکه سیال تونل و نمونه یکسان باشد.

$$\Rightarrow V_p = \frac{1}{20} \times 15 = 0.75\, m/s$$

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{D_m}{D_p} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{\tau_m}{\tau_p} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \tau_p = \lambda \tau_m = 20 \times 2 = 100\, N.m$$

۵-۵۲. برای اینکه دو ماشین هیدرولیکی متجانس باشند باید الف) دو ماشین تشابه هندسی داشته باشند ب) وقتی به عنوان اریفیس در نظر گرفته شوند دارای ضریب تخلیه یکسان باشند یعنی $Q_1/(A_1\sqrt{2gH_1}) = Q_2/(A_2\sqrt{2gH_2})$ ج) باید نسبت سرعت محیطی به سرعت سیال در هر دو یکسان باشد یعنی $\omega D/(Q/A)$ برای هر دو برابر باشد. نشان دهید که نسبتهای مقیاس را می‌توان به صورت $H/(ND)^2 = const$، $Q/ND^3 = const$ بیان کرد. N سرعت دورانی است.

حل:

$$\frac{\omega D}{Q/A} = cte \Rightarrow \frac{\omega D}{Q/A} = \frac{\omega DA}{Q} = \frac{\omega D\,(kD^2)}{Q} = \frac{\omega D^3 k}{Q} = cte$$

$$\Rightarrow \frac{\omega D^3}{Q} = cte \Rightarrow \frac{Q}{\omega D^3} = cte \Rightarrow \frac{Q}{ND^3} = cte$$

$$\frac{Q}{A\sqrt{2gH}} = cte \Rightarrow \frac{Q^2}{A^2 H} = cte$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 D^2 A^2}{Q^2} \times \frac{Q^2}{A^2 H} = cte \Rightarrow \frac{\omega^2 D^2}{H} = cte \Rightarrow \frac{H}{N^2 D^2} = cte$$

۵-۵۳. از نسبتهای مقیاس مسأله قبل استفاده کنید و هد ودبی یک مدل به مقیاس *1:4* از یک پمپ سانتریفوژ راکه دبی *600 L/s* را در هد *30 m* با سرعت *240 rpm* تولید می‌کند به دست آورید. مدل با سرعت *1200 rpm* دوران می‌کند.

حل:

$$\frac{D_p}{D_m}=4$$

$$\frac{Q_P}{N_p D_p^3}=\frac{Q_m}{N_m D_m^3}\Rightarrow Q_m=\frac{Q_p N_m D_m^3}{N_p D_p^3}=\frac{600\times 1200}{240\times 4^3}=46.875\,Lit/s$$

$$\frac{H_p}{(N_p D_p)^2}=\frac{H_m}{(N_m D_m)}\Rightarrow H_m=\frac{N_m^2 D_m^2 H_p}{N_p^2 D_p^2}=\frac{1200^2\times 30}{240^2\times 4^2}=46.875\,m$$

۶ جریان لزج: لوله‌ها و کانالها

۶-۱. بین دو صفحهٔ موازی شیبدار جریان آرام برقرار است (شکل ۳-۶). فرض کنید یک گرادیان فشار معکوس وجود داشته باشد، به گونه‌ای که دبی جریان صفر باشد یعنی $Q=0$ برای تنش برشی روی هر یک از صفحات و نیز برای توزیع سرعت بین دو صفحه رابطه‌ای بدست آورید.

حل:

با استفاده از معادله (6.2.3) داریم:

$$Q=\frac{Ua}{2}-\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)a^3$$

طبق گفته مسئله $Q=0$ می‌باشد بنابراین:

$$0=\frac{Ua}{2}-\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)a^3\Rightarrow\frac{d}{dl}(P+\gamma h)=\frac{6\mu U}{a^2}\qquad(I)$$

با استفاده از معادله (6.2.2) برای توزیع سرعت داریم:

$$u=\frac{Uy}{a}-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)(ay-y^2)$$

$$(I):\quad u=\frac{Uy}{a}-\frac{1}{2\mu}\times\frac{6\mu U}{a^2}(ay-y^2)=\frac{Uy}{a}-\frac{3U}{a^2}(ay-y^2)$$

$$\Rightarrow u=\frac{Uy}{a}\left(3\frac{y}{a}-2\right)$$

$$\Rightarrow\tau=\mu\frac{du}{dy}=\mu\left[\frac{U}{a}-\frac{3Ua}{a^2}+\frac{6Uy}{a^2}\right]=\frac{\mu U}{a}-\frac{3\mu U}{a^2}(a-2y)$$

$$\tau\,|_{y=0}=\frac{\mu U}{a}-\frac{3\mu U}{a^2}(a-0)=-\frac{2\mu U}{a}$$ تنش برشی روی صفحهٔ ثابت $(y=0)$:

$$\tau\,|_{y=a}=\frac{\mu U}{a}-\frac{3\mu U}{a^2}(a-2a)=\frac{4\mu U}{a}$$ تنش برشی روی صفحه متحرک $(y=a)$:

۶-۲. بین دو صفحهٔ موازی شیبدار جریان آرام برقرار است (شکل ۶-۳). صفحهٔ بالایی با سرعت U به طرف پایین حرکت می‌کند. فرض کنید تنش برشی روی صفحهٔ ساکن صفر باشد. رابطه‌ای برای $d(p+\gamma h)/dl$ بدست آورید. در این حالت دبی چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله (6.2.2) برای توزیع سرعت داریم:

$$u=\frac{Uy}{a}-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)(ay-y^2)$$

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}=\mu\left[\frac{U}{a}-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)(a-2y)\right]=\frac{\mu U}{a}-\frac{1}{2}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)(a-2y)$$

طبق گفته مسئله تنش برشی روی صفحه ساکن صفر است یعنی: $y=0\Rightarrow\tau=0$

بنابراین داریم:

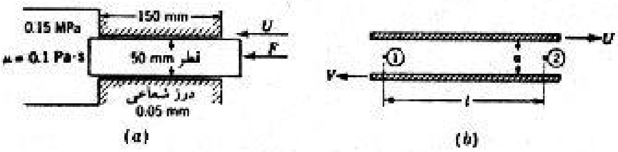
$$0=\frac{\mu U}{a}-\frac{1}{2}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)(a-0)\Rightarrow\frac{d}{dl}(P+\gamma h)=\frac{2\mu U}{a^2}$$

با استفاده از معادله (6.2.3) برای دبی داریم:

$$Q=\frac{Ua}{2}-\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)a^3$$

$$\Rightarrow Q=\frac{Ua}{2}-\frac{1}{12\mu}\times\frac{2\mu U}{a^2}\times a^3=\frac{Ua}{2}-\frac{Ua}{6}=\frac{Ua}{3}$$

۶-۳. در شکل ۶-۲۶ a پیستون تحت اثر نیروی F با سرعت $U=0.7m/s$ به طرف چپ حرکت می‌کند. با این کار مقداری روغن وارد محفظه می‌شود. دبی حجمی روغن ورودی به محفظه را به دست آورید. نیروی برشی وارد به پیرامون پیستون را حساب کنید. کل نیروی لازم برای حرکت پیستون یعنی F را به دست آورید.



شکل ۶-۲۶ مسائل ۶-۳ تا ۶-۷

حل:

با استفاده از معادله (6.3.3) داریم:

$$u=\frac{r^2}{4\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)-\frac{A}{\mu}\ln r+B$$

چون پیستون به صورت افقی قرار دارد داریم: $\frac{dh}{dl}=0$

$$\Rightarrow u=\frac{r^2}{4\mu}\frac{dp}{dl}-\frac{A}{\mu}\ln r+B$$

ثابتهای A و B با استفاده از شرایط مرزی زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases} r=a \ , \ u=0 \\ r=b \ , \ u=U \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\mu U}{\ln a/b}+\frac{a^2-b^2}{4\ln a/b}\cdot\frac{dp}{dl} \quad , \quad B=\frac{A}{\mu}\ln a-\frac{a^2}{4\mu}\frac{dp}{dl}$$

$$Q=\int_b^a 2\pi r u dr=2\pi\int_b^a\left(\frac{r^3}{4\mu}\frac{dp}{dl}-\frac{rA}{\mu}\ln r+Br\right)dr=2\pi\left[\frac{r^4}{16\mu}\frac{dp}{dl}-\frac{A}{\mu}\left(\frac{r^2\ln r}{2}-\frac{r^2}{4}\right)+\frac{Br^2}{2}\right]_b^a$$

$$Q=2\pi\left[\frac{a^4-b^4}{16\mu}\frac{dp}{dl}-\frac{A}{\mu}\left(\frac{a^2\ln a-b^2\ln b}{2}-\frac{a^2-b^2}{2}\right)+\frac{B}{2}(a^2-b^2)\right]$$

با جاگذاری مقادیر عددی زیر در رابطه بالا داریم:

$a=0.02505\,m,\ b=0.025\,m\ ,\mu=0.1\ Pa.s$

$$\frac{dp}{dl}=\frac{\Delta p}{\Delta l}=\frac{150000}{0.15}=10^6\,Pa/m$$

$$\Rightarrow A=348.16 \quad , \quad B=-14405.003 \qquad \Rightarrow Q=2.732\times10^{-6}\,m^3/s=2.732\,cm^3/s$$

محاسبه نیروی برشی اعمال شده بر دیواره پیستون (F_P)

$$\tau=-\mu\frac{du}{dr}$$

با توجه به معادله توزیع سرعت داریم:

$$\frac{du}{dr}=\frac{r}{2\mu}\frac{dp}{dl}-\frac{A}{\mu r}\Rightarrow\tau=-\mu\left(\frac{r}{2\mu}\frac{dp}{dl}-\frac{A}{\mu r}\right)=-\frac{r}{2}\frac{dp}{dl}+\frac{A}{r}$$

$$\Rightarrow\tau=-\frac{r}{2}\times10^6+\frac{348.16}{r}=\frac{348.16}{r}-5\times10^5 r$$

$$\tau_P=\frac{348.16}{0.025}-5\times10^5\times0.025=1426.4\,N/m^2$$

$$F_\tau=\tau_P\,A_P=1426.4\times(\pi\times0.05\times0.15)=33.6\,N$$

نیروی فشاری وارد شده (F_P) + نیروی برشی (F_τ) = F نیروی کل لازم برای حرکت پیستون از داخل پیستون

$$F_P=PA=0.15\times10^6\times\left(\frac{\pi\times0.05^2}{4}\right)=294.5N$$

$$F=F_\tau+F_P=33.6+294.5=328.1N$$

۴-۶. در شکل $6a$-۲۶-۶ پیستون ساکن است $U=0$؛ در این حالت مقداری روغن از اطراف پیستون نشت می‌کند. دبی نشتی را به دست آورید. نیروی برشی وارد به پیرامون پیستون را حساب کنید.

حل:

با توجه به اینکه $U=0$ می‌باشد بنابراین از معادله $(6.3.5)$ استفاده می‌کنیم.

$$Q=-\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp}{dl}\left[a^4-b^4-\frac{(a^2-b^2)^2}{\ln a/b}\right]$$

با جایگذاری مقادیر عددی زیر:

$$Q=-\frac{\pi}{8\times 0.1}\times 10^{6}\times\left[0.02505^{4}-0.025^{4}-\frac{\left(0.0205^{2}-0.025^{2}\right)}{ln\,(0.02505/0.025)}\right]=-1.637\times 10^{-8}\quad m^{3}/s$$

$\Rightarrow Q=1.637\times 10^{-2}\quad cm^{3}/s$ (توجه کنید که Q به خاطر نشتی به بیرون منفی آمد)

حال با استفاده از معادلهٔ (6.3.4) داریم:

$$u=-\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dl}\left[a^{2}-r^{2}+\frac{a^{2}-b^{2}}{ln\,a/b}\,lna/r\right]$$

$$\Rightarrow \tau=-\mu\frac{du}{dr}=\frac{1}{4}\frac{dp}{dl}\left[-2r-\frac{a^{2}-b^{2}}{lnb/a}\,\frac{1}{r}\right]$$

تنش برشی روی دیوارهٔ پیستون عبارت است از:

$$\tau_{p}=\tau\Big|_{(r=b=0.025)}=\frac{1}{4}\times 10^{6}\times\left[-2\times 0.025-\frac{(0.02505)^{2}-(0.025)^{2}}{ln\left(\frac{0.025}{0.02505}\right)}\right]=25\,N/m^{2}$$

و نیروی وارد بر پیستون: $F_{p}=\tau_{p}A=2\times\pi\,(0.05)\,(0.15)=0.59\,N$

۵-۶. برای شکل ۲۶a-۶، U, F را طوری تعیین کنید که روغن از درز پیستون به خارج نشت نکند.

حل:

با استفاده از (6.2.3) داریم:

$$Q=\frac{Ua}{2}-\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)a^{3}$$

با توجه به عدم نشت روغن $Q=0$ می‌باشد بنابراین:

$$0=\frac{Ua}{2}-\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)a^{3}\Rightarrow U=\frac{a^{2}}{6\mu}\frac{dp}{dl}=\frac{a^{2}}{6\mu}\frac{\triangle P}{\triangle L}$$

$$\Rightarrow U=\frac{\left(0.05\times 10^{-3}\right)^{2}}{6\times 0.1}\times\frac{0.15\times 10^{-6}}{0.15}=0.00417\,m/s=0.417\,cm/s$$

با توجه به اینکه سرعت پیستون ثابت می‌باشد شتاب حرکت صفر بوده و طبق قانون دوم نیوتن برآیند نیروهای وارد بر آن صفر می‌باشد و داریم:

$$\sum F=0\quad\Rightarrow\quad F-F_{\tau}-F_{p}=0$$

F_{τ} نیروی تنشی وارد بر پیستون و F_p نیروی فشاری روغن می‌باشد.

$$F_{\tau}=\tau A\quad,\quad \tau=\mu\frac{du}{dy}$$

با استفاده از معادله (6.2.2) برای توزیع سرعت داریم:

$$u=\frac{Uy}{a}-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)(ay-y^{2})$$

$$\Rightarrow\tau=\mu\left[\frac{U}{a}-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)(a-2y)\right]\quad,\quad\frac{dh}{dl}=0$$

$$\Rightarrow\tau=\frac{\mu U}{a}-\frac{1}{2}\frac{dp}{dl}(a-2y)$$

$$\tau|_{y=a} = \frac{\mu U}{a} - \frac{1}{2}\frac{dp}{dl}(a-2a) = \frac{\mu U}{a} + \frac{1}{2}\frac{dp}{dl}.a = \frac{0.1\times 0.00417}{0.05\times 10^{-3}} + \frac{1}{2}\times\frac{0.15\times 10^{6}}{0.15}\times 0.05\times 10^{-3} = 33.34\ N/m^2$$

$$F_\tau = 33.34\times(\pi\times 0.025\times 0.15) = 0.393\ N$$

$$F_p = P.A = 0.15\times 10^{6}\times(\pi\times 0.05^2/4) = 294.524\ N$$

$$F = F_\tau + F_p = 0.393 + 294.524 = 294.917\ N$$

۶-۶. در شکال b۲۶-۶ بین دو صفحهٔ متحرک جریان آرام برقرار است. رابطه‌ای برای دبی عبوری از یک مقطع ثابت به دست آورید.

حل:

با استفاده از معادله $(6.2.1)$ داریم.

$$\frac{d\tau}{dy} = \mu\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d}{dl}(p+\gamma h)$$

با دوبار انتگرالگیری: $u = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)y^2 + \frac{A}{\mu}y + B$

برای تعیین ثابتهای A و B از شرایط مرزی زیر استفاده می‌کنیم

$$B.C\begin{cases} y=0\ ,\quad u=-V \ \Rightarrow\ B=-V \\ y=a\ ,\quad u=U \ \Rightarrow U=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}a^2+\frac{A}{\mu}a-V \end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{U+V}{a}\right)\mu - \frac{1}{2}\frac{dp}{dl}a = A$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}y^2 + \left(\frac{U+V}{a}\right)y - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}ay - V$$

$$Q = \int_0^a u\,dy = \frac{1}{6\mu}\frac{dp}{dl}y^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{U+V}{a}\right)y^2 - \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dl}ay^2 - Vy\Big]_0^a$$

$$= \frac{1}{6\mu}\frac{dp}{dl}a^3 + \frac{(U+V)}{2}a - \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dl}a^3 - Va \rightarrow Q = \frac{(p_2-p_1)}{2\mu l}a^3 + \frac{(U+V)}{2}a - Va$$

۷-۶. در شکال b۲۶-۶ داریم:

$\mu=0.05\ pa.s, a=1.5\ \ mm\ , U=2V=2m/s\ ,\ \ p_1=p_2=0.1\ MPa$

تنش برشی روی هر یک از صفحات را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از رابطهٔ بدست آمده در مسئله قبل داریم

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}y^2 + \frac{(U+V)}{a}y - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}ay - V$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{dp}{dl}\frac{y}{\mu} + \frac{(U+V)}{a} - \frac{a}{2\mu}\frac{dp}{dl}$$

$$\frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \frac{U+V}{a} - \frac{a}{2\mu}\frac{dp}{dl}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy}\Big|_{y=0}=\frac{2+1}{1.5\times10^{-3}}=\frac{3}{1.5\times10^{-3}}=2\times10^{3}s^{-1}$$

$$\tau\Big|_{y=0}=\mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=0}=0.05\times2\times10^{3}=100\,Pa$$

$$\frac{du}{dy}\Big|_{y=a=0.0015m}=2\times10^{3}\Rightarrow\tau\Big|_{y=a}=100\,Pa$$

۶-۸. ضریب تصحیح انرژی جنبشی و ضریب تصحیح مومنتم را برای جریان آرام بین صفحات موازی ساکن به دست آورید.

حل:

با استفاده از معادله (6.2.2) با شرط $U=0$ داریم.

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)(ay-y^2)$$

$$u=\int_0^a u\,dy=\int_0^a-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)(ay-y^2)dy=\frac{a^3}{12\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)$$

سرعت متوسط: $V=\frac{Q}{A}=\frac{a^2}{12\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)$

(توجه داشته باشید که Q و مساحت هر دو به ازای واحد عرض صفحات محاسبه شده‌اند)

$$\frac{u}{V}=-\frac{6}{a^2}(y^2-ay)=\frac{6}{a^2}(ay-y^2)$$

$$\alpha=\frac{1}{A}\int_0^a\left(\frac{u}{V}\right)^3dy=\frac{216}{a^7}\int_0^a(ay-y^2)^3dy=\frac{216}{a^7}\left[\frac{1}{4}a^7-\frac{3}{5}a^7-\frac{1}{7}a^7+\frac{3}{6}a^7\right]=\frac{216}{140}=1.543$$

$$\beta=\frac{1}{A}\int_0^a\left(\frac{u}{V}\right)^2dy=\frac{36}{a^5}\int_0^a(ay-y^2)^2dy=\frac{36}{a^3}\left[\frac{1}{3}a^5-\frac{2}{4}a^5+\frac{1}{5}a^5\right]_0^a=\frac{36}{30}=1.2$$

۶-۹. برای جریان آرام بین صفحات موازی ساکن، رابطه‌ای برای بدست آورید بطوریکه فشار جریان ثابت بماند.

حل:

با استفاده از معادله (6.2.3) با شرط $U=0$ داریم

$$Q=\frac{-1}{12\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)a^3$$

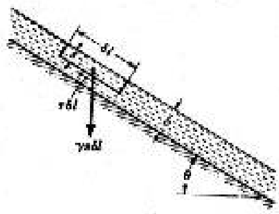
از طرفی داریم: $\frac{d}{dl}(p+\gamma h)=\frac{dp}{dl}+\gamma\frac{dh}{dl}$

چون فشار ثابت است $\frac{dp}{dl}=0$ همچنین $\frac{dh}{dl}=-\sin\theta$ بنابراین:

$$\frac{d}{dl}(p+\gamma h)=-\gamma\sin\theta$$

$$\rightarrow Q=\frac{-a^3}{12\mu}(-\gamma\sin\theta)=\frac{\gamma a^3\sin\theta}{12\mu}\Rightarrow\sin\theta=\frac{12\mu Q}{a^3\gamma}\Rightarrow\theta=\sin^{-1}\left[\frac{12\mu Q}{a^3\gamma}\right]$$

۱۰-۶. در شکل ۲۷-۶ لایهٔ نازکی از مایع بر روی سطح شیبدار به طرف پایین جریان دارد. جریان یکنواخت است. با رسم دیاگرام آزاد المانی از سیال، نشان دهید که توزیع سرعت به صورت: $u=\frac{\gamma}{2\mu}(b^2-s^2)\sin\theta$ و دبی بر واحد عرض به صورت: $Q=\frac{\gamma}{3\mu}b^3\sin\theta$ بیان می‌شود.



شکل ۲۷-۶ مسایل ۱۰-۶ و ۱۱-۶

حل:

با توجه به اینکه سرعت جریان ثابت است برایند نیروهای وارد بر المان سیال در جهت حرکت صفر است

$$u=ck \Rightarrow a=0 \quad \Rightarrow \quad \sum F=ma=0$$

$$\tau\delta l=\gamma s\delta l\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \tau=\gamma s\ \sin\theta$$

$$\tau=\mu\frac{du}{dy} \Rightarrow \mu\frac{du}{dy}=\gamma s\sin\theta \Rightarrow \frac{du}{dy}=\frac{\gamma s}{\mu}\sin\theta$$

با توجه به شکل: $y+s=b$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy}=\frac{\gamma}{\mu}(b-y)\sin\theta$$

با انتگرالگیری: $u=\frac{\gamma}{\mu}(by-\frac{y^2}{2})\sin\theta+C_1$

با توجه به شرط $(y=0 \quad , \quad u=0)$ **داریم:** $C_1=0$

$$\Rightarrow u=\frac{\gamma}{\mu}(by-\frac{y^2}{2})\sin\theta$$

داریم: $by-\frac{y^2}{2}=y(b-\frac{y}{2})=(b-s)(b-\frac{b-s}{2})=\frac{b^2-s^2}{2}$

$$\Rightarrow u=\frac{\gamma}{2\mu}(b^2-s^2)\sin\theta$$

$$Q=\int_0^b u\,dy=\int_0^b\frac{\gamma}{\mu}(by-\frac{y^2}{2})dy=\frac{\gamma}{\mu}\left[b\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right]_0^b \quad \Rightarrow \quad Q=\frac{\gamma}{3\mu}b^3\sin\theta$$

۱۱-۶. برای مسألهٔ قبل توزیع سرعت را به روش دیگری به دست آورید. در این روش شرط صفر بودن تنش برشی روی سطح آزاد مایع را در یکی از معادلات قبل از معادلهٔ (۲-۲-۶) قرار دهید.

حل:

با استفاده از معادلات ذکر شده قبل از معادله (6.2.2) داریم:

$$\mu\frac{du}{dy}=y\frac{d}{dl}(P+\gamma h)+A, u=\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)y^2+\frac{A}{\mu}y+B$$

فشار در سطح آزاد ثابت است: $\frac{dp}{dl}=0$ **و نیز** $\frac{dh}{dl}=-\sin\theta$ **بنابراین:**

$$\frac{d}{dl}(P+\gamma h)=-\gamma\sin\theta$$

در نتیجه معادلات بالا به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mu\frac{du}{dy}=-\gamma y\sin\theta+A \qquad (I) \ , \quad u=-\frac{\gamma y^2\sin\theta}{2\mu}+\frac{A}{\mu}y+B \qquad (II)$$

ثابتهای A و B با توجه به شرایط زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases} y=0 \;,\quad u=0 \\ y=b \;,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases}$$ (تنش برشی در سطح آزاد برابر صفر است)

II شرط اول و معادله $\Rightarrow \qquad B=0$

I شرط دوم و معادله $\Rightarrow \qquad A=\gamma\, b\sin\theta$

با جاگذاری ثابتهای A و B در معادله توزیع سرعت II داریم:

$$u=-\frac{\gamma y^{2}\sin\theta}{2\mu}+\frac{\gamma b\sin\theta}{\mu}y=\frac{\gamma}{\mu}\left(by-\frac{y^{2}}{2}\right)\sin\theta$$

از مسئله قبل داشتیم: $by-\dfrac{y^{2}}{2}=\dfrac{b^{2}-s^{2}}{2} \Rightarrow u=\dfrac{\gamma}{2\mu}(b^{2}\;\; s^{2})\sin\theta$

۱۲-۶. لایهٔ نازکی از آب روی سطح یک توقفگاه با شیب 0.0003 رو به پایین جریان دارد هرگاه به روی جریان $0.08L/s$ به ازای هر متر عرض زمین بوده و $\nu=10^{-6}m^{2}/s$ باشد عمق سطح را محاسبه کنید

حل:

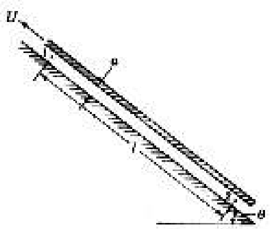
با استفاده از مسئله ۱۰-۶ داریم:

$$Q=\frac{\gamma}{3\mu}b^{3}\sin\theta=\frac{\rho g}{3\mu}b^{3}\sin\theta=\frac{g}{2\nu}b^{3}\sin\theta\Rightarrow b-\left(\frac{2\nu Q}{g\sin\theta}\right)^{1/3}$$

$$tg\,\theta=0.003 \Rightarrow \theta=0.172^{\circ}$$

$$\rightarrow b=\left(\frac{2\times10^{-6}\times0.08\times10^{-3}}{9.806\times\sin 0.172}\right)^{1/3}=2\times10^{-6}m=0.002\ mm$$

۱۳-۶. در شکل ۲۸-۶ داریم:



شکل ۲۸-۶ مسایل ۱۳-۶ و ۱۴-۶

$$\mu=0.08Pa.s,\gamma=7.85\ kN/m^{3},U-1.3m/s,0=30^{\circ}$$
$$a=1.8mm,l=1.3m,p_{2}=56kPa,P_{1}-42kPa$$

تنش برشی روی صفحهٔ بالایی را به دست آورید. جهت تنش را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از معادله $(6.2.2)$ داریم:

$$u=\frac{Uy}{a}-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)(ay-y^{2})$$

باید دقت کرد که در جاگذاری مقادیر عددی باید مقدار U را منفی قرار داد.

$$\Delta(p+\gamma h)=P_{2}-P_{1}+\gamma(h_{2}-h_{1})=\left[(56-42)+7.85(0-1.3)\sin 30\right]\times10^{3}=8.8975\times10^{3}Pa$$

$$\frac{d}{dl}(P+\gamma h)=\frac{\Delta(P+\gamma h)}{\Delta l}=\frac{8.8975\times10^{3}}{1.3}=6.844\times10^{3}\,pa/m$$

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}=\mu\left[\frac{U}{a}-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{d}{dl}(P+\gamma h)(a-2y)\right]$$

$$\Rightarrow\tau\Big|_{y=a}=\mu\left[\frac{U}{a}+\frac{a}{2\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)\right]=0.08\left[\frac{-1.3}{0.0018}+\frac{0.0018}{2(0.08)}(6844\times10^3)\right]=-51.62\quad N/m^2$$

بنابراین جهت تنش به سمت پائین صفحه یعنی در مخالف جهت U می‌باشد.

۱۴-۶. در شکل ۲۸-۶ به ازای $\theta=90^\circ$ برای آنکه دبی جریان صفر شود، سرعت U باید چقدر باشد؟ سایر اطلاعات به شرح زیر است: $\mu=0.2pa.s, p_1=p_2, a=3mm, s=0.87$

حل:

با استفاده از معادله (6.2.3) داریم:

$$Q=\frac{Ua}{2}-\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)a^3$$

$$Q=0\Rightarrow U=\frac{a^2}{6\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)$$

$$P_1=P_2\Rightarrow\frac{d}{dl}(P+\gamma h)=\gamma\frac{dh}{dl}=-\gamma\sin\theta\Rightarrow U=\frac{-a^2\gamma}{6\mu}\sin\theta$$

$$\gamma=s\gamma_w\Rightarrow\gamma=0.87(9806)=8531.22\,N/m^3$$

$$\Rightarrow U=\frac{-(0.003)^2(8531.22)}{6(0.2)}\sin 90=-0.064\,m/s=-6.4\ cm/s$$

علامت منفی نشان می‌دهد که صفحه به سمت بالا کشیده می‌شود.

۱۵-۶. برای جریان بین دو صفحهٔ موازی گرادیان فشاری را که در اثر تنش برشی صفر در صفحهٔ پایینی جایی که $y=0$ است حاصل می‌شود بدست آورید صفحات به صورت افقی به فاصلهٔ a از همدیگر واقع‌اند سرعت صفحهٔ بالایی U بوده، و صفحهٔ پایینی ساکن است.

حل:

با استفاده از معادله (6.2.3) داریم:

$$u=\frac{Uy}{a}-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)(ay-y^2)$$

با قرار دادن $\frac{dh}{dl}=0$ داریم:

$$u=\frac{Uy}{a}-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}(ay-y^2)$$

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}=\mu\frac{U}{a}-\frac{1}{2}\frac{dp}{dl}(a-2y)$$

$$(y=0,\ \tau=0)\Rightarrow y=0\ ,\frac{du}{dy}=0$$

$$\Rightarrow\frac{dp}{dl}=\frac{2\mu U}{a^2}$$

۱۶-۶. اگر معادلهٔ (۳-۳-۵)، Q صفر باشد، نرخ عبور مومنتم و انرژی جنبشی از یک مقطع عمود بر جریان چقدر است؟

حل:

با توجه به معادله اندازه حرکت داریم:

$$\sum F = \frac{d(mu)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho u dV + \int_{cs} \rho u u.dA$$

چون در این مسئله نرخ عبور مومنتم از یک سطح جریان موردنظر است بنابراین جمله اول طرف دوم معادله بالا را حذف می‌شود

$$\Rightarrow \frac{d(mu)}{dt} = \int_{cs} \rho u.dA = \rho \int_0^a u^2 dy$$

با استفاده از معادلات (6.2.2) و (6.2.3) داریم:

$$u = \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)(ay - y^2) \qquad (I)$$

$$Q = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)a^3$$

طبق گفته مسئله: $Q = 0 \Rightarrow 0 = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)a^3 \Rightarrow \frac{d}{dl}(P+\gamma h) = \frac{6U\mu}{a^2} \qquad (II)$

$$(II),(I) \qquad \Rightarrow u = \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu}\times\frac{6U\mu}{a^2}\times(ay - y^2) \;\Rightarrow\; u = \frac{Uy}{a} - \frac{3U}{a^3}(ay - y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d(mu)}{dt} = \rho\int_0^a \left[\frac{Uy}{a} - \frac{3U}{a^2}(ay - y^2)\right]^2 dy =$$

$$= \rho\int_0^a \left[\frac{U^2 y^2}{a^2} + \frac{9U^2}{a^4}(ay - y^2)^2 - \frac{6U^2 y}{a^3}(ay - y^2)\right] dy$$

$$= \rho\left[\frac{U^2 y^3}{3a^2} + \frac{9U^2}{a^4}\left(\frac{a^2 y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{ay^4}{2}\right) - \frac{6U^2}{a^3}\left(\frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\right]_0^a$$

$$= \rho\left[\frac{U^2 a^3}{3a^2} + \frac{9U^2}{a^4}\left(\frac{a^5}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^5}{2}\right) - \frac{6U^2}{a^3}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right)\right]$$

$$= \rho U^2 a\left[\frac{1}{3} + 9\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{2}{15}\rho U^2 a$$

برای تعیین نرخ انرژی جنبشی از معادله (3.3.3) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} e dV + \int_{cs} \rho e u.dA$$

(با توجه به قسمت اول مسئله) $\quad \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \int_{cs} \rho e u.dA$

در رابطه بالا e انرژی واحد جرم حجم می‌باشد و چون در این مسئله انرژی جنبشی موردنظر است داریم: $e=\frac{1}{2}u^2$

$$\Rightarrow \frac{dE_k}{dt}=\int_{cs}\rho\times\frac{1}{2}u^2\times u.dA=\frac{\rho}{2}\int_0^a u^3dy \Rightarrow \frac{dE_k}{dt}=\frac{\rho}{2}\int_0^a\left[\frac{Uy}{a}-\frac{3U}{a^2}(ay-y^2)\right]^3dy$$

با انجام عمل انتگرال‌گیری و محاسبات جبری و ساده‌کردن آن در نهایت داریم:

$$\frac{dE_k}{dt}=\frac{1}{35}\rho U^3a$$

۶-۱۷. لایهٔ نازکی از سیال به ضخامت $1.5mm$ روی یک صفحهٔ قائم به طرف پایین جریان دارد. سرعت مایع روی سطح آزاد $60cm/s$ است. لزجت سیال را به دست آورید. $\gamma=8600N/m^3$

حل:

با استفاده از رابطه توزیع سرعت بدست آمده در مسئله ۶-۱۰ داریم:

$$u=\frac{\gamma}{2\mu}(b^2-s^2)\sin\theta$$

$$\theta=90^\circ \quad , \quad b=1.5\ mm=1.5\times10^{-3}m \quad , \ s=0 \quad , \ u=0.6\ m/s$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{\gamma}{2u}(b^2-s^2)\sin\theta=\frac{8600}{2\times0.6}\times\left[(1.5\times10^{-3})^2-0\right]\sin 90=0.0161\,Pa.s$$

۶-۱۸. ضریب تصحیح مومنتم را برای جریان آرام در لولهٔ دایره‌ای به دست آورید.

حل:

$$\beta=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{u}{V}\right)^2dA$$

با استفاده از معادلات (6.3.6) و (6.3.8) به ترتیب برای توزیع سرعت و سرعت متوسط داریم:

$$u=-\frac{a^2-r^2}{4\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)\ , \quad V=-\frac{a^2}{8\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)$$

$$\Rightarrow \frac{u}{V}=\frac{2(a^2-r^2)}{a^2}$$

$$\beta=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 4\left(\frac{a^2-r^2}{a^2}\right)^2 2\pi r\,dr=\frac{8}{a^6}\int_0^a r(a^2-r^2)^2dr$$

$$=\frac{8}{a^6}\int_0^a(ra^4+r^5-2a^2r^3)dr=\frac{8}{a^6}\left[a^4\frac{r^2}{2}+\frac{r^6}{6}-2a^2\times\frac{r^4}{4}\right]_0^a=8\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$$

۶-۱۹. در لوله‌ای به قطر d_1 آب در شرایط استاندارد جریان دارد. جریان آرام است. لوله بطور ناگهانی تا قطر $2d_1$ منبسط می‌شود. با عبور از این مقطع فشار از p_1 به p_2 افزایش می‌یابد کمی بعد از محل انبساط ناگهانی مجدداً توزیع سرعت به صورت سهمیگون [معادلهٔ (۶-۳-۶)] در می‌آید نیرویی که در اثر این انبساط ناگهانی به لوله وارد می‌شود، چقدر است؟

حل:

معادله اندازه حرکت در جهت x عبارت است از:

$$\sum F_x = -F + P_1A_1 - P_2A_2 = \int \beta\rho V \; V.dA \quad , \quad \beta = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow -F + P_1\frac{\pi d_1^2}{4} - P_2\frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{4}{3}\rho\left(V_2^2A_2 - V_1^2A_1\right)$$

معادله پیوستگی بین دو مقطع: $Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1A_1 = V_2A_2$

$$\Rightarrow V_1\frac{\pi d_1^2}{2} = V_2\frac{\pi d_2^2}{2} = V_2\frac{\pi(2d_1)^2}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{4}V_1$$

$$\Rightarrow -F + P_1\frac{\pi d_1^2}{4} - P_2\frac{\pi(2d_1)^2}{4} = \frac{4}{3}\rho\left[\left(\frac{1}{4}V_1\right)^2 \times \frac{\pi(2d_1)^2}{4} - V_1^2\frac{\pi d_1^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow -F = P_2\pi d_1^2 - P_1\pi\frac{d_1^2}{4} - \frac{\pi}{4}\rho V_1^2 d_1^2$$

$$\Rightarrow F = \frac{\pi d_1^2}{4}\left(P_1 - 4P_2 + \rho V_1^2\right)$$

۲۰-۶. در لوله‌ای به شعاع r_0 جریان آرام برقرار است. در چه فاصله‌ای از مرکز لوله، سرعت جریان با سرعت متوسط برابر است؟

حل:

با استفاده از معادلات (6.3.6) و (6.3.8) داریم: $(a = r_0)$

$$u = -\frac{r_0^2 - r^2}{4\mu}\frac{d}{dl}(P + \gamma h) \quad , \quad V = -\frac{r_0^2}{8\mu}\frac{d}{dl}(P + \gamma h)$$

$$u = V \Rightarrow r_0^2 - r^2 = \frac{r_0^2}{2} \Rightarrow r^2 = r_0^2/2 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}r_0 = 0.707r_0$$

۲۱-۶. سیالی با لزجت μ و دانسیته ρ در لوله‌ای به قطر D جریان دارد. برای جریان آرام، حداکثر تنش برشی در دیوارهٔ لوله را بدست آورید.

حل:

$$\tau = -\mu\frac{du}{dy}$$

با استفاده از معادله (6.3.6) داریم:

$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu}\frac{d}{dl}(P + \gamma h)$$

$$\tau = -\mu\left[\frac{2r}{4\mu}\frac{d}{dl}(P + \gamma h)\right] = -\frac{r}{2}\frac{d}{dl}(P + \gamma h)$$

حداکثر تنش برشی در دیواره لوله $(r=a)$ می‌باشد بنابراین:

$$\tau_{max} = \tau\,|_{\,r=a} = -\frac{a}{2}\frac{d}{dl}(P+\gamma h) \qquad (I)$$

با استفاده از عدد رینولدز و معادله (6.3.8) داریم:

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} \qquad , \qquad V = -\frac{a^2}{8\mu}\,\frac{d}{dl}(P+\gamma h)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dl}(P+\gamma h) = -\frac{8V\mu}{a^2} \qquad , \qquad V = \frac{\mu Re}{\rho D}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dl}(P+\gamma h) = -\frac{8\mu^2 Re}{\rho D a^2} \qquad (II)$$

$$(II)\ ,\ (I)\ \Rightarrow \tau_{max} = -\frac{a}{2}\times\left(-\frac{8\mu^2 Re}{\rho D a^2}\right) = \frac{4\mu^2 Re}{\rho D a} = \frac{8\mu^2 Re}{\rho D^2}$$

برای عدد رینولدز 2000 در جریان آرام تنش برشی ماکزیمم می‌باشد.

$$\tau_{max} = \frac{8\mu^2\times 2000}{\rho D^2} = 16000\mu^2/\rho D^2$$

۲۲-۶. نشان دهید که برای جریان آرام در فضای بین دو لوله متداخل اگر درز دو لوله (اختلاف شعاعها) کمتر از 4 در صد شعاع لوله داخلی باشد، می توان از روابط جریان آرام بین صفحات موازی استفاده کرد و خطا بیش از 2 در صد نخواهد بود.

حل: به عهده دانشجو گذاشته می‌شود.

۲۳-۶. جیوه با دمای $35^\circ c$ در لوله‌ای به قطر $0.6\ mm$ جریان دارد. عدد رینولدز جریان 1600 است. تلفات بر کیلوگرم بر متر طول لوله را به دست آورید.

حل:

از ضمیمه کتاب برای جیوه داریم: $\mu = 0.0015\,Pa.s$

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} \Rightarrow 1600 = \frac{13600\times V\times 0.0006}{0.0015} \Rightarrow V = 0.2941\,m/s$$

$h_f = F\dfrac{L}{D}.\dfrac{V^2}{2g}$ ، و برای جریان آرام: $F = \dfrac{64}{Re}$

$$\Rightarrow \frac{gh_f}{L} = \frac{32V^2}{Re.D} = \frac{32\times 0.2941^2}{1600\times 0.0006} = 2.883\ J/kg.m$$

۲۴-۶. آب $27^\circ c$ با سرعت $30\ cm/s$ در لوله‌ای به قطر $1.5\ mm$ جریان دارد. تنش برشی در دیوارهٔ لوله را به دست آورید.

حل:

از جدول ضمیمه برای آب در $27^\circ C$ داریم: $\mu = 0.857\times 10^{-3} Pa.s$

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

با استفاده از معادله (6.3.6) برای توزیع سرعت داریم:

$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(P + \gamma h)$$

$$\Rightarrow \tau = -\mu \times \left(\frac{2r}{4\mu} \frac{d}{dl}(P + \gamma h)\right) = -\frac{r}{2} \frac{d}{dl}(P + \gamma h)$$

$$Q = AV = \frac{\pi \times 0.0015^2}{4} \times 0.3 = 5.301 \times 10^{-7} \quad m^3/s$$

داریم: $Q = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{d}{dl}(P + \gamma h) \Rightarrow \frac{d}{dl}(P + \gamma h) = -\frac{8\mu Q}{\pi a^4}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dl}(P + \gamma h) = -\frac{8 \times 0.857 \times 10^{-3} \times 5.301 \times 10^{-7}}{\pi \times (1.5/2 \times 10^{-3})^4} = 3656.22 \ Pa/m$$

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} \Rightarrow 150 = \frac{830 \times V \times 0.003}{0.06} \Rightarrow V = 3.615 \ m/s$$

۶-۲۵. مایعی با لزجت $0.06\ pa.s$ و چگالی 0.83 در یک لولهٔ افقی به قطر داخلی $3\ mm$ جریان دارد. عدد رینولدز 150 است. افت فشار در هر متر طول لوله چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله (6.3.10 b) داریم:

$$V = \frac{\Delta P d^2}{32\mu L} \Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = \frac{32\mu V}{D^2} = \frac{32 \times 0.06 \times 3.615}{(3 \times 10^{-3})^2} = 771200 \ Pa/m$$

۶-۲۶. گلیسیرین با دمای $38^\circ C$ در یک لولهٔ افقی به قطر $9mm$ جریان دارد. افت فشار در واحد طول لوله $120kPa/m$ است. دبی جریان را به دست آورید. عدد رینولدز را تعیین کنید.

حل:

ابتدا فرض می‌کنیم جریان آرام است.

با استفاده از معادله (6.3.10a) داریم:

$$Q = \frac{\Delta P . \pi D^4}{128\mu L}$$

از منحنی ضمیمه کتاب برای گلیسیرین در 38^C داریم:

$$\mu = 0.186 \ Pa.s$$
$$\nu = 1.29 \times 10^{-4} \ m^2/s$$

$$\Rightarrow Q = \frac{120 \times 10^3 \times \pi \times (0.009)^4}{128 \times 0.186} = 0.000104 \ m^3/s = 0.104 \ L/s$$

$$Re=\frac{VD}{\nu} \quad , \quad V=\frac{Q}{A}=\frac{0.000104}{\pi\times(0.009)^2/4}=1.635\ m/s$$

$$\Rightarrow Re=\frac{1.635\times0.009}{1.29\times10^{-4}}=114$$

بنابراین فرضمان مبنی بر آرام بودن جریان صحیح است

۶-۲۷. مایعی در لولهٔ قائم به طرف پایین جریان دارد، بطوریکه فشار آن ثابت می‌ماند. لزجت سینماتیک مایع $1.5\times10^{-6}\ m^2/s$ و عدد رینولدز جریان 1400 است. قطر لوله چقدر است؟

حل:

$$Re=\frac{VD}{\nu}\Rightarrow V=\frac{Re.\nu}{D} \qquad (I)$$

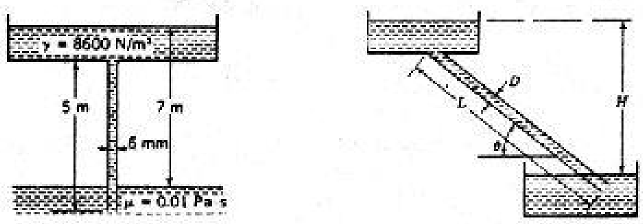
از طرفی می‌توانیم برای تعیین سرعت از معادله $(6.3.10b)$ با شرط $\Delta P=\gamma h$ استفاده کنیم. (دراینجا $h=L$)

$$V=\frac{\Delta PD^2}{32\mu L}=\frac{\gamma D^2}{32\mu}=\frac{gD^2}{32\nu} \qquad (II)$$

$$(II)\ ,(I)\Rightarrow\frac{Re.\nu}{D}=\frac{gD^2}{32\nu}\Rightarrow D^3=\frac{32\nu^2 Re}{g}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{32\times(1/5\times10^{-6})^2\times1400}{9.806}\right)^{1/3}=0.002174\,m=2.174\,mm$$

۶-۲۸. برای شکل ۶-۲۹ دبی جریان را حساب کنید. از تمام تلفات غیر از تلفات داخل لوله صرفنظر کنید.



شکل ۶-۲۹ شکل ۶-۳۰

حل:

ابتدا فرض می‌کنیم جریان آرام است

در اینجا نیز می‌توانیم برای تعیین سرعت از معادله $(6.3.10b)$ با شرط $\Delta P=\gamma h$ استفاده کنیم.

$$V=\frac{\Delta PD^2}{32\mu L}=\frac{\gamma hD^2}{32\mu L}$$

$$\Rightarrow V=\frac{8600\times7\times0.006^2}{32\times0.01\times5}=1.3545\ \ m/s$$

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{8600\times1.3545\times0.006}{9.806\times0.01}=713<2000$$

بنابراین فرضمان مبنی بر آرام بودن جریان صحیح است.

$$Q=AV=\pi\times\frac{0.006^2}{4}\times1.3545=3.8\times10^{-5}m^3/s=0.038\ L/s$$

۲۹-۶. در شکل ۳۰-۶ داریم:

$$\mu=00.008\,Pa.s,\gamma=10kN/m^3,D=8mm,\theta=30°,L=40m,H=24m$$

الف ارتفاع بر واحد طول لوله را به دست آورید. دبی را برحسب لیتر در دقیقه حساب کنید.

حل:

فرض می‌کنیم جریان آرام باشد و از معادله $(6.3.10b)$ با شرط $\Delta P=\gamma H$ استفاده کنیم.

$$V=\frac{\Delta PD^2}{32\mu L}=\frac{\gamma HD^2}{32\mu L}$$

$$\Rightarrow V=\frac{10000\times24\times0.008^2}{32\times0.08\times40}=0.15\ m/s$$

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{10000/9.806\times0.15\times0.008}{0.08}=15<2000$$

بنابراین فرضمان مبنی بر آرام بودن جریان صحیح است.

$$Q=AV=\pi\times\frac{0.008^2}{4}\times0.15=7.54\times10^{-6}m^3/s=0.452\ litr/min$$

$$\frac{h_f}{L}=\frac{H}{L}=\frac{24}{40}=0.6$$

۳۰-۶. در مسألهٔ قبل اگر سرعت جریان در لوله $0.1\ m/s$ باشد، H چقدر است؟

حل:

از مسئله قبل داریم:

$$V=\frac{\gamma HD^2}{32\mu L}\Rightarrow H=\frac{32V\mu L}{\gamma D^2}$$

$$\Rightarrow H=\frac{32\times0.1\times0.08\times40}{10000\times0.008^2}=16m$$

۳۱-۶. روغن با چگالی 0.85 و لزجت $0.06\ Pa.s$ در فضای حلقوی بین دو لولهٔ متداخل جریان دارد. شعاع خارجی حلقه $a=15\ mm$ و شعاع داخلی آن $b=7\ mm$ است. تنش برشی روی دیوارهٔ خارجی $12\ Pa$ است. الف) اگر مجرا افقی باشد، افت فشار در هر متر آن چقدر است؟ ب) دبی را برحسب لیتر در ساعت محاسبه کنید. ج) نیروی افقی وارد به هر متر طول لولهٔ داخلی چقدر است؟

حل:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

با استفاده از معادله (6.3.4) برای توزیع سرعت داریم:

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)\left[a^2 - r^2 + \frac{a^2-b^2}{ln(b/a)} ln\left(\frac{a}{r}\right)\right]$$

با توجه به افقی بودن سیستم: $\frac{dh}{dl}=0$ بنابراین:

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dl}\left[a^2 - r^2 + \frac{a^2-b^2}{ln(b/a)} ln\left(\frac{a}{r}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{4}\frac{dp}{dl}\left[-2r - \frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{ln(b/a)}\right]$$

تنش برشی روی دیواره خارجی عبارتست از:

$$\tau\,|_{r=a} = -\frac{1}{4}\frac{dp}{dl}\left[2a + \frac{1}{a}\frac{a^2-b^2}{ln(b/a)}\right]$$

$$\Rightarrow 12 = -\frac{1}{4}\times\frac{dp}{dl}\times\left[2\times 0.015 + \frac{0.015^2 - 0.007^2}{0.015\times ln(0.007/0.015)}\right] \Rightarrow \frac{dp}{dl} = -3286.6 pa/m$$

ب) حال با استفاده از معادله (6.3.5) و با توجه به افقی بودن سیستم داریم:

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp}{dl}\left[a^4 - b^4 - \frac{(a^2-b^2)^2}{ln(a/b)}\right]$$

$$\Rightarrow Q = -\frac{\pi}{8\times 0.06}\times(-3286.6)\times\left[0.015^4 - 0.007^4 - \frac{(0.015^2-0.007^2)^2}{ln(0.015/0.007)}\right] = 1.631\times 10^{-4}\ m^3/s = 587.2\ litr/h$$

ج) با استفاده از رابطه بدست آمده برای تنش برشی در قسمت الف مسئله داریم:

$$\tau\,|_{r=b} = -\frac{1}{4}\frac{dp}{dl}\left[2b + \frac{1}{b}\frac{a^2-b^2}{ln(b/a)}\right]$$

$$\Rightarrow \tau\,|_{r=b} = -\frac{1}{4}\times(-3286.6)\times\left[2\times 0.007 + \frac{1}{0.007}\times\frac{0.015^2 - 0.007^2}{ln(0.007/0.015)}\right] = 15.6\ N/m^2$$

$$F = \tau_b A = 15.6\times(2\pi\times 0.007\times 1) = 0.686\,N$$

۶-۳۲ یک سیستم از دو لولهٔ هم محور طوری طراحی شده است که سیال از طریق لولهٔ داخلی جریان یافته و از طریق فضای حلقوی بین دو لوله برمی‌گردد افت فشار در واحد طول برای هردو یکسان است جریان آرام بوده، شعاع لولهٔ داخلی 5cm و ضخامت لوله 3mm است شعاع لولهٔ بیرونی را بدست آورید.

حل:

با استفاده از معادلهٔ (6.3.11) برای لوله داخلی داریم:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{128\mu Q}{\pi D^4}$$

با استفاده از معادله (6.3.5) برای فضای حلقوی داریم:

$$Q=-\frac{\pi}{8\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)\left[a^4-b^4-\frac{(a^2-b^2)^2}{ln\,(a/b)}\right]=-\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp}{dl}A\quad\Rightarrow\frac{\Delta P}{L}=\frac{8\mu Q}{\pi A}$$

$$(\frac{\Delta P}{L})_1=(\frac{\Delta P}{L})_2\Rightarrow\frac{128\mu Q}{\pi D^4}=\frac{8\mu Q}{\pi A}\Rightarrow\frac{D^4}{A}=\frac{128}{8}=16$$

$$\Rightarrow 0.1^4/\left[a^4-0.053^4-\frac{(a^2-0.053^2)^2}{ln\,(a/0.053)}\right]=16$$

شعاع لولهٔ خارجی $a=0.093m=93mm$: از حل معادله بالا

۶-۳۳. $0.3\ m^3/s$ روغن با چگالی 0.56 و لزجت $0.025\ Pa.s$ در لوله‌ای به قطر $450\ mm$ جریان دارد.

عدد رینولدز را به دست آورید.

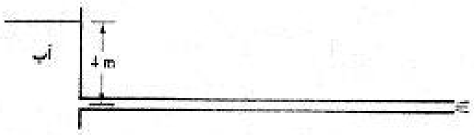
حل:

$$R_e=\frac{\rho VD}{\mu}\qquad Q=AV=\frac{\pi}{4}D^2V\Rightarrow V=\frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\Rightarrow R_e=\frac{4\rho Q}{\pi D\mu}=\frac{4\times 860\times 0.3}{\pi\times 0.45\times 0.025}=29200$$

۶-۳۴. لولهٔ افقی نازکی با قطر $D=3mm$ و طول $L=40m$ مطابق شکل ۳۱-۶ به یک مخزن متصل شده

است اگر در مدت $10s$ $3\times10^{-5}m^3$ خروجی داشته باشیم لزجت آب را محاسبه کنید



شکل ۳۱-۶

حل:

معادله انرژی را بین نقطه (1) در سطح آب و نقطه (2) در ورودی لوله می‌نویسیم:

$$\frac{P_0}{\gamma}+\frac{V_0^2}{2g}+z_0=\frac{P}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z$$

$$P_0=0,\ V_0=0\ ,\ z=0\ ,\ \frac{V^2}{2g}\approx 0$$ صرفنظر می‌کنیم

$$\Rightarrow 4=\frac{p}{\gamma}\Rightarrow p=4\gamma=4\times 9806=39224\ Pa$$

در خروجی لوله فشار برابر صفر می‌باشد بنابراین:

$$\frac{\Delta p}{L}=\frac{39224}{40}=981\ Pa/m$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{3\times10^{-6}}{\pi\times(3\times10^{-3})^2/4}=0.4244\ m/s$$

$$\Delta p=\frac{128\mu LQ}{\pi D^4}\Rightarrow\mu=\frac{\Delta p\,\pi D^4}{128LQ}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{981 \times \pi \times (3\times 10^{-3})^4}{128 \times 3 \times 10^{-6}} = 6.5 \times 10^{-4}\ Ns/m^2$$

۶-۳۵. با انتگرالگیری از معادلهٔ (۶-۲-۶) نشان دهید که برای جریان آرام در یک لولهٔ دایره‌ای تلفات برابر $Q\Delta p$ است.

حل:

با استفاده از معادله (6.2.6) داریم:

$$\text{تلفات} = \int_0^a \mu \left(\frac{du}{dr}\right)^2 dV$$

برای توزیع سرعت از معادله (6.3.6) استفاده می‌کنیم:

$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h) \Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{r}{2\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)$$

$$\text{تلفات} = \int_0^a \mu\left[\frac{r}{2\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h)\right]^2 2\pi r l\,dr = \frac{\pi l}{2\mu}\left[\frac{d}{dl}(P+\gamma h)\right]^2 \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi l}{2\mu}\left[\frac{d}{dl}(P+\gamma h)\right]^2\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a$$

$$\text{تلفات} = \frac{\pi l a^4}{8\mu}\left[\frac{d}{dl}(P+\gamma h)\right]^2$$

از طرفی با استفاده از معادله (6.3.9) برای دبی داریم:

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu}\frac{d}{dl}(P+\gamma h) \quad , \quad \frac{\Delta P}{L} = -\frac{d}{dl}(P+\gamma h) \Rightarrow \text{تلفات} = Q\Delta P$$

۶-۳۶. برای توزیع سرعت از قانون نمای یک هفتم یعنی $u/u_{max} = (y/r_0)^{1/7}$ استفاده کنید و از معادلهٔ (۶-۴-۱۲) توزیع طول اختلاط در لوله را به دست آورید؛ L/r_0 را برحسب y/r_0 بیان کنید.

حل:

با استفاده از معادله (6.4.12) داریم:

$$L = \kappa \frac{du/dy}{d^2u/dy^2}$$

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{max}}\frac{du}{dy} = \frac{1}{7}\frac{1}{r_0}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{-6/7}, \quad \frac{1}{u_{max}}\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{6}{7}\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{r_0}\right)^2\left(\frac{y}{r_0}\right)^{-13/7}$$

$$\Rightarrow L = \kappa \frac{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{r_0}\right)\left(\frac{y}{r_0}\right)^{-6/7}}{\left(-\frac{6}{7}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{r_0}\right)^2\left(\frac{y}{r_0}\right)^{-13/7}} = -\frac{7}{6}\kappa y \quad \Rightarrow \frac{L}{r_0} = -\frac{7}{6}\kappa\frac{y}{r_0}$$

۶-۳۷. منحنی $\varepsilon/u_* r_0$ را بصورت تابعی از y/r_0 رسم کنید. برای توزیع سرعت در لوله معادلهٔ (۶-۴-۱۸) استفاده کنید.

حل: به عهدهٔ دانشجو گذاشته می‌شود

۳۸-۶. جریان درهم در لوله‌ای برقرار است. در چه فاصله‌ای از دیوارهٔ لوله یعنی به ازای چه مقداری از y/r_0 سرعت جریان با سرعت متوسط برابر است؟

حل:

با توجه به مثال (6.3) داریم:

$$\frac{u}{u_*}=\frac{u_m}{u_*}+\frac{1}{\kappa}\ln\frac{y}{r_0}$$

و نیز:

$$V=u_m-\frac{3}{2}\frac{u_*}{\kappa}$$

$$u=V\Rightarrow u_m+\frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{y}{r_0}=u_m-\frac{3}{2}\frac{u_*}{\kappa}\Rightarrow \ln\frac{y}{r_0}=-\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{y}{r_0}=e^{-3/2}=0.223$$

۳۹-۶. لولهٔ صاف افقی به قطر $4cm$ آب را انتقال می‌دهد $0.004m^3/s$ ، $\tau_0=25.3\ Pa$ ، $\nu=1\times10^{-6}m^2/s$ است محاسبه کنید الف) سرعت برشی $u*$ ب) سرعت حداکثر و ج) افت فشار در $10m$ طول لوله

حل:

$$u_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=\sqrt{\frac{25.3}{1000}}=0.159\,m/s$$

$$\frac{u_m}{u_*}=\frac{1}{0.4}\ln\frac{u_*r_0}{\nu}+5.5$$

$$\Rightarrow u_m=0.159\times\left(\frac{1}{0.4}\times\ln\frac{0.159\times0.02}{1\times10^{-6}}+5.5\right)=4.08\,m/s$$

$$\tau_0=\frac{\Delta p}{\Delta L}\frac{r_0}{2}\Rightarrow\Delta p=\frac{2\Delta L\tau_0}{r_0}=\frac{2\times10\times25.3}{0.02}=25300\,Pa$$

۴۰-۶. پروفیل سرعت نمایی پرانتل را به ازای مقادیر n برابر $\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9}$ رسم کنید.

حل:

$$\frac{u}{u_{max}}=\left(\frac{y}{r_0}\right)^n$$

۴۱-۶. در یک کانال مستطیلی به عرض $2m$ و شیب 0.0016 جریانی با عمق $1\ m$ برقرار است. ضریب شزی 70 است. دبی را تعیین کنید.

حل: با استفاده از معادله (6.5.6) داریم:

$$V=c\sqrt{R_HS}$$

$$R_H=\frac{A}{P}=\frac{2}{4}=0.5\,m\Rightarrow V=70\sqrt{0.5\times0.0016}=1.98\ m/s$$

$$Q=AV=2\times1\times1.98=3.96\ m^3/s$$

۶-۴۲. یک کانال مستطیلی به عرض $1\ m$ و شیب 0.0064 دبی $1\ m^3/s$ را منتقل می‌کند. سرعت جریان را تعیین کنید. $\lambda=0.005$

حل:

با استفاده از معادله (6.5.6) داریم:

$$V=\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}\sqrt{R_H S}\quad \Rightarrow Q=A\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}\sqrt{R_H S}$$

$$R_H=\frac{A}{P}=\frac{d\times 1}{2d+1}=\frac{d}{2d+1}$$

$$\Rightarrow Q=d\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}\sqrt{\frac{d}{2d+1}S}$$

$$1=d\sqrt{\frac{2(9.806)}{0.005}}\sqrt{\frac{d}{2d+1}(0.0064)}\Rightarrow 1=5d\sqrt{\frac{d}{2d+1}}\Rightarrow d^3-0.08d-0.04=0$$

از حل این معادله $d=0.419m$ به دست می‌آید بنابراین:

$$\Rightarrow\ V=\frac{Q}{A}=\frac{1}{0.419\times 1}=2.39\ m/s$$

۶-۴۳. در مسألهٔ قبل مقدار ضریب زبری مانینگ، n چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله (6.6.2) داریم:

$$V=\frac{1}{n}R_H^{2/3}S^{1/2}$$

$$\Rightarrow n=\frac{1}{V}\left(\frac{d}{2d+1}\right)^{2/3}S^{1/2}=\frac{1}{2.39}\left(\frac{0.419}{2\times 0.419+1}\right)^{2/3}(0.0064)^{1/2}=0.0125$$

۶-۴۴. یک کانال مستطیلی به عرض $2m$ دبی $6\ m^3/s$ را منتقل می‌کند. عمق جریان $1.3\ m$ است. شیب کانال چقدر است؟ پوشش کانال آجری است.

حل:

با استفاده از معادله (6.6.3) داریم:

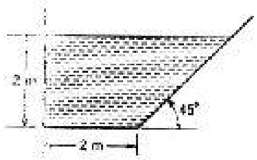
$$Q=\frac{1}{n}AR_H^{2/3}S^{1/2}$$

از جدول کتاب برای آجر: $n=0.016$

$$R_H=\frac{A}{P}=\frac{2\times 1.3}{2\times 1.3+2}=0.565\ m$$

$$\Rightarrow 6=\frac{1}{0.016}\times 2.6\times(0.565)^{2/3}\times S^{1/2}\Rightarrow S=0.0029$$

۶-۴۵. کانالی که مقطع آن در شکل ۳۲-۶ نشان داده شده است، از چوب ناصاف ساخته شده است. شیب کانال 0.001 است. دبی را به دست آورید.



شکل ۳۲-۶

حل:

با استفاده از معادله (6.6.2) داریم:

$$V=\frac{1}{n}R_H^{2/3}S^{1/2}$$

از جدول کتاب برای چوب ناصاف: $n=0.013$

$$A=2\times2+\frac{1}{2}\times2\times2=6m^2$$

$$P=2+2+2\sqrt{2}=6.828m \quad , \quad R_H=\frac{A}{P}=\frac{6}{6.828}=0.8787\,m$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{0.013}\times(0.8787)^{2/3}\times(0.001)^{1/2}=2.23\,m/s$$

$$Q=AV=6\times2.23=13.38\,m^3/s$$

۴۶-۶. عرض کف یک کانال ذوزنقه‌ای $3\ m$ و شیب دیواره‌های آن 1 به $1\frac{1}{2}$ (افقی به قائم) است. شیب کف کانال 0.004 می‌باشد. آب با عمق $2\ m$ در کانال جریان دارد. دبی جریان را تعیین کنید. کانال، بتونی و سطح آن ناصاف است.

حل:

با استفاده از معادله (6.6.3) داریم:

$$Q=\frac{1}{n}AR_H^{2/3}S^{1/2}$$

از جدول کتاب برای بتن ناصاف: $n=0.014$

$$A=2\times3+\frac{2}{1.5}\times2=8.667\,m^2$$

$$P=3+2\times\sqrt{2^2+(2/1.5)^2}=7.807\,m \qquad R_H=\frac{A}{P}=\frac{8.667}{7.807}=1.11m$$

$$\Rightarrow Q=\frac{1}{0.014}\times8.667\times(1.11)^{2/3}\times(0.004)^{1/2}=41.97\,m^3/s$$

۴۷-۶. یک کانال ذوزنقه‌ای با شیب 0.003 و عرض کف $1.2\ m$ و شیب دیواره‌های 2 به 1 (افقی به قائم) $6\ m^3/s$ آب با عمق $1.2\ m$ منتقل می‌کند. ضریب زبری مانینگ چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله (6.6.3) داریم:

$$Q=\frac{A}{n}R_H^{2/3}S^{1/2} \quad \Rightarrow \quad n=\frac{A}{Q}R_H^{2/3}S^{1/2}$$

$$a=(1.2+2\times1.2)\times1.2=4.32\,m^2$$

$$P-1.2+2\times1.2\times\sqrt{1^2+2^2}=6.567\,m$$

$$R_H=\frac{A}{P}=\frac{4.32}{6.567}=0.658m$$

$$\Rightarrow n=\frac{4.32}{6}\times(0.658)^{2/3}\times(0.003)^{1/2}=0.0298$$

۶-۴۸. قرار است برای انتقال $8\ m^3/s$ آب، یک کانال ذوزنقه‌ای به عرض کف $2.4\ m$ و شیب دیواره های 2 به 1 (افقی به قائم) ساخته شود. بهترین سرعت برای عدم فرسایش این نوع کانال $0.85\ m/s$ است. شیب کف کانال باید چقدر باشد؟

حل:

$$A=(2.4+2y)y$$

$$Q=AV \Rightarrow A=\frac{Q}{V}=\frac{8}{0.85}=9.412\ m^3 \Rightarrow 9.412=(2.4+2y)y \Rightarrow 9.412=2.4y+2y^2$$

$$\Rightarrow 2y^2+2.4y-9.412=0$$

از حل معادله فوق: $y=1.65\ m$

از جدول کتاب برای خاک: $n=0.025$

$$P=2.4+2(1.65)\sqrt{1+4}=9.78m \Rightarrow R_H=\frac{A}{P}=\frac{9.412}{9.78}=0.962$$

$$V=\frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2} \Rightarrow 0.85=\frac{1}{0.025}(0.962)^{2/3}S^{1/2} \Rightarrow S=0.00048$$

۶-۴۹. قرار است برای انتقال $2m^3/s$ آب، یک کانال نیمدایره‌ای از ورق آجدار ساخته شود. شیب کانال 0.006 است. قطر لازم چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله $(6.6.3)$ داریم:

$$Q=\frac{1}{n}AR_H^{2/3}S^{1/2}$$

$$A=\frac{\pi D^2}{8} \quad , \quad P=\frac{\pi D}{2} \qquad R_H=\frac{A}{P}=\frac{\pi D^2/8}{\pi D/2}=\frac{D}{4}$$

از جدول کتاب برای فلز آجدار: $n=0.022$

$$\Rightarrow 2=\frac{1}{0.022}\times\frac{\pi D^2}{8}\times(\frac{D}{4})^{2/3}\times(0.006)^{1/2}$$

از حل معادله بالا: $D=1.624m$

۶-۵۰. قطر یک کانال نیمدایره‌ای $3\ m$ و شیب آن 0.004 است. ظرفیت این کانال وقتی کاملاً پر است، چقدر می‌باشد؟ کانال از ورق آجدار ساخته شده‌است.

حل:

مانند مسئله ۴۹ داریم:

$$Q=\frac{1}{n}AR_H^{2/3}S^{1/2} \quad , \quad R_H=\frac{D}{4}$$

$$\Rightarrow Q=\frac{1}{0.022}\times\frac{\pi\times 3^2}{8}\times(\frac{3}{4})^{2/3}\times(0.004)^{1/2}=8.387\ m^3/s$$

۶-۵۱. یک کانال ذوزنقه‌ای با شن مفروش شده است. عرض کف کانال $4\ m$، شیب دیواره‌های جانبی آن 3 به 1 (افقی به قائم) و شیب طولی آن 0.0009 است. برای انتقال دبی $60\ m^3/s$ عمق جریان چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله (6.6.3) داریم:

$$Q=\frac{1}{n}AR_H^{2/3}S^{1/2}$$

$$A=(4+3y)y \qquad , \qquad P=4+2y\sqrt{1^2+3^2}=4+2y\sqrt{10}$$

$$R_H=\frac{A}{P}=\frac{(4+3y)y}{4+2y\sqrt{10}}$$

از جدول کتاب برای شن: $n=0.029$

$$\Rightarrow 60=\frac{1}{0.029}\times(4+3y)y\times\left[\frac{(4+3y)y}{4+2y\sqrt{10}}\right]^{2/3}\times(0.0009)^{1/2}$$

$$\Rightarrow (4+3y)y\times\left[\frac{(4+3y)y}{4+2y\sqrt{10}}\right]^{2/3}=58$$

از حل معادله بالا $y=3.059m$

۶-۵۲. $7.4\ m^3/s$ آب در یک کانال مستطیلی به عرض $4\ m$ و شیب 0.0049 جریان دارد. ضریب زبری کانال $n=0.014$ است. سرعت جریان را به دست آورید.

حل:

با استفاده از معادله (6.6.3) داریم:

$$Q=\frac{1}{n}AR_H^{2/3}S^{1/2}$$

$$A=4y \quad , \quad P=4+2y \quad , \quad R_H=\frac{A}{P}=\frac{4y}{4+2y}=\frac{2y}{2+y}$$

$$\Rightarrow 7.4=\frac{1}{0.014}\times 4y\times\left[\frac{2y}{2+y}\right]^{2/3}\times(0.0049)^{1/2} \Rightarrow y\left[\frac{2y}{2+y}\right]^{2/3}=0.37$$

از حل معادله بالا $y=0.613m$

$$A=4y=4\times0.613=2.452\ m^2 \qquad V=\frac{Q}{A}=\frac{7.4}{2.452}=3.018\ m/s$$

۶-۵۳. قرار است برای انتقال $35\ m^3/s$ آب به مسافت $8km$ با افت ارتفاع $8\ m$ یک کانال ذوزنقه‌ای با پوشش آجری ساخته شود. عرض کف کانال $4\ m$ و شیب دیواره‌های جانبی آن 1 به 1 است. سرعت جریان چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله (6.6.3) داریم:

$$Q=\frac{1}{n}AR_H^{2/3}S^{1/2}$$

$$A=(4+y)y \quad , \quad P=4+2y\sqrt{1+1}=4+2\sqrt{2}y$$

$$R_H=\frac{A}{P}=\frac{(4+y)y}{4+2\sqrt{2}y} \quad , \quad S=\frac{h_f}{L}=\frac{5}{8000}=6.25\times10^{-4}$$

از جدول کتاب برای آجر: $n=0.016$

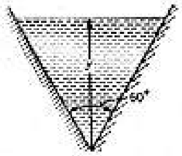
$$\Rightarrow 35=\frac{1}{0.016}\times(4+y)y\times\left[\frac{(4+y)y}{4+2\sqrt{2}y}\right]^{2/3}\times(6.25\times10^{-4})^{1/2}$$

$$\Rightarrow y(4+y)\left[\frac{(4+y)y}{4+2\sqrt{2}y}\right]^{2/3}=22.4$$

از حل معادله بالا: $y=2.59m$

$$\Rightarrow A=(4+2.59)\times2.59=17.07\ m^2 \quad , \quad V=\frac{Q}{A}=\frac{35}{17.07}=2.05\ m/s$$

۵۴-۶. برای کانالی که مقطع آن در شکل ۳۳-۶ نشان داده شده، رابطهٔ دبی و عمق را به دست آورید.



شکل ۳۳-۶

مسائل ۵۴-۶ تا ۵۶-۶

حل:

با استفاده از معادله (6.6.3) داریم:

$$Q=\frac{1}{n}AR_H^{2/3}S^{1/2}$$

$$A=y\times(y\,tg\,30)=\frac{y^2}{\sqrt{3}} \quad , \quad P=2\times\frac{y}{\cos 30}=\frac{4}{\sqrt{3}}y \qquad R_H=\frac{A}{P}=\frac{y^2/\sqrt{3}}{4y/\sqrt{3}}=\frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow Q=\frac{1}{n}\times\frac{y^2}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{y}{4}\right)^{2/3}\times S^{1/2}=\frac{0.23}{n}y^{8/3}S^{1/2} \qquad \Rightarrow Q\sim y^{8/3}$$

۵۵-۶. برای کانالی که مقطع آن در شکل ۳۳-۶ نشان داده شده، رابطهٔ سرعت و عمق را به دست آورید.

حل:

با استفاده از معادله (6.6.2) و مسئله قبل داریم:

$$V=\frac{1}{n}R_H^{2/3}S^{1/2} \quad , \quad R_H=\frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{n}\times\left(\frac{y}{4}\right)^{2/3}\times S^{1/2}=\frac{0.4}{n}y^{2/3}S^{1/2} \qquad \Rightarrow V\sim y^{2/3}$$

۵۶-۶. کانالی که مقطع آن در شکل ۳۳-۶ نشان داده شده، از فولاد پرچ شده ساخته شده است و شیب کف آن 0.01 است. عمق جریان را برای انتقال دبی $340\ L/s$ به دست آورید.

حل:

با استفاده از مسئله ۵۴ داریم:

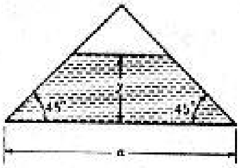
$$Q=\frac{0.23}{n}y^{8/3}S^{1/2}$$

از جدول کتاب برای فولاد پرچ شده: $n=0.018$

$$\Rightarrow 0.34=\frac{0.23}{0.018}\times y^{8/3}\times(0.01)^{1/2}$$

$$\Rightarrow y=0.61\ m$$

۵۷-۶. در شکل ۳۴-۶، به ازای چه عمقی، y سرعت جریان حداکثر است؟ S,n معلومند.



شکل ۳۴-۶ مسایل ۵۷-۶ و ۵۸-۶

حل:

با استفاده از معادله (6.6.2) داریم:

$$V=\frac{1}{n}R_H^{2/3}S^{1/2}$$

$$A=(a-y)y\qquad,\qquad P=a+2\sqrt{2}\,y\qquad R_H=\frac{A}{P}=\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2}y}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{n}\times\left[\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2}y}\right]^{2/3}\times S^{1/2}=\frac{S^{1/2}}{n}\times\left[\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2}y}\right]^{2/3}$$

$$\frac{dV}{dy}=\frac{S^{1/2}}{n}\times\frac{2}{3}\times\left[\frac{(a-2y)(a+2\sqrt{2}y)-2\sqrt{2}(a-y)y}{(a+2\sqrt{2}y)^2}\right]\times\left[\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2}y}\right]^{-1/3}$$

$$\frac{dV}{dy}=0\Rightarrow(a-2y)(a+2\sqrt{2}y)-2\sqrt{2}(a-y)y=0\qquad\Rightarrow\sqrt{2}y^2+ay-\frac{a^2}{2}=0$$

$$y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+2\sqrt{2}a^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{-a\pm a\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}=\begin{cases}0.338a & \text{قابل قبول}\\ -1.045a\end{cases}$$

بنابراین به ازای $y=0.338a$ سرعت جریان حداکثر است.

۵۸-۶. در شکل ۳۴-۶، به ازای چه عمقی، y دبی جریان حداکثر است؟ S,n معلومند.

حل:

$$A=(a-y)y\,,\,V=\frac{S^{1/2}}{n}\left(\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2y}}\right)^{2/3}$$

با استفاده از مسئله قبل داریم:

$$Q=AV \Rightarrow Q=\frac{S^{1/2}}{n}(a-y)y\left(\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2y}}\right)^{2/3}$$

$$\frac{dQ}{dy}=\frac{S^{1/2}}{n}\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{(a-y)}{a+2\sqrt{2y}}\right)^{2/3}(a-y)+\frac{d}{dy}[(a-y)y]\left(\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2y}}\right)^{2/3}\right]$$

$$=\frac{S^{1/2}}{n}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{(a-2y)(a+2\sqrt{2y})-2\sqrt{2y}(a-y)}{(a+2\sqrt{2y})^2}\right)\left(\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2y}}\right)^{-1/2}(ay-y^2)+(a-2y)\left(\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2y}}\right)^{2/3}\right]$$

$$\frac{dQ}{dy}=0$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3}\left(\frac{(a-2y)(a+2\sqrt{2y})-2\sqrt{2y}(a-y)}{(a+2\sqrt{2y})^2}\right)\left(\frac{(a-y)}{a+2\sqrt{2y}}\right)^{-1/2}(ay-y^2)-(a-2y)\left(\frac{(a-y)y}{a+2\sqrt{2y}}\right)^{2/3}=0$$

از حل معادله فوق $y=0.4384a$ بدست می‌آید.

۶-۵۹. ***

۶-۶۰. جریان آب در لوله‌ای به قطر $300\ mm$ مورد آزمایش قرار گرفته است. دو حلقهٔ پیزومتری به فاصلهٔ $120\ m$ اختلاف ارتفاع مانومتری $280\ mm$ می‌باشد. ضریب اصطکاک چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادلهٔ دارسی - ویسباخ داریم:

$$h_f=F\frac{L}{D}\ \frac{V^2}{2g}$$

$$h_f=280\,mmHg\times\frac{10.34\,mH_2O}{760\,mmHg}=3.81\ m.H_2O$$

$$Q=AV \Rightarrow V=\frac{0.23}{\pi\times0.3^2/4}=3.254\ m/s$$

$$\Rightarrow 3.81=F\frac{120}{0.3}\ \frac{3.254^2}{2\times9.806}\ \Rightarrow F=0.0176$$

۶-۶۱. توان لازم برای پمپاژ $85\ L/s$ مایع با وزن مخصوص $8600\ N/m^3$ و لزجت سینماتیک $3.3\times10^{-5}m^2/s$ در لوله‌ای به قطر $0.5\ m$ بر حسب وات بر کیلومتر طول لوله چقدر است؟ برای تعیین ضریب اصطکاک از معادلهٔ بلازیوس استفاده کنید.

حل:

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.08}{\pi\times0.5^2/4}=0.433m/s$$

$$h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}\qquad Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{0.433\times0.5}{3.3\times10^{-5}}=6560$$

با استفاده از معادله بلازیوس داریم:

$$F = \frac{0.316}{Re^{1/4}} = \frac{0.316}{(6560)^{1/4}} = 0.035$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{0.035 \times 1000}{0.5} \times \frac{0.433^2}{2 \times 9.806} = 0.67\,m$$

توان لازم جهت پمپاژ: $P = \gamma h_F Q = 8600 \times 0.67 \times 0.085 = 490\ W$

۶-۶۲. جریان با سرعت $3m/s$ در لوله‌ای به قطر $10\ mm$ برقرار است. افت ارتفاع در هر کیلومتر طول لوله چقدر است؟ $\nu = 4\times10^{-5}\ m^2/s$

حل:

با استفاده از معادله دارسی - ویسباخ داریم:

$$h_f = \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{3 \times 0.01}{4 \times 10^{-5}} = 750 < 2000$$

بنابراین جریان آرام می‌باشد.

$$F = \frac{64}{Re} = \frac{64}{750} = 0.08533$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{0.08533 \times 1000}{0.01} \times \frac{3^2}{2 \times 9.806} = 3916\,m$$

۶-۶۳. سیال در لوله‌ای به قطر $10\ mm$ جریان دارد. عدد رینولدز 1800 و افت ارتفاع در $100\ m$ طول لوله $30\ m$ است. دبی را برحسب لیتر در دقیقه به دست آورید.

حل:

$$h_f = \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g} \qquad F = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1800} = 0.03556$$

$$\Rightarrow 30 = \frac{0.03556 \times 100}{0.01} \times \frac{V^2}{2 \times 9.806} \Rightarrow V = 1.286\ m/s$$

$$Q = AV = \frac{\pi \times 0.01^2}{4} \times 1.286 = 1.01 \times 10^{-4}\ m^3/s = 6.06\ L/min$$

۶-۶۴. قطر لولهٔ گالوانیزه‌ای که برای جریانی با عدد رینولدز $R=3.5\times10^5$ بطور هیدرولیکی صاف باشد، چقدر است؟ (یک لوله را بطور هیدرولیکی صاف گوییم، اگر افت ارتفاع آن با یک لولهٔ صافتر در شرایط یکسان برابر باشد.)

حل:

با استفاده از دیاگرام مودی برای لوله‌های صاف در $R = 3.5 \times 10^5$ داریم: $\varepsilon/D = 0.00001$

از جدول کتاب برای گالوانیزه $\varepsilon = 0.15\,mm$

$$\Rightarrow \frac{0.15 \times 10^{-3}}{D} = 0.00001 \Rightarrow D = 15\,m$$

۶-۶۵. یک لولهٔ فولادی پرچی به قطر $3\,m$ و زبری مطلق $\varepsilon=3mm$ موجود است. برای جریان در این لوله در بالاتر از چه عدد رینولدزی، افت ارتفاع مستقل از لزجت سیال است؟

حل:

برای لوله موردنظر داریم: $\frac{\varepsilon}{D}=\frac{3\times10^{-3}}{3}=0.001$

هرگاه روی دیاگرام مودی روی منحنی مربوط به $\frac{\varepsilon}{D}=0.001$ پیش برویم مشاهده می‌کنیم که در اعداد رینولدز بالای 1.3×10^6 ضریب اصطکاک F ثابت مانده و با افزایش عدد رینولدز تغییر نمی‌کند بنابراین در اعداد رینولدز بالای 1.3×10^6 افت ارتفاع مستقل از رینولدز و در نتیجه مستقل از لزجت سیال می‌باشد.

۶-۶۶. لوله‌ای به قطر $30\ cm$ برای جریانی با عدد رینولدز 10^6 دارای ضریب اصطکاک $F=0.03$ است. زبری مطلق لوله را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از معادله $(6.7.13)$ داریم:

$$F=\frac{1.325}{\left[\ln\left(\varepsilon/3.7D+5.74/Re^{0.9}\right)\right]^2}$$

$$\Rightarrow 0.03=\frac{1.325}{\left[\ln\left(\varepsilon/3.7\times0.3+5.74/(10^6)^{0.9}\right)\right]^2}$$

از حل معادله بالا $\varepsilon=0.0014\ m=1.4\,mm$

۶-۶۷. قطر لولهٔ آهنی گالوانیزه‌ای را تعیین کنید که ضریب اصطکاک آن در عدد رینولدز $100,000$ با ضریب اصطکاک لولهٔ چدنی به قطر $300\ mm$ برابر باشد.

حل:

از جدول کتاب برای چدن: $\varepsilon=0.25\,mm$

$$\Rightarrow\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.25}{300}=0.00083$$

در ε/D بالا و عدد رینولدز 100000 با استفاده از معادله کلبورک یا دیاگرام مودی $F=0.0216$ بدست می‌آید.

حال برای آهن گالوانیزه در عدد رینولدز 100000 و $F=0.0216$ با استفاده از دیاگرام مودی یا حل کلبورک $\varepsilon/D=0.000836$ به دست می‌آید.

از جدول کتاب برای آهن گالوانیزه: $\varepsilon=0.15\ mm$

$$\Rightarrow\frac{0.15}{D}=0.000836\ \Rightarrow D=180\,mm$$

۶-۶۸. در چه شرایطی تلفات در لوله‌ای که بطور مصنوعی زبر شده با سرعت به توانی بیش از دو متناسب است؟

حل: به متن کتاب مراجعه شود.

۶-۶۹. چرا در جریان آرام در لوله‌ها با کاهش سرعت، ضریب اصطکاک افزایش می‌یابد؟

حل:

برای جریان آرام در لوله‌ها داریم:

$$F=\frac{64}{Re}$$

$$Re=\frac{VD}{\nu}\Rightarrow F=\frac{64\nu}{VD}\Rightarrow F\sim\frac{1}{V}$$

بنابراین ضریب اصطکاک با سرعت نسبت عکس داشته و با کاهش سرعت ضریب اصطکاک افزایش می‌یابد.

۶-۷۰. هوای $27^{\circ}C$ با سرعت $15m/s$ در یک لولهٔ گالوانیزه به قطر $1\ m$ جریان دارد با استفاده از معادلهٔ (۶-۷-۱۳) ضریب اصطکاک را بدست آورید؟

حل:

با استفاده از معادله $(6.7.13)$ داریم:

$$F=\frac{1.325}{\left[ln\left(\varepsilon/3.7D+5.74/Re^{0.9}\right)\right]^2}$$

از جدول کتاب برای گالوانیزه: $\varepsilon=0.15mm$

از جدول کتاب برای هوا در 27°: $\nu=16.34\times10^{-6}m^2/s$

$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{15\times1}{16.34\times10^{-6}}=9.18\times10^5$$

$$\Rightarrow F=\frac{1.325}{\left[ln\left(0.00015/3.7\times1+5.74/\left(9.18\times10^5\right)^{0.9}\right)\right]^2}=0.0143$$

۶-۷۱. می‌خواهیم $60\ L/s$ آب 20° را در لولهٔ آهنی به قطر $200mm$ و طول $1km$ پمپاژ کنیم. افت ارتفاع را محاسبه کنید. توان لازم برای انجام این کار چقدر است؟

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای 20°: $\nu=1.007\times10^{-6}m^2/s$

$\gamma=9789\ N/m^3$

از جدول کتاب برای آهن: $\varepsilon=0.046mm$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.06}{\pi\times0.2^2/4}=1.91\ m/s$$

$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{1.91\times0.2}{1.007\times10^{-6}}=3.79\times10^5$$ جریان درهم.

$$\varepsilon/D=\frac{0.046}{200}=0.00023$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.016$ بدست می‌آید.

$$h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}=\frac{0.016\times1000}{0.2}\times\frac{1.91^2}{2\times9.806}=14.88m$$

$$P=\gamma h_f Q=9789\times14.88\times0.06=8740W=8.74kW$$

۶-۷۲. $450\ m^3/min$ هوا با دمای $32^{\circ}C$ در یک لولهٔ آهنی به قطر $1.2m$ و طول $300\ m$ منتقل می‌شود. افت ارتفاع برحسب سانتیمتر ستون آب چقدر است؟

حل:

از منحنی کتاب برای هوا در دمای 27^c: $\nu=1.8\times10^{-5}m^2/s$

$$Q=450m^3/min=7.5m^3/s$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{7.5}{\pi\times1.2^2/4}=6.63m/s$$

$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{6.63\times1.2}{1.8\times10^{-5}}=4.42\times10^5$$

از جدول کتاب برای آهن: $\varepsilon=0.046mm$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.046\times10^{-3}}{1.2}=3.83\times10^{-5}$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.014$ بدست می‌آید.

$$h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}=\frac{0.014\times300}{1.2}\times\frac{6.63^2}{2\times9.806}=7.845\ m.air$$

در دمای 32^c $\rho_{air}=1.16\ kg/m^3$

$\rho_{H_2O}=995\ kg/m^3$

برای تبدیل h_f از واحد متر هوا به متر آب داریم:

$$(\rho h_f)_{air}=(\rho h_F)_{H_2O}$$

$$\Rightarrow h_f=7.845\times\frac{1.16}{995}=0.009mH_2O=0.9cm.H_2O$$

۶-۷۳. برای به گردش در آوردن هوای استاندارد با سرعت $500km/h$ در یک تونل باد از یک فن استفاده می‌شود. قدرت موتور لازم برای گرداندن فن چقدر است؟ تونل، مدار بسته‌ای به طول $60m$ است. مقطع تونل را می‌توان ثابت و به صورت یک لولهٔ دایره‌ای به قطر $2m$ فرض کرد. لوله را صاف فرض کنید.

حل:

در شرایط استاندارد (20^c) داریم: $\nu_{air}=1.6\times10^{-5}m^2/s$

$$V=500km/h\times\frac{1}{3.6}=138.9\ m/s$$

$$\rho_{air}=\frac{P}{RT}=\frac{101325}{287\times293}=1.205kg/m^3$$

$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{138.9\times2}{1.6\times10^{-5}}=1.736\times10^7$$

با استفاده از دیاگرام مودی برای لوله صاف $F=0.0072$ بدست می‌آید.

$$h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}=\frac{0.0072\times 60}{2}\times\frac{138.9^2}{2\times 9.806}=212.5\ m$$

$$P=\gamma h_f Q=1.205\times 9.806\times 212.5\times 138.9\times\frac{\pi\times 2^2}{2}=1095696\ W\approx 1.096\ MW$$

۷۴-۶. در مسألهٔ قبل آیا لازم نیست که هوا را در مقطعی از تونل خنک نماییم؟ چقدر؟

حل:

با توجه به اینکه توان داده شده به هوا سبب گرم شدن آن می‌شود بنابراین باید هوا را در مقطعی از تونل خنک نمود.

یعنی باید به میزان $1.096MW$ گرما از هوا گرفته شود.

۷۵-۶. $60L/s$ نفت با لزجت $0.016\ Pa.s$ و وزن مخصوص $8500\ N/m^3$ در یک خط لولهٔ چدنی به قطر $30cm$ پمپاژ می‌شود. اگر فشار تولیدی هر پمپ 560 باشد، هر پمپ چند متر نفت را می‌تواند جا به جا کند؟

حل:

با استفاده از معادله دارسی - ویسباخ داریم:

$$h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$\Delta p=\gamma h_f=\frac{\gamma FL}{D}.\frac{V^2}{2g}\Rightarrow L=\frac{2gD\Delta P}{\gamma FV^2}$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.06}{\pi\times 0.3^2/4}=0.85\ m/s$$

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{(8500/9.806)\times 0.85\times 0.3}{0.016}=13800$$

از جدول کتاب برای چدن: $\varepsilon=0.25\,mm$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.25\times 10^{-3}}{0.3}=0.833\times 10^{-3}$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.0295$ بدست می‌آید.

$$\Rightarrow L=\frac{2\times 9.806\times 0.3\times 560000}{8500\times 0.0295\times 0.85^2}=18187\,m$$

۷۶-۶. یک لولهٔ صاف به قطر $60\ mm$ و طول $150\ mm$ دبی $10\ L/s$ آب $25^{\circ}C$ را به بام یک ساختمان منتقل می‌کند. ابتدای لوله به شاه لولهٔ اصلی متصل است که فشار آن $1.6\ Mpa$ می‌باشد. فشار در بام ساختمان را - که $25\ m$ بالاتر از شاه لوله است - به دست آورید.

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای 25^{c} داریم: $\nu = 0.897 \times 10^{-6}\ m^2/s$

$\gamma = 9778\ N/m^3$

معادله انرژی را بین ورودی لوله و خروجی آن نوشته و ساده می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\gamma} = H + h_f + \frac{P_2}{\gamma}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.01}{\pi \times 0.06^2/4} = 3.537\ m/s$$

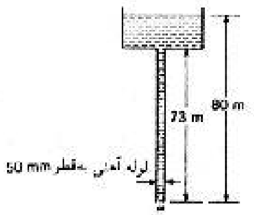
$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{3.537 \times 0.06}{0.897 \times 10^{-6}} = 2.366 \times 10^5$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.015$ بدست می‌آید.

$$h_f = \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{0.015 \times 150}{0.06} \times \frac{3.537^2}{2 \times 9.806} = 23.92\ m$$

$$\Rightarrow \frac{1.6 \times 10^6}{9778} = 25 + 23.92 + \frac{P_2}{9778} \Rightarrow P_2 = 1.121 \times 10^6 Pa = 1.121 MPa$$

۷۷-۶. در شکل ۳۵-۶ دبی جریان را برای آب $65^{\circ}C$ حساب کنید.



شکل ۳۵-۶ مسایل ۷۷-۶، ۷۸-۶

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای 65^{c}: $\nu = 0.444 \times 10^{-6} m^2/s$

از جدول کتاب برای آهن: $\varepsilon = 0.046 mm$

I) استفاده از دیاگرام مودی

معادله انرژی را بین دو سطح آزاد مایع نوشته و ساده می‌کنیم

$$H = h_f \Rightarrow \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g} = 80$$

$$\Rightarrow \frac{F \times 73}{0.05} \times \frac{V^2}{2 \times 9.806} = 80 \Rightarrow V^2 = \frac{1.07463}{F} \qquad (I)$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{V \times 0.05}{0.444 \times 10^{-6}} = 1.126 \times 10^5\ V \qquad (II)$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046}{50} = 0.00092$$

این مسئله از طریق حدس و خطا حل می‌شود:

$$F_{\text{حدس}} \xrightarrow{(I)} V \xrightarrow{(II)} Re,\ \varepsilon/D \xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}} F$$

حدس و خطا تا زمانی که F به دست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد.

درنهایت داریم: $V=7.33m/s\ ,\ F=0.02$

$$Q = AV = \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \times 7.33 = 0.01439 m^3/s = 14.39\, litr/s$$

II) استفاده از معادله (6.7.15)

$$Q = -0.965 D^2 \sqrt{\frac{g D h_f}{L}}\, ln \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{1.784 \nu}{D\sqrt{g D h_f / L}} \right)$$

$$\Rightarrow Q = -0.965 \times 0.05^2 \times \sqrt{\frac{9.806 \times 0.05 \times 80}{73}} \times ln \left(\frac{0.046}{3.7 \times 50} + \frac{1.784 \times 0.444 \times 10^{-6}}{0.05 \times \sqrt{9.806 \times 0.05 \times 80.73}} \right)$$

$= 0.01453\, m^3/s = 14.53\, litr/s$

۶-۷۸. در شکل ۶-۳۵ توان لازم برای پمپاژ $10 L/s$ آب $15^\circ C$ از پایین لوله به مخزن فوقانی چقدر است؟

حل:

معادله انرژی را بین نقطه (1) در مقطع ورودی لوله و نقطهٔ (2) واقع در سطح آزاد مایع نوشته و ساده می‌کنیم:

$h_p = 80 + h_f$

$$\Rightarrow h_p = 80 + \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}$$

از جدول کتاب برای آب در دمای 15^C: $\nu = 1.141 \times 10^{-6}\, m^2/s$

$\gamma = 9798\ N/m^3$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.01}{\pi \times 0.05^2/4} = 5.093\, m/s$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{5.093 \times 0.05}{1.141 \times 10^{-6}} = 2.232 \times 10^5$$ جریان درهم

از جدول کتاب برای آهن: $\varepsilon = 0.046\, mm$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046}{50} = 0.00092$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F = 0.021$ بدست می‌آید.

$$\Rightarrow h_p = 80 + \frac{0.021 \times 73}{0.05} \times \frac{5.093^2}{2 \times 9.806} = 120.551\, m$$

توان لازم: $P = \gamma h_p Q = 9798 \times 120.551 \times 0.01 = 11812\, W$

۶-۷۹. چون طول و قطر لوله داده نشده است مسئله قابل حل نیست.

۶-۸۰. برای تخلیه یک مخزن نفت از لوله‌ای فولادی به قطر $12\ mm$ و طول $15\ m$ استفاده شده است. سطح نفت در مخزن $2\ m$ بالاتر از انتهای لوله است. دبی را تعیین کنید. $\gamma = 8 kN/m^3, \mu = 0.01\, Pa.s$

حل:

فرض می‌کنیم جریان آرام باشد و از معادله (6.3.10b) با شرط $\Delta P = \gamma H$ استفاده کنیم.

$$V = \frac{\Delta P D^2}{32 \mu L} = \frac{\gamma H D^2}{32 \mu L}$$

$$\Rightarrow V = \frac{8000 \times 2 \times 0.012^2}{32 \times 0.01 \times 15} = 0.48\ m/s$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{8000/9.806 \times 0.48 \times 0.012}{0.01} = 470 < 2000$$

بنابراین فرضمان مبنی بر آرام بودن جریان صحیح است.

$$Q = AV = \frac{\pi \times 0.012^2}{4} \times 0.48 = 5.43 \times 10^{-5} m^3/s = 0.0543\ L/s$$

۸۱-۶. دو مخزن توسط یک لولهٔ صاف به قطر $50\ mm$ و طول $60\ m$ به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر اختلاف ارتفاع سطح مایع در مخزنها $15\ m$ باشد، دبی جریان چقدر است؟ از دیاگرام مودی و معادلهٔ (۱۵-۷-۶) استفاده کنید. $\nu = 0.0001\ m^2/s$

حل:

I) استفاده از دیاگرام مودی:

$$h_f = \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}$$

فرض می‌کنیم جریان آرام باشد در این حالت هم می‌توان از دیاگرام مودی استفاده کرد و هم از رابطه $F = \frac{64}{Re}$ استفاده کرد.

$$F = \frac{64}{Re} = \frac{64}{VD/\nu} = \frac{64\nu}{VD}$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{64\nu}{VD}.\frac{L}{D}.\frac{V^2}{2g} = \frac{32\nu LV}{D^2 g} \Rightarrow V = \frac{h_f D^2 g}{32\nu L}$$

$$V = \frac{15 \times 0.05^2 \times 9.806}{32 \times 0.0001 \times 60} = 1.915\ m/s$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.915 \times 0.05}{0.0001} = 958 < 2000$$ جریان آرام:

بنابراین فرضمان صحیح بوده است.

$$Q = AV = \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \times 1.915 = 0.00376\ m^3/s = 3.76\ litr/s$$

II) استفاده از معادله $(6.7.15)$

$$Q = -0.965 D^2 \sqrt{\frac{gDh_f}{L}}\ ln \left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{1.784\nu}{D\sqrt{gDh_f/L}}\right]$$

$$\Rightarrow Q = -0.965 \times 0.05^2 \times \sqrt{\frac{9.806 \times 0.05 \times 15}{60}} \times ln\left[0 + \frac{1.784 \times 0.0001}{0.5 \times \sqrt{9.806 \times 0.05 \times 15/60}}\right] =$$

$$= 0.00387\ m^3/s = 3.87\ litr/s$$

۸۲-۶. هوای اتمسفر با دمای $15^\circ C$ در لوله‌ای به قطر 1.25 و زبری مطلق $\varepsilon = 1mm$ جریان دارد. افت ارتفاع در $200\ m$ طول لوله معادل 80 میلیمتر ستون آب است. دبی جریان را برحسب متر مکعب در دقیقه حساب کنید. از دیاگرام مودی و معادلهٔ (۱۵-۷-۶) استفاده کنید.

حل:

از جدول کتاب در دمای 15^{c} آب: $\rho = 999.1\, kg/m^3$

هوا: $\nu = 1.516 \times 10^{-5} m^2/s\, , \rho = 1.178 kg/m^3$

ابتدا باید h_f که برحسب میلی‌متر آب داده شده است به متر هوا تبدیل گردد.

$$(\rho h_f)_{air} = (\rho h_f)_{H_2O}$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{999.1}{1.178} \times 0.08 = 67.85 \ m.air$$

I) استفاده از دیاگرام مودی

$$h_f = \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow 67.85 = F \times \frac{200}{1.25} \times \frac{V^2}{2 \times 9.806} \Rightarrow V^2 = \frac{8.3167}{F} \qquad (1)$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{V \times 1.25}{1.516 \times 10^{-5}} = 82453\ V \qquad (2)$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1 \times 10^{-3}}{1.25} = 0.0008$$

مسئله از طریق حدس و خطا حل می‌شود:

$$\text{حدس}\quad F \xrightarrow{1} V \rightarrow Re, \varepsilon/D \xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}} F$$

حدس و خطا تا زمانی که F به دست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد.

در نهایت داریم: $F = 0.0188 \quad , \quad V = 21.03\ m/s$

$$\Rightarrow Q = AV = \frac{\pi \times 1.25^2}{4} \times 21.03 = 25.8077\, m^3/s = 1548.5 \ m^3/min$$

II) استفاده از معادله $(6.7.15)$

$$Q = -0.965 D^2 \sqrt{\frac{gD\,h_f}{L}}\ ln\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{1.784\,\nu}{D\sqrt{gDh_f/L}}\right]$$

$$\Rightarrow Q = -0.965 \times 1.25^2 \times \sqrt{\frac{9.806 \times 1.25 \times 67.85}{200}} \times ln\left[\frac{0.0008}{3.7} + \frac{1.784 \times 1.516 \times 10^{-5}}{1.25 \times \sqrt{9.806 \times 1.25 \times 67.85/200}}\right] =$$

$$= 25.8\, m^3/s = 1548 m^3/min$$

۸۳-۶. گازی با وزن ملکولی 37 در فشار $630\ kPa\ abs$ و دمای $38^{\circ}C$ در یک لولهٔ گالوانیزه به قطر $60cm$ جریان دارد. افت ارتفاع در $100\ m$ طول لوله معادل 16 سانتیمتر ستون آب است. دبی جریان را برحسب کیلوگرم در ثانیه به دست آورید. $\mu = 2 \times 10^{-5} Pa.s$

حل:

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{630000}{8312/37\times(273+38)}=9.0173\ kg/m^3$$

از جدول کتاب برای آب در 38^c: $\rho=993\,kg/m^3$

$$(\rho h_f)_{gas}=(\rho h_f)_{H_2O}\Rightarrow h_f=\frac{993}{9.0173}\times0.16=17.62\ m.gas$$

$$h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}\Rightarrow17.62=\frac{F\times100}{0.6}\times\frac{V^2}{2\times9.806}\Rightarrow V^2=\frac{2.0734}{F}\qquad(1)$$

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{9.0173\times V\times0.6}{2\times10^{-5}}=270519\ V\qquad(2)$$

از جدول کتاب برای گالوانیزه: $\varepsilon=0.15\,mm$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.15}{600}=0.00025$$

مسئله از طریق حدس و خطایی حل می‌شود:

$$\text{حدس}\ F\xrightarrow{(1)}V\xrightarrow{(2)}Re\ ,\ \frac{\varepsilon}{D}\xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}}F$$

حدس و خطا تا زمانی که F بدست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد.

در نهایت داریم: $V=11.901\,m/s\ ,\ F=0.0146$

$$m=\rho AV=9.0173\times\frac{\pi\times0.6^2}{4}\times11.901=30.34\ kg/s$$

۶-۸۴. در مسألهٔ قبل برای برقراری جریان از یک دمنده با راندمان 70% استفاده می‌شود. توان لازم به ازای هر کیلومتر طول لوله چقدر است؟

حل:

برای تعیین توان لازم شرایط متوسط را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta P=16\times10=160\ cmH_2O=160\times\frac{101325}{1034}=15679\ Pa$$

$$P_2=P_1-\frac{\Delta P}{2}=630000-\frac{15679}{2}=622160\ \ Pa$$

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{622160}{8312/37\times(273+38)}=8.905\ kg/m^3$$

$$Q=\frac{m}{\rho}=\frac{30.34}{8.905}=3.407\ m^3/s$$

$$P=\frac{\gamma Qh_F}{0.7}=\frac{8.905\times9.806\times3.407\times176.2}{0.7}=74887\ W/km$$

۶-۸۵. $45\,kg/min$ هوای لازم برای تهویه یک معدن از طریق یک لوله گالوانیزه به قطر $30\ cm$ و طول $900m$

تأمین می‌شود. برای ایجاد این جریان از یک دمنده استفاده می‌شود. ارتفاع تولیدی دمنده را برحسب سانتیمتر ستون آب به دست آورید. از تلفات موضعی صرفنظر کنید. فشار هوا $200kPa\ abs$ و دمای آن $32^{\circ}C$ است.

حل:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{200000}{287 \times (273+32)} = 2.28\ kg/m^3$$

$$m = \rho AV \Rightarrow V = \frac{m}{\rho A} = \frac{0.75}{2.28 \times \pi \times 0.3^2/4} = 4.65\ m/s$$

از منحنی کتاب برای هوا در 32^c: $\mu = 18.73 \times 10^{-6}\ N.s/m^2$

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{2.28 \times 4.65 \times 0.3}{18.73 \times 10^{-6}} = 169814$$

از جدول کتاب برای گالوانیزه: $\varepsilon = 0.15\,mm$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.15}{300} = 0.0005$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.019$ بدست می‌آید.

$$h_f = \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{0.019 \times 900}{0.3} \times \frac{4.65^2}{2 \times 9.806} = 63.84\ m.air$$

$$(\rho h)_{air} = (\rho h)_{H_2O} \Rightarrow 2.28 \times 62.84 = 995.1 \times h_f \Rightarrow$$

$$h = 0.144\,H_2O = 14.43\,m\,H_2O$$

۶-۸۶ درشکل ۳۰-۶داریم: $\varepsilon = 1mm\ , \mu = 0.0004\,pa.s, s = 0.85\ , D50mm, L = 150m\ , H = 20m$

جریان را برحسب نیوتن در ثانیه به دست آورید.

حل:

فرض می‌کنیم دما 15^c باشد.

از جدول کتاب برای آب در دمای 15^c: $\rho = 999.1\ kg/m^3$

معادله انرژی را بین دو سطح آزاد مایع نوشته و ساده می‌کنیم.

$$H = h_f = 20m$$

$$h_f = \frac{F\,L}{D}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow 20 = \frac{F \times 150}{0.05} \times \frac{V^2}{2 \times 9.806} \Rightarrow V^2 = \frac{0.13075}{F} \qquad (1)$$

$$Re = \frac{\rho DV}{\mu} = \frac{(0.85 \times 999.1) \times 0.05 \times V}{0.004} = 10616\,V \qquad (2)$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1}{50} = 0.02$$

مسئله از طریق حدس و خطایی حل می‌شود.

$$\text{حدس}\ F \xrightarrow{(1)} V \xrightarrow{(2)} Re\ , \frac{\varepsilon}{D} \xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}} F$$

حدس و خطا تا زمانی که F بدست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد

در نهایت داریم: $V=1.604m/s$, $F=0.0508$

$$Q=AV=\frac{\pi\times0.05^2}{4}\times1.604=0.00315\ m^3/s$$
$$\gamma=s\gamma_w=0.85\times999.1\times9.806=8327.6\ \ N/m^3$$
$$\Rightarrow Q=0.00315\times8327.6=26.2\ N/s$$

۸۷-۶. دریک فرآیند بایستی $4500\ kg/h$ آب منظر با دمای $20^\circ C$ توسط یک لولهٔ صاف بین دو مخزن به فاصلهٔ $10\ m$ که دارای اختلاف ارتفاع $1.3\ m$ هستند، منتقل شود. قطر لولهٔ لازم را تعیین کنید.

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای 20°: $\rho=998.2\ kg/m^3$

$$\nu=1.007\times10^{-6}m^2/s$$

$$Q=\frac{m}{\rho}=\frac{4500/3600}{998.2}=0.001252\ m^3/s$$
$$H=h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}\quad,\quad V=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi D^2}$$
$$\Rightarrow1.3=\frac{F\times10}{D}\cdot\frac{(4\times0.001252/\pi D^2)^2}{2\times9.806}\Rightarrow D^5=9.967\times10^{-7}F\quad(1)$$
$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{4Q}{\pi\nu}\frac{1}{D}=\frac{4\times0.001252}{\pi\times1.007\times10^{-6}}\times\frac{1}{D}=\frac{1583}{D}\qquad(2)$$

مسئله از طریق حدس و خطایی حل می‌شود:

$$\text{حدس } F\xrightarrow{(1)}D\xrightarrow{(2)}Re\ ,\frac{\varepsilon}{D}\xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}}F$$

حدس و خطا تا زمانی که F به دست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد.

در نهایت داریم: $D=0.0288m=28.8mm$, $F=0.02$

* توجه: می‌توانیم از طریق زیر نیز مسئله را حل کنیم.

فرض می‌کنیم $R<100000$ باشد و از معادله بلازیوس استفاده می‌کنیم.

$$F=\frac{0.316}{Re^{1/4}}\qquad(3)$$
$$(3),(2),(1)\Rightarrow\frac{D^5}{9.967\times10^{-7}}=\frac{0.316}{(1583/D)^{1/4}}\Rightarrow D^{4.75}=4.993\times10^{-8}$$
$$\Rightarrow D=0.029m=29mm$$

بنابراین فرضمان صحیح است.

$$Re = \frac{1583}{0.029} = 54586 < 100000$$

۸۸-۶. قطر لولهٔ چدنی نو لازم برای انتقال $400\ L/s$ آب $25^\circ C$ در مسافت $1\ km$ با افت ارتفاع $2m$ را به دست آورید. از نمودار مودی و معادلهٔ (۱۸-۷-۶) استفاده کنید.

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای 25°: $\nu = 0.897 \times 10^{-6} m^2/s$.

از جدول کتاب برای چدن: $0.25mm$

I) استفاده از دیاگرام مودی:

$$h_f = \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g} \quad , \quad V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{F \times 1000}{D} \cdot \frac{(4 \times 0.4/\pi D^2)^2}{2 \times 9.806} \Rightarrow D^5 = 6.613\ F \qquad (1)$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \nu}\frac{1}{D} = \frac{4 \times 0.4}{\pi \times 0.897 \times 10^{-6}} \times \frac{1}{D} = \frac{567777}{D} \qquad (2)$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.00025}{D} \qquad (3)$$

مسئله به طریق حدس و خطایی حل می‌شود:

$$\text{حدس}\ F \xrightarrow{(1)} D \xrightarrow{(2)} Re\ ,\ \frac{\varepsilon}{D} \xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}} F$$

حدس و خطا تا زمانی که F به دست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد.

در نهایت داریم: $D = 0.642m = 642mm\ , F = 0.0165$

II) استفاده از معادله *(6.7.18)*

$$D = 0.66\left[\varepsilon^{1.25}\left(\frac{LQ^2}{gh_f}\right)^{4.75} + \nu Q^{9.4}\left(\frac{L}{gh_f}\right)^{5.2}\right]^{0.04}$$

$$\Rightarrow D = 0.66 \times \left[0.00025^{1.25}\left(\frac{1000 \times 0.4^2}{9.806 \times 2}\right)^{4.75} + 0.897 \times 10^{-6} \times 0.4^{9.4}\left(\frac{1000}{9.806 \times 2}\right)^{5.2}\right]^{0.04} =$$

$$= 0.654m = 654mm$$

۸۹-۶. دو نوع صفحهٔ فولادی وجود دارد که زبری مطلق یکی $\varepsilon_1 = 0.09mm$ و زبری مطلق دیگری $\varepsilon_2 = 0.03mm$ است. صفحهٔ صافتر *10* درصد گرانتر است. تنش مجاز صفحات *70 Mpa* می‌باشد. برای انتقال $35\ m^3/s$ آب در فشار *1.4 MPa* با افت ارتفاع *1.136 m/km* از کدامیک از دو صفحه باید برای تهیهٔ لوله استفاده کرد؟

حل: به عهده دانشجو گذاشته می‌شود.

۹۰-۶. یک لولهٔ کهنه به قطر $2m$ و زبری مطلق $\varepsilon=30mm$ وجود دارد. آستری به ضخامت $12mm$ زبری لوله را تا $\varepsilon=1mm$ کاهش می‌دهد. با اینکار چقدر در هزینهٔ سالیانه پمپاژ $6m^3/s$ آب $20^\circ C$ در یک کیلومتر طول لوله صرفه جویی می‌شود. راندمان پمپ و موتور 80 درصد است. قیمت هر کیلووات ساعت برق را 4 سنت بگیرید.

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای 20° $\nu = 1.007\times10^{-6}\,m^2/s$

$\gamma = 9789\,N/m^3$

I) قبل از آستر کردن

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{6}{\pi\times 2^2/4}=1.91\,m/s$$

$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{1.91\times 2}{1.007\times10^{-6}}=3.7934\times10^6$$ جریان درهم:

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.03}{2}=0.015$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.044$ بدست می‌آید.

$$h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}=\frac{0.044\times1000}{2}\times\frac{1.91^3}{2\times9.806}=4.0923\,m$$

II) پس از استر کردن

$$D=2-2\times0.012=1.976\,m$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{6}{\pi\times1.976^2/4}=1.9565\,m/s$$

$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{1.9565\times1.976}{1.007\times10^{-6}}=3.839\times10^6$$ جریان درهم:

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.001}{1.976}=5.061\times10^{-4}$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.017$ بدست می‌آید.

$$h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}=\frac{0.017\times1000}{1.976}\times\frac{1.9565^2}{2\times9.806}=1.6792\,m$$

بنابراین میزان صرفه‌جویی در هر پمپ عبارت است از:

$$\Delta h_f=h_{f_1}-h_{f_2}=4.0923-1.6792=2.4131\,m$$

$$P=\frac{\gamma\Delta h_f Q}{\eta}=\frac{9789\times2.4131\times6}{0.8}=177164\,w=177.164\,kw$$

میزان صرفه‌جویی در هزینه: $\Delta(cost)=(4\times177.164)\times24\times365/100=62078$ سال / دلار

۶-۹۱. برای انتقال $8.5\ m^3/s$ آب $16^{\circ}C$ با افت ارتفاع $1\ m$ در $1000\ m$ از لوله چوبی نو در شرایط عالی استفاده می‌شود. قطر لوله را تعیین کنید. از دیاگرام مودی و معادله (۱۸-۷-۶) استفاده کنید.

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای 16^{c}: $\nu=1.122\times10^{-6}m^2/s$

از جدول کتاب برای چوب: $\varepsilon=0.18mm$

I) استفاده از دیاگرام مودی

$$H=h_f=\frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g} \quad , \quad V=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{F\times1000}{D}\times\frac{(4\times8.5/\pi D^2)^2}{2\times9.806}\Rightarrow D^5=5972\ F \qquad (1)$$

$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{4Q}{\pi\nu}\frac{1}{D}=\frac{4\times8.5}{\pi\times1.122\times10^{-6}}\times\frac{1}{D}=\frac{9645754}{D} \qquad (2)$$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.18\times10^{-3}}{D} \qquad (3)$$

مسئله از طریق حدس و خطایی حل می‌شود:

$$\text{حدس } F \xrightarrow{(1)} D \xrightarrow{(2)} Re\ ,\frac{\varepsilon}{D} \xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}} F$$

حدس و خطا تا زمانی که F بدست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد.

درنهایت داریم: $D=2.35m\ ,F=0.012$

II) استفاده از معادله (6.7.18)

$$D=0.66\left[\varepsilon^{1.25}\left(\frac{LQ^2}{gh_f}\right)^{4.75}+\nu Q^{9.4}\left(\frac{L}{gh_f}\right)^{5.2}\right]^{0.04}$$

$$\Rightarrow D=0.66\times\left[(0.18\times10^{-3})^{1.25}\left(\frac{1000\times8.5^2}{9.806\times1}\right)^{4.75}+1.122\times10^{-6}\times8.5^{9.4}\times\left(\frac{1000}{9.806\times1}\right)^{5.2}\right]^{0.04}$$

$$\Rightarrow D=2.357m$$

۶-۹۲. دو مخزن روغن با اختلاف ارتفاع $5m$ توسط یک لوله فولادی به طول $300\ m$ به یکدیگر متصل می‌شوند. قطر لوله لازم برای انتقال $50\ L/s$ روغن را به دست آورید. $\gamma=8kN/m^3,\mu=0.05Pa.s$

حل:

داریم: $h_f=5m$

$$\nu=\frac{\mu g}{\gamma}=\frac{0.05\times9.806}{8000}=6.13\times10^{-5}m^2/s$$

از جدول کتاب برای فولاد: $\varepsilon = 0.046\,mm$

با استفاده از معادله (6.7.18) داریم:

$$D = 0.66\left(\varepsilon^{1.25}\left[\frac{LQ^2}{gh_f}\right]^{4.75} + \nu Q^{9.4}\left[\frac{L}{gh_f}\right]^{5.2}\right)^{0.04}$$

$$\Rightarrow D = 0.66\times\left((0.046\times10^{-3})^{1.25}\times\left[\frac{300\times0.05^2}{9.806\times5}\right]^{4.75} + (6.13\times10^{-5})\times0.05^{9.4}\times\left[\frac{300}{9.806\times5}\right]^{5.2}\right)^{0.04}$$

$$= 0.212\,m = 212\,mm$$

۹۳-۶.برای انتقال $35\ m^3/s$ با فشار $112\ kpa\ abs$ و دمای $21^\circ C$ در یک معدن از لولهٔ گالوانیزه استفاده می‌شود. افت ارتفاع در $300\ m$ طول لوله را معادل 75 میلیمتر ستون آب بگیرید و قطر لوله لازم را تعیین کنید.

حل:

از جدول کتاب در دمای 21^c برای آب: $\rho = 997.98\ kg/m^3$

برای هوا: $\mu = 18.17\times10^{-6}\,N.s/m^2$

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{112000}{287\times(273+21)} = 1.33\,kg/m^3$$

$$(\rho h_f)_{air} = (\rho h_f)_{H_2O} \Rightarrow h_f = \frac{997.98}{1.33}\times0.075 = 56.277\ m.air$$

از جدول کتاب برای گالوانیزه: $\varepsilon = 0.15mm$

با استفاده از معادله (6.7.18) داریم:

$$D = 0.66\left(\varepsilon^{1.25}\left[\frac{LQ^2}{gh_f}\right]^{4.75} + \nu Q^{9.4}\left[\frac{L}{gh_f}\right]^{5.2}\right)^{0.04}$$

$$\Rightarrow D = 0.66\times\left((0.15\times10^{-3})^{1.25}\times\left[\frac{300\times8.5^2}{56.277\times9.806}\right]^{4.75} + \left(\frac{18.17\times10^{-6}}{1.33}\right)\times8.5^{9.4}\times\left(\frac{300}{56.277\times9.806}\right)^{5.2}\right)^{0.04}$$

$$= 0.868\,m = 868\,mm$$

۹۴-۶. به ازای مقادیر $R=10^5, 10^6, 10^7$ منحنی لوله صاف در دیاگرام مودی را با معادلهٔ (۴-۷-۶) مقایسه کنید.

حل:

برای $R=10^5$:

I) از دیاگرم مودی: $F=0.018$

II) با استفاده از معادله (6.7.4) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{F}} = 0.869\ ln\ (R\sqrt{F}) - 0.8$$

از طریق حدس و خطا: $F=0.018$

به همین ترتیب برای اعداد رینولدز 10^6 و 10^7 نیز به جوابهای یکسان زیر از هر دو طریق می‌رسیم:

$R=10^6 \quad : \quad F=0.01165$

$R=10^7 \quad : \quad F=0.008$

۶-۹۵. منحنی مربوط به $\varepsilon/D=0.0002$ در دیاگرام مودی را با معادله (۶-۷-۷) مقایسه کنید.

حل:

هرگاه با استفاده از معادله $(6.7.7)$ و با قرار دادن $\frac{\varepsilon}{D}=0.0002$ در آن منحنی F را برحسب R ترسیم کنیم دقیقاً روی منحنی مربوط به $\frac{\varepsilon}{D}=0.0002$ در روی دیاگرام مودی منطبق می‌شود.

۶-۹۶. نشان دهید که معادلهٔ (۶-۷-۷) وقتی $\varepsilon=o$ به معادلهٔ (۶-۷-۴)، و وقتی R بسیار بزرگ است به معادلهٔ (۶-۷-۶) ساده می‌شود.

حل:

با توجه به معادله $(6.7.7)$ داریم: $\frac{1}{\sqrt{F}}=-0.869\, ln\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}+\frac{2.523}{R\sqrt{F}}\right)$

$\varepsilon=0$ (I

$$\varepsilon=0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{F}}=-0.869\, ln\left(\frac{2.523}{R\sqrt{F}}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{F}}=-0.869\left(ln\, 2.523-ln\,(R\sqrt{F})\right)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{F}}=0.869\, ln\,(R\sqrt{F})-0.8$$

معادله بدست آمده همان معادله $(6.7.4)$ می‌باشد که برای لوله‌های صاف ذکر شده است.

$R>>$ (II

در این حالت می‌توان از عبارت $\frac{2.523}{R\sqrt{F}}$ صرفنظر نمود.

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{F}}=-0.869\, ln\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right)=-0.869\left[ln\,(\varepsilon/D)-ln\, 3.7\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{F}}=1.14-0.869\, ln\frac{\varepsilon}{D}$$

معادله بدست آمده همان معادله $(6.7.6)$ است که برای ناحیه کاملاً درهم ذکر شده است.

۶-۹۷. ***

۶-۹۸. ***

۶-۹۹. $35\ m^3/min$ هوا در فشار $1\ atm$ و دمای $20^{\circ}C$ در یک انبساط ناگهانی جریان دارد. قطر اولیه $300mm$ و قطر ثانویه $900\ mm$ است. تلفات را برحسب ژول بر نیوتن به دست آورید. اگر از دیفیوزر مخروطی با زاویه رأس 10° استفاده شود، چقدر در ارتفاع (انرژی بر واحد وزن) سیال صرفه جویی می‌شود؟

تلفات موضعی را نیز در نظر بگیرید.

حل:

$$Q = 25\,m^3/min = \frac{5}{12}\,m^3/s$$

برای انبساط ناگهانی با استفاده از معادله $(6.8.1)$ داریم:

$$h_e = k\frac{V_1^2}{2g} = \left[1-\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2\frac{V_1^2}{2g}$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{5/12}{\pi\times 0.3^2/4} = 5.895\ m/s$$

$$\Rightarrow h_e = \left[1-\left(\frac{0.3}{0.9}\right)^2\right]^2\times\frac{5.895^2}{2\times 9.806} = 1.4\,m \qquad 1.4\ j/N$$

برای دیفیوزر مخروطی با استفاده از معادله زیر که در منحنی 6.22 ذکر شده است داریم:

$$H_L = k\frac{(V_1-V_2)^2}{2g}$$

از منحنی 6.22 برای

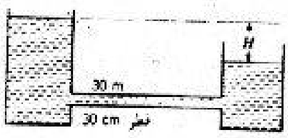
$\frac{D_2}{D_1} = \frac{0.9}{0.3} = 3$ و $\theta = 10^\circ$ داریم: $k = 0.152$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{5/12}{\pi\times 0.9^2/4} = 0.655\ m/s$$

$$\Rightarrow H_L = 0.152\times\frac{(5.895-0.655)^2}{2\times 9.806} = 0.213\,m \quad or \quad 0.213\ j/N$$

$$\Delta h = 1.4 - 0.213 = 1.187\ j/N$$

۱۰۰-۶ در شکل ۳۷-۶ مقدار H برای انتقال آب 15^c با دبی $125\ L/s$ بدست آورید لوله از نوع فولاد تجارتی است تلفات موضعی را نیز در نظر بگیرید.



شکل ۳۷-۶ مسایل ۱۰۰-۶ ، ۱۰۲-۶ و ۱۰۳-۶

حل:

معادله انرژی را بین دو سطح آزاد آب نوشته و ساده می‌کنیم:

$$H = h_f = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{FL}{D}+\sum k\right)$$

$$\sum k = k_{\text{خروجی}} + k_{\text{ورودی}} = 0.5 + 1 = 1.5$$

از جدول کتاب برای آب در دمای 15^c: $\nu = 1.141\times 10^{-6}\,m^2/s$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.125}{\pi\times 0.3^2/4} = 1.77\ m/s$$

$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.77\times 0.3}{1.141\times 10^{-6}} = 4.654\times 10^5$ جریان درهم:

از جدول کتاب برای فولاد: $\varepsilon = 0.046\,mm$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.046}{200}=1.533\times10^{-6}$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.0151$ بدست می‌آید.

$$\Rightarrow H=\frac{1.77^2}{2\times9.806}\times\left(\frac{0.0151\times30}{0.3}+1.5\right)=0.481\ m$$

۱۰۱-۶. در مسألهٔ ۲۸-۱۶اگر یک شیر کشویی در خط لوله قرار داده شود، دبی چقدر خواهد شد؟ لوله صاف است و لبهٔ ورودی آن گرد می‌باشد. $\mu=0.001\,Pa.s$ از دیاگرام مودی استفاده کنید. مسأله را به روش تکراری و بااستفاده از معادلات (۶-۸-۶) تا (۹-۸-۶) حل کنید.

حل:

$$\nu=\mu/\rho=\mu g/\gamma=0.001\times9.806/8600=1.14\times10^{-6}\ m^2/s$$

داریم:

$$k=\Sigma k=k_{\text{ورودی}},k_{\text{خروجی}},k_{\text{شیر}}=0.01+1+10=11.01$$

$$R_0=1.784\ \nu/D=1.784\times\frac{1.14\times10^{-6}}{0.006}=3.3896\times10^{-4}$$

$$R_1=\frac{\varepsilon}{3.7D}=0$$

$$R_2=-0.965D^2=-0.965\times0.006^2=-3.474\times10^{-5}$$

$$R_3=\frac{gDh_f}{L}=\frac{9.806\times0.006\times7}{5}=0.08237$$

$$R_4=\frac{kD}{L}=\frac{11.01\times0.006}{5}=0.013212$$

$$R_5=\frac{4}{\pi D\nu}=\frac{4}{\pi\times0.006\times1.14\times10^{-6}}=186146133$$

$$R_6=5.74\qquad R_7=1.325$$

$$Y=\sqrt{\frac{R_3}{1+R_4/F}}=\sqrt{\frac{0.08237}{1+0.013212/F}}$$

$$Q=R_2Y\ln\left(R_1+\frac{R_0}{Y}\right)=-3.474\times10^{-5}\times Y\times\ln\left(0+\frac{3.3896\times10^{-4}}{Y}\right)$$

$$R=R_5Q=186146133\,Q$$

$$F=\frac{R_7}{\left[\ln\left(R_1+R_6/R^{0.9}\right)\right]^2}=\frac{1.325}{\left[\ln\left(0+5.74/R^{0.9}\right)\right]^2}$$

حدس $F\xrightarrow{1}Y\xrightarrow{2}Q\xrightarrow{3}R\xrightarrow{4}F$

حدس و خطا تا زمانی که f و Q تا چهار رقم با معنی تغییر نکنند ادامه می‌یابد

در نهایت داریم: $Q=5.4723\times10^{-5}m^3/s=54.723cm^3/s\ ,\ F=0.03075$

۱۰۲-۶. در شکل ۳۷-۶ روغن باچگالی $s=0.8$ و لزجت $\mu=0.007\,Pa.s$ در لوله جریان دارد. $H=3m$ است و لوله صاف می‌باشد. دبی جریان را تعیین کنید. تلفات موضعی را نیز به حساب آورید.

حل:

معادله انرژی را بین دو سطح آزاد نوشته و ساده می‌کنیم:

$$H=h_f=\frac{V^2}{2g}\left(\frac{FL}{D}+\sum k\right)$$

$$\sum k=k_{\text{خروجی}}+k_{\text{ورودی}}=0.5+1=1.5$$

$$\Rightarrow 3=\frac{V^2}{2\times9.806}\times\left[\frac{F\times30}{0.3}+1.5\right]\Rightarrow V^2=\frac{58.836}{1.5+100F}\quad(1)$$

از جدول کتاب برای آب در دمای 15^c: $\rho_w=999.1\,kg/m^3$

$$\rho=s\rho_w=0.8\times999.1=799.28\,kg/m^3$$

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{799.28\times V\times0.3}{0.007}=34255V\quad(2)$$

مسئله به طریق حدس و خطایی حل می‌شود:

$$\text{حدس}\ F\xrightarrow{(1)}V\xrightarrow{(2)}Re\ ,\frac{\varepsilon}{D}\xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}}F$$

حدس و خطا تا زمانی که F بدست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد

در نهایت داریم: $V=4.322m/s\ ,F=0.0165$

$$Q=AV=\frac{\pi\times0.3^2}{4}\times4.322=0.306m^3/s=306\,litr/s$$

۱۰۳-۶. در مسألهٔ قبل یک شیر در لوله نصب می‌شود و طوری تنظیم می‌شود که دبی جریان به نصف برسد. مقدار ضریب افت شیر یعنی k چقدر است؟ در این حالت طول معادل لوله برای شیر چقدر است ؟

حل:

با استفاده از مسئله قبل داریم:

$$Q'=\frac{Q}{2}\Rightarrow V'=\frac{V}{2}=\frac{4.322}{2}=2.161\,m/s$$

$$Re=34255\times2.161=74026$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.019$ بدست می‌آید.

$$H=h_f=\frac{V^2}{2g}\left(\frac{FL}{D}+\sum k\right)$$

$$\Rightarrow 3=\frac{2.161^2}{2\times9.806}\times\left(\frac{0.019\times30}{0.3}+1.5+k\right)\quad\Rightarrow k=9.2$$

$$L_e=\frac{kD}{F}=\frac{9.2\times0.3}{0.019}=145\,m$$

۱۰۴-۶. یک خط لوله فولادی به طول $1500\ m$ و قطر $60\ cm$ دو مخزن را به یکدیگر متصل می‌کند. در خط لوله سه زانویی استاندارد و یک شیر بشقابی وجود دارد. لبهٔ ورودی لوله به داخل مخزن فرو رفته است. اختلاف ارتفاع دو مخزن برای دبی $565\ L/s$ آب $20^\circ C$ چقدر است؟

حل:

معادله انرژی را بین دو نقطه در سطوح آزاد آب در دو مخزن نوشته و ساده می‌کنیم:

$$H = h_f = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{FL}{D} + \sum k\right)$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.565}{\pi \times 0.6^2/4} = 1.998\ m/s$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{2 \times 0.6}{1.007 \times 10^{-6}} = 1.192 \times 10^6$$ جریان درهم:

از جدول کتاب برای فولاد: $\varepsilon = 0.046\,mm$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046}{600} = 7.67 \times 10^{-5}$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.013$ بدست می‌آید.

$$\sum k = 3k_{\text{زانویی}} + k_{\text{شیر}} + k_{\text{ورودی}} + k_{\text{خروجی}} = 3\times 0.9 + 10 + 1 + 1 = 14.7$$

$$\Rightarrow H = \frac{1.998^2}{2 \times 9.806} \times \left[\frac{0.013 \times 1500}{0.6} + 14.7\right] = 9.61m$$

۱۰۵-۶. در مسألهٔ قبل اگر اختلاف ارتفاع دو مخزن $12\ m$ باشد، دبی چقدر است؟

حل:

با توجه به مسئله قبل داریم:

$$H = h_f = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{FL}{D} + \sum k\right)$$

$$12 = \frac{V^2}{2 \times 9.806} \times \left(\frac{F \times 1500}{0.6} + 14.7\right) \Rightarrow V^2 = \frac{235.344}{2500F + 14.7} \qquad (1)$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{V \times 0.6}{1.007 \times 10^{-6}} = 2.979 \times 10^5\ V \qquad (2)$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046}{600} = 7.67 \times 10^{-5}$$

مسئله از طریق حدس و خطایی حل می‌شود:

$$F_{\text{حدس}} \xrightarrow{(1)} V \xrightarrow{(2)} Re\ ,\ \frac{\varepsilon}{D} \xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}} F$$

حدس و خطا تا زمانی که F به دست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد.

در نهایت داریم: $V=2.251m/s\ , F=0.0127$

$$Q = AV = \frac{\pi \times 0.6^2}{4} \times 2.251 = 0.6365\, m^3/s = 636.5\, litr$$

۶-۱۰۶. برای انتقال $200\ L/s$ آب $20\mathring{C}$ به مسافت $5km$ با افت ارتفاع $4m$ از لوله فولادی تجارتی استفاده می‌شود. قطر لوله را تعیین کنید. این لوله دو مخزن را به یکدیگر متصل میکند. ابتدای لوله به داخل مخزن اول فرو رفته است و انتهای آن در مخزن دوم غوطه ور است. در مسیر لوله چهار زانویی استاندارد و یک بشقابی وجود دارد.

حل:

$$H_F = 4m$$

$$H_f = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{FL}{D} + \sum k\right) = 4 \quad , Q = AV \Rightarrow V = \frac{Q}{A} = \frac{0.2}{\pi D^2/4} = \frac{0.8}{\pi D^2}$$

$$\sum k = k_{\text{ورودی}} + k_{\text{خروجی}} + 4k_{\text{زانویی}} = 1+1+4\times 0.9 = 5.6$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{F\times 5000}{D} + 1 + 1 + 4\times 0.9 + 10\right] \times \frac{\left(0.8/(\pi D^2)\right)}{2\times 9.806} = 4$$

$$\Rightarrow F = 0.242D^5 - 0.00312D \qquad (I)$$

از طرف دیگر برای محاسبه ضریب اصطکاک F عدد رینولدز جریان را محاسبه می‌کنیم.

از جدول کتاب برای آب در 20^{c} $\nu = 1.007\times 10^{-6} m^2/s$

$$Re = \frac{VD}{V} = \frac{0.255/D^2 \times D}{1.007\times 10^{-6}} = \frac{2.532\times 10^5}{D} \qquad (II)$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046\times 10^{-3}}{D} \qquad (III)$$

بنابراین محاسبات باید از طریق حدس و خطا صورت می‌گیرد.

روش اول:

حدس $D \Rightarrow$ (I) محاسبهٔ F از رابطه

$\Rightarrow$ (III),(II) از رابطهٔ $\frac{\varepsilon}{D}$, Re محاسبه $\Rightarrow$ محاسبهٔ F از دیاگرام مودی یا کلبورک

اگر دو تا F برابر بودند حدسمان درست است در غیر اینصورت حدس دیگری می‌زنیم

روش دوم:

$$F_{\text{حدس}} \xrightarrow{(I)} D \xrightarrow{(II)} Re\ , \frac{\varepsilon}{D} \xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}} F$$

حدس و خطا تا زمانی که F به دست آمده با F حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد.

در نهایت داریم $F = 0.0145\ , D = 0.584m = 584mm$

۱۰۷-۶. طول معادل لوله با قطر $50\ mm$ و ضریب اصطکاک $F=0.022$ را برای اتصالات زیر بدست آورید

الف)ورودی تورفته ب) انبساط ناگهانی $5cm$ به $10cm$ ج) یک شیر بشقابی ویک سه راهی استاندارد.

حل:

الف) از جدول کتاب برای ورودی تو رفته: $k=1$

$$L_e=\frac{kD}{F}=\frac{1\times 0.05}{0.022}=2.27\,m$$

ب) برای انبساط ناگهانی با استفاده از معادله (6.8.2) داریم:

$$k=\left[1-\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2=\left(1-\left(\frac{5}{10}\right)^2\right)^2=0.5625$$

$$L_e=\frac{kD}{F}=\frac{0.5625\times 0.05}{0.022}=1.28\,m$$

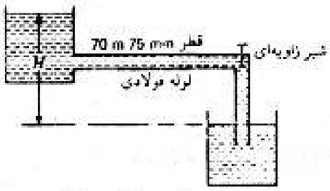
ج) از جدول کتاب داریم: شیر بشقابی: $k_1=10$

سه راهی استاندارد: $k_2=1.8$

$$k=k_1+k_2=10+1.8=11.8$$

$$L_e=\frac{kD}{F}=\frac{11.8\times 0.05}{0.022}=26.8$$

۱۰۸-۶. در شکل ۳۸-۶، $10\ L/s$ روغن با لزجت $0.01\ Pa.s$ و وزن مخصوص $9000N/m\ 35\ m^3$ جریان دارد. شیر زاویه‌ای کاملاً باز است. H را تعیین کنید.



شکل ۳۸-۶ مسائل ۱۰۸-۶ تا ۱۱۰-۶

حل:

معادله انرژی را بین دو سطح آزاد مایع نوشته و ساده می‌کنیم.

$$H=h_f=\frac{V^2}{2g}\left(\frac{FL}{D}+\sum k\right)$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.01}{\pi\times 0.075^2/4}=2.264\ m/s$$

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{9000/9.806\times 2.264\times 0.075}{0.01}=15585$$ جریان درهم:

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.046}{75}=6.133\times 10^{-4}$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.03$ بدست می‌آید.

$\sum k = k_{\text{ورودی}} + k_{\text{خروجی}} + k_{\text{شیر}} = 0.5+1+5=6.5$

$$\Rightarrow H = \frac{2.264^2}{2\times 9.806}\left[\frac{0.03\times 70}{0.075}+6.5\right]=9m$$

۱۰۹-۶. در مسألهٔ قبل با همان ارتفاع، شیر زاویه‌ای طوری تنظیم می‌شود که دبی جریان به $8\ L/s$ برسد. ضریب افت شیر را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از مسئله قبل داریم:

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.008}{\pi\times 0.075^2/4}=1.81\ m/s$$

جریان درهم:

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{9000/9.806\times 1.81\times 0.075}{0.01}=12460$$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.046}{75}=6.133\times 10^{-4}$$

با استفاده از دیاگرام مودی یا معادله کلبورک $F=0.0301$ بدست می‌آید.

$$H=\frac{V^2}{2g}\left(\frac{FL}{D}+\sum k\right)$$

$$\Rightarrow 9=\frac{1.81^2}{2\times 9.806}\times\left(\frac{0.0301\times 70}{0.075}+0.5+1+k_v\right)\quad\Rightarrow k_v=24.3$$

۱۱۰-۶. در شکل ۳۸-۶ سیال، آب $25^{\circ}C$ می‌باشد و $H=8\ m$ است. دبی جریان را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از مسئله ۱۰۶ داریم:

$$H=h_f=\frac{V^2}{2g}\left(\frac{FL}{D}+\sum k\right)$$

$$\sum k=6.5$$

از جدول کتاب برای آب در دمای 25^{c}: $\nu=0.897\times 10^{-6}m^2/s$

$$8=\frac{V^2}{2\times 9.806}\times\left[\frac{F\times 70}{0.075}+6.5\right]\Rightarrow V^2=\frac{156.896}{933.33f+6.5}\qquad (1)$$

$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{V\times 0.075}{0.897\times 10^{-6}}=83612\ V\qquad (2)$$

مسئله به طریق حدس و خطایی حل می‌شود:

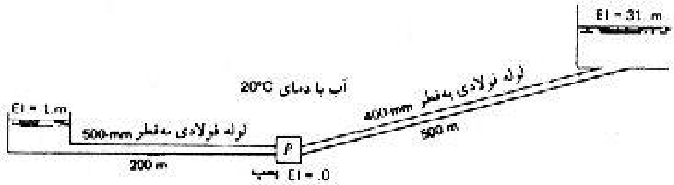
$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.046}{75}=6.133\times 10^{-4}$$

$$\text{حدس}\ F\xrightarrow{(1)}V\xrightarrow{(2)}Re\ ,\frac{\varepsilon}{D}\xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}}F$$

در نهایت داریم: $V=2.53m/s\ ,F=0.0193$

$$Q=AV=\frac{\pi\times 0.075^2}{4}\times 2.53=0.0112m^3/s=11.2\,litr/s$$

۱۱۱-۶. در شکل ۳۹-۶ منحنی مشخصه پمپ با رابطهٔ $H=40-24Q$ بیان می‌شود. در این رابطه H برحسب متر تلفات موضعی را در طول لوله‌ها منظور کرده‌ایم. اگر راندمان سیستم پمپاژ 72 درصد باشد، توان لازم چقدر است؟ برای عدم وقوع کاویتاسیون حداقل فشار در دهانه مکش پمپ باید $50kPa\ abs$ باشد. حداکثر دبی ممکن چقدر است؟ توان لازم برای انتقال این دبی چقدر است؟



شکل ۳۹-۶

حل:

نقطه 1 را در روی سطح آزاد آب در مخزن پایین و نقطه 2 را روی سطح آزاد آب در مخزن بالا در نظر می‌گیریم.

معادله انرژی را بین نقاط 1 و 2 می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+H_P=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_2+H_f$$

$$P_1=P_2\ \ ,\ V_1=V_2=0$$

$$\Rightarrow z_1+H_p=z_2+H_F$$

$$H_F=H_{F_1}+H_{F_2}=\frac{F_1L_1}{D_1}\ \frac{V_1^2}{2y}+\frac{F_2L_2}{D_2}\ \frac{V_2^2}{2g}$$

$$Q=A_1V_1=A_2V_2$$

$$\Rightarrow V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{Q}{\pi\times0.5^2/4}=5.093Q\qquad,\qquad V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{Q}{\pi\times0.4^2/4}=7.958Q$$

$$\Rightarrow 1+(40-24Q^2)=31+\frac{F_1\times200}{0.5}\times\frac{(5.093Q)^2}{2\times9.806}+\frac{F_2\times500}{0.4}\times\frac{(7.958Q)^2}{2\times9.806}$$

پس از ساده کردن: $(529.04F_1+4036.42F_2)Q=10\qquad(I)$

برای محاسبه ضرایب اصطکاک باید اعداد رینولدز را محاسبه کنیم:

از جدول کتاب برای آب دمای 20^c $\quad v=1.007\times10^{-6}m^2/s$

$$Re_1=\frac{V_1D_1}{V}=\frac{(5.093Q)\times0.5}{1.007\times10^{-6}}=2.5288\times10^6Q$$

$$Re_2=\frac{V_2D_2}{V}=\frac{(7.958Q)\times0.4}{1.007\times10^{-6}}=3.1611\times10^6Q\qquad(II)$$

از جدول کتاب برای فولاد: $\varepsilon=0.046mm$

$$(\varepsilon/D)_1=\frac{0.046}{500}=9.2\times10^{-5}\quad,\quad(\varepsilon/D)_2=\frac{0.046}{400}=11.5\times10^{-5}$$

با توجه به اینکه مقادیر Q و در نتیجه V_1 و V_2 مجهول می‌باشد و برای محاسبه ضرایب اصطکاک نیاز به مقدار Q داریم بنابراین محاسبات به صورت حدس و خطایی صورت می‌گیرد.

با توجه به مقادیر به دست آمده برای اعداد رینولدز ابتدا فرض می‌کنیم جریان درهم باشد و داریم:

روش اول:

$$Q \xrightarrow{(II)} Re_1, Re_2, (\frac{\varepsilon}{D})_1, (\frac{\varepsilon}{D})_2 \xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}} F_1, F_2 \xrightarrow{(I)} Q$$

البته چون محدوده Q را نمی‌دانیم روش بالا روش مناسبی نیست.

روش دوم: با توجه به اینکه محدوده‌های عددی مقادیر F_1 و F_2 معلوم می‌باشند محاسبات را از طریق حدس مقادیری برای F_1 و F_2 شروع می‌کنیم:

$$\text{حدس } F_1, F_2 \xrightarrow{(I)} Q \xrightarrow{(II)} Re_1, Re_2, (\frac{\varepsilon}{D})_1, (\frac{\varepsilon}{D})_2 \xrightarrow{\text{دیاگرام مودی}} F_1, F_2$$

روش سوم: در این روش فرض می‌کنیم جریان زبر کاملاً درهم می‌باشد و در نتیجه ضرایب اصطکاک فقط تابع (ε/D) ها خواهند بود و مستقل از اعداد رینولدز می‌شوند و داریم:

اگر جریانها کاملاً درهم نباشند مقادیر بدست آمده جواب نمی‌باشند ولی می توانیم از تلفیق روشهای ۲ و ۳ استفاده کنیم یعنی در قسمت آخر روش سوم اگر جریان کاملاً در هم نبود با توجه به اعداد رینولدز F_1 و F_2 را به دست می‌آوریم و حدس و خطا را ادامه می‌دهیم ما محاسبات را به این صورت ادامه می‌دهیم.

با فرض آنکه جریان کاملاً درهم زبر باشد داریم: $(\varepsilon/D)_1 = 9.2\times10^{-5} \overset{\text{دیاگرام مودی}}{\Rightarrow} F_1 = 0.0118$

$(\varepsilon/D)_2 = 11.5\times10^{-5} \overset{\text{دیاگرام مودی}}{\Rightarrow} F_2 = 0.0123$

(I) در رابطه F_2 و F_1 با جاگذاری $\Rightarrow Q = 0.354 \ m^3/s$

(II) در رابطه‌های Q با جاگذاری $\Rightarrow Re_1 = 809952 \ , \ Re_2 = 1119029$

اگر به دیاگرام مودی مراجعه کنیم مشاهده می‌کنیم که جریان زبر کاملاً درهم نیست بنابراین باید محاسبات را ادامه دهیم.

با توجه به مقادیر بدست آمده برای Re_1 و Re_2 و نیز $(\varepsilon/D)_1$ و $(\varepsilon/D)_2$ با استفاده از دیاگرام مودی یا رابطه کلبورک داریم:

$F_1 = 0.0136 \ , \ F_2 = 0.0135$

(I) در رابطه F_2 و F_1 با جاگذاری $Q = 0.342 \ m^3/s$

اگر محاسبات تکرار شود مقدار Q تغییر نمی‌کند پس جواب نهایی $Q=0.324 m^3/s$ می‌باشد.

ب) برای محاسبه توان پمپ داریم:

$$\text{توان پمپ}: P = \frac{\gamma Q H_P}{\eta}$$

$$H_P = 40 - 24Q^2 = 40 - 24 \times (0.342)^2 = 37.193\,m$$

$$\Rightarrow P = \frac{9789 \times 0.342 \times 37.193}{0.72} = 172939\,W \approx 173\,kW$$

ج) نقطه 3 را در روی پمپ در نظر می‌گیریم و معادله انرژی را بین نقاط (1) و (3) می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_2 + H_F$$

$$V_1 = 0 \quad , \quad z_2 = 0 \quad , \quad H_F = \frac{FL}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{101325}{9789} + 1 = \frac{50000}{9789} + \frac{V^2}{2 \times 9.806} + \frac{F \times 200}{0.5} \times \frac{V^2}{2 \times 9.806}$$

$$\text{پس از ساده کردن} \Rightarrow V^2 = \frac{1}{3.267F + 0.008167} \qquad (I)$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{V \times 0.5}{1.007 \times 10^{-6}} = 4.965 \times 10^5 V \qquad (II)$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046}{500} = 9.2 \times 10^{-5}$$

مانند قسمت الف باید محاسبات را به صورت حدس و خطا انجام دهیم:

$$\text{فرض جریان کاملاً درهم زبر} \quad \varepsilon/D = 9.2 \times 10^{-5} \Rightarrow F = 0.0118 \Rightarrow V = 4.627\,m/s \Rightarrow Re = 2.297 \times 10^6$$

با توجه به دیاگرام مودی مشاهده می‌شود که جریان کاملاً درهم نیست بنابراین:

$$\text{از دیاگرام مودی یا رابطه کلبورک} \rightarrow F = 0.013 \rightarrow V = 4.444\,m/s$$

$$Q = AV = \frac{\pi \times 0.5^2}{4} \times 4.444 = 0.873\,m^3/s = 873\,L/s$$

د)

$$\text{توان پمپ}\ P = \frac{\gamma Q H_P}{\eta}$$

$$H_P = 40 - 24Q^2 = 40 - 24 \times (0.873)^2 = 21.709\,m$$

$$P = \frac{9789 \times 0.873 \times 21.709}{0.72} = 257668\,W \simeq 258\,kW$$

۷ جریانهای خارجی

۷-۱. نیروی دراگ وارد به صفحه‌ای که به موازات جریان است، ناشی از چیست؟ برای حالتی که صفحه عمود بر جریان است، چطور؟

حل:

درحالتی که صفحه به موازات جریان است نیروی دراگ ناشی از تنش برشی و درحالتی که صفحه عمود بر جریان است نیروی دراگ ناشی از تنش فشاری می‌باشد.

۷-۲. توزیع سرعت در لایهٔ مرزی با معادلهٔ $u/U=3(y/\delta)-2(y/\delta)^2$ داده شده است. نشان دهید که ضخامت جابه جایی با معادلهٔ $\delta_1=\delta/6$ داده می‌شود.

حل:

با استفاده از معادله (7.2.1) داریم:

$$u\delta_1=\int_0^\delta (U-u)dy \Rightarrow \delta_1=\int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

از تغییر متغیر $\eta=\frac{y}{\delta}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{u}{U}=3(y/\delta)-2(y/\delta)^2=3\eta-2\eta^2$$

$$\frac{y}{\delta}=\eta \Rightarrow y=\delta\eta \Rightarrow dy=\delta d\eta$$

$$\Rightarrow \delta_1=\int_0^1 (1-3\eta+2\eta^2)\delta dy=\delta\left(\eta-\frac{3\eta^2}{2}+\frac{2\eta^3}{3}\right)_0^1 \Rightarrow \delta_1=\frac{\delta}{6}$$

۷-۳. توزیع سرعت در لایهٔ مرزی آرام برای جریان دو بعدی روی یک صفحهٔ تخت با معادلهٔ $u/U=sin(\pi y/2\delta)$ داده شده است. معادله‌ای برای ضخامت لایهٔ مرزی به دست آورید. معادله‌ای برای تنش برشی روی صفحه به دست آورید.

$$\frac{u}{U}=\sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)\Rightarrow\frac{u}{U}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right),\eta=\frac{y}{\delta}$$

$$\tau_0=\rho\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u(U-u)dy$$

$$\Rightarrow\tau_0=\rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\int_0^1\left(1-\frac{u}{U}\right)\frac{u}{U}d\eta=\rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\int_0^1\left(1-\sin\frac{\pi}{2}\eta\right)\sin\frac{\pi}{2}\eta\, d\eta$$

$$\int_0^1\left(1-\sin\frac{\pi}{2}\eta\right)\sin\frac{\pi}{2}\eta\, d\eta=\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}\eta-\frac{1}{2}(1-\cos\pi\eta)\right)d\eta$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\eta-\frac{\eta}{2}+\frac{1}{2\pi}\sin\pi\eta\,\Big]_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}=0.1366$$

$$\Rightarrow\tau_0=0.1366\rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\qquad(I)$$

از طرفی روی مرز داریم:

$$\tau_0=\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\mu\frac{U}{\delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\frac{\pi}{2}\eta\right)\Big|_{\eta=0}=\mu\frac{U}{\delta}\times\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\eta\Big|_{\eta=0}=\mu\frac{U}{\delta}\times\frac{\pi}{2}\qquad(II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow 0.1366\rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}=\mu\frac{U}{\delta}\times\frac{\pi}{2}\Rightarrow\delta\, d\delta=11.497\frac{\mu\, dx}{\rho U}$

$$\int\delta\, d\delta=\int 11.497\frac{\mu\, dx}{\rho U}\Rightarrow\frac{\delta^2}{2}=11.497\frac{\mu}{\rho U}x+c_1$$

با توجه به شرایط: $x=0\Rightarrow\delta=0\Rightarrow c_1=0$

$$\Rightarrow\frac{\delta^2}{2}=11.497\times\frac{x^2}{\frac{\rho Ux}{\mu}}\Rightarrow\frac{\delta}{x}=\frac{4.8}{\sqrt{R_x}}\Rightarrow\delta=\frac{4.8x}{\sqrt{R_x}}$$

با جاگذاری در رابطه (II):

$$\tau_0=\mu\times\frac{\pi U}{2}\times\frac{1}{\frac{4.79x}{\sqrt{\frac{\rho Ux}{\mu}}}}=0.327\sqrt{\frac{\mu\rho U^3}{x}}$$

۷-۴. برای مسائل ۷-۳ و ۷-۲ ضریب دراگ را به دست آورده، با یکدیگر مقایسه کنید.

حل:

برای مسئله ۷-۲ داریم:

$$\tau_0=\rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\int_0^1(1-3\eta+2\eta^2)(3\eta-2\eta^2)d\eta$$

$$\int_0^1(1-3\eta+2\eta^2)(3\eta-2\eta^2)d\eta=\int_0^1(3\eta-9\eta^2+6\eta^3-2\eta^2+6\eta^3-4\eta^4)d\eta=\frac{3}{2}\eta^2-\frac{11}{3}\eta^3+3\eta^4-\frac{4}{5}\eta^5\Big]_0^1=0.0333$$

$$\Rightarrow\tau_0=0.0333\rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\qquad(I)$$

و نیز داریم:

$$\tau_0=\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\mu\frac{U}{8}\frac{\partial}{\partial\eta}(3\eta-2\eta^2)\Big|_{\eta=0}$$

$$\Rightarrow\tau_0=\frac{3\mu U}{\delta}\quad (II)$$

$$\text{(II) و (I) روابط}\Rightarrow 0.0333\rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}=\frac{3\mu U}{\delta}\Rightarrow\delta d\delta=90.09\mu U dx\Rightarrow\frac{\delta}{x}=\frac{13.42}{\sqrt{R_x}}$$

$$\text{(II) با جاگذاری در رابطه}\Rightarrow\tau_0=0.2235\sqrt{\frac{\mu\rho U^3}{x}}$$

$$D=\int_0^l\tau_0 dx=\int_0^l 0.2235\sqrt{\frac{\mu\rho U^3}{x}}\,dx=0.4469\sqrt{\mu\rho U^2 l}$$

$$\text{از طرفی}: D=C_D\frac{\rho U^2}{2}l\Rightarrow C_D=\frac{D}{\rho U^2 l/2}=\frac{0.4469\sqrt{\mu\rho U^2 l}}{\rho U^2 l/2}=\frac{0.896}{\sqrt{\rho U^2 l/\mu}}$$

$$\Rightarrow C_D=\frac{0.896}{\sqrt{R_l}}$$

برای مسئله ۳-۶ داریم:

$$D=\int_0^l\tau_0 dx=\int_0^l 0.327\sqrt{\mu\rho U^3}\,x^{-\frac{1}{2}}dx=0.327\sqrt{\mu\rho U^3}\times 2\sqrt{x}\,\Big]_0^l=0.654\sqrt{\mu\rho U^2}\,l$$

$$\text{از طرفی} D=C_D\frac{\rho U^2}{2}l\Rightarrow C_D=\frac{D}{\rho U^2 l/2}=\frac{0.654\sqrt{\mu\rho U^3 l}}{\rho U^2 l/2}=\frac{1.308}{\sqrt{\rho U l/\mu}}=\frac{1.308}{\sqrt{R_l}}$$

۵-۷. ضخامت لایهٔ مرزی در هم را با استفاده از قانون نمایی $u/U=(y/\delta)^{1/9}$ و رابطهٔ $f=0.185/R^{1/5}$ به دست آورید $(\tau_0=\rho f V^2/8)$

حل:

با داشتن پروفیل سرعت به صورت $\frac{u}{U}=(\frac{y}{\delta})^{1/9}$ ابتدا باید سرعت متوسط V را برای لوله‌ای به شعاع r_0 تعیین کنیم.

داریم:

$$V(\pi r_0^2)=\int_0^{r_0}u\,2\pi r dr\quad,\qquad\frac{u}{U_{max}}=\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/9}$$

$$\Rightarrow V(\pi r_0^2)=\int_0^{r_0}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/9}U_{max}2\pi(r_0-y)dy=\frac{2\pi U_{max}}{r_0^{1/9}}\int_0^{r_0}\left(r_0 y^{1/9}-y^{10/9}\right)dy=\frac{2\pi U_{max}}{r_0^{1/9}}\left(r_0\times\frac{9}{10}y^{10/9}-\frac{9}{19}y^{19/9}\right)\Big]_0^{r_0}$$

$$=2\pi U_{max}\times\frac{81}{190}r_0^2=\frac{\pi U_{max}r_0^2}{1.1728}\Rightarrow V=\frac{U_{max}}{1.1728}$$

$\tau_0 = \frac{\rho f V^2}{8}, f = \frac{0.185}{R^{1/5}}$:داریم

$$R = \frac{2r_0 V\rho}{\mu} = 2r_0\left(\frac{U_{max}}{1.1728}\right)\rho/\mu = 1.7053\,\frac{\rho U_{max} r_0}{\mu}$$

$$\Rightarrow f = \frac{0.185}{\left(1.7053\frac{\rho U_{max} r_0}{\mu}\right)^{1/5}} = \frac{0.16627}{\left(\frac{\rho U_{max} r_0}{\mu}\right)^{1/5}}$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho\left(\frac{U_{max}}{1.1728}\right)^2\left[\frac{0.16627}{\left(\rho U_{max} r_0/\mu\right)^{1/5}}\right]/8 = 0.01511\rho U_{max}^2\left(\frac{\mu}{\rho U_{max} r_0}\right)^{1/5}$$

برای صفحه تخت تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم:

$$U_{max} \sim U \quad , \quad r_0 \sim \delta$$

$$\Rightarrow \tau_0 = 0.01511\rho U^2\left(\frac{\mu}{\rho U\delta}\right)^{1/5} \quad (I)$$

$$\tau_0 = \rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\int_0^1\left(1-\eta^{1/9}\right)\eta^{1/9}\,d\eta$$

از طرفی داریم:

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\int_0^1\left(\eta^{1/9}-\eta^{2/9}\right)d\eta = \rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\left(\frac{9}{10}\eta^{10/9}-\frac{9}{11}\eta^{11/9}\right)\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho U^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\times\frac{9}{110} \quad (II)$$

روابط (I) و (II) $\Rightarrow \delta^{1/5}\,d\delta = 0.1847\left(\frac{\mu}{\rho U}\right)^{1/5}dx \Rightarrow \int\delta^{1/5}d\delta = \int 0.1847\left(\frac{\mu}{\rho U}\right)^{1/5}dx$

$$\Rightarrow \delta^{6/5} = 0.2215\left(\frac{\mu}{\rho U}\right)^{1/5}x \Rightarrow \delta = \frac{0.285x}{R_x^{1/6}}$$

۶-۷. هوا با دمای $20^\circ C$ و فشار $100kpa\ abs$ با سرعت $150km/h$ بر روی یک صفحهٔ صاف جریان می‌یابد. درچه فاصله‌ای از ابتدای صفحه، ضخامت لایهٔ مرزی به $8mm$ می‌رسد.

حل:

برای هوا در 20^c داریم: $\nu = 1.6\times10^{-5}m^2/s$

در فشار $100kPa$: $\nu = 1.6\times10^{-5}\times\frac{1.01325}{1} = 1.62\times10^{-5}$

چون نمی‌توانیم عدد رینولدز را محاسبه کنیم بنابراین رژیم جریان را نمی‌دانیم

ابتدا فرض می‌کنیم جریان آرام باشد و از معادله (7.2.1) استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\delta}{x}=\frac{4.65}{\sqrt{R_x}}\Rightarrow\frac{\delta}{x}=4.65\sqrt{\frac{\nu}{ux}}\Rightarrow x=\frac{u\delta^2}{21.62\nu}$$

$$\Rightarrow x=\frac{0.008^2\times150/3.6}{21.62\times1.62\times10^{-5}}=7.614m$$

$$R_x=\frac{ux}{\nu}=\frac{150/.06\times7.614}{1.62\times10_{-5}}=1.9583\times10^7>2000$$

بنابراین فرضمان مبنی بر آرام بودن جریان نادرست می‌باشد

فرض می‌کنیم جریان درهم باشد با استفاده از معادله (7.2.13) داریم:

$$\delta=0.37\left(\frac{\nu}{u}\right)^{1/5}x^{4/5}\Rightarrow0.008=0.37\times\left(\frac{1.62\times10^{-5}}{150/3.6}\right)^{1/5}x^{4/5}$$

$$\Rightarrow x=0.332m$$

$$R_x=\frac{ux}{\nu}=\frac{150/3.6\times0.332}{1.62\times10^{-5}}=8.539\times10^5$$

بنا بر این جریان درهم بوده و فرضمان صحیح است.

۷-۷. یک کشتی هوایی به طول $100\ m$ و قطر متوسط $20\ m$ با سرعت $130\ km/h$ حرکت می‌کند. فشار هوا $90\ kpa\ abs$ و دمای آن $25^\circ C$ است. دراگ اصطکاکی وارد به کشتی هوایی را به دست آورید.

حل:

برای هوا در 25^c $\mu=1.95\times10^{-5}\ Ns/m^2$

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{90\times10^3}{287\times298}=1.0523kg/m^3$$

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{1.0523\times130/3.6\times100}{1.95\times10^{-5}}=1.9487\times10^8$$

با استفاده از معادله (7.2.19) داریم:

$$C_D=\frac{0.455}{(log\ Re)^{2.58}}=\frac{0.455}{[log(1.9487\times10^8)]^{2.58}}=0.001942$$

کشتی را صفحه‌ای به ابعاد $L=100m$ و $b=2\pi r$ در نظر می‌گیریم.

$$D=C_D\rho A\frac{V^2}{2}=0.001942\times1.0523\times100\times\pi\times20\times\frac{(130/3.6)^2}{2}=8372N$$

۸-۷. در بخشی از تونل باد که در آن جریان دارای سرعت ثابت است، دیواره‌های تونل را به صورت واگرا می‌سازند تا کاهش سطح مقطع ناشی از رشد لایهٔ مرزی جبران شود. دیواره‌های مسطح تونل را باید تحت چه زاویه‌ای قرار داد تا در مقاطعی که فاصله شان از ابتدای دیواره بیش از $24\ cm$ است، ضخامت جابه جایی به مقطع با سرعت ثابت پیشروی نکند. از اطلاعات مسأله ۶-۷ استفاده کنید.

حل:

$$tg\,\alpha = \frac{d\delta}{dx}\Big|_{x=0.24}$$

با توجه به مساله ۶-۶ در فاصله 24 سانتی‌متری از لبه حمله جریان درهم است و از معادله (7.2.13) برای لایه مرزی درهم داریم:

$$\delta = 0.37\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} x^{4/5}$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{4}{5}\times 0.37\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} x^{-1/5}\Big|_{x=0.24} = \frac{4}{5}\times 0.37\times\left(\frac{1.7\times10^{-5}}{150/3.6}\right)^{1/5}\times(0.24)^{-1/5} = 0.020767 \Rightarrow \alpha = 0.02076$$

۷-۹. هواپیمای کوچکی که اعلان تبلیغاتی را با سرعت $35\ m/s$ در هوا می‌کشد ابعاد اعلان $1.4\ m$ در $38\ m$ است. فشار هوا $1\ atm$ و دمای آن $15^\circ C$ است. اعلان را به صورت سطح تخت فرض کنید و توان لازم برای کشیدن آن را به دست آورید.

حل:

برای هوا در 15^c داریم: $\nu = 1.55\times10^{-5} m^2/s$

$$Re = \frac{uL}{\nu} = \frac{35\times38}{1.55\times10^{-5}} = 8.581\times10^7$$

$$C_D = \frac{0.455}{(log\,Re)^{2.58}} = \frac{0.455}{\left[log\,(8.581\times10^7)\right]^{2.58}} = 0.002175$$

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{101325}{287\times288} = 1.226\,kg/m^3$$

برای دو طرف صفحه داریم:

$$D = 2(C_D\rho A\frac{u^2}{2}) = 2\times(0.002175\times1.226\times(1.4\times38)\times\frac{35^2}{2} = 173.78\,N$$

بنابراین توان موردنیاز عبارت است از:

$$P = Du = 173.78\times35 = 6080\,W = 6.08\,kW$$

۷-۱۰. یک قطار سریع السیر با سرعت $250\ km/h$ حرکت می‌کند. ابعاد سطح قطاری به طول $120\ m$ را می‌توان $120m$ در $8m$ فرض کرد. دراگ اصطکاکی را تخمین بزنید. توانی را که صرف غلبه بر این دراگ می‌شود، محاسبه کنید. فشار هوا $1\ atm$ و دمای آن $15^\circ C$ است.

حل:

$$Re = \frac{uL}{\nu} = \frac{250/3.6\times120}{1.55\times10^{-5}} = 5.376\times10^8$$

$$C_D = \frac{0.455}{(log\,Re)^{2.58}} = \frac{0.455}{\left[log\,(5.376\times10^8)\right]^{2.58}} = 0.0017$$

$$D = C_D\,\rho A\frac{u^2}{2} = 0.0017\times1.226\times(120\times8)\times\frac{(250/3.6)^2}{2} = 4825\,N$$

$P = Du = 4825 \times \frac{250}{3.6} = 335069\ W$

۷-۱۱. کره‌های فلزی کوچکی به چگالی 4.5 و قطر $0.1\ mm$ در نفت خام $(S=0.86)$ با دمای $25^\circ C$ سقوط می‌کنند. سرعت سقوط ذرات را بیابید.

حل:

فرض می‌کنیم قانون استوکس برقرار است یعنی $Re \le 1$ داریم:

از منحنی کتاب برای نفت خام: $\mu = 7 \times 10^{-3} Pa.s$

$$w_t = \frac{D^2}{18\mu}(\gamma_s - \gamma)$$

$$\Rightarrow w_t = \frac{(0.1 \times 10^{-3})^2}{18 \times 7 \times 10^{-3}}(4.5 - 0.86) \times 9806 = 2.84 \times 10^{-3} m/s = 2.84\, mm/s$$

حال عدد رینولدز را حساب می‌کنیم:

$$R_e = \frac{\rho w_t D}{\mu} = \frac{0.86 \times 1000 \times 2.84 \times 10^{-3} \times 0.1 \times 10^{-3}}{7 \times 10^{-3}} = 0.034 < 1$$

پس فرض اولیه صحیح بوده است.

۷-۱۲. در اثر انفجار اتمی یک ذرهٔ کروی غبار در ارتفاع 80 کیلومتری زمین رادیواکتیو شده است. با فرض اینکه ذره، مطابق قانون استوکس سقوط نماید، مدتی که طول می‌کشد تا به سطح زمین برسد را حساب کنید. اندازهٔ ذره $25\mu m$ و چگالی آن 2.5 است. از اثرات باد صرفنظر کنید. اتمسفر را ایزوترم و دمای آنرا $-18^\circ C$ بگیرید.

حل:

فرض می‌کنیم لزجت هوا با رابطه $\mu = 1.78 \times 10^{-5} - 3.06 \times 10^{-10} y$ که در متن کتاب داده شده است تغییر می‌کند. از قانون استوکس داریم:

$$w_t = \frac{D^2}{18}\ \frac{(\gamma_s - \gamma_{air})}{\mu}$$

با توجه به اینکه $\gamma_s >> \gamma_{air}$ می‌باشد از γ_{air} صرفنظر می‌کنیم.

$$\Rightarrow w_t = \frac{D^2}{18}\frac{\gamma_s}{\mu} = -\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow dt = -\frac{18\mu}{D^2\gamma_s}dy \Rightarrow \int_0^T dt = -\int_{80000}^{0} \frac{18 \times (1.78 \times 10^{-5} - 3.06 \times 10^{-10} y)}{(25 \times 10^{-6})^2 \times 2.5 \times 9806} dy$$

$T = 522547\, s = 6.048\ day$

۷-۱۳. در هوای اتمسفر با دمای $20^\circ C$ ذرات کروی غبار به چگالی 2.5 وجود دارند. حداکثر قطر ذره‌ای که از قانون استوکس پیروی می‌کند چقدر است؟ سرعت سقوط این ذره چقدر است؟

حل:

از جدول کتاب برای هوا در $25^{\circ}C$ $\nu = 1.6\times10^{-5}m^2/s$

بنا به قانون استوکس یک ذره وقتی از این قانون تبعیت می‌کند که عدد رینولدز آن حداکثر برابر با یک باشد یعنی:

$$Re_{max} = 1 \Rightarrow \frac{w_t D}{\nu} = 1$$

$$\Rightarrow w_t\times D = 1.6\times10^{-5} \Rightarrow w_t = \frac{1.6\times10^{-5}}{D} \quad (I)$$

$$\begin{cases}\gamma_s = s\rho_w g = 2.5\times9806 = 24515\,N/m^3\\ \gamma_{air} = \rho_{air}g = 1.17\times9.806 = 11.47\ N/m^3\\ \mu_{air} = 1.9\times10^{-5}\,Pa.s\end{cases}$$

با استفاده از معادله (7.3.7) داریم:

$$w_t = \frac{D^2}{18\mu}(\gamma_s - \gamma_{air}) \quad (II)$$

$$(II),(I) \Rightarrow 1.6\times10^{-5} = \frac{D^3}{18\mu}(\gamma_s - \gamma_{air}) \Rightarrow 1.6\times10^{-5} = \frac{D^3}{18\times1.9\times10^{-5}}(24515 - 11.47)$$

از حل معادله بالا $D = 61\times10^{-6}m = 61\mu m$

$$\Rightarrow w_t = \frac{1.6\times10^{-5}}{61\times10^{-6}} = 0.262\,m/s$$

۷-۱۴. کره‌ای به قطر $120\ mm$ در آب $10^{\circ}C$ حرکت می‌کند. نیروی دراگ وارد به کره $5N$ است. سرعت کره چقدر است؟

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای 10^{c} داریم: $\rho = 999.7\,kg/m^3$

$\nu = 1.308\times10^{-6}m^2/s$

$$D = C_D\rho A\frac{u^2}{2} \Rightarrow 5 = C_D\times999.7\times\frac{\pi\times0.12^2}{4}\times\frac{u^2}{2} \Rightarrow u^2 = \frac{0.88446}{C_D} \qquad (1)$$

$$Re = \frac{uD}{\nu} = \frac{u\times0.12}{1.308\times10^{-6}} = 91743u \qquad (2)$$

این مسئله از طریق حدس و خطا حل می‌شود:

$$\text{حدس}\ C_D \xrightarrow{1} u \xrightarrow{2} Re \xrightarrow{7.13} C_D$$

حدس و خطا تا زمانی که C_D بدست آمده با C_D حدس زده شده یکی باشد ادامه می‌یابد.

در نهایت داریم: $C_D = 0.53$ ، $u = 1.292\ m/s$

۷-۱۵. برای به زمین انداختن یک بولدوزر به وزن $45kN$ از چتر نجات استفاده می‌شود. قطر چتر نجات 30

m و ضریب دراگ آن 1.2 است و برای آنکه سرعت حد بولدوزر در هوا (20°C, 100kpa abs) برابر 10 m/s باشد، به چند چتر نجات احتیاج داریم؟

حل:

ابتدا نیروی دراگ وارد بر یک چتر نجات را در هنگام سقوط تعیین می‌کنیم داریم:

$$\rho_{air}=\frac{P}{RT}=\frac{100\times10^3}{287\times293}=1.19\,kg/m^3$$

$$D=C_D\rho A\frac{U^2}{2}=1.2\times1.19\times\frac{\pi}{4}\times30^2\times\frac{10^2}{2}=50470N=50.47\,kN$$

ملاحظه می‌شود که نیروی دراگ یک چتر از وزن بولدوزر که 45kN است بیشتر می‌باشد پس برای به زمین انداختن بولدوزر تنها یک چتر نجات کافی است.

۱۶-۷. جسمی به جرم 180 kg به یک دیسک دایره‌ای متصل شده و از هواپیما رها می‌شود. قطر دیسک باید چقدر باشد تا جسم با سرعت 22 m/s به زمین برخورد کند؟ نحوهٔ اتصال دیسک طوری است که عمود بر امتداد حرکت قرار می‌گیرد. t=20°C, p=101 kpa abs.

حل:

در سرعت حد، وزن جسم با نیروی دراگ برابر است

$$C_D\rho A\frac{U^2}{2}=mg$$

از جدول ۲-۷: $C_D=1.2$

از منحنی کتاب برای $20^\circ C$: $\nu=1.7\times10^{-5}m^2/s$

$$\rho_{air}=\frac{P}{RT}=\frac{101\times10^3}{287\times293}=1.2\,kg/m^3$$

$$\Rightarrow1.2\times1.2\times\frac{\pi}{4}D^2\times\frac{22^2}{2}=180\times9.806\Rightarrow D=2.54\,m$$

$$Re=\frac{UD}{\nu}=\frac{22\times2.54}{1.7\times10^{-5}}=3.28\times10^6$$

چون ضریب دراگ $C_D=1.2$ برای اعداد رینولدز بین 10^4-1.5×10^5 معتبر است برای اعداد رینولدز بالاتر کاهش می‌یابد و خیلی به عدد یک نزدیک می‌شود که در این صورت مقدار قطر در حدود 2.7m بدست می‌آید.

۱۷-۷. یک دیسک دایره‌ای به قطر 3m به طور عمودی در معرض جریان هوا باسرعت 100 km/h قرار داده شده است. چه نیرویی برای ساکن نگه داشتن دیسک لازم است؟ $\rho=1.1\ kg/m^3$

حل:

برای دیسک موردنظر داریم:

$$Re=\frac{uD}{\nu}=\frac{100/3.6\times3}{1.7\times10^{-5}}=4.9\times10^6$$

از منحنی (7.13) کتاب: $C_D=1.2$

$$D=C_D\rho A\frac{u^2}{2}=1.2\times1.1\times\frac{\pi\times3^2}{4}\times(100/3.6)^2/2=3600N=3.6\,kN$$

۱۸-۷. جرم یک چتر باز با تجهیزاتش $110\ kg$ است مؤلفهٔ قائم سرعت فرود نباید از $6\ m/s$ بیشتر باشد. قطر لازم چتر نجات را تعیین کنید. چتر را به صورت یک نیمکرهٔ توخالی در نظر بگیرید. فشار هوا $1\ atm$ و دمای آن $27^{\circ}C$ است.

حل:

از جدول ۱-۶ برای نیمکره توخالی داریم: $C_D = 1.4$

$$\rho_{air} = \frac{P}{RT} = \frac{1.01325 \times 10^5}{287 \times 300} = 1.17\ kg/m^3$$

در سرعت حد چتر باز نیروی دراگ با وزن کل چتر و تجهیزات آن برابر است:

$$\Rightarrow mg = C_D \rho A \frac{U^2}{2} \Rightarrow 110 \times 9.806 = 1.4 \times 1.17 \times \frac{\pi}{4} D^2 \times \frac{6^2}{2} \Rightarrow D = 6.81\,m$$

۱۹-۷. یک جعبه مکعبی که طول هر ضلع آن $0.8m$ است بر روی باربند یک اتومبیل قرار داده شده است توان مصرفی اتومبیل را در سرعت الف) $80km/h$ و ب) $110km/h$ تخمین بزنید.

حل:

نیروی دراگ کل وارد بر جعبه عبارت است از مجموع نیروی دراگ وارد بر وجه قائم و نیروهای دراگ وارد بر سه وجه دیگر که موازی جریان قرار دارند.

الف)

عدد رینولدز روی وجه برابر است با:

$$Re = \frac{u_x}{\nu} = \frac{80/3.6 \times 0.8}{1.7 \times 10^{-5}} = 1.046 \times 10^6$$

بنابراین جریان هوا درهم است.

از جدول (7.2) برای مکعب: $C_D = 1.1$

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{101325}{287 \times 298} = 1.185\,kg/m^3$$

با استفاده از معادله (7.2.15) داریم:

$$F_D = C_D \rho A \frac{u^2}{2} + 3\left[\frac{0.036 \rho u^2 L}{Re^{1/5}}\right] =$$

$$\Rightarrow F_0 = 1.1 \times 1.185 \times 0.8^2 \times \frac{(80/3.6)^2}{2} + 3 \times \left[\frac{0.036 \times 1.185 \times (80/3.6)^2 \times 0.8}{(1.046 \times 10^6)^{1.5}}\right] = 209$$

$$P = F_D . u = 209 \times \frac{80}{3.6} = 4644\ W = 4.644\ kW$$

ب)

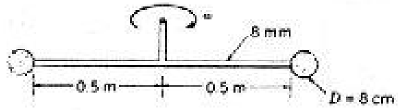
$$Re = \frac{ux}{\nu} = \frac{110/3.6 \times 0.8}{1.7 \times 10^{-5}} = 1.438 \times 10^6$$

بنابراین جریان درهم است و با تکرار محاسبات قسمت الف برای $u = 110km/h$ داریم: $F_D = 394.95N$

$$P = F_D . u = 394.95 \times 110/3.6 = 12068\ W = 12.068\ kW$$

۲۰-۷. مطابق شکل ۲۱-۷ به دو انتهای یک میله، دو نیمکره متصل شده‌اند. این وسیله برای مخلوط کردن مواد افزودنی در مخزنی محتوی مایع با سرعت دورانی $40\ rpm$ حول محور قائم خود دوران می‌کند. جرم

مخصوص مایع $1075 \ kg/m^3$ و لزجت سینماتیک آن $10^{-6} \ m^2/s$ است. قطر میله $8 \ mm$ می‌باشد. توان لازم برای گرداندن مخلوط کن را به دست آورید.



شکل ۲۱-۷

حل:

نیمکره‌ها: فرض می‌کنیم سرعت خطی روی سطوح نیمکره‌ها یکنواخت است و داریم:

$$\omega = 40 rpm \times \frac{2\pi}{60} = 4.1888 \ Rad/s$$

$$V = r\omega = (0.5 + \frac{0.08}{2}) \times 4.1888 = 2.262 \, m/s$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{2.262 \times 0.08}{10^{-6}} = 1.81 \times 10^5$$

از جدول (7.1) برای نیمکره: $C_D = 1.4$

$$F = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = 1.4 \times 1075 \times \frac{\pi \times 0.08^2}{4} \times \frac{2.262^2}{2} = 19.354 \ N$$

بنابراین توان موردنیاز برای دوران دو نیمکره عبارت است از:

$$P_1 = 2FV = 2 \times 19.354 \times 2.262 = 87.557 \ W$$

میله‌ها:

سرعت انتهای میله‌ها عبارت است از:

$$V = 0.5 \times 4.1888 = 2.0944 \, m/s$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{2.0944 \times 0.008}{10^{-6}} = 16755$$

با استفاده از منحنی 7.14، $C_D = 1.2$ بدست می‌آید و فرض می‌کنیم مقدار آن در طول میله ثابت باشد و داریم:

$$dF_D = C_D \rho \frac{V^2}{2} dA = C_D \rho \frac{V^2}{2} . D . dr \quad , \qquad V = r\omega$$

برای دو میله $P_2 = 2\int_0^{0.5} C_D \rho \frac{V^3}{2} . D dr = C_D \rho \omega^3 D \int_0^{0.5} r^3 dr = C_D \rho \omega^3 D \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^{0.5}$

$$= 1.2 \times 1075 \times 4.1888 \times 0.008 \times \frac{0.5^4}{4} = 11.851 \ W$$

بنابراین کل توان موردنیاز عبارت است از:

$$P_t = P_1 + P_2 = 87.557 + 11.851 = 99.408 \, W$$

۲۱-۷. نیم استوانه‌ای به شعاع $150mm$ در معرض جریان آب با سرعت $1m/s$ قرار دارد سمت مقعر نیم‌استوانه در مقابل جریان است. دراگ وارد به $8m$ طول لوله چقدر است؟

حل:

فرض می‌کنیم دما 10^{C} باشد و از جدول کتاب برای آب داریم: $\nu = 1.308 \times 10^{-6} m^2/s$

$\rho = 999.7 \ kg/m^3$

$$Re=\frac{uD}{\nu}=\frac{1\times0.15}{1.308\times10^{-6}}=1.147\times10^{5}$$

از جدول 7.2 برای نیم استوانه مقعر: $C_D=2.3$

$$D=C_D\rho A\frac{u^2}{2}=2.3\times999.7\times(0.15\times2\times8)\times\frac{1^2}{2}=2760N$$

۷-۲۲. یک دودکش به قطر $1.8m$ و ارتفاع $55m$ طوری طراحی شده‌است که در مقابل باد با سرعت $35m/s$ مقاومت می‌کنند نیروی کل وارد بر دودکش و گشتاور وارد بر پایه آن را محاسبه کنید.

حل:

$$D=C_D\rho A\frac{u^2}{2}=0.7\times1.204\times(55\times1.8)\times\frac{35^2}{2}=51105N$$

$$M=D.L=51105\times\frac{55}{2}=1405388N.m$$

۷-۲۳. گشتاور وارد بر پایه یک آنتن استوانه‌ای به قطر $8mm$ و طول $2m$ که بر روی یک اتومبیل که با سرعت $100km/h$ حرکت می‌کند قرار گرفته است را بدست آورید.

حل:

از جدول (7-2) کتاب: $C_D=1.12$

$$D=C_D\rho A\frac{V^2}{2}$$

دما را 15 c فرض می‌کنیم

$$D=1.12\times1.178\times(0.008\times3)\times\frac{(100/3.6)^2}{2}=8.144N$$

$$M=DL=8.144\times2=16.288N.m$$

۷-۲۴. یک کرهٔ فلزی به قطر $50\ mm$ و چگالی 3.5 در روغن با چگالی 0.8 ولزجت $0.1\ pa.s$ سقوط می‌کند. سرعت حد کره را حساب کنید. سرعت حد کره‌ای با همین اندازه و چگالی 7.0 چقدر است؟ این نتایج با آزمایشهای گالیله در برج پیزا چقدر تطبیق دارند؟

حل:

الف)

در ابتدا فرض می‌کنیم قانون استوکس برقرار باشد و داریم:

$$w_t=\frac{D^2}{18\mu}(\gamma_s-\gamma)=\frac{0.05^2}{18\times0.1}\times(3.5-0.8)\times9806=36.7\,m/s$$

$$R=\frac{\rho w_t D}{\mu}=\frac{0.8\times1000\times36.7\times0.05}{0.1}=14680>1$$

بنابراین فرضمان مبنی بر برقراری قانون استوکس نادرست است.

مسئله باید از طریق حدس و خطا حل شود:

$$F_B+F_D=W$$

$$\frac{1}{6}\pi D^3\gamma + C_D\rho\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\frac{u^2}{2} = \frac{1}{6}\pi D^3\gamma_s \Rightarrow u^2 = \frac{4D}{3\rho C_D}(\gamma_s - \gamma)$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{4\times 0.05}{3\times 800\times C_D}\times(3.5-0.8)\times 9806 \Rightarrow u^2 = \frac{2.20635}{C_D} \qquad (1)$$

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{800 - u\times 0.05}{0.1} = 400u \qquad (2)$$

حدس $C_D \xrightarrow{1} u \xrightarrow{2} Re \rightarrow C_D$ [(7.13) از منحنی]

حدس و خطا تا زمانی که C_D بدست آمده با C_D حدس زده شده برابر باشد ادامه می‌یابد.

در نهایت داریم: $u=2.29m/s$, $C_D=0.42$

ب) مانند قسمت الف ابتدا فرض می‌کنیم قانون استوکس برقرار باشد و داریم:

$$u = \frac{D^2}{18\mu}(\gamma_s - \gamma) = \frac{0.05^2}{18\times 0.1}\times(7-0.8)\times 9806 = 84.4\,m/s$$

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{800\times 84.4\times 0.05}{0.1} = 33760 > 1$$

بنابراین قانون استوکس برقرار نمی‌باشد و با انجام حدس و خطا مانند قسمت الف) داریم:

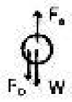
$u=2.67m/s$, $C_D=0.71$

۷-۲۵. یک بالن کروی محتوی هلیوم در هوا با فشار *100kpa abs* و دمای $5^\circ C$ صعود می‌کند. جرم بالن و محمولهٔ آن *136 kg* است. برای آنکه سرعت صعود بالن *3m/s* باشد، بایستی قطر آن چقدر باشد؟ $C_D=0.21$. اگر بالن با کابل به زمین متصل شود و در معرض جریان بادی با سرعت *16 km/h* قرار گیرد، زاویهٔ کابل چقدر خواهد بود؟

حل:

الف

$$W + F_D = F_B \Rightarrow mg + C_D\rho_{air}A\frac{u^2}{2} = \gamma_{air}V$$



$$\rho_{air} = \frac{P}{RT} = \frac{100000}{287\times 278} = 1.253\ kg/m^3$$

$$\Rightarrow 136\times 9.806 + 0.21\times 1.253\times\frac{\pi\times D^2}{4}\times\frac{3^2}{2} = 1.253\times 9.806\times\frac{\pi D^3}{6}$$

$$\Rightarrow D^3 - 0.14666D^2 - 210.3 = 0$$

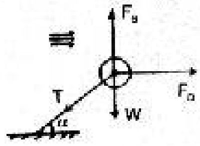
از حل معادله بالا: $D=5.996m$

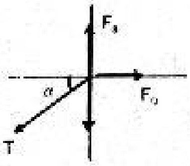
ب)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = F_D$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\cos\alpha + w = F_B \Rightarrow T\sin\alpha = F_B - W$$

از تقسیم دو معادله بالا بر هم داریم:





$$tg\,\alpha = \frac{F_B - W}{F_D}$$

$$F_B = \gamma_{air} V = 1.253 \times 9.806 \times \frac{\pi \times 5.996^3}{6} = 1386.8\ N$$

$$W = mg = 136 \times 9.806 = 1333.6 N$$

$$F_D = 0.21 \times 1.253 \times \frac{\pi \times 5.996^2}{4} \times \frac{(16/3.6)^2}{2} = 73.4\ N$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1386.8 - 1333.6}{73.4} = 0.725 \quad \Rightarrow \alpha = 35^\circ$$

۷-۲۶. یک کره فولادی به قطر $6.5mm$ $(s=7.8)$ در یک مخزن روغن $(s=0.83)$ رها می‌شود، هرگاه سرعت نهایی کره $0.1m/s$ باشدلزجت روغن را محاسبه کنید.

حل:

ابتدا فرض می‌کنیم قانون استوکس برقرار باشد داریم:

$$w_t = \frac{D^2}{18\mu}(\gamma_s - \gamma) \Rightarrow \mu = \frac{D^2}{18 w_t}(\gamma_s - \gamma)$$

$$\mu = \frac{0.0065^2}{18 \times 0.1} \times (7.8 - 0.83) \times 9806 = 1.604\ Ns/m^2$$

$$Re = \frac{\rho w_t D}{\mu} = \frac{0.83 \times 1000 \times 0.1 \times 0.0065}{1.604} = 0.336 < 1$$

بنابراین قانون استوکس برقرار است.

۷-۲۷. سرعت حد ذره‌ای شن $(s=2.55)$ را در آب با فرض اینکه شکل آن کروی باشد برای قطرهای زیر بدست آورید. الف) $0.1mm$ ب) $1mm$ ج) $10mm$

حل:

فرض می‌کنیم دما $10\ c$ باشد

از جدول کتاب برای آب در دمای $10\ c$: $\rho = 999.7\ kg/m^3$ ، $\mu = 1.308 \times 10^{-3} Nm/s^2$

با فرض اینکه قانون استوکس برقرار باشد با استفاده از معادله (7-3-7) داریم :

$$w_t = \frac{D^2}{18\mu}(\gamma_s - \gamma_f)$$

$$\Rightarrow w_t = \frac{D^2}{18 \times 1.308 \times 10^{-3}} \times (2.55 - 1) \times 9804 = 645428 D^2$$

الف) $D = 0.1\ mm$

$$w_t = 645438 \times (0.1 \times 10^{-3}) = 0.00645 m/s$$

$$R_e = \frac{w_t D}{\nu} = \frac{0.006454 \times 0.1 \times 10^{-3}}{1.308 \times 10^{-6}} = 0.5 < 1$$

بنا بر این قانون استوکس برقرار است

ب) $D=1\ mm$

$$w_t=645438\times(10^{-3})^2=0.645 m/s$$

$$R_e=\frac{w_t D}{\nu}=\frac{0.6454\times10^{-3}}{1.308\times10^{-6}}=493>1$$

بنا بر این قانون استوکس برقرار نیست

بنا بر این مسئله را باید از طریق حدس و خطا حل کنیم

$$F_B+F_D=W$$

$$\frac{1}{6}\pi D^3\gamma+C_D\rho\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\frac{u^2}{2}=\frac{1}{6}\pi D^3\gamma_s\Rightarrow u^2=\frac{4D}{3\rho C_D}(\gamma_s-\gamma)$$

$$\Rightarrow u^2=\frac{4\times10^{-3}}{3\times999.7\times C_D}\times(2.55-1)\times9804\Rightarrow u^2=\frac{20.27}{C_D} \qquad (1)$$

حدس $C_D \xrightarrow{1} u \xrightarrow{2} Re\rightarrow C_D$ [از منحنی (7.13)]

حدس و خطا تا زمانی که C_D بدست آمده با C_D حدس زده شده برابر باشد ادامه می‌یابد.

در نهایت داریم: $C_D=1.1$, $u=0.136 m/s$

ج) در این حالت هم قانون استوکس برقرار نمی‌باشد و مانند قسمت ب مسئله را با حدس و خطا حل می‌کنیم.

۲۸-۷. نیزه‌ای نوک تیز به قطر $2cm$ و طول $1.5m$ مفروض است اگر نیزه با سرعت $8m/s$ در آب پرتاب شود نیروی دراگ را محاسبه کنید. ماکزیمم مقدار ضخامت لایه مرزی چقدر است؟ فرض کنید دمای آب $20^\circ c$ است.

حل:

برای آب در دمای 20^C داریم: $\rho=998.2\,kg/m^3$

$$\nu=1.007\times10^{-6}\,m^2/s$$

$$R_L=\frac{VD}{\nu}=\frac{8\times1.5}{1.007\times10^{-6}}=1.192\times10^7$$

$$C_D=\frac{0.455}{(\log R_L)^{2.58}}=\frac{0.455}{\left[\log(1.192\times10^7)\right]^{2.58}}=0.00292$$

نیزه را صفحه‌ای به طول $1.5m$ و عرض $\pi\times0.02$ فرض می‌کنیم

$$F_D=C_D\rho A\frac{u^2}{2}=0.00292\times998.2\times(\pi\times0.02\times1.5)\times\frac{8^2}{2}=8.79N$$

$$\delta=\frac{0.37x}{R_x^{1/5}}=\frac{0.37\times1.5}{(1.192\times10^7)^{1/5}}=0.0213m$$

۷-۲۹. علل ناپیوستگی منحنی‌های شکل ۱۶-۷ در زاویهٔ حملهٔ 22° را بیان کنید.

حل:

برای هر ایرفویل بسته به شکل مقطع آن، در زاویهٔ حملهٔ معینی نیروی لیفت به طور ناگهانی افت کرده و نیروی دراگ به شدت افزایش می‌یابد. این پدیده را استال گویند که در اثر جدائی خطوط جریان در پشت ایرفویل به وجود می‌آید در شکل 17-6 برای ایرفویل نشان داده شده این پدیده در زاویهٔ حملهٔ 22° روی می‌دهد و ممکن است این پدیده موجب سقوط هواپیما شود.

۷-۳۰. نسبت لیفت به دراگ ایرفویل شکل ۱۶-۷ در زاویهٔ حملهٔ 2° چقدر است؟

حل:

با استفاده از شکل 7.16 برای زاویه حملهٔ $\alpha = 2^\circ$ داریم:

$$C_L = 0.35 \quad , \quad C_D = 0.016$$

$$\Rightarrow \frac{C_L}{C_D} = \frac{0.35}{0.016} = 21.25$$

۷-۳۱. جرم قایقی که به هیدروفویل مجهز شده $2250\ kg$ می‌باشد. در سرعت $15\ m/s$ احتیاج به چه اندازه‌ای از هیدروفویل وجود دارد تا قایق را نگه دارد. از مشخصهٔ لیفت شکل ۱۶-۷ در زاویهٔ حملهٔ 4 استفاده کنید.

حل:

برای نگه‌داشتن قایق اندازهٔ هیدروفویل باید طوری باشد که نیروی لیفت با نیروی وزن قایق در حال تعادل باشد

$$mg = C_L A \rho \frac{U^2}{2}$$

با توجه به اطلاعات مساله برای زاویهٔ حملهٔ 4° از روی شکل 17-6 داریم: $C_L = 0.5$

$$\Rightarrow 2250 \times 9.806 = 0.5 \times A \times 1000 \times \frac{15^2}{2} \Rightarrow A = 0.392\, m^2$$

۷-۳۲. بازیکن تنیس طوری به توپ ضربه میزند که توپ با سرعت $20\ m/s$ رو به جلو حرکت می‌کند و با سرعت $5000\ rpm$ رو به عقب می‌چرخد. جرم توپ $55\ gr$ و قطر آن $62\ mm$ است. فشار را استاندارد و دما را $20^\circ C$ فرض کنید. از نیروی دراگ صرفنظر نمایید. لیفت ایجادی در اثر چرخش رو به عقب را در نظر گرفته، تعیین کنید که توپ در طی زمانی که به فاصلهٔ 12 متری می‌رسد، چقدر سقوط می‌کند.

حل:

برای تعیین C_L ابتدا نسبت بی‌بعد $\frac{D\omega}{2u}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{101325}{287 \times 293} = 1.205 \ kg/m^3$$

$$L = C_L \rho A \frac{u^2}{2} = 0.34 \times 1.205 \times \frac{\pi \times 0.062^2}{4} \times \frac{20^2}{2} = 0.247 \, N$$

کل نیروی وارده عبارت است از مجموع نیروهای لیفت و وزن توپ:

$$F = mg + L = 0.055 \times 9.806 + 0.247 = 0.786 \, N$$

زمان لازم جهت رسیدن توپ به فاصله *12* متری: $t = \frac{x}{u} = \frac{12}{20} = 0.6 \, s$

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{0 + 0.786/0.055}{2} \times 0.6^2 = 1.29 \, m$$

۷-۳۳. شخصی در بازی بیس بال توپ را طوری پرتاپ می‌کند که با سرعت *80 km/h* به جلو حرکت می‌کند و با سرعت *2500 rpm* حول محور قائم می‌گردد. جرم توپ بیس بال *135 gr* وقطر آن *70 mm* است. سرعت به طرف صفحه چقدر از مسیر مستقیم منحرف می‌شود؟

حل:

از جدول کتاب برای هوا در 27^c: $\rho = 1.14 \ kg/m^3$

برای تعیین C_L و C_D و نسبت بی‌بعد $\frac{D\omega}{2u}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{D\omega}{2V} = \frac{0.07 \times 2500 \times 2\pi/60}{2 \times 80/3.6} = 0.412$$

با استفاده از منحنی *(7.14)* $\Rightarrow C_L = 0.1$

$$L = C_L \rho A \frac{V^2}{2} = 0.1 \times 1.16 \times \frac{\pi \times 0.07^2}{4} \times \frac{(80/3.6)^2}{2} = 0.11023 \, N$$

شتاب در راستای عمود بر حرکت: $a_L = \frac{L}{m} = \frac{0.11023}{0.135} = 0.8165 \, m/s^2$

زمان لازم جهت رسیدن به صفحه‌ای که در فاصله *18* متری قرار دارد. $t = \frac{18}{80/3.6} = 0.81 s$

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times 0.8165 \times 0.81^2 = 0.268 \, m$$

۷-۳۴. پرتاب توپ توسط یک شخص در بازی بیس‌بال طوری صورت می‌گیرد که سرعت رو به جلوی توپ *136 km/h* و سرعت دوران حول محور افقی ω است برای شرایط یکسان با مسئله قبل به ازای چه مقدار از ω هرگاه توپ در مسیر افقی حرکت کند در اثر نیروی گرانش سقوط نمی‌کند؟

حل:

$$L=mg\Rightarrow C_L\rho A\frac{V^2}{2}=mg\Rightarrow C_L=\frac{mg}{\rho AV^2/2}$$

$$\Rightarrow C_L=\frac{0.135\times 9.806}{1.16\times\pi\times 0.07^2/4\times(136/3.6)^2/2}=0.416$$

$$\frac{D\omega}{2V}=\frac{0.07\times\omega}{2\times(136/3.6)}=9.2647\times 10^{-4}\omega$$

از منحنی (7.14) برای $C_L=0.37$ داریم: $\frac{D\omega}{2V}=1.15$

$$\Rightarrow 9.2647\times 10^{-4}\omega=1.15\Rightarrow\omega=\frac{1.15}{9.2647\times 10^{-4}}\times\frac{60}{2\pi}=11853\,rpm$$

۳۵-۷ در نتیجه پس‌زنی متناوب گردابها، یک ضربان فشاری متناوب (بالابرنده) ممکن است در روی استوانهٔ ساکن واقع در میدان جریان بوجود آید فرایند توسط عدد استروهال توصیف می‌شود $s_t=fD/V$ که f فرکانس در واحد Hz است برای محدوده‌ای از اعداد رینولدز عدد استروهال بحرانی 0.2 تخمین زده شده است فرکانس نوسانات ایجاد شده بوسیله سرعت $100km/h$ باد را که روی یک سیم $2mm$ وزیده می‌شود چقدر است؟

حل:

$$S=\frac{FD}{V}\Rightarrow F=\frac{SV}{D}=\frac{0.2\times 100/3.6}{0.002}=2778\,Hz$$

جریان تراکم پذیر

توجه: فصل جریان تراکم پذیر در ویرایش نهم کتاب مکانیک سیالات استریتر حذف شده‌است ولی با توجه به اینکه این فصل جزو سرفصلهای درس مکانیک سیالات می‌باشد لذا حل مسائل این فصل از ویرایش قبلی(هشتم) آورده شده‌است.

۱. جرم ملکولی یک گاز کامل 36 است. اگر بر روی $3kg$ از این گاز در یک محفظهٔ عایقکاری شده که حجم آن ثابت است، $6.4\ kJ$ کار انجام شود، دمای آن به اندازهٔ $2^{\circ}C$ افزایش می‌یابد. c_v , c_p گاز را به دست آورید.

حل:

مطابق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$Q_H - W = \Delta U = mc_v\Delta T \ \ , Q_H = 0$$
$$\Rightarrow 6.4 = 3 \times c_v \times 2 \Rightarrow c_v = 1.067 kj/kgk$$

$$R = \frac{8.314}{36} = 0.231\ kj/kgk$$
$$c_p = c_v + R = 1.067 + 0.231 = 1.298 kj/kgk$$

۲. c_p یک گاز با جرم ملکولی 48 برابر $1.558\ kJ/kg.k$ است. c_v این گاز را به دست آورید.

حل:

$$R = \frac{8.314}{48} = 0.173 kj/kgk$$
$$c_p = c_v + R \Rightarrow c_v = c_p - R = 1.558 - 0.173 = 1.385 kj/kgk$$

۳. در مسائل ۱-۷ و ۲-۷ نسبت گرمای ویژه‌ها، k، را به دست آورید.

حل:

برای مسئله (۱-۷) داریم:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{1.298}{1.067} = 1.216$$

برای مسئله (۲-۷) داریم:

$$k=\frac{c_p}{c_v}=\frac{1.558}{1.385}=1.125$$

۴. انتالپی یک گاز وقتی که در فشار ثابت به آن حرارت داده شود، $1.675\ kJ/kg.k$ افزایش می‌یابد. انرژی داخلی این گاز وقتی که در حجم ثابت به آن حرارت داده می‌شود $1.256\ kJ/kgk$ افزایش می‌یابد. جرم ملکولی گاز را به دست آورید.

حل:

با توجه به تعریف c_p و c_v برای این گاز داریم:

$$c_p=1.675\,kj/kgk$$
$$c_v=1.256\,kj/kgk$$

$$R=c_p-c_v=1.675-1.256=0.419\,kj/kgk$$

$$R=\frac{8.314}{M_w}\Rightarrow M_w=\frac{8.314}{R}=\frac{8.314}{0.419}=19.84$$

۵. فشار و دمای $2\ kg$ مونوکسیدکربن در یک فرآینداز $P_1=14\ kPa\ abs$ و $t_1=5°C$، $P_2=30\ kPa\ abs$، $t_2=170c$ می‌رسد. تغییرات آنتالپی را حساب کنید.

حل:

برای منوکسید کربن داریم: $c_p=1.043\,kj/kgk$

$$\Delta H=mc_p\,\Delta T=2\times1.043\times(170-5)=344.19kj$$

۶. برای مسألهٔ قبل تغییرات آنتروپی را حساب کنید.

حل:

برای مونوکسید کربن داریم: $k=1.4$, $c_v=0.745\,kj/kgk$

با استفاده از معادله $(7.1.15)$ داریم:

$$s_2-s_1=mc_v\ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^k\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-k}\right]$$

$$\Rightarrow s_2-s_1=2\times0.745\times\ln\left[\left(\frac{170+273}{5+273}\right)^{1.4}\left(\frac{30}{14}\right)^{1-1.4}\right]=0.518kj/k$$

۷. با استفاده از معادلهٔ (۱۳-۱-۷) و قانون گاز کامل، معادلهٔ حالت را برای جریان ایزنتروپیک به دست آورید.

حل:

با استفاده از معادله $(7.1.13)$ داریم:

$$s_2-s_1=c_v\ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k-1}\right]$$

جریان ایزنتروپیک: $s_2=s_1\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k-1}=1\qquad(I)$

$$p=\rho RT \Rightarrow \frac{P_2}{P_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\frac{P_2}{P_1}\ \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$(II),(I) \Rightarrow \frac{P_2}{P_1}\ \frac{\rho_1}{\rho_2}\ \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k-1}=1 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1}\ \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k}=1 \Rightarrow \ \frac{P_1}{\rho_1{}^k}=\frac{P_2}{\rho_2{}^k}$$

۸. فشار و دمای اولیهٔ هلیوم $P_1=105\ kPa\ abs$, $t_1=180^\circ C$. در یک فرآیند ایزنتروپیک دمای آن به $t_2=49^\circ C$ می رسد. تغییرات آنتالپی واحد جرم هلیوم را حساب کنید.

حل:

برای هلیم داریم: $c_p = 5.233\ kj/kgk$

$$\Delta h = c_v\,\Delta T = 5.233 \times (49+18) = 350.61 kj/kg$$

۹. حجم $1\ kg$ اکسیژن در دمای $20^\circ C$ برابر $150\ L$ است. در یک فرآیند ایزنتروپیک فشار مطلق اکسیژن 2 برابر می‌شود. دمای نهایی اکسیژن چقدر خواهد شد؟

حل:

با استفاده از معادله (7.1.17) داریم:

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(k-1)/k}$$

برای اکسیژن: $k=1.4$

$$\frac{T_2}{20+273}=\left(\frac{2P_1}{P_1}\right)^{(1.4-1)/1.4} \Rightarrow T_2 = 357.17\ ^{\circ k} = 84.17\ ^{\circ C}$$

۱۰. برای فرآیند پلی‌تروپیک برگشت‌پذیر، رابطه‌ای به دست آورید که تغییرات دانسیته را به تغییرات دما مربوط کند.

حل:

برای فرایند پلی‌تروپیک برگشت‌پذیر داریم:

$$\frac{P}{\rho^n}=cte \Rightarrow \frac{P_1}{\rho_1^n}=\frac{P_2}{\rho_2^n} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{\rho_1^n}{\rho_2^n} \qquad (I)$$

از طرفی داریم:

$$P=\rho RT \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\ \frac{T_1}{T_2} \qquad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{T_1}{T_2}=\frac{\rho_1^n}{\rho_2^n} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{n-1}$$

۱۱. هیدروژن در فشار $350\ kPa\ abs$ و دمای $0^\circ C$ قرار دارد. در یک فرآیند پلی‌تروپیک برگشت‌پذیر با $n=1.20$ دمای آن تا $48^\circ C$ افزایش می‌یابد. فشار نهایی را حساب کنید.

حل:

می‌دانیم برای فرآیند پلی‌تروپیک:

$$\frac{P_1}{\rho_1^n}=\frac{P_2}{\rho_2^n}\Rightarrow\frac{P}{P_2}=\frac{\rho_1^n}{\rho_2^n}$$

$$P=\rho RT\Rightarrow\frac{P_1}{P_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{T_1}{T_2}\Rightarrow\frac{\rho_1^n}{\rho_2^n}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^n$$

$$\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^n\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^n$$

$$\Rightarrow\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1-n}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^n\Rightarrow\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{n/(1-n)}$$

با جایگذاری مقادیر داده شده:

$$\frac{350}{P_2}=\left(\frac{273+48}{273}\right)^{1.2/(1-1.2)}\Rightarrow P_2=925\,kPa$$

۱۲. در یک فرآیند پلی‌تروپیک برگشت‌پذیر از دمای $45^\circ C$ به دمای $5^\circ C$، دانسیته یک گاز 10 درصد کاهش می‌یابد. نمای n برای این فرآیند چقدر است؟

حل:

با استفاده از رابطهٔ بدست آمده در مسئلهٔ ۱۰ داریم:

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{n-1}\Rightarrow\frac{45+273}{5+273}=\left(\frac{1}{0.9}\right)^{n-1}\Rightarrow n=2.276$$

۱۳. جسمی با سرعت $610\ m/s$ در آب $27^\circ C$ حرکت می‌کند. عدد ماخ را حساب کنید.

حل:

از جدول کتاب برای آب در دمای $27^\circ C$: $\rho=996.5\,kg/m^3$

$$k=222.4\times10^7\ N/m^2$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{\frac{k}{\rho}}=\sqrt{\frac{222.4\times10^7}{996.5}}=1493.92\,m/s$$

$$M=\frac{V}{c}=\frac{610}{1493.92}=0.408$$

۱۴. هواپیمایی با سرعت $1350\ km/h$ در سطح دریا $(t=20^\circ C, P=101\ kPa\ abs)$ پرواز می‌کند. هواپیمای دیگری با همان سرعت در استراتوسفر $(t=-55^\circ C)$ پرواز می‌کند. عدد ماخ پرواز هواپیمای دوم چقدر بزرگتر است؟

حل:

$$c=\sqrt{kRT}$$

$$t=20^\circ\Rightarrow c_1=\sqrt{1.4\times287\times(20+273)}=343.11\,m/s$$

$$t_2=-55^C\Rightarrow c_2=\sqrt{1.4\times278\times(-55+273)}=295.96\,m/s$$

سرعت هواپیما: $V = 1350 km/h \times \frac{1}{3.6} = 375 m/s$

$$M_1 = \frac{V}{c_1} = \frac{375}{343.11} = 1.093 \quad , \quad M_2 = \frac{V}{c_2} = \frac{375}{295.96} = 1.267$$

$$\frac{M_2 - M_1}{M_1} \times 100 = \frac{1.267 - 1.093}{1.093} \times 100 = 15.9\%$$

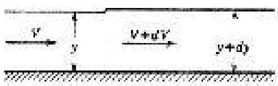
۱۵. سرعت صوت در هیدروژن با دمای $27^\circ C$ چقدر است؟

حل:

برای هیدروژن داریم: $k = 1.4 \quad , \quad R = 412.1 j/kgk$

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{1.4 \times 412.1 \times (27 + 273)} = 1315.6 \, m/s$$

۱۶. با استفاده از روشی که در بخش ۲-۷ برای تعیین سرعت صوت در پیش گرفته شد، معادله‌ای برای سرعت انتشار یک موج کوچک در کانال روباز به دست آورید.



حل:

برای آب که مایع تراکم‌ناپذیر است ρ ثابت است.

برای کانال روبازی به عرض واحد داریم:

$A = y \times 1$ مساحت سطح مقطع و $dA = dy$

معادلهٔ پیوستگی: $\rho V y \times 1 = \rho (V + dV)(y + dy) \Rightarrow y dV + V dy = 0$

معادلهٔ مومنتم: $P(y \times 1) - (P + dP)(y + dy) = \rho V (y + dy)(V + dV)$

$$\Rightarrow -P dy - y dP - dP dy = \rho V y \, dV + \rho V dy \, dV \Rightarrow -P dy - y dP = \rho V y \, dV \qquad (I)$$

از معادلهٔ پیوستگی داریم: $(II) \qquad dV = -\frac{V}{y} dy$

$$\Rightarrow -P dy - y dP = \rho V y \left(\frac{-V}{y} dy\right) = -\rho V^2 dy \Rightarrow P + y \frac{dP}{dy} = \rho V^2 \qquad (III)$$

در عمق y از سطح آزاد مایع فشار $\rho g y$ و در سطح آزاد فشار صفر است. پس فشار متوسط برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} \rho g y \Rightarrow \frac{dP}{dy} = \frac{1}{2} \rho g$$

$$(III) \Rightarrow \frac{1}{2} \rho g y + \frac{1}{2} y \rho g = \rho V^2 \Rightarrow V^2 = g y \Rightarrow V = \sqrt{g y}$$

۱۷. با استفاده از معادلهٔ انرژی $VdV+\frac{dP}{\rho}+d(losses)=0$ و معادلهٔ پیوستگی $\rho V=const$ و رابطهٔ $c=\sqrt{dP/d\rho}$، نشان دهید که در جریان مادون صوت در لوله‌ها، سرعت در امتداد جریان افزایش می‌یابد.

حل:

$$\rho V=cte \Rightarrow \rho dV+Vd\rho=0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho}=-\frac{dV}{V}$$

$$c=\sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \Rightarrow c^2=\frac{dP}{d\rho} \Rightarrow dP=c^2 d\rho$$

$$VdV+c^2\frac{d\rho}{\rho}+d(losses)=0 \Rightarrow VdV+c^2(-\frac{dV}{V})+d(losses)=0$$

$$\Rightarrow VdV(1-\frac{c^2}{V^2})+d(losses)=0$$

$$d(losses)>0, c^2>V^2 \Rightarrow dV>0$$

یعنی سرعت افزایش می‌یابد.

۱۸. هوا در لوله‌ای بطور ایزنتروپیک جریان دارد. در مقطعی از لوله فشار *280 kPa abs*، دما $32^{\circ}C$ و سرعت، *164 m/s* است. جسمی در معرض جریان قرار داده می‌شود و سرعت را به صفر می‌رساند. دما و فشار در نقطهٔ سکون چندر است؟

حل:

$$T=T_0+\frac{V^2}{2c_p}=32+\frac{164^2}{2\times 1.004\times 1000}=45.4^{\circ C}$$

$$P=\rho RT \Rightarrow \rho=\frac{P}{RT}=\frac{280\times 10^3}{287\times(273+32)}=3.2\ kg/m^3$$

$$P_0=P=\frac{\rho V^2}{2}=280\times 10^3+\frac{3.2\times 164^2}{2}=3.23\times 10^5 Pa=323 kPa$$

۱۹. عدد ماخ برای جریان مذکور در مسألهٔ قبل چندر است؟

حل:

$$c=\sqrt{kPT}=\sqrt{1.\times 287(273+32)}=350.1\ m/s$$

$$M=\frac{V}{c}=\frac{164}{350.1}=0.468$$

۲۰. برای جریان ایزنتروپیک، دما و فشار در نقطهٔ سکون را با دما و فشار در مخزن مقایسه کنید.

حل:

جریان ایزنتروپیک یعنی جریان ادیاباتیک برگشت‌پذیر و این بدین معنی است که هیچگونه تلفات در طول جریان وجود ندارد بنابراین اگر انرژی که به صورت جنبشی وجود دارد به صورت ایزنتروپیک به سکون تبدیل شود این انرژی باعث ترمیم دما و فشار به دما و فشار مخزن خواهد شد.

۲۱. هوا از مخزنی که دمای آن $90^{\circ}C$ و فشار آن *0.7 Mpa abs* است، به خارج جریان می‌یابد. جریان را ایزنتروپیک فرض کنید و سرعت، دما، فشار و دانسیته را در مقطعی که *M=0.60* است، حساب کنید.

حل:

با استفاده از معادله (7.3.10) داریم:

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{k-1}{2}M^2 \Rightarrow \frac{90+273}{T}=1+\frac{1.4-1}{2}\times 0.6^2 \Rightarrow T=338.6^{\circ}k$$

با استفاده از معادله (7.3.11) داریم:

$$\frac{P_0}{P}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)} \Rightarrow \frac{0.7}{P}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times 0.6^2\right)^{1.4/(1.4-1)} \Rightarrow P=0.5488MP=548.8kPa$$

با استفاده از معادله (7.3.12) داریم:

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{1/(k-1)}$$

$$\rho_0=\frac{P_0}{RT_0}=\frac{0.7\times 10^6}{287\times(90+273)}=6.719 kg/m^3$$

$$\Rightarrow \frac{6.719}{\rho}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times 0.6^2\right)^{1/(1.4-1)} \Rightarrow \rho=5.647 kg/m^3$$

$$c=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times 287\times 338.6}=368.85\ m/s$$

$$M=\frac{V}{c}\Rightarrow V=cM=368.85\times 0.6=221.3 m/s$$

۲۲. اکسیژن از یک مخزن که در آن فشار $700\ kpa$ و دما $32\overset{\circ}{C}$ است، بطور ایزنتروپیک به خارج جریان می‌یابد. در مقطعی به قطر $150\ mm$ سرعت جریان $183\ m/s$ است. دبی جرمی را به دست آورید. عدد ماخ و فشار و دما در مقطع مزبور را حساب کنید.

حل:

$$\rho_0=\frac{P_0}{RT_0}=\frac{700\times 10^3}{260\times(273+32)}=8.827\ kg/m^3$$

$$T_0=T+\frac{V^2}{2c_p} \Rightarrow T=32-\frac{(183)^2}{2\times 0.917\times 1000}=13.7^{\circ c}=286.7K$$

$$\frac{T}{T_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} \Rightarrow \frac{13.74+273}{32+273}=\left(\frac{\rho}{8.827}\right)^{1.4-1} \Rightarrow \rho=7.565\ kg/m^3$$

$$m=\rho AV=7.565\times\frac{\pi}{4}\times 0.15^2\times 183=24.5 kg/s$$

$$c=\sqrt{kRT}=\sqrt{14.\times 260\times(13.74+273)}=323 m/s$$

$$M=\frac{V}{C}=\frac{183}{323}=0.567$$

$$\frac{P_0}{p}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)} \Rightarrow \frac{700}{P}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times 0.567^2\right)^{1.4/(1.4-1)}$$

$$\Rightarrow P=562.83 kPa\ \ abs$$

۲۳. هلیوم از طریق یک نازل همگرا به قطر $12\ mm$ از مخزنی که فشار آن $400\ kPa\ abs$ و دمای آن $25^{\circ}C$ است تخلیه می‌شود. به ازای چه محدوده‌ای از فشارهای پایین دست دبی جرمی جریان حداکثر است؟ در این شرایط دبی جرمی و سرعت گاز خروجی از نازل چقدر است؟

حل:

$$P < P_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \Rightarrow P < 400 \left(\frac{2}{1.66+1}\right)^{1.66/(1.66-1)} \Rightarrow P < 195.2\,kPa$$

با استفاده از معادله (7.3.22) داریم:

$$m_{max} = \frac{A^{*}P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{k}{R}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}}$$

$$\Rightarrow m_{max} = \frac{\pi \times 0.012^2/4 \times (4\times 10^5)}{\sqrt{298}} \sqrt{\frac{1.66}{2077} \times \left(\frac{2}{1.66+1}\right)^{(1.66+1)/(1.66-1)}} = 0.0417\,kg/s$$

با توجه به اینکه در شرایط حداکثر دبی $M=1$ می‌باشد داریم:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \Rightarrow \frac{298}{T} = 1 + \frac{1.66-1}{2} \Rightarrow T = 224.1\ ^{\circ}K$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{kR}{k-1}(T_0 - T) \Rightarrow V^2 = \frac{2\times 1.66 \times 2077}{1.66-1}(298 - 224.7) = 772289.44 \Rightarrow V = 878.8\ m/s$$

۲۴. از مخزنی که فشار آن $1.75\ MPa\ abs$ و دمای آن $143^{\circ}C$ است، هوا توسط یک شیپوره؛ همگرا - واگرا تخلیه می‌شود. قطر گلوگاه شیپوره $50\ mm$ است. به ازای $M=1$ در گلوگاه T, ρ, P در گلوگاه را حساب کنید.

حل:

$$\frac{P^{*}}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0.528 \quad \Rightarrow \frac{P^{*}}{1.75} = 0.528 \Rightarrow P^{*} = 0.924\,MPa = 924\,kPa$$

$$\frac{\rho^{*}}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} = 0.634$$

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0} = \frac{1.75\times 10^4}{287\times(273+143)} = 14.65\,kg/m^3$$

$$\Rightarrow \frac{\rho^{*}}{14.65} = 0.634 \Rightarrow \rho^{*} = 9.29\ kg/m^3$$

$$\frac{T^{*}}{T_0} = \frac{2}{k+1} = 0.833 \ \Rightarrow \frac{T^{*}}{(273+143)} = 0.833 \Rightarrow T^{*} = 346.5^{\circ K}$$

۲۵. در مسألهٔ قبل در مقطعی که $M=2.4$ است، سرعت و فشار و دانسیته و دما و قطر شیپوره چقدر است؟

حل:

$$\frac{P_0}{P}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1.75}{P}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times 2.4^2\right)^{1.4/(1.4-1)}\Rightarrow P=0.1197\,MP=119.7\,kPa$$

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{1/(k-1)}$$

از مسئله قبل: $\rho_0=14.65\,kg/m^3$

$$\Rightarrow \frac{14.65}{\rho}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times 2.4\right)^{2/(1.4-1)}\Rightarrow \rho=2.157\,kg/m^3$$

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{k-1}{2}M^2\Rightarrow \frac{143+273}{T}=1+\frac{1.4-1}{2}\times 2.4^2\Rightarrow T=193.3\,k$$

$$\frac{V^2}{2}=\frac{kR}{k-1}(T_0-T)$$

$$\Rightarrow V^2=\frac{2\times 1.4\times 287}{1.4-1}(143+273-193.3)=446224\Rightarrow V=668.8\,m/s$$

$$\frac{A}{A^*}=\frac{D^2}{D^{*2}}=\frac{1}{M}\left[\frac{5+M^2}{6}\right]^3\Rightarrow \frac{D^2}{50^2}=\frac{1}{2.4}\left[\frac{5+2.4^2}{6}\right]^3\Rightarrow D^2=6007.75\Rightarrow D=77.5\,mm$$

۲۶. نیتروژن با سرعت صوت از گلوگاهی به قطر $25\ mm$ عبور می‌کند. در این مقطع، فشار $50\ kpa\ abs$ و دما $20^\circ C$ است. دبی جرمی جریان را تعیین کنید.

حل:

$$P^*=\rho^*RT^*\Rightarrow \rho^*=\frac{50\times 10^3}{297\times(273-30)}=0.665\,kg/m^3$$

$$V^*=c^*=\sqrt{kRT^*}=\sqrt{1.4\times 297\times(273-20)}=324.34\,m/s$$

$$m=\rho^*A^*V^*=0.665\times\frac{\pi}{4}\times 0.025^2\times 324.34=0.1059\,kg/s$$

۲۷. در مسألهٔ قبل برای مقطعی به قطر $40\ mm$ عدد ماخ را در دو حالت جریان مادون صوت و جریان مافوق صوت به دست آورید.

حل:

روش ۱:

$$\frac{A}{A^*}=\frac{1}{M}\left[\frac{5+M^2}{6}\right]^3=\frac{D^2}{D^{*2}}\quad\Rightarrow \frac{40^2}{25^2}=\frac{1}{M}\left[\frac{5+M^2}{6}\right]^3$$

از حل معادله فوق $M_1=0.233$ و $M_2=2.468$ بدست آورید.

بهتر است از روش زیر استفاده کنیم.

روش دوم:

$$\frac{A}{A^*}=\frac{D^2}{D^{2*}}=\frac{40^2}{25^2}=2.56$$

با مراجعه به جدول $C.4$ مشاهده می‌کنیم که $\frac{A}{A^*} = 2.56$ در محدودهٔ دو ماخ 0.22 و 0.24 قرار دارد با درون‌یابی مقدار $M_1=0.233$ بدست می‌آید همچنین $\frac{A}{A^*} = 2.56$ در محدود دو ماخ 2.46 و 2.48 قرار دارد که با درون‌یابی مقدار $M_2=2.468$ بدست می‌آید.

۲۸. می‌خواهیم $0.23\ kg/s$ مونوکسید کربن تحت شرایط بحرانی از مخزنی به فشار $2.1\ Mpa\ abs$ و دمای $38^\circ C$ تخلیه شود. قطر گلوگاه را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از معادله $(7.3.23)$ داریم:

$$m_{max} = 0.686\frac{A^*P_0}{\sqrt{RT_0}}$$

$$\Rightarrow 0.23 = 0.686 \times \frac{A^* \times \left(2.1\times10^6\right)}{\sqrt{297\times(38+273)}} \Rightarrow A^* = 4.852\times10^{-5}m^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}D^{*2} = 4.852\times10^{5} \Rightarrow D^* = 7.86\times10^{-3}m = 7.86mm$$

۲۹. می‌خواهیم یک شیپورهٔ ما فوق صوت برای هوا طراحی کنیم که عدد ماخ خروجی آن 3.5 باشد. قطر مقطع خروجی $200\ mm$ و فشار و دما در آن $-85^\circ C, 7\ kPa\ abs$ است. مساحت گلوگاه را حساب کنید. فشار و دما در مخزن را به دست آورید.

حل:

$$\frac{T_0}{T} = 1+\frac{k-1}{2}M^2 \Rightarrow \frac{T_0}{(273-85)} = 1+\frac{1.4-1}{2}\times3.5^2 \Rightarrow T_0 = 648.6k$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_0}{7} = \left(1+\frac{1.4-1}{2}\times3.5^2\right)^{1.4/(1.4-1)} \Rightarrow P_0 = 533.9kPa$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{5+M^2}{6}\right)^3 \Rightarrow \frac{\pi\times0.2^2/4}{A^*} = \frac{1}{3.5}\left(\frac{5+3.5^2}{6}\right)^3 \Rightarrow A^* = 4.627\times10^{-3}m^2$$

۳۰. برای مسألهٔ قبل قطر مقاطعی را که در آنها عدد ماخ، 1.5 , 2 , 2.5 است را به دست آورید.

حل:

با استفاده از معادله $(7.3.21)$ داریم:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{5+M^2}{6}\right)^3$$

$$M=1.5 \Rightarrow \frac{A}{4.627\times10^{-3}} = \frac{1}{1.5}\left(\frac{5+1.5^2}{6}\right)^3 \Rightarrow A = 5.5442\times10^{-3}m^2$$

$$\Rightarrow D = 0.083m = 83mm$$

$$M=2\Rightarrow\frac{A}{4.627\times10^{-3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{5+2^2}{6}\right)^3\Rightarrow A=7.808\times10^{-3}m^2$$

$$\Rightarrow D=0.010m=100mm$$

$$M=2.5\Rightarrow\frac{A}{4.627\times10^{-3}}=\frac{1}{2.5}\left(\frac{5+2.5^2}{6}\right)^3\Rightarrow A=1.22\times10^{-2}m^2$$

$$\Rightarrow D=0.125m=125mm$$

۳۱. هوا از مخزنی با فشار $1.26\ MPa\ abs$ و دمای $49^\circ C$ به یک شیپورهٔ همگرا - واگرا با قطر گلوگاه $75\ mm$ جریان می‌یابد. عدد ماخ حداکثر 0.8 است. دبی جرمی جریان را به دست آورید. فشار و سرعت و دما در مقطع خروجی را حساب کنید. عدد ماخ در مقطع خروجی 0.50 است.

حل:

$$A_{th}=\frac{\pi\times0.075^2}{4}=4.418\times10^{-3}m^2$$

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{k-1}{2}M^2\Rightarrow\frac{322}{T}=1+\frac{1.4-1}{2}\times0.8^2\Rightarrow T=28546k$$

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{0.8266\times10^6}{287\times285.46}=10.089kg/m^3$$

$$\frac{P_0}{P}=\left(1+\frac{k-1}{2}M\right)^{k/(k-1)}\Rightarrow\frac{1.26}{P}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times0.8\right)^{1.4/(1.4-1)}\Rightarrow P=0.8266MPa$$

$$V=Mc=0.8\times\sqrt{1.4\times287\times285.46}=276.94m/s$$

$$m=\rho AV=10.089\times\frac{\pi\times0.075^2}{4}\times270.94=12.077kg/s$$

در شرایط خروجی $(M=0.5)$ داریم:

$$\frac{T_0}{T_e}=1+\frac{k-1}{2}M^2\Rightarrow\frac{322}{T_e}=1+\frac{1.4-1}{2}\times0.5^2\Rightarrow T_e=306.67k$$

$$\frac{P_0}{P_e}=\left(1+\frac{k-1}{2}M\right)^{k/(k-1)}\Rightarrow\frac{1.26}{P_e}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times0.5\right)^{1.4/(1.4-1)}\Rightarrow P_e=1.0622MPa$$

$$\rho_e=\frac{P_e}{RT_e}=\frac{1.0622\times10^6}{287\times306.67}=12.0685kg/m^3$$

$$V_e=M\sqrt{kRT_e}=0.5\sqrt{1.4\times287\times30.6.67}=175.51m/s$$

۳۲. نیتروژن از یک مخزن با فشار $400\ kPa\ abs$ و دمای $25^\circ C$ در یک شیپورهٔ همگرا به قطر خروجی $60\ mm$ جریان یافته، به اتمسفر تخلیه می‌شود. سرعت خروجی و دبی جرمی جریان را حساب کنید.

حل:

ابتدا فشار بحرانی گلوگاه را حساب می‌کنیم

$$\frac{P^*}{P_0} = 0.528 \Rightarrow P^* = 0.528 \times 400 = 211.32\ kPa$$

چون $P_a = 100\ kPa$ (فشار اتمسفر) می‌باشد و $P_a < P^*$ پس گلوگاه در حالت خفگی قرار دارد و فشار خروجی صوتی خواهد شد یعنی

$$P_e = P^* = 211.32\ kPa$$

و عدد ماخ خروجی برابر با یک و سرعت خروجی برابر سرعت صوت خواهد بود پس داریم:

$$V = c = \sqrt{kRT_e}$$

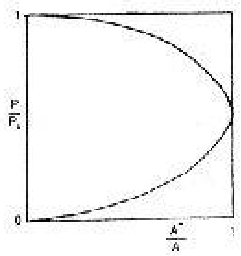
$T_e = T^*$ دمای خروجی در گلوگاه و $\frac{T^*}{T_0} = 0.833 \Rightarrow T_e = T^* = 0.833 \times 298 = 248\,°k$

$$\Rightarrow V = \sqrt{1.4 \times 297 \times 248} = 321.3\, m/s$$

با استفاده از معادله (7.3.23) داریم:

$$m_{max} = 0.686 \frac{A^* P_0}{\sqrt{RT_0}} \Rightarrow m_{max} = 0.686 \frac{\pi \times 0.06^2/4 \times 400 \times 10^3}{\sqrt{297 \times 298}} = 2.61\, kg/s$$

۳۳. معادلهٔ (۲۵-۳-۷) را برای جریان هوا بنویسید. برای محدودهٔ مقادیر P/P_0 از 0.98 تا 0.02 ؛ P/P_0 را در مقابل A^*/A بیابید.



حل:

برای هوا داریم $k=1.4$

با استفاده از معادلهٔ 7.3.25 برای $k=1.4$ داریم:

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1.4286}\left(1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{0.2857}\right) = 0.06698\left(\frac{A^*}{A}\right)^2$$

۳۴-۷ با استفاده از منحنی مسأله قبل دو نسبت فشار مربوط به $A^*/A = 0.50$ را تعیین کنید.

حل:

با مراجعه به شکل 7.5 کتاب برای $\frac{A^*}{A} = 0.5$ دو نسبت 0.095 و 0.94 برای $\frac{P}{P_0}$ بدست می‌آید.

۳۵. دریک شیپورهٔ همگرا - واگرا با قطر گلوگاه $50\ mm$ هیدروژن به صورت مافوق صوت جریان دارد. در منطقی به قطر $57\ mm$ در بخش واگرا (و نیز در بخش همگرا)ی شیپوره، نسبت فشار P/P_0 چقدر است؟

حل:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{D^2}{D^{*2}} = \frac{572}{502} = 1.3$$

از جدول کتاب به ازای مقدار فوق داریم

$$\frac{P}{P_0}=0.832 \quad , \quad \frac{P}{P_0}=0.215$$

۳۶. در مجرایی که هوا را منتقل می‌کند، یک موج ضربه‌ای رخ می‌دهد. در بالا دست موج، عدد ماخ 2.0 دما $15^{\circ}C$ و فشار $20\ kPa\ abs$ است. عدد ماخ، فشار، دما و سرعت در پایین دست موج را تعیین کنید.

حل:

با داشتن شرایط بالا دست موج ضربه‌ای یعنی $P_1=20kPa\ abs$ و $T_1=15^{\circ C}$ و $M_1=2$ می‌توان مستقیماً از فرمولهای موجود در بخش 7.4 (موج ضربه‌ای) استفاده کرد. ولی برای راحتی می‌توان از جدول کتاب استفاده می‌کنیم

$$M_1=2 \Rightarrow \begin{cases} M_2=0.577 \\ \dfrac{P_2}{P_1}=4.5 \quad , \dfrac{T_2}{T_1}=1.688 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_2=4.5\times 20=90kPa\ \ abs \ , \ \ T_2=1.688\ \times(15+273)=486\,^{\circ}k$$

برای تعیین V_2 اول سرعت صوت را در پایین دست موج ضربه‌ای حساب می‌کنیم:

$$c_2=\sqrt{kPT_2}=\sqrt{1.4\times 287\times 486}=441.9\,m/s$$

$$M_2=\frac{V_2}{c_2}\Rightarrow V_2=M_2c_2=441.9\times 0.577=254.9\,m/s$$

۳۷. در مسألهٔ قبل نشان دهید که در عبور از موج ضربه‌ای، انتروپی افزایش می‌یابد.

حل:

با توجه به مسئله قبل و جدول داریم: $c_v=0.716\ kj/kgh$ و $k=1.4$ و $M=2$

با استفاده از معادله (7.4.14) داریم:

$$s_2-s_1=c_v\,ln\left\{\frac{2kM_1^2-k+1}{k+1}\left(\frac{2+M_1^2(k-1)}{M_1^2(k+1)}\right)^k\right\}$$

$$\Rightarrow s_2-s_1=0.716\left\{\frac{2\times 1.4\times 2^2-1.4+1}{1.4+1}\left(\frac{2+2^2\times(1.4-1)}{2^2\times(1.4+1)}\right)^{1.4}\right\}=0.094\,kj/kgk$$

بنا بر این در موج ضربه‌ای افزایش آنتروپی صورت گرفته است.

۳۸. شرایط بالا دست موج ضربه‌ای را با اندیس u و شرایط پایین دست آن را با اندیس d می‌دهیم. برای یک موج ضربه‌ای قائم در جریان هوا داریم، $P_u=40\ kPa\ abs$، $t_u=40^{\circ}C$ و $V_u=550\ m/s$. M_u ، M_d، P_d و t_d را به دست آورید.

حل:

$$\rho_u = \frac{P_u}{RT_u} = \frac{40\times 10^3}{287\times(40+273)} = 0.445\ kg/m^3$$

$$M_u = \frac{V_u}{c} = \frac{550}{\sqrt{1.4\times 287\times(40+273)}} = 1.551$$

$$\frac{P_d}{P_u} = \frac{2KM_u^2-(k-1)}{k+1} \Rightarrow \frac{P_d}{40} = \frac{2\times 1.4\times 1.551^2-(1.4-1)}{1.4+1}$$

$$\Rightarrow P_d = 105.45\,kPa$$

$$\frac{P_d}{P_u} = \frac{105.5}{40} = 2.64 \rightarrow \begin{cases}\dfrac{T_d}{T_u} = 1.354\\ M_d = 0.684\end{cases}$$

$$\Rightarrow T_d = 313\times 1.354 = 423.8^{\circ k}$$

۳۹. در مسأله قبل افزایش انتروپی در موج ضربه‌ای را به دست آورید. $A=930\ cm^2$

حل:

$$s_d - s_u = c_v\,ln\left\{\frac{2kM_u^2-k+1}{k+1}\left(\frac{2+M_u^2(k-1)}{M_u^2(k+1)}\right)^k\right\}$$

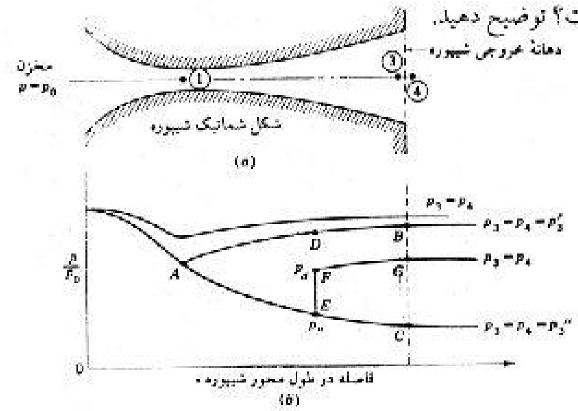
$$\Rightarrow s_d - s_u = 0.716\,ln\left\{\frac{2\times 1.4\times 1.551^2-1.4+1}{1.4+1}\left(\frac{2+1.551^2\times(1.4-1)}{1.551^2\times(1.4+1)}\right)^{1.4}\right\}$$

$$= 0.0261\ kj/kgk$$

$$m = \rho_u A V_u = 0.445\times 930\times 10^{-4}\times 550 = 22.76\,kg$$

$$\Delta s = 22.76\times 0.0261 = 0.594\,kj/s.k = 594\,j/s.k$$

۴۰. با استفاده از معادلات (۱-۳-۷)، (۴-۳-۷) و (۵-۳-۷) نشان دهید که در گلوگاه یک شیپورهٔ دلاوال یعنی درمقطع 1 از شکل a ۱۰-۷ به ازای $M\neq 1$ داریم $dp=0$ ، $dP=0$ (به شکل b ۱۰-۷ توجه کنید) آیا به ازای $M=1$ نیز چنین است؟ توضیح دهید.



شکل ۱۰-۷

حل:

با مراجعه به شکل $7\text{-}10\text{-}b$، مشاهده می‌شود که در حالتی که در مقطع I (گلوگاه) $M \neq 1$ است شیب منحنی P/P_O در این مقطع صفر است یعنی (در نقطه B) $dP=0$

که از معادله $7.3.1$ داریم $dV=0$ و درنتیجه از معادلهٔ $7.3.4$ داریم $d_\rho = 0$ اما به ازای $M=1$ یعنی زمانی که سرعت جریان در گلوگاه برابر سرعت صوت است (نقطه A) شیب منحنی صفر نبوده و در نتیجه dp و $d\rho$ صفر نیستند.

۴۱. با استفاده از معادلات (۱-۳-۷) و (۴-۳-۷) و (۵-۳-۷) شیب منحنیهای شکل b ۱۰-۷ به استثنای EFG را توجیه کنید.

حل:

برای هر دو منحنی شیب تا گلوگاه کاهش پیدا می‌کند. $(dP<0)$ از معادلات $7.3.5$ و $7.3.1$ می‌توان این امر را توجیه کرد. از معادلهٔ $7.3.5$ برای جریان مادون صوت $M<1$ نسبت $\frac{dA}{dV}$ منفی بوده و چون dA نیز منفی است (چون از مخزن تا گلوگاه سطح مقطع کاهش می‌یابد) پس dV باید مثبت باشد و از معادله $7.3.1$ نتیجه می‌شود.

$$VdV+\frac{dP}{P}=0 \quad (7.3.1) \quad dP<0$$

$$\frac{dA}{A}=\frac{A}{V}(M^2-1) \qquad (7.3.5)$$

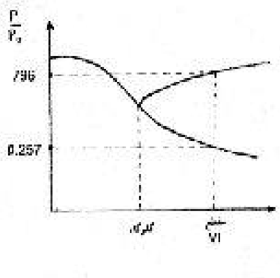
برای جریان مافوق صوت $M>1$ نسبت $\frac{dA}{dV}$ مثبت بوده و چون dA منفی است پس dV هم منفی است پس dp مثبت است که منحنی برای $M>1$ در شکل رسم نشده است.

۴۲. ابعاد یک شیپوره در جدول زیر ارائه شده است. منحنیهای ADB و AEC (شکل b ۱۰-۷) را برای این شیپوره رسم کنید (پیشنهاد: تنها یک نقطهٔ بینابینی در نظر بگیرید. مثلاً از مقطع VI استفاده کنید). مخزن محتوی هوا در فشار $300\ kPa\ abs$ و دمای $40^{\circ}C$ است.

	مقطع									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X خروجی
فاصله از گلوگاه mm	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A/A^* $[A^* = 27\ cm^2]$	1.030	1.050	1.100	1.133	1.168	1.200	1.239	1.269	1.310	1.345

حل:

به ازای نسبت $\frac{A}{A^*}$ مربوط به هر مقطع از جدول C-4 دو مقدار برای $\frac{P}{P_O}$ حاصل می‌شود که هر دو بین صفر و یک قرار دارند و مقدار بزرگتر روی منحنی ADB و مقدار کوچکتر روی منحنی AEC واقعند مثلاً



برای مقطع VI که در آن $A/A^*=1.2$ است داریم: $\frac{P}{P_0}=0.257$ و $\frac{P}{P_O}=0.796$

۴۳. با استفاده از اطلاعات مسألهٔ قبل، P_3/P_0 برای حالتی که در مقطع VI موج ضربه‌ای قائم رخ می‌دهد، حساب کنید.

حل:

برای مقطع VI داریم $\frac{A}{A^*}=1.2$، از جدول کتاب داریم:

$$M_1=1.57 \quad , \quad \frac{P_1}{P_0}=0.257 \quad \Rightarrow \quad P_1=0.257\times 300=77.1\ kPa$$

باید توجه داشت که جریان از مخزن تا نقطهٔ 1 یعنی بالادست موج ضربه ایزونتروپیک است.

حال با معلوم بودن ماخ در بالا دست موج ضربه از جدول کتاب به ازای $M_1=1.54$ داریم:

$$M_2=0.687 \quad , \quad \frac{P_2}{P_1}=2.6 \quad \Rightarrow \quad P_2=2.6\times 77.1=200.46\ kPa$$

$$, \quad \frac{P_{02}}{P_{01}}=0.917 \Rightarrow P_{02}=0.917\times 300=275.1\,kPa$$

از طرفی سطح بحرانی گلوگاه یعنی A^* برای یک مجرا در طول موج ضربهٔ عمودی افزایش می‌یابد. بنابراین برای شرایط بالادست و پایین دست موج ضربه، پارامتر دیگری معرفی می‌گردد. که عبارت است از سطح بحرانی برای بالا دست یعنی A_1^* و برای پایین دست یعنی A_2^* (درکتاب استریتر، در فصل 7 این پارامتر معرفی نشده است. در کتب دیگر مانند کتاب مکانیک سیالات تالیف $F.White$ به این مطلب پرداخته شده است)

بین A_1^* و A_2^* رابطهٔ زیر وجود دارد:

$$\frac{A_2^*}{A_1^*}=\frac{M_2}{M_1}\left(\frac{2+(k-1)M_1^2}{2+(k-1)M_2^2}\right)^{(k+1)/2(k-1)}$$

برای بالادست جریان داریم $A_1^*=A_{throat}=27\,cm^2$ و برای بالادست $A_2^*=29.457$ چون جریان از مقطع 2 تا 3 نیز ایزنتروپیک است داریم:

$$A_2^*=A_3^*=29.457 \quad , \quad P_{03}=P_{02}=275.1\,kPa$$

حال با معلوم بودن A_3^* می‌توان P_3 را با یافتن M_3 محاسبه کرد. در مقطع 3 داریم:

$$\frac{A_3}{A_3^*}=\frac{1.345\times 2}{29.457}=1.232$$

حال از رابطهٔ $\frac{A}{A^*}=\frac{1}{M}\left(\frac{1+((k-1)/2)M^2}{(k+1)/2}\right)^{k+1/2(k-1)}$ می‌توان از روش حدس و خطا یا هر روش دیگری M_3 را محاسبه کرد که نتیجه می‌شود: $M_3=0.564$

حال از معادلهٔ (7.3.11) فشار P_3 را حساب می‌کنیم.

$$\frac{P_{03}}{P_3}=\left(1+\frac{k-1}{2}M_3^2\right)^{k/(k-1)}\Rightarrow\frac{P_{03}}{P_3}=1.2416\ ,\ P_{03}=275.1kPa\Rightarrow P_3=\frac{275.1}{1.2416}=221.57$$

$$\Rightarrow\frac{P_3}{P_O}=\frac{221.57}{300}=0.739$$

۴۴. در مسألهٔ ۴۲-۷ آیا ممکن است جریان در مقطع VI دچار ناپیوستگی شود بطوریکه نحوهٔ تغییر فشار در شکل b۱۰-۷ به صورت $ADFG$ در آید؟ راهنمایی: تغییرات انتروپی را حساب کنید.

حل:

وقتی نحوهٔ تغییر فشار به صورت $ADFG$ درآید، در مقطع VI فشار پایین دست کاهش می‌یابد یعنی از نقطهٔ D تا F در شکل $7.10.b$

از مساله قبل برای فشار پایین دست داریم $P_d=200.46kPa$

برای مقطع VI داریم $\frac{A}{A^*}=1.2$ از جدول $C.4$ برای جریان مادون صوت داریم:

$$\frac{P_1}{P_0}=0.796\Rightarrow P_1=238.8KPa$$

تغییرات انتروپی را می‌توان از رابطهٔ گاز ایده‌آل حساب کرد:

$$s_2-s_1=c_v\,ln\left[\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k\right]$$

از معادلات 7.4.2-7.4.1 و 7.4.3 با حذف V_1 و V_2 به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$h_2-h_1=\frac{1}{2}(P_2-P_1)\left(\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_1}\right)$$

این رابطه چنین خواهد شد:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{1+\beta P_2/P_1}{\beta+P_2/P_1}\quad,\quad\beta=\frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{1+6(200.46/238.8)}{6+(200.46/238.8)}=0.88\Rightarrow\frac{\rho_1}{\rho_2}=1.1329$$

$$\Rightarrow s_2-s_1=c_v\,ln\left[\frac{200.46}{238.8}(1.1329)^{1.4}\right]=-0.000218\,c_v<O$$

قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود. پس مسیر فوق غیر ممکن است.

۴۵. هنگامی که موج ضربه‌ای قائم درست درداخل دهانهٔ خروجی شیپوره رخ می‌دهد، P_3/P_0 چقدر است؟ راهنمایی: در مسألهٔ ۴۲-۷ برای جریان ایزنتروپیک تا مقطع VI، فشار پایین دست موج برابر P_4 و فشار بالادست آن برابر P_3 است.

حل:

وقتی که موج ضربه قائم درست در خروجی تشکیل می‌شود جریان از مخزن تا مقطع 1 ایزونتروپیک است و داریم:

$$\frac{A}{A^*}=1.345$$

با مراجعه به جدول (ازکتاب وایت) به ازای مقدار فوق و برای جریان مافوق صوت داریم:

$$\frac{P}{P_O}=0.2002$$

مقدار $\frac{P}{P_0}$ فوق با خطی سازی بین دو مقدار زیر حاصل شده است:

$$\frac{A}{A^*}=1.3376 \Rightarrow = \frac{P}{P_0}=0.2026$$

$$\frac{A}{A^*}=1.3567 \Rightarrow \frac{P}{P_0}=0.1966$$

۴۶. اگر در خروجی شیپوره، فشار P_b بیش از مقداری باشد که به ازای آن جریان در سراسر شیپوره ایزنتروپیک است، یعنی بیش از فشار P_c در شکل b ۱۰-۷ باشد، ولی کمتر از فشاری باشد که به ازای آن امکان وقوع موج ضربه‌ای در خروجی شیپوره وجود دارد، آنگاه درست در خروجی شیپوره چه رخ می‌دهد؟ (به مسئلهٔ قبل رجوع کنید).

حل:

با مراجعه به شکل 7.6 کتاب، نقطه‌ای که شرایط آن با شرایط مسالهٔ مطابقت دارد، می‌تواند مابین نقاط f و i در نمودار بالائی باشد مانند نقطه g یا h که فشار خروجی در این نقاط از فشار P_c در شکل 7-10-b بیشتر و از فشاری که به ازای آن موج ضربه‌ای درخروجی تشکیل می‌شود (نقطهٔ f در شکل 6-7) کمتر است و چنانچه مشاهده می‌شود در این حالت موج ضربه‌ای مایل در خروجی تشکیل می‌شود.

۴۷. در شکل b ۱۰-۷ اگر P_b کمتر از P_c باشد، در داخل و خارج شیپوره چه رخ می‌دهد؟

حل:

باز هم با مراجعه به شکل 7.6 نقطه‌ای که فشار خروجی آن از P_c یعنی فشاری که جریان در آن تماماً ایزونتروپیک است، کمتر باشد، نقطهٔ k در نمودار بالائی است. که در این وضعیت موج ضربه‌ای انبساطی در خروجی تشکیل می‌شود.

۴۸. با استفاده از معادلات بخش ۶-۷ نشان دهید که در جریان آدیاباتیک واقعی در لوله‌ها، دما، فشار و دانسیته برای جریان مادون صوت کاهش می‌یابند و برای جریان مافوق صوت افزایش می‌یابند.

حل:

به عهده دانشجو گذاشته می‌شود.

۴۹. چه طولی از لولهٔ عایق به قطر $100\ mm$ و ضریب اصطکاک $f=0.018$ لازم است تا اکسیژن با $M=3.0$ وارد شود و با $M=2.0$ خارج شود؟

حل:

با استفاده از معادله (7.6.18) داریم:

$$\frac{fL}{D}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{M_0^2}-\frac{1}{M^2}\right]+\frac{6}{7}\ln\left[\left(\frac{M_0}{M}\right)^2\frac{M^2+5}{M_0^2+5}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{0.018L}{0.1}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}\right]+\frac{6}{7}\ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{2^2+5}{3^2+5}\right]\quad\Rightarrow L=1.206m=1206\ mm$$

۵۰. هوا با عدد ماخ 0.4 وارد یک لولهٔ عایق می‌شود و با عدد ماخ 0.6 از آن خارج می‌شود. فاصلهٔ بین ابتدای لوله تا مقطعی که در آن $M=0.5$ است، چند درصد کل طول لوله است؟

حل:

با استفاده از معادله (7.6.18) داریم:

$$\frac{fL}{D}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{M_0^2}-\frac{1}{M^2}\right]+\frac{6}{7}\ln\left[\left(\frac{M_0}{M}\right)^2\frac{M^2+5}{M_0^2+5}\right]$$

$$\frac{fL}{D}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{0.4^2}-\frac{1}{0.6^2}\right]+\frac{6}{7}\ln\left[\left(\frac{0.4}{0.6}\right)^2\frac{0.6^2+5}{0.4^2+5}\right]=1.817$$

$$\frac{fL_1}{D}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{0.4^2}-\frac{1}{0.5^2}\right]+\frac{6}{7}\ln\left[\left(\frac{0.4}{0.5}\right)^2\frac{0.5^2+5}{0.4^2+5}\right]=1.239$$

$$\frac{L}{L_1}=\frac{1.817}{1.239}=1.466\Rightarrow L_1=0.682L=\%68.2L$$

۵۱. برای جریان آدیاباتیک هوا در لوله‌ای به قطر $110\ mm$ و ضریب اصطکاک $f=0.025$ حداکثر طول بدون خفگی را به دست آورید. شرایط بالا دست عبارتند از: $P=200\ kPa\ abs\ ,\ V=200\ m/s\ ,\ t=50^\circ C$

فشار و دما در خروجی لوله را حساب کنید.

حل:

$$c=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times287\times(50+273)}=360.25m/s$$

$$M_O=\frac{V}{c}=\frac{200}{360.25}=0.555$$

حداکثر طول بدون خفگی موقعی بدست می‌آید که عدد ماخ در پایین دست جریان برابر 1 باشد در این شرایط از معادله (7.6.19) استفاده می‌کنیم. $(k=1.4)$

$$\frac{fL_{max}}{D}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{M_0^2}-1\right]+\frac{6}{7}\ln\frac{6M_0^2}{M_0^2+5}$$

$$\Rightarrow\frac{0.025L_{max}}{0.11}=\frac{5}{7}\left[\frac{1}{0.555^2}-1\right]+\frac{6}{7}\ln\left[\frac{6\times0.555^2}{0.555^2+5}\right]\quad\Rightarrow L_{max}=3.08\ m$$

با استفاده از معادله (7.6.22) داریم:

$$\frac{T^*}{T}=\frac{(k-1)M_0^2+2}{k+1} \Rightarrow \frac{T^*}{50+273}=\frac{(1.4-1)\times 0.555^2+2}{1.4+1} \Rightarrow T^*=285.8^{\circ k}=12.8^{\circ c}$$

با استفاده از معادله (7.6.20) داریم:

$$\frac{P^*}{P}=M_0\sqrt{\frac{(k-1)M_0^2+2}{k+1}} \Rightarrow \frac{P^*}{200}=0.555\sqrt{\frac{(1.4-1)\times 0.555^2+2}{1.4+1}}$$

$$\Rightarrow P^*=104.4\ kPa$$

۵۲. حداقل قطر لولهٔ لازم برای انتقال نیتروژن به مسافت $300\ m$ را بیابید. در بالادست دما $27^\circ C$ و سرعت $60\ m/s$ است. f را 0.020 بگیرید. لوله عایقکاری شده است.

حل:

$$c=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times 287\times(27+273)}=353.19\,m/s$$

$$M_O=\frac{V}{c}=\frac{60}{353.19}=0.17$$

حداقل قطر لازم موقعی است که در پایین دست جریان عدد ماخ برابر 1 باشد تا بدون خفگی حداکثر دبی عبور کند

بنابراین:

$$\frac{fL_{max}}{D}=\frac{5}{7}\left(\frac{1}{M_0^2}-1\right)+\frac{6}{7}ln\frac{6M_0^2}{M_0^2+5}$$

$$\Rightarrow \frac{0.02\times 300}{D_{mm}}=\frac{5}{7}\left(\frac{1}{0.17^2}-1\right)+\frac{6}{7}ln\left(\frac{6\times 0.17^2}{0.17^2+5}\right) \Rightarrow D_{mm}=0.284m=284mm$$

۵۳. در مسألهٔ قبل به ازای دبی جرمی $1.35\ kg/s$؛ فشارهای بالادست و پایین دست را به دست آورید.

حل:

با استفاده از معادله (7.6.22) داریم:

$$\frac{T^*}{T_0}=\frac{(k-1)M_0^2+2}{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{T^*}{300}=\frac{(1.4-1)(0.17)^2+2}{1.4+1} \Rightarrow T^*=251.4k$$

$$C^*=\sqrt{kRT^*}=\sqrt{1.4\times 297\times 251.4}=323.3\,m/s$$

$$M=1 \Rightarrow C^*=V^*=323.3\,m/s$$

$$m=\rho^* AV^* \Rightarrow 1.35=\rho^*\times\frac{\pi}{4}\times(0.284)^2\times(323.3) \Rightarrow \rho^*=0.0659\ kg/m^3$$

$$P^* = \rho^* RT^* = 0.0659 \times 297 \times 251.4 = 4.92 \times 10^3 Pa = 4.92\ kPa$$

$$\frac{P^*}{P_0} = M_o \sqrt{\frac{(k-1)M_0^2+2}{k+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{4.92}{P_0} = 0.17\sqrt{\frac{(1.4-1)0.17^2+2}{1.4+1}} \Rightarrow Po = 31.61\,kPa$$

۵۴. هوا از یک مخزن با دمای $t=15^\circ C$ توسط یک لولهٔ عایق به طول $6\ m$ و قطر $25\ mm$ به اتمسفر $P=100\ kPa$ تخلیه می‌شود. حداکثر دبی جرمی جریان چقدر است؟ ضریب اصطکاک لوله 0.02 است.

حل:

برای داشتن حداکثر جریان باید $M=1$ باشد.

با استفاده از معادله (7.6.19) داریم:

$$\frac{f L_m}{D} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{M^2}-1\right) + \frac{6}{7} ln \frac{6M_0^2}{M_0^2+5}$$

$$\frac{0.02\times 6}{0.025} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{M_0^2}-1\right) + \frac{6}{7} ln \frac{6M_O^2}{M_O^2+5}$$

از حل معادله بالا: $M_0=0.3112$

$$\frac{P^*}{P_0} = M_0\sqrt{\frac{(k-1)M_0^2+2}{k-1}} \Rightarrow \frac{100}{P_0} = 0.3112\sqrt{\frac{(1.4-1)\times 0.3112^2+2}{1.4+1}}$$

$$\Rightarrow P_0 = 348.646\,kPa$$

$$M_0 = \frac{V_0}{c_0} \Rightarrow V_0 = M_0 c_0 = M_0 \times \sqrt{kRT} = 0.3112 \times \sqrt{1.4\times 287\times 288} = 105.86\,m/s$$

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0} = \frac{348646}{287\times 288} = 4.218\ kg/m^3$$

$$m_{max} = \rho_0 A V_0 = 4.218 \times \pi \times \frac{0.025^2}{4} \times 105.86 = 0.219\,kg/s$$

۵۵. در یک جریان بی اصطکاک اکسیژن، در ابتدای لوله سرعت $V_1=90\ m/s$ و دما $t_1=27^\circ C$ و در انتهای لوله، عدد ماخ $M=0.5$ است. حرارت داده شده به واحد جرم گاز را به دست آورید. نسبت فشار P_1/P_2 را حساب کنید.

حل:

$$c_1=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times260\times(27+273)}=330.45\,m/s$$

$$M_1=\frac{V_1}{c_1}=\frac{90}{330.45}=0.272$$

$$\frac{T_{01}}{T_1}=1+(k-1)\frac{M_1^{\,2}}{2}\Rightarrow\frac{T_{01}}{300}=1+(1.4-1)\times\frac{0.272^2}{2}\Rightarrow T_{01}=304.44k$$

با استفاده از معادله (7.7.13) داریم:

$$\frac{T_{01}}{T_{02}}=\left(\frac{M_1}{M_2}\,\frac{1+kM_2^{\,2}}{kM_1^{\,2}}\right)^2\frac{2+(k-1)M_1^{\,2}}{2+(k-1)M_2^2}$$

$$\Rightarrow\frac{304.44}{T_{02}}=\left(\frac{0.272}{0.5}\,\frac{1+1.4\times0.5^2}{1+1.4\times0.272^2}\right)^2\frac{2+(1.4-1)0.272^2}{2+(1.4-1)0.5^2}$$

$$\Rightarrow\frac{304.44}{T_{02}}=\left(\frac{0.272}{0.5}\,\frac{1+1.4\times(0.5)^2}{1+1.4\times(0.272)^2}\right)^2\frac{2+(1.4-1)(0.272)^2}{2+(1.4-1)(0.5)^2}$$

$$\Rightarrow T_{02}=711.30k$$

$$Q=C_p(T_{02}-T_{01})=0.917(711.30-304.44)=373kj/kg$$

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2}=\frac{1+1.4\times(0.5)^2}{1+1.4\times(0.272)^2}=1.223$$

۵۶ $0.15\ kg/s$ هوا در دمای $t=0^\circ C$ و فشار $P=7\ kPa\ abs$ وارد لوله‌ای به قطر $120\ mm$ می‌شود. جریان بدون اصطکاک است. حداکثر مقدار حرارتی که می‌توان به جریان افزود، بی آنکه جریان دچار خفگی شود، چقدر است؟

حل:

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{7\times10^3}{287\times273}=0.08934\ kg/m^3$$

$$m=\rho AV\Rightarrow0.15=0.08934\times\frac{\pi}{4}\times0.12^2\times V_1\Rightarrow V_1=148.454\,m/s$$

$$c=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times287\times273}=331.197\ m/s$$

$$M=\frac{V}{c}=\frac{148.454}{331.197}=0.448$$

$$\frac{T_0}{T}=1+(k-1)\frac{M^{\,2}}{2}\Rightarrow\frac{T_0}{273}=1+(1.4-1)\times\frac{0.448^2}{2}\Rightarrow T_0=283.96k$$

با استفاده از معادله (7.7.14) داریم:

$$\frac{T_O}{T_O}=\frac{M^2(k+1)\left[2+(k-1)M^2\right]}{(1+kM^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{283.96}{T_0^*}=\frac{(0.448)^2(1.4+1)\left[2+(1.4-1)(0.448)^2\right]}{\left[1+1.4\times(0.448)^2\right]^2}\Rightarrow T_O^*=465.00$$

$$Q=c_P\,(T_0^*-T_0)=1.004\,(465.00-283.96)=181.8\,kj/kg$$

۵۷ در یک جریان بی اصطکاک همراه با انتقال حرارت در لوله، عدد ماخ از 2 به 1.75 کاهش می یابد. نسبت دما، نسبت سرعت، نسبت فشار و نسبت دانسیته را به دست آورید (k=1.4).

حل:

با استفاده از معادله (7.6.18) برای $M_1=2$ و $M_2=1.75$ داریم:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2}=\frac{1+1.4\,1.75^2}{1+1.4\,2^2}=0.801$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{M_1}{M_2}\;\frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{M_1}{M_2}\;\frac{P_1}{P_2}\right)^2=\left(\frac{2}{1.75}\times 0.801\right)^2=0.838$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}=\frac{2}{1.75}\sqrt{0.838}=1.0462$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{M_2}{M_1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}=\frac{V_2}{V_1}\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{1}{1.0462}=0.956$$

۵۸ در مسألهٔ قبل سطح مقطع لوله $5\ cm^2$ است. در ورودی $V_1=610\ m/s$, $P_1=105\ kPa\ abs$ می باشد. دبی جرمی را برای جریان هوا به دست آورید.

حل:

$$M_1=\frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}}\quad,\quad \rho_1=\frac{P_1}{RT_1}$$

$$\Rightarrow \rho_1=\frac{kP_1M_1^2}{V_1^2}=\frac{1.4\times 105\times 10^3\times 2^2}{610^2}=1.58\,kg/m^3$$

$$m=\rho_1AV_1=1.58\times 0.05\times 10^{-2}\times 610=0.482\,kg/s$$

۵۹. در جریان بی اصطکاک هوا در یک لوله برای آنکه عدد ماخ از 2 به 2.8 برسد، بایستی به ازای هر کیلوگرم هوا، چقدر حرارت به آن منتقل شود؟ $V_1=500\ m/s$.

حل:

$$M_1=\frac{V_1}{c_1}=\frac{V_1}{\sqrt{kRT}} \Rightarrow 2=\frac{500}{\sqrt{1.4\times 287\times T}} \Rightarrow T=155.55k$$

$$\frac{T_{01}}{T}=1+(k-1)\frac{M_1^2}{2} \Rightarrow \frac{T_{01}}{155.55}=1+(1.4-1)\frac{2^2}{2}$$

$$\Rightarrow T_{01}=279.99\ k$$

با استفاده از معادله (7.7.12) داریم:

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{M_1}{M_2}\ \frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{155.55}{T_2}=\left(\frac{2}{2.8}\ \frac{1+1.4\,2.8^2}{1+1.4\,2^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T_2=92.59^{ok}$$

$$\frac{T_{02}}{T_2}=1+(k-1)\frac{M_2^2}{2} \Rightarrow \frac{T_{02}}{92.59}=1+(1.4-1)\frac{(2.8)^2}{2}$$

$$\Rightarrow T_{02}=237.69k$$

$$Q=c_p(T_{02}-T_{01})=1.004\,(237.69-279.99)=-42.46kj/kg$$

۶۰. اکسیژن با سرعت $525\ m/s$ فشار $80\ kPa\ abs$ و دمای $-10^\circ C$ در لوله‌ای به قطر $60\ mm$ جریان می‌یابد. جریان را بی اصطکاک فرض کنید. چقدر حرارت بایستی به هر کیلوگرم اکسیژن داده شود تا در خروجی لوله شرایط صوتی برقرار شود؟

حل:

$$c_1=\sqrt{kRT_1}=\sqrt{1.4\times 260\times(-10+273)}=309.4m/s$$

$$M_1=\frac{V_1}{c_1}=\frac{525}{309.4}=1.679$$

$$\frac{T_{01}}{T_1}=1+(k-1)\frac{M_1^2}{2} \Rightarrow \frac{T_0}{263}=1+(1.4-1)\times\frac{1.697^2}{2}$$

$$\Rightarrow T_0=414.478$$

با استفاده از معادله (7.7.12) برای $M_2=1$ داریم:

$$\frac{T_0}{T_0^*}=\frac{M^2(k+1)[2+(k-1)M^2]}{(1+kM^2)^2}$$

$$\frac{414.478}{T_0^*}=\frac{1.697^2(1.4+1)\left(2+(1.4-1)1.697^2\right)}{(1+1.4\,1.697^2)^2}$$

$$\Rightarrow T_0^*=481.71^{ok}$$

$$Q = c_P\,(T_0^* - T_0) = 0.917 \times (481.71 - 414.478) = 61.65\,kj/kg$$

۶۱. نشان دهید که مندرجات جدول ۸-۷ در مورد نحوهٔ تغییر دانسیته، فشار و سرعت، صحیح است.

حل:

به عهده دانشجو گذاشته می‌شود.

۶۲. قانون اول ترمودینامیک [معادلهٔ (۱-۸-۳)] را برای جریان ایزوترم گاز کامل در یک لولهٔ افقی بیان کرده، رابطه‌ای برای حرارت داده شده به واحد جرم گاز جاری به دست آورید.

حل:

قانون اول به صورت زیر است:

$$q_H = \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 = w_s + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2$$

چون جریان ایزوترم است پس دما ثابت بوده و $u_1=u_2$ و کار محوری هم وجود ندارد پس $w_s=0$ از تغییر انرژی ناشی از تغییر ارتفاع هم می‌توان برای گازها صرفنظر کرد پس $gz_1=gz_2$. از طرفی از قانون گاز کامل داریم:

$$P = \rho RT \quad , \quad T = const \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad q_H = \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

۶۳. هوا در یک لولهٔ افقی به قطر $75\ mm$ بطور ایزوترم جریان می‌یابد. در ورودی لوله $V_1=90\ m/s$, $t=50^\circ C$ و $P_1=200\ kPa$ است و حداکثر طول لوله برای این جریان چقدر است؟ اصطکاک را 0.02 بگیرید. چقدر حرارت به هر کیلوگرم جرم هوا منتقل می‌شود؟

حل:

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{1.4 \times 287 \times (50 + 273)} = 360.25\,m/s$$

$$M = \frac{V}{c} = \frac{90}{360.25} = 0.25$$

$$\frac{f}{D} L_{max} = \frac{1 - kM^2}{kM^2} + \ln(kM^2)$$

$$\Rightarrow \frac{0.02}{0.075} L_{max} = \frac{1 - 1.4\,0.25^2}{1.4\,0.25^2} + \ln[1.4\,0.25^2] \Rightarrow L_{max} = 30m$$

$$\frac{T_{01}}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \Rightarrow \frac{T_{01}}{323} = 1 + \frac{1.4-1}{2} \times 0.25^2 \Rightarrow T_{01} = 327.04\,k$$

$$\frac{T_{02}}{T} = 1 + (k-1)\frac{M_2^2}{2} \;, M_2 = \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \frac{T_{02}}{323} = 1 + (1.4-1)\frac{1}{2 \times 1.4}$$

$$\Rightarrow T_{02} = 369.14\,k$$

$$Q = c_P\,(T_{02} - T_{01}) = 1.004 \times (369.14 - 327.04) = 42.3\,kj/kg$$

۶۴. هوا با دمای ثابت $15^\circ C$ در لوله‌ای به قطر $25\ mm$ جریان دارد. سرعت ورودی $60\ m/s$ و سرعت خروجی $90\ m/s$است. طول لوله چقدر است؟ f را 0.016 بگیرید.

حل:

با انتگرال گیری از معادله $(7.8.6)$ داریم:

$$\frac{f}{D}\int_0^L dx = \frac{1}{k}\int_{M_1}^{M_2} \frac{(1-kM^2)}{M^4}\, dM^2$$

از تغییر متغیر $M^2=z$ استفاده کرده و طرف دوم عبارت بالا را محاسبه می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{fL}{D} = \frac{1}{k}\left[\left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2}\right) - 2k\ln\frac{M_2}{M_1}\right]$$

$$M_1 = \frac{V_1}{c} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT}} = \frac{60}{\sqrt{1.4\times 287\times 288}} = 0.1764$$

$$M_2 = \frac{V_2}{C} = \frac{V_2}{\sqrt{KRT}} = \frac{90}{\sqrt{1.4\times 287\times 288}} = 0.2646$$

$$\Rightarrow \frac{0.016L}{0.025} = \frac{1}{1.4}\left[\left(\frac{1}{0.1764^2} - \frac{1}{0.2646^2}\right) - 2\times 1.4\times \ln\frac{0.2646}{0.1764}\right]$$

$$\Rightarrow L = 18.66\, m$$

۶۵. در مسألهٔ قبل اگر فشار در ورودی لوله $150\ kPa$ باشد، فشار در خروجی آن چقدر است؟ حرارت داده شده به لوله در هر ثانیه چقدر است؟

حل:

با استفاده از معادله ذکر شده قبل از معادله $(7.8.6)$ داریم:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dM}{M} \Rightarrow \int_{P_1}^{P_2}\frac{dp}{p} = -\int_{M_1}^{M_2}\frac{dM}{M}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{P_2}{P_1} = -\ln\frac{M_2}{M_1} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{150} = \frac{60}{90} \Rightarrow P_2 = 100kPa$$

$$\frac{T_{01}}{T} = 1 + (k-1)\frac{M_1^2}{2} \Rightarrow \frac{T_{01}}{288} = 1 + (1.4-1)\frac{0.176^2}{2} \Rightarrow T_{01} = 289.78k$$

$$\frac{T_{02}}{T} = 1 + (k-1)\frac{M_2^2}{2} \Rightarrow \frac{T_{02}}{288} = 1 + (1.4-1)\frac{0.265^2}{2} \Rightarrow T_{02} = 292.04k$$

$Q = c_p (T_{02} - T_{01}) = 1.004 \times (292.04 - 289.78) = 2.27\, kj/kg$

$m = \rho_1 A V_1$

$\rho = \dfrac{P}{RT} = \dfrac{150 \times 10^3}{287 \times 288} = 1.8\, kg/m^3$

$\Rightarrow m = 1.8 \times \pi \times \dfrac{(0.025)^2}{4} \times 60 = 0.053\, kg/s$

$\Rightarrow Q = 2.27 \times 10^3 j/kg \times 0.053\, kg/s = 120 j/s$

۶۶. هیدروژن از یک شیپورهٔ همگرا در $P=14\ kPa$, $M=1$ و $t=-18^\circ C$ وارد لوله‌ای می‌شود. برای جریان ایزوترم در لوله، حداکثر طول لوله را بر حسب قطر آن به دست آورید. تغییرات فشار در این طول را حساب کنید. $f=0.016$.

حل:

$\dfrac{f}{D} L_{max} = \dfrac{1 - kM^2}{kM^2} + ln(kM^2)$

$\dfrac{0.016}{D} L_{max} = \dfrac{1 - 1.41^2}{1.41^2} + ln(1.4 \times 1^2) \qquad \Rightarrow L_{max} = 3.172 D$

$\dfrac{P^{*t}}{P} = \sqrt{k} M \Rightarrow \dfrac{P^{*t}}{14} = \sqrt{1.4} \times 1 \Rightarrow P^{*t} = 16.56 kPa$

$\triangle P = P^{*t} - P = 16.56 - 14 = 2.56 kPa$

۶۷. اکسیژن دردمای ثابت $20^\circ C$ از یک مخزن تحت فشار $13\ MPa$ از طریق لوله‌ای به قطر $3\,mm$ و طول $3\ m$ به مخزن دیگری تحت فشار $11\ MPa$ جریان می‌یابد. f را 0.016 بگیرید. دبی جرمی جریان را به دست آورید.

حل:

$\dfrac{M_2}{M_1} = \dfrac{P_1}{P_2} \Rightarrow \dfrac{M_2}{M_1} = \dfrac{13}{11} = 1.1818 \Rightarrow M_2 = 1.1818 M_1$

$\dfrac{fL}{D} = \dfrac{1}{kM_1^2} - \dfrac{1}{kM_2^2} + 2 ln \dfrac{M_1}{M_2}$

$\Rightarrow \dfrac{0.016 \times 3}{0.003} = \dfrac{1}{1.4 \times M_1^2} - \dfrac{1}{1.4 \times (1.1818 M_1)^2} + 2 ln\left(\dfrac{1}{1.1818}\right)$

از حل معادله بالا: $M_1 = 0.1144 \Rightarrow M_2 = 0.13170$

$\rho_1 = \dfrac{P_1}{RT} = \dfrac{13 \times 10^6}{360 \times 293} = 170.65\, kg/m^3$

$M_1 = \dfrac{V_1}{c_1} \Rightarrow V_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{kRT} = 0.11144 \times \sqrt{1.4 \times 260 \times 293} = 36.39\, m/s$

$$m=\rho_1 AV_1=170.65\times\frac{\pi\times 0.003^2}{4}\times 36.39=0.0439\,kg/s$$

۶۸. قرار است $0.9\ kg/s$ نیتروژن از مخزنی با فشار $1.4MPa$ به مخزن دیگری با فشار $1.12MPa$ منتقل شود فاصله دو مخزن $30m$ است برای جریان ایزوترم در دمای $27c$ حداقل قطر لولهٔ لازم را بدست آورید؟ f را 0.016 بگیرید.

حل:

$$\rho_1=\frac{P_1}{RT_1}=\frac{1.4\times 10^6}{297\times(27+273)}=15.71\,kg/m^3 \quad , \quad \rho_2=\frac{P_2}{RT_2}=\frac{1.12\times 10^6}{297(27+273)}=12.57\,kg/m^3$$

$$V_1=\frac{m}{\rho_1 A}=\frac{0.9}{15.71\times\pi D^2/4}=\frac{0.073}{D^2}$$

$$V_2=\frac{m}{\rho_2 A}=\frac{0.9}{12.57\times\pi D^2/4}=\frac{0.091}{D^2}$$

$$c=\sqrt{kRT_1}=\sqrt{1.66\times 297\times 300}=353.19\,m/s$$

$$M_1=\frac{V_1}{c}=\frac{0.073/D^2}{353.19}=\frac{2.065\times 10^{-4}}{D^2} \quad , \quad M_2=\frac{V_2}{c}=\frac{0.091/D^2}{353.19}=\frac{2.581\times 10^{-4}}{D^2}$$

$$\frac{fL}{D}=\frac{1}{KM_1^2}-\frac{1}{KM_2^2}+\ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2$$

$$\frac{0.016\times 30}{D}=\frac{1}{1.4\times\left((2.065\times 10^{-4})/D^2\right)^2}-\frac{1}{1.4\times\left((2.581\times 10^{-4})/D^2\right)^2}+\ln\left(\frac{\left((2.065\times 10^{-4})/D^2\right)}{\left((2.581\times 10^{-4})/D^2\right)}\right)$$

از حل معادله فوق جواب مورد قبول برای D عبارت است از: $D=0.0383m=38.3mm$