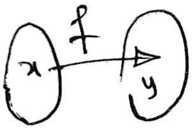
A/1

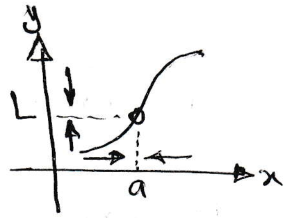
حد و پیوستگی:

تابع



$y = f(x)$

متغیر وابسته ← y ، $f(x)$ → متغیر مستقل



مفهوم حد: رفتار مقادیر تابع در نزدیکی یک نقطه

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

توجه: اولین گام در محاسبه حدود قرار دادن مقدار نقطه به جای نقطه مستقل تابع می‌باشد

در محاسبه حدود توابع ۷ حالت ابهام وجود دارد

1^{∞} $\quad \infty^{0}$ $\quad 0^{0}$ $\quad \infty-\infty$ $\quad 0\times\infty$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{0}{0}$

تعریف نشده: $\frac{1}{0}$

مبهم: $\frac{0}{0}$

راههای رفع ابهام:

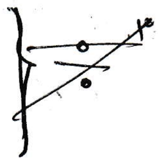
۱. حذف عامل صفر از صورت و مخرج برای $\frac{0}{0}$

۲. در نظر گرفتن بزرگترین توان صورت و مخرج برای $\frac{\infty}{\infty}$

۳. $0\times\infty$

$\frac{0}{0} \leftarrow \infty = \frac{1}{0}$

$\frac{\infty}{\infty} \leftarrow 0 = \frac{1}{\infty}$



۴. $\infty-\infty$ گرفتن مخرج مشترک $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$

قاعده هوپیتال ← $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$

مقدار حد زیر کدام است؟

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x^2)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{-2x}{1+x^4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2(1+x^4)}{-2x^4} e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^4}{-2x^4} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$$

بزرگترین توان صورت و مخرج ←

یادآوری $\Rightarrow a^b = e^{b\operatorname{Ln} a}$

۵) $0^0 \longrightarrow 0\times\infty \longrightarrow \dfrac{\infty}{\infty}$

$\infty^0 \longrightarrow 0\times\infty \longrightarrow \dfrac{\infty}{\infty}$

$1^\infty \longrightarrow \infty\times 0 \longrightarrow \dfrac{0}{0}$

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\operatorname{Ln}(1+\sin 2x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{Ln}(1+\sin 2x)}{x}} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}}{1}} = \underline{e^2}$$

$(0\times\infty)$

- به ازای چه مقادیری از ثابت های a و b، مقدار $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x + ax^{-2} + b) = 0$ می شود؟

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x + a + 3bx^2}{3x^2} = \frac{a+3}{0}$$

$a+3=0$

$\to \boxed{a=-3}$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 0}\frac{-9\sin 3x + 6bx}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-9(3x)+6bx}{6x} = \frac{-27+6b}{6} = 0$$

هم ارزی $\dfrac{\sin 3x \sim 3x}{x\to 0}$

$\to \boxed{b = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}}$

۶ استفاده از رابطه هم‌ارزی :

الف: $x \to 0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$a^x = 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

توجه: اگر $x \to 1$:

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

ب: $x \to \infty$

$\cancel{ax}$

$$\sqrt{x^2 + ax + b} \simeq \left|x + \frac{a}{2}\right|$$

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \simeq e^{ab}$$

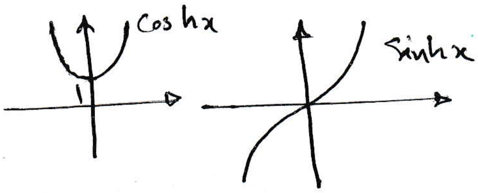
$$x^n < e^{ax} < x! < x^x$$

$$\cosh x \simeq \frac{1}{2}e^x$$

$$\sinh x \simeq \frac{1}{2}e^x$$

حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} (\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

یادآوری :



$$\lim_{x\to\infty} (\cosh x)^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \underset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}e^x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} e = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times e = e$$

ـ حاصل حد زیر کدام است؟

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x}\right)^{1-x} \overset{1^\infty}{=\!=} \lim e^{(1-x)\ln\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x}\right)}$$

هنگامی که $x\to\infty$ عبارت زیر Ln نزدیک به 1 (میل) می‌شود

(توجه قبلی)

$$\overset{\times\infty}{\underset{\text{هم‌ارزی}}{=}} \lim_{x\to\infty} e^{(1-x)\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{(1-x)(-5x+1)}{x^2+3x}} = e^5$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{12}{x^2}} \overset{1^\infty}{=\!=} \lim_{x\to0} e^{\frac{12}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x\to0} e^{\frac{12}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}$$

هم‌ارزی $x-\frac{x^3}{3!}$

$$\lim_{x\to0} e^{\frac{12}{x^2}\left(\frac{\sin x - x}{x}\right)} = \lim_{x\to0} e^{\frac{12}{x^2}\left(\frac{-\frac{x^3}{6}}{x}\right)} = e^{-2}$$

۸/۵

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-1}{3x^2+2}\sin\frac{1}{x} \overset{\infty\times 0}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-1}{3x^2+2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{4}{3}$$

$$\sin\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

<u>توجه</u> : مشتق گیری از تابع انتگرال

$$w(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t,x)\,dt$$

$$w'(x) = u'(x)\cdot f(u(x),x) - v'(x)\, f(v(x),x) + \int_{v(x)}^{u(x)} f_x(t,x)\,dt$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\,dt \overset{\infty\times 0}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{x^3}$$

$$\overset{\frac{0}{0},\ \text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\,\overbrace{\tan x}^{\simeq x}}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

مقدار حد زیر را بدست آورید

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)} - x$$

۱) ∞

۲) $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

۳) $(a_1\cdot a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$

۴) 0

$$n=1 \rightarrow \lim_{x\to\infty} (x+a_1)-x = a_1$$

$$n=2 \rightarrow \lim_{x\to\infty} \sqrt{(x+a_1)(x+a_2)} - x \overset{\infty-\infty}{=\!=}$$

$$\sqrt{x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2} \simeq \left| x+\frac{a_1+a_2}{2} \right|$$

$$x \to \infty$$

$$\to \; = \lim_{x\to+\infty} \left(x+\frac{a_1+a_2}{2} - x \right) = \frac{a_1+a_2}{2}$$

اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ هرگاه

$\lim_{x\to 0} f(x)$ کدام است؟

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{\infty\times 0}{=} \begin{cases} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} \overset{\div Hop}{=} \text{— نتیجه نمی‌دهد} \\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\div Hop}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \end{cases}$$

۱) -1

۲) 0 ✓

۳) 1

۴) موجود نیست

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

محاسبه حدود با استفاده از مجموع ریمان:

تعریف انتگرال معین:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

حالت خاص: $\left.\begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

A / ٧

- حاصل $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n}\ln 2\right)$ کدام است؟

$\ln 2 \to \left(1+\frac{n}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

$$=(1+x)\ln(1+x)-x\Big|_0^1=2\ln 2-1$$

۱) صفر
۲) $\ln 2$
۳) $2\ln 2-1$ ✓
۴) e

فرمول (از جزء به جزء) $\boxed{\int \ln(x+a)\,dx=(x+a)\ln(x+a)-x+c}$

حاصل حد زیر کدام است؟

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$=\tan^{-1}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

مقدار حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

۱) $\frac{\pi}{4}-\ln 2$
۲) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$
۳) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\ln 2$
۴) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ln 2$

$\tan^{-1}x$ تابعی صعودی است چون مشتق آن همیشه مثبت است
$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)>0$

$$\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{2i-2}{2n} < \frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{2i-1}{2n} < \frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{2i}{2n}$$

$n \to \infty$ $\qquad$ $n \to \infty$

$$\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx < \lim \frac{1}{n}\sum \tan^{-1}\frac{2i-1}{2n} < \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$$

↑ قضیه ساندویچی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum \tan^{-1}\frac{2i-1}{n} = \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$$

$$\begin{cases} \tan^{-1}x = u \to \frac{1}{1+x^2}dx = du \\ dx = dv \to v = x \end{cases}$$

$$= x\tan^{-1}x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

دنباله‌ها: یک دنباله یک رشته از اعداد به صورت $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ می‌باشد که a_1 جمله اول دنباله و ... a_n را جمله nام یا جمله عمومی دنباله گویند. بطور فشرده دنباله را با نماد $\{a_n\}$ نشان می‌دهند.

حد دنباله: $\lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n$

اگر حد فوق موجود باشد می‌گوییم دنباله همگرا است و در غیر این صورت دنباله را واگرا می‌نامند.

بعنوان مثال $\{\frac{1}{n}\}$ همگرا به صفر است، $\{\frac{n+1}{n}\}$ همگرا به ۱ است، دنباله $\{(-1)^n\}$ واگرا است، $\{2^n\}$ واگرا است (حد a_n $(n\to\infty)$ بینهایت می‌شود)، $\underbrace{\{\frac{1}{n}\sin n\}}$ همگرا به صفر است.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\underbrace{\sin n}_{\text{کراندار}}$$

$$= 0 \times (\text{کراندار}) = 0$$

توجه: دنباله کران دار و بیکران

$\{a_n\}$ کران دار است هرگاه: $\forall n: |a_n| < M$

$\{a_n\}$ بی کران است هرگاه کران دار نباشد.

مثال: $\{\frac{1}{n}\}$ و $\{(-1)^n\}$ کران دار و $\{2^n\}$ بی کران است.

توجه: دنباله های یکنوا

دنباله صعودی: $a_n \leqslant a_{n+1}$ (مساوی حذف شود کلمه اکیداً اضافه می شود)

دنباله نزولی: $a_n \geqslant a_{n+1}$

مثال: دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ دنباله ای نزولی است و دنباله $\{1-\frac{1}{n}\}$ صعودی است

توجه:

۱) اگر دنباله همگرا باشد، حتما کران دار است $\longrightarrow$ دنباله بی کران واگرا است

۲) دنباله کران دار لزوماً همگرا نیست مثلاً $\{(-1)^n\}$

پس دنباله کران دار و یکنوا حتماً همگرا است

دنباله خاص: $\{(1+\frac{a}{n})^{bn}\}$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^{bn} = e^{ab}$$

مثال: دنباله $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ همگرا به e است $\{(1-\frac{1}{n})^n\}$ همگرا به e^{-1} است

$\{(\frac{n}{n+1})^n\}$ همگرا به $\frac{1}{e}$ است

$$\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\right)$$

دنباله خاص :

$$\{r^n\} \longrightarrow \begin{cases} -1<r<1 & \text{همگرا به صفر است} \\ r=1 & \text{همگرا به یک است} \\ |r|>1 & \text{واگراست (بی‌کران)} \\ r=-1 & \text{واگراست (کران‌دار)} \end{cases}$$

مثال : $\left\{\dfrac{2^n+3^n+5^n}{7^n}\right\}$ ← همگرا به صفر است

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\overset{<1}{\tfrac{5}{7}}\right)^n\right\} = 0$$

مثال : درمورد همگرایی و واگرایی دنباله $\left\{\dfrac{r^n}{r^n+1}\right\}$ بحث کنید

$$\begin{cases} -1<r<1 & \text{همگرا به صفر است} \\ r=1 & \text{همگرا به } \tfrac{1}{2} \text{ است} \\ |r|>1 & \text{همگرا به 1 است} \\ r=-1 & \text{دنباله نداریم} \end{cases}$$

— درمورد همگرایی و واگرایی $\left\{\dfrac{r^n}{r^{2n}+1}\right\}$ بحث کنید

$$\begin{cases} -1<r<1 & \text{همگرا به صفر است} \\ r=1 & \text{همگرا به } \tfrac{1}{2} \text{ است} \\ |r|>1 & \text{همگرا به صفر است} \\ r=-1 & \text{واگراست . (کران‌دار)} \end{cases}$$

توجه : اگر دنباله‌ای دارای دو زیر دنباله با حدود مختلف باشد آن دنباله واگراست

مثال : $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{3}\right\}$

$n=6k \rightarrow \left\{\cos\dfrac{6k\pi}{3}\right\} = \{\cos 2k\pi\} \longrightarrow$ همگرا به 1

$n=6k+1 \rightarrow \left\{\cos\dfrac{(6k+1)\pi}{3}\right\} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

$\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

چند رابطه هم ارزی :

$$\sqrt[n]{n!} \simeq \frac{n}{e}$$

$$\sqrt[n]{(bn)!} \simeq \left(\frac{bn}{e}\right)^b$$

$$n^\alpha < e^{an} < n! < n^n$$

مثال :

$$\left\{\sqrt[n]{n}\right\} \to 1 \quad \text{همگرا به : } 1$$

$$\left\{\sqrt[n]{a>0}\right\} \to 1 \quad \text{همگرا به } 1 \text{ است}$$

مقدار حد زیر کدام است :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1} \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{n}$$

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\pi}{2}$

3) π 4) ∞

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi n^2}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi n^2}{2n^2} = \frac{\pi}{2}$$

حاصل $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ کدام است؟

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e}}{n} = \frac{1}{e}$$

دنباله $\{a_n\}$ کدام است؟

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) \ln n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \times \infty$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \underset{e^x \text{ هم ارزی}}{\simeq} 1 + \frac{\ln n}{n}$$

$$\to \boxed{\sqrt[n]{n} - 1 \simeq \frac{\ln n}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} \overset{Hop}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}\ln n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n}$$

$$\overset{Hop}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2^n + 3^n + \cdots + (k-1)^n + k^n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱) ۱ ۲) k ۳) $\sqrt{k}$ ✓ ۴) k^2

$$\to \text{if } k=2 \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2}$$

عمران ۹۱. تعداد صد

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n \right)^{\frac{1}{n}}$$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) e

۳) ۲

$\boxed{۴) ۱ ✓}$

$$1 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n \leq \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ تا}}$$

$$1 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n \leq n$$

$$1^{\frac{1}{n}} \leq \left(\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n \right)^{\frac{1}{n}} < n^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

طبق قضیه ساندویچ حد وسطی هم ۱ خواهد شد

دنباله $\{a_n\}$ بصورت $a_n = a_{n-1} + n^2 \ (n \geq 2)$ ، $a_1 = 1$ تعریف شده است

a_n کدام است؟

$\boxed{\text{فرمولهای بازگشتی}}$

۱) $\frac{n(n+1)}{2}$ ۲) $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

۳) $\frac{n(2n+1)}{4}$ ✓۴) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n=2 \to a_2 = a_1 + 4 = 5 \to$ گزینه ۴ اگر $n=2$ بگذاریم حاصل ۵ خواهد شد $\to$ (۴) ✓ گزینه

فرض کنید $\alpha > 1$ و $c > 0$ اعداد ثابت باشند دنباله $\{x_n\}$ با تعریف

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 x_n + \frac{2}{\alpha} x_n^{1-\alpha} \quad , n \geq 1$$

و $x_1 = c$ به کدام عدد همگراست.

۱) $\sqrt[\alpha]{2}$ ۲) $2\sqrt{\alpha}$ ۳) $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ۴) $\sqrt[\alpha]{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}$

$$\text{if } \alpha = 2 \to x_{n+1} = \frac{1}{4} x_n + x_n^{-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} L = \frac{1}{4} L + \frac{1}{L}$$

L: عددی است که جملات در بینهایت به آن همگرا می‌شوند

$$\frac{3}{4} L = \frac{1}{L} \to L^2 = \frac{4}{3} \to L = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

به ازای $\alpha = 2$ با گزینه ۴ همخوانی دارد

فرض $x > 1$ ، $\lim_{n \to \infty} \frac{[x] + [x^2] + \cdots + [x^n]}{x^n}$ حاصلش کدام است.

۱) $\frac{x-1}{x}$ ✓۲) $\frac{x}{x-1}$ ۳) $\frac{x}{x+1}$ ۴) 1

$$\text{if } x = 2 \to \lim \frac{2 + 4 + \cdots + 2^n}{2^n}$$

تصاعد هندسی: $\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2(1-2^n)}{1-2}}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2$$

روش کلید

$$x-1 < [x] \leqslant x$$

$$x^2-1 < [x^2] \leqslant x^2$$

$$\vdots$$

$$x^n-1 < [x^n] \leqslant x^n$$

$$\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x^n} < \frac{[x]+[x^2]+\cdots+[x^n]}{x^n} \leqslant \frac{x+x^2+\cdots+x^n}{x^n}$$

$$\frac{\frac{x(1-x^n)}{1-x}-n}{x^n} < \qquad \leqslant \frac{\frac{x(1-x^n)}{1-x}}{x^n}$$

$$\frac{\frac{x(1-x^n)}{1-x}}{x^n} - \underbrace{\frac{n}{x^n}}_{n\to\infty} \to 0 < \qquad \leqslant \frac{\frac{x(1-x^n)}{1-x}}{x^n}$$

قضیه ساندویچ

اگر $A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{m=1}^{n} [mx]}{n^2}$ باشد، مقدار A کدام است.

1) $x/2$ 2) x 3) $\frac{[x]}{2}$ 4) $[x]$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$$

$\frac{A}{10}$

$$x-1 < [x] \leq x$$

$$\vdots$$

$$nx-1 < [nx] \leq nx$$

$$\frac{x+2x+\cdots+nx-n}{n^2} < \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2} \leq \frac{x+2x+\cdots+nx}{n^2}$$

$$\frac{x\,n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < \qquad \leq \frac{x\,n(n+1)}{2n^2}$$

$$\frac{1}{n} \to 0$$

$$n \to \infty \qquad\qquad n \to \infty$$

$$\frac{xn^2}{2n^2} = \frac{x}{2} \qquad \text{قضیه ساندویچ} \qquad \frac{xn^2}{2n^2} = \frac{x}{2}$$

$$\longrightarrow \underline{A = x/2}$$

حدود شامل جزء صحیح: برای محاسبه حدود شامل جزء صحیح ابتدا مقدار جزء صحیح را بایستی محاسبه و سپس حد را بدست آوریم مثال:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x|}{[x]} = \lim_{x\to -1^+} \frac{|x|}{-1} = \lim_{x\to -1} \frac{-x}{-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{[x^2]-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overset{\text{صفر مطلق}}{0}}{x^2-4} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{[x^2]-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x^2-4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

توجه: حد $\lim_{x\to a} [f(x)]$

$$\lim_{x\to a} [f(x)] \to \begin{cases} \text{if } f(a) \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [f(a)] \\ \text{if } f(a) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

f صعودی در همسایگی a {

$$\lim_{x\to a}[f(x)] \begin{cases} \text{if } f(a)\notin \mathbb{Z} \rightarrow [f(a)] \\ \text{if } f(a)\in \mathbb{Z} \end{cases}$$

f در همسایگی a صعودی
$$\begin{cases} \lim_{x\to a^+}[f(x)] = f(a) \\ \lim_{x\to a^-}[f(x)] = f(a)-1 \end{cases}$$

f در همسایگی a نزولی
$$\begin{cases} \lim_{x\to a^+}[f(x)] = f(a)-1 \\ \lim_{x\to a^-}[f(x)] = f(a) \end{cases}$$

f در a max : $\lim_{x\to a}[f(x)] = f(a)-1$

f در a min : $\lim_{x\to a}[f(x)] = f(a)$

مثال :

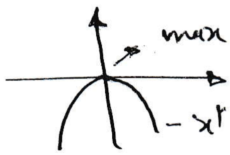
تابع صعودی

$$\lim_{x\to 0}[5x] = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+}[5x] = 0 \\ \lim_{x\to 0^-}[5x] = -1 \end{cases}$$

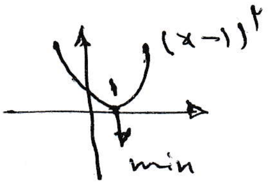
تابع نزولی

$$\lim_{x\to 0}[-3x] = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+}[-3x] = -1 \\ \lim_{x\to 0^-}[-3x] = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}[-x^2] = -1$$



$$\lim_{x\to 1}[(x-1)^2] = 0$$



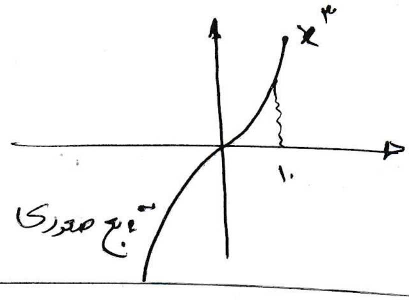
$$\lim_{x\to 0^-} [x^n] = \begin{cases} 0 & \text{n زوج باشد} \\ -1 & \text{n فرد باشد} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left([x] + [x^2] + \cdots + [x^{100}] \right) = -50$$

۵۰ تا زوج ← 0

۵۰ تا فرد ← -1

$$\lim_{x\to 10^-} \frac{[x^3]-x^3}{[x]-x} = \lim_{x\to 10^-} \frac{999-1000}{9-10} = 1$$



پیوستگی:

تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

(از لحاظ نموداری حفره و انفصال نداشته باشیم)

تابع $f(x)$ در نقطه a را پیوسته راست گوییم هرگاه: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

همچنین در نقطه a پیوسته چپ گوییم هرگاه: $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

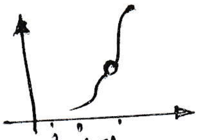
مثال: تابع $[x]$ در اعداد غیرصحیح پیوسته است و در اعداد صحیح پیوستگی راست دارد

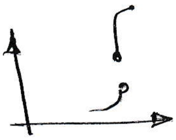
توجه: تابع $f(x)$ در بازه I پیوسته می‌باشد هرگاه در نقاط درون بازه پیوسته و در صورت داشتن نقاط مرزی پیوسته یکطرفه داشته باشد.

توجه: مجموع و تفاضل، حاصل ضرب، خارج قسمت و ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است.

توجه: توابع چندجمله‌ای، مثلثاتی و معکوس آنها، توابع هذلولی و معکوس آنها، توابع نمایی و لگاریتمی روی دامنه‌هایشان پیوسته هستند

توجه: دو نوع ناپیوستگی داریم: ۱. ناپیوستگی رفع شدنی ۲. ناپیوستگی اساسی





اگر تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x^2-x} & x\neq 0,1\\ a & x=0,1\end{cases}$ در $[0,1]$ پیوسته باشد a کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\pi$ ۳) π ۴) نشدنی

$\forall x:\ 0<x<1 \longrightarrow$ f پیوسته است

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x\to 1^-}} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{0}{0}\overset{Hop}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\pi\cos\pi x}{2x-1}=-\pi\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{0}{0}\overset{Hop}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\pi\cos\pi x}{2x-1}=-\pi\end{cases}$$

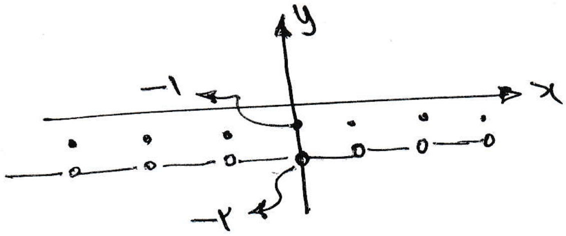
$$\Rightarrow \boxed{a=-\pi}$$

به ازای کدام مقادیر x تابع با ضابطه $f(x)=[x-1]+[-x]$ ناپیوسته است؟

۱) تمام مقادیر x بجز صفر ۲) فقط در صفر ۳) فقط تمام مقادیر مثبت ۴) تمام مقادیر صحیح

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$f(x)=[x]+[-x]-1=\begin{cases}-1 & x\in\mathbb{Z}\\ -2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



$\longrightarrow$ گزینه ۴

در تمام مقادیر صحیح

- تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{1}{[3x-5]}$ در فاصله $0\leq x<1$ چند ناپیوستگی دارد

$$f(x)=\frac{1}{[3x]-5}$$

ناپیوسته ناپیوسته

$0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1$

پیوسته راست صفر

اعداد صفر و $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ داخل جز صحیح را عدد صحیح می‌کند و تابع جز صحیح در نقاط صحیح ناپیوسته چپ

پیوستگی راست

1) 1 2) 3 3) هیچ 4) بی‌نهایت

در دو 2 نقطه ناپیوستگی دارد در $[0,1)$ در

نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x]+[2x]$ در $[0,2]$ کدام است؟

$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2$

در نقاط $\frac{1}{2}$ ، 1 ، $\frac{3}{2}$ ، 2

نقاط پیوسته تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x\in Q \\ x^2+2x & x\notin Q \end{cases}$$

$x^3=x^2+2x$

$\longrightarrow x(x^2-x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$

توجه شود در این نقاط تابع پیوسته و در تمام نقاط غیر از این 3 نقطه ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to 1^+}([x]+[2x]) = 1+2=3$$

$$\lim_{x\to 1^-}([x]+[2x]) = 0+1=1$$

مشتق و کاربرد آن :

مفهوم : نسبت تغییرات وابسته ناشی از تغییرات مستقل بر تغییرات مستقل بصورت آنی (~~دیفرانسیل~~)

دیفرانسیل : تغییرات آنی متغیر وابسته را دیفرانسیل گوئیم

تعریف مشتق : اگر تابع $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد مشتق تابع در نقطه x_0 بصورت زیر تعریف می کنیم

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

معادلاً تعریف مشتق تابع $f(x)$ را بصورت زیر داریم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مشتقات یک طرفه :

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'_-(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

اگر تابع f با دامنه R داشته باشیم

$$f(x_1+x_2) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)\cdot f(x_2)} \,,\quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

به ازاء هر x_1 و x_2 در دامنه تابع آنگاه مشتق تابع $f(x)$ کدام است ؟

1) $1+f^2(x)$ 2) $1-f^2(x)$ 3) $f(x)$ 4) $f^2(x)$

راه حل اول : حدس $f(x) = \tan x$ گزینه 1

راه حل دوم :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)\cdot f(\Delta x)} - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)\,(1+f^2(x))}{\Delta x\,(1-f(x)\cdot f(\Delta x))} = \frac{1+f^2(x)}{1-f(x)\cdot f(0)} = 1+f^2(x)$$

$f(0)$ صفر است چون $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ وقتی $x \to 0$ پس $f(0)$ هم باید ؟

سمت صفر میل کند تا حد آن یک شود

مثال: به ازای چه مقادیر n تابع $f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق دارد؟ $(n \in \mathbb{N})$

شرط پیوستگی: $\lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = 0 \times$ کراندار $= 0$ ✓

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n \sin\frac{1}{x} - 0}{x} \longrightarrow \begin{cases} \text{if } n=1 \to \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \to \text{موجود نیست} \\ \text{if } n\neq 1 \to \lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin\frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow f'(0) = \begin{cases} \text{ندارد} & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$$

قواعد مشتق گیری:

- قاعده زنجیره‌ای (مشتق تابع ترکیب)

$$\begin{matrix} y = f(u) \\ u = g(x) \end{matrix} \longrightarrow y = f(g(x))$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = g'(x)\cdot f'(g(x)) \\[2ex] \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} \end{cases}$$

- اگر $f(x)=\dfrac{4x-1}{2\sqrt{x}+1}$ ، مشتق تابع $\left(f(3-2f(x))\right)^4$ در $x=1$ کدام است؟

$$f(1)=1$$
$$f'(1)=+1$$

$$\longrightarrow 4\left(f(3-2f(x))\right)'\left(f(3-2f(x))\right)^3$$

$$=4(-2f'(x))\left(f'(3-2f(x))\right)\left(f(3-2f(x))\right)^3$$

$$\xrightarrow{x=1} -8f'(1)\cdot f'(1)=-8f'^2(1)=\boxed{-8}$$

۱) ۴۲+ ۲) ۸- ✓ ۳) ۶- ۴) ۴-

توجه: طبق رابطه قاعده زنجیره‌ای با d ها می‌توان مانند کسرها رفتار کرد

- اگر $u=x^3+2x$ ، $t=u\sqrt{4-u}$ ، مقدار $\dfrac{dx}{dt}$ به ازای $u=3$ کدام است

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(\sqrt{4-u}-\frac{u}{2\sqrt{4-u}}\right)(3x^2+2x)$$

وقتی $u=3 \longrightarrow x=1$ باید باشد

$$\begin{cases}u=3\\x=1\end{cases}\xrightarrow{\frac{dt}{dx}}=\left(1-\frac{3}{2}\right)\times 5=\boxed{-\frac{5}{2}}\longrightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{dx}}=-\frac{2}{5}$$

نسبت تغییر $(x^2-\sqrt{x})$ بر تغییر $\left(x-\frac{1}{x}\right)$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

$$\left.\frac{d(x^2-\sqrt{x})}{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right|_{x=1}=\left.\frac{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}\right|_{x=1}=\frac{3/2}{2}=\frac{3}{4}$$

- صنایع ۹۱ :

اگر $f(x)=1+\int_0^x \cos(t^2)dt$ ، $g(x)=\frac{1}{x}$ در این صورت $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = ?$

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{\int_0^x \cos t^2\, dt}{x}} \underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x^2}{1}} = e$$

صنایع ۹۱ : فرض کنید $I_n=\int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x}dx$ برای $n\in \mathbb{N}$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} I_n = ?$$

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$x>0$

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

$$-\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x}dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

$$-(\ln(n+1)-\ln n) \leqslant I_n \leqslant \ln(n+1)-\ln n$$

$$\ln\frac{n}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \ln\frac{n+1}{n}$$

$n\to\infty$ $n\to\infty$

$$0 \leqslant I_n \leqslant 0$$

$$\rightarrow \lim I_n = 0$$

$\infty \to n$ فشردگی

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}+\cdots+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\ 2n+n}}{\sqrt{3n}}}\right]=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{2n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{2n}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{2}}}\,dx \qquad \sqrt{1+\frac{x}{2}}=u$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{2}}}\,dx=du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot u\Big|_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}}4\,du=\frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1\right)=\underline{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$\lim_{x\to0}(x-\sin x+\cos 2x)^{x^{-2}}\overset{1^{\infty}}{=}\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(x-\sin x+\cos 2x)}$$

MBA ۹۱

نزدیک به ۱

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{(x-\sin x+\cos 2x-1)}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{x^2\left(\frac{1}{6}x-2\right)}{x^2}}=e^{-2}$$

$\frac{1}{6}x^3$ هم ارز

$\frac{-4x^2}{2}$ هم ارز

MBA
۹۱

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}} \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

مواد
۹۱

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=?$$

۱) $\ln\sqrt{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱ ✓
۴) وجود ندارد

$$\boxed{= \lim \frac{1}{n}\sum \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \xrightarrow{\text{در اصل}} \left(\frac{i}{n^2}\right)} \longrightarrow \frac{\text{غلط است}}{}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}} \le \text{عبارت داخل پرانتز} \le \underset{n\to\infty}{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}$$

$$1 \le \;//\; \le 1$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه فشار}} \lim_{n\to\infty}\left(\quad\right)=1$$

حسابداری ۹۱

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$$

۱) $\frac{2}{9}$
۲) $\frac{4}{9}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{2}{3}$

$$\xrightarrow{\infty-\infty} \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{(3x^2-4)(3x+2)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{2x^3}{9x^3}=\frac{2}{9}\ ✓$$

A
۲۶

علوم کامپیوتر و ...
۹۱

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} \overset{\frac{\infty}{\infty},\ \text{Hop}}{=\!=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{2x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{2e^{x^2}}{2x e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

مکانیک
۹۰

$$\lim_{x\to 0} \frac{\underbrace{\ln(1+x)}_{x} \underbrace{(2^x-1)}_{x\ln 2}}{(\underbrace{\operatorname{Arc}\sin x}_{x})^2}$$

۱) $\frac{1}{2}\ln 2$

۲) $2\ln 2$

۳) $\ln 2$ ✓

۴) $(\ln 2)^2$

$a^x = 1 + x\ln a + \cdots$

هم ارزی

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln 2}{x^2} = \ln 2$$

MBA
۹۰

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{2}{x}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{2}{x}\ln\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0},\ \text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{\frac{2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}}{1}} = e^2$$

رابطه:

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$$

سوال
۹۰

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\frac{1}{\ln x}} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\tan x)}$$

Hop , $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\frac{1}{x}}} = \lim e^{\frac{\cancel{x}\sec^2 x}{\underset{\text{هم ارز }(\cancel{x})}{\underbrace{\tan x}}}} = e$$

توجه شود از همان اول هم ارز $\tan x$ را می‌توانستیم بنویسیم تا ساده‌تر شود

تهران ۹۰

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2 x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k^2 x^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2 x^2}\, dt$$

$tx = u \to x\,dt = du$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+(tx)^2}\, dt$$

$$= \int_0^x \frac{\frac{1}{x}\, du}{1+u^2} = \frac{1}{x} \tan^{-1}(u) \Big|_0^x = \frac{1}{x}\tan^{-1} x \;\checkmark$$

$$\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1} ax + c$$

A

۲۸

عمران نقشه برداری ۹۰ : فرض کنید تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر باشد مقدار

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f(a+\tfrac{1}{n}) + f(a+\tfrac{2}{n}) + \cdots + f(a+\tfrac{k}{n}) - k f(a)\right)$$

که در آن k عدد طبیعی است کدام است؟

۱) $f'(a)$ ۲) $k f'(a)$ ۳) $f'(a)+f(a)$ ۴) $\frac{k(k+1)}{2} f'(a)$ ✓

$$\overset{\infty\times 0}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{f(a+\frac{1}{n}) + f(a+\frac{2}{n}) + \cdots + f(a+\frac{k}{n}) - k f(a)}{\frac{1}{n}}$$

$$\underset{\text{Hop}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{n\to\infty} f'(a+\tfrac{1}{n}) + 2 f'(a+\tfrac{2}{n}) + \cdots + k f'(a+\tfrac{k}{n})$$

$$= f'(a) + 2 f'(a) + \cdots + k f'(a) = f'(a)\,\frac{k(k+1)}{2}$$

MBA ۹۰ :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+\tfrac{1}{n})(1+\tfrac{2}{n})\cdots(1+\tfrac{n}{n})} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\left(\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1+\frac{n}{n})\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+\frac{i}{n})} = e^{\int_0^1 \ln(1+x)\,dx} = e^{(x+1)\ln(x+1) - x\Big|_0^1}$$

$$= e^{2\ln 2 - 1} = e^{\ln 4} \cdot e^{-1} = \frac{4}{e}$$

۸/۲۹

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{e}+\sqrt[3]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{2}{3}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}}{n}$$

---

if: $\lim_{x\to 0} f(x) = 3 \xrightarrow{\text{then}} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x f(x)} = ?$

۱) 0 ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ∞

$$\xrightarrow[\text{HOP}]{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{f(x)+x f'(x)} = \frac{2}{f(0)} = \frac{2}{3}$$

MBA

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+2h)-f(2-h)}{h} = \frac{3}{5} \leftarrow \text{اگر}$$

مشتق $\underline{f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$ به ازای $x=\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) -0.16 ۲) -0.8 ✓ ۳) -1.6 ۴) -1.2

$$\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)' = \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x\sqrt{x}}\, f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} = -4f'(2)$$

$$\xrightarrow[\text{Hop}]{\frac{0}{0}} \lim_{h\to 0} \frac{2f'(2+2h)+f'(2-h)}{1} = 3f'(2) = \frac{3}{5} \to f'(2) = \frac{1}{5}$$

$$\to -4f'(2) = -\frac{4}{5} = \boxed{-0.8}\ ✓$$

مشتق تابع معکوس :

$$y=f(x) \longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

$$\boxed{\frac{d f^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{d f(x)}{dx}}}$$

اگر $f(x)=x\sqrt{3+x^2}$ آنگاه مقدار $\left(f^{-1}(-2)\right)'$ کدام است؟

۱) $2/5$ ۲) $\frac{\sqrt{7}}{11}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{11}{\sqrt{7}}$

$$y=-2 \longrightarrow x=-1$$

$$f'(x)=\sqrt{3+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}$$

$$\left(f^{-1}(-2)\right)'=\frac{1}{f'(-1)}=$$

$$f'(-1)=\frac{5}{2}$$

$$\left(f^{-1}(-2)\right)'=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{2}{5}$$

مشتق ضمنی : مشتق گیری از معادلات .

$$F(x,y)=0 \begin{cases} y'=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y} \\ x'=\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{F_y}{F_x} \end{cases}$$

توجه مهم : اگر از یک معادله مشتق رابطه را بخواهیم مشتقات ۲ دیفرانسیل را بگیریم؛ مشتق گیری ضمنی نمی باشد

عمران ، ۸۵ : اگر $x^3-y^3=1$ آنگاه مقدار y'' برابر است با:

۱) xy^3 ۲) $\frac{-2x}{y^5}$ ۳) y^2/x^5 ۴) $\frac{x^2+1}{y^5}$

$$F(x,y)=x^3-y^3-1=0$$

$\frac{8}{31}$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2}{-3y^2} \longrightarrow y' = \frac{x^2}{y^2}$$

مشتق دوم ضمنی نسبت $\longrightarrow$ $y'' = \frac{2xy^2 - 2yy'x^2}{y^4}$

$$y'' = \frac{2xy^2 - 2y\cdot\frac{x^2}{y^2}\cdot x^2}{y^4} = \frac{2xy^3 - 2x^4}{y^5} = \frac{2x(y^3 - x^3)}{y^5} = \frac{-2x}{y^5}$$

مشتق تابع انتگرال:

$$\left(\int_u^v f(t,x)\,dt\right)' = v' f(v,x) - u' f(u,x) + \int_u^v f_x(t,x)\,dt$$

ریاضی اگر تابع f چنان باشد که $x^2\cos\pi x = \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,dt$ آنگاه $f(4)$ برابر است با

1) -16π 2) -8 3) 8 4) 32

مشتق‌گیری از طرفین $\longrightarrow$ $2x\cos\pi x - \pi x^2\sin\pi x = \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$

$f(\sqrt{x}) = 2 \Leftarrow x = 4$ $\longrightarrow$ $8\cos 4\pi - 16\pi\sin 4\pi = \frac{1}{4} f(2)$

$$\longrightarrow f(2) = 32$$

عمران ۹۱: با استفاده از معادله زیر، مقدار $f(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

$$f(\pi) = 4 \quad , \quad f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}\,dt$$

1) $4-\ln 2$ 2) $8+\ln 2$ 3) $8-\ln 2$ 4) $4+\ln\sqrt{2}$

مشتق از طرفین $\longrightarrow 2f'(x)\cdot f(x) = f(x)\cdot\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{\sin x}^{-u'}}{\underbrace{2+\cos x}_{u}}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(2+\cos x) + C$$

$$\longrightarrow \begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(2+\cos x) + C \\ f(\pi) = 4 \end{cases} \longrightarrow \underline{f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(2+\cos x) + 4}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2 + 4 \longrightarrow$$ گزینه ۱

سؤال ، فرض کنید $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t e^{tx}}$ حاصل $F'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{x}\left(3e^{-x^3} - 2e^{-x^2}\right)$ ۲) $\frac{1}{x^2}\left(2e^{-x^3} - e^{-x^2}\right)$

۳) $\frac{1}{x^3}\left(e^{-x^3} - xe^{-x^2}\right)$ ۴) $\frac{1}{x}\left(2e^{-x^3} - e^{-x^2}\right)$

$$F'(x) = 2x\cdot\frac{1}{x^2 e^{x^3}} - \frac{1}{x e^{x^2}} + \int_x^{x^2} -e^{-tx}\,dt$$

$$= \frac{2}{x}e^{-x^3} - \frac{1}{x}e^{-x^2} - \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \underbrace{-x}_{u'} e^{\overbrace{-tx}^{u}}\,dt = \frac{2}{x}e^{-x^3} - \frac{1}{x}e^{-x^2} + \frac{1}{x}e^{-tx}\Big|_x^{x^2}$$

$$\frac{2}{x}e^{-x^3} - \frac{1}{x}e^{-x^2} + \left(\frac{1}{x}e^{-x^3} - \frac{1}{x}e^{-x^2}\right) \longrightarrow$$ گزینه ۱

$$= \frac{3}{x}e^{-x^3} - \frac{2}{x}e^{-x^2} = \frac{1}{x}\left(3e^{-x^3} - 2e^{-x^2}\right)$$

مشتق تابع توان:

$$a^b = \begin{cases} \text{متغیر مشتق در پایه: } & b a' a^{b-1} \\ \text{متغیر مشتق در توان: } & (b' \operatorname{Ln} a)\, a^b \longrightarrow (۲^{\sin x})' = (\cos x \operatorname{Ln} ۲)\, ۲^{\sin x} \\ \text{هم در پایه و هم در توان متغیر باشد: } & (e^{b \operatorname{Ln} a})' = \end{cases}$$

$$(x^x)' = (e^{x \operatorname{Ln} x})' = (\operatorname{Ln} x + 1)\, e^{x \operatorname{Ln} x} = (\operatorname{Ln} x + 1)\, x^x$$

ریاضی: مشتق تابع $f(x) = \sin(x^x)$ برای $x > 0$ کدام است؟

۱) $x^x \cos x^x$ ۲) $(x^x \operatorname{Ln} x) \cos x^x$ ۳) $(\cos x^x) \operatorname{Ln} x$

✓ ۴) $x^x (1 + \operatorname{Ln} x) \cos x^x$

مشتق‌گیری لگاریتمی:

$$y = f(x)$$

$$\operatorname{Ln} y = \operatorname{Ln} f(x)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \longrightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot y$$

کامپیوتر: اندازه مشتق عبارت $y = \dfrac{(x+1)^5 (4x-1)^6}{(x+2)^7 (3x-1)^4}$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

۱) $۱۱/۹$ ۲) $۱۳/۶$ ۳) $۹/۱۱$ ۴) $۱۳/۹$

$$y(1) = \frac{۲^۵ \times ۳^۶}{۳^۷ \times ۲^۴} = \frac{۲}{۳}$$

$$\operatorname{Ln} y = 5 \operatorname{Ln}(x+1) + 6 \operatorname{Ln}(4x-1) - 7 \operatorname{Ln}(x+2) - 4 \operatorname{Ln}(3x-1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{x+1} + \frac{24}{4x-1} - \frac{7}{x+2} - \frac{12}{3x-1}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{y'}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2} + \frac{24}{3} - \frac{7}{3} - \frac{12}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{17}{3} = \frac{-21+34}{6} = \frac{13}{6}$$

$$\rightarrow y' = \frac{13}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{9}$$

مشتق توابع پارامتری:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

- مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ را برای $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ برای $t=1$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) −۱   ۳) −۲ ✓   ۴) ۱

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-3t^2}{1-2t} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{-6t(1-2t)+2(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1-2t} \xrightarrow{t=1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2$$

مشتقات مرتبه بالاتر:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

توجه: برای مشتق‌گیری‌های متناسب با مرتبه n داریم:

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\frac{1}{a-bx} = \frac{b^n\, n!}{(a-bx)^{n+1}}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\frac{1}{a+bx} = \frac{(-1)^n b^n\, n!}{(a+bx)^{n+1}}$$

$$y = \sin ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

$$y = \cos ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(0)}(x)\cdot g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f^{(1)}(x)\cdot g^{(n-1)}(x) + \cdots\cdots$$

$$+ \binom{n}{n} f^{(n)}(x)\cdot g^{(0)}(x)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

MBA مشتق مرتبه نهم تابع $y = \dfrac{1}{2x^2 + x}$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

$$y = \frac{1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{2x+1}$$

$$\rightarrow y^{(9)} = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{10}} - 2\cdot\frac{(-1)^9\, 2^9\, 9!}{(2x+1)^{10}} = \frac{(-1)^9 \cdot 9!}{x^{10}} - 2\,\frac{(-1)^9 \cdot 2^9 \cdot 9!}{(2x+1)^{10}}$$

$$\rightarrow y^{(9)}\Big|_{x=-1} = -9! + 2^{10}\times 9! = \underline{1023 \times 9!}$$

۱) $511 \times 8!$ ۲) $513 \times 8!$ ۳) $1025 \times 9!$ ۴) $\underline{1023 \times 9!}$ ✓

مشتق مرتبه ۱۵ تابع $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $14! - 13$ ۴) $15!$

$$f(x) = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{g(x)}$$

$$f^{(15)}(x) = \binom{15}{0} x \cdot \frac{15!}{(1-x)^{16}} + \binom{15}{1} \frac{14!}{(1-x)^{15}}$$

$$\rightarrow f^{(15)}(2) = 2 \times 15! - 15! = \underline{15!}$$

روش گیلر!

$$F(x)=\frac{x-1+1}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$$

$$F^{(15)}_{(x)}=\frac{15!}{(1-x)^{16}}\longrightarrow F^{(15)}_{(2)}=15!$$

- مشتق مرتبه دهم تابع با ضابطه $f(x)=\ln(1+\frac{x}{2})^2$ به ازای $x=-3$ کدام است؟

1) $-10!$ 2) $2\times 9!$ 3) $-2\times 9!$ 4) $\frac{1}{2}\times 10!$

$$f(x)=2\ln(1+\frac{x}{2})$$

$$f'(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1+x/2}=\frac{2}{2+x}\xrightarrow{\text{حالا ۹ بار مشتق می‌گیریم}}\underset{(x=-3)}{f^{(10)}(x)}=2\cdot\frac{(-1)^9\cdot 9!}{(2+x)^{10}}=-2\times 9!$$

- مشتق دهم تابع $f(x)=x^2\sin x$ را بدست آورید ($x=\frac{\pi}{4}$)

MBA

اگر $y=\sin(3\operatorname{Arcsin}x)$ حاصل $(1-x^2)y''-xy'$ کدام است؟

1) $9y$ 2) $8y$ 3) $-9y$ 4) $-6y$

$$\begin{cases}\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\\ \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\end{cases}$$

$y = \sin x \longleftrightarrow x = \operatorname{Arc}\sin y$

$y = \sin 3\alpha \quad , \quad \alpha = \operatorname{Arc}\sin x \rightarrow \sin\alpha = x$

$y = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$y = 3x - 4x^3 \rightarrow y' = 3 - 12x^2 \rightarrow y'' = -24x$

$\rightarrow (1-x^2)(-24x) - x(3-12x^2) = -24x + 24x^3 - 3x + 12x^3$

$= 27x + 36x^3 = -9(3x - 4x^3) = \underline{-9y}$

وجود ریشه تابع :

قضیه مقدار میانی: (وجود حداقل ریشه)

اگر تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد ، $f(a)\cdot f(b) < 0$ ($f(a), f(b)$ مختلف العلامه اند)

آنگاه وجود دارد حداقل $c \in (a,b)$ که $f(c) = 0$ است.

قضیه وایراشتراس: (تنها وجود یک ریشه)

اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته (1

$f(x)$ بر (a,b) مشتق پذیر (2

(3 $f(a)\cdot f(b) < 0$

(4 $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) \neq 0 \longrightarrow$ تابع یا صعودی است یا نزولی

آنگاه فقط و فقط یک $c \in (a,b)$ موجود است بطوریکه $f(c) = 0$

حداکثر ریشه:

اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته

$f(x)$ بر (a,b) مشتق پذیر

$f'(x)$ بر $[a,b]$ $\underline{(n-1)}$ ریشه داشته باشد

آنگاه $f(x)$ بر $[a,b]$ حداکثر n ریشه دارد

عمران: معادله $3\tan x + x^3 = 2$ دارای

$3\tan x + x^3 = 2$

✓ ۱) تنها یک ریشه در فاصله $[0, \frac{\pi}{4}]$ است.

۲) دو ریشه در فاصله $[0, \frac{\pi}{4}]$ است

۳) در این فاصله ریشه ای ندارد

۴) دارای ۳ ریشه در این فاصله است.

$\to f(x) = 3\tan x + x^3 - 2$

f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ پیوسته است

f بر $(0, \frac{\pi}{4})$ مشتق پذیر است

$f(0) = -2 < 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\pi^3}{64} > 0$

$f'(x) = 3\sec^2 x + 3x^2 > 0$ (واکیداً صعودی)

عمران: در مورد تعداد جواب‌های معادله $x^2 = x\sin x + \cos x$ می‌توان گفت:

۱) دقیقاً یک جواب ندارد

۲) بیش از دو جواب دارد

۳) دقیقاً دو جواب دارد

۴) جوابی ندارد

$f(x) = x\sin x + \cos x - x^2$

پس واکیداً

$f(0) = 1 > 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} < 0$

$f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x - 2x = x(\cos x - 2) < 0$ → تابع نزولی است به ازای $x > 0$ → تابع f برای $x > 0$ تنها یک ریشه دارد

$f \to [0, \frac{\pi}{2}] \to$ پیوسته

$f \to (0, \pi/2) \to$ مشتق پذیر

تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس نمودار تابع نسبت به محور y ها متقارن است. پس در $x < 0$ هم یک جواب دارد

→ دقیقاً دو جواب دارد

محاسبه نقاط اکسترمم نسبی تابع:

توجه: اگر $f'(x)>0$ آنگاه $f(x)$ صعودی است (در بازه I)

اگر $f'(x)<0$ بر I آنگاه $f(x)$ بر I نزولی است

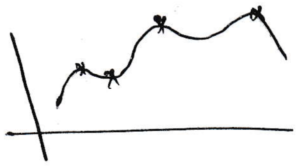
اگر $f''(x)>0$ آنگاه $f(x)$ در بازه I تقعر به بالا است ~~(___)~~

اگر $f''(x)<0$ بر I آنگاه $f(x)$ در بازه I تقعر به پایین است

اگر f در بازه I صعودی یا نزولی باشد یکنوا گوییم

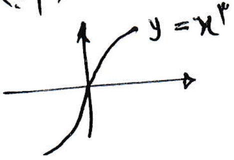
نقطه بحرانی:

$x=a$ را نقطه بحرانی $f(x)$ گوییم هرگاه $f'(a)=0$ یا $f'(a)$ موجود نباشد.



نقاط اکسترمم نسبی تابع:

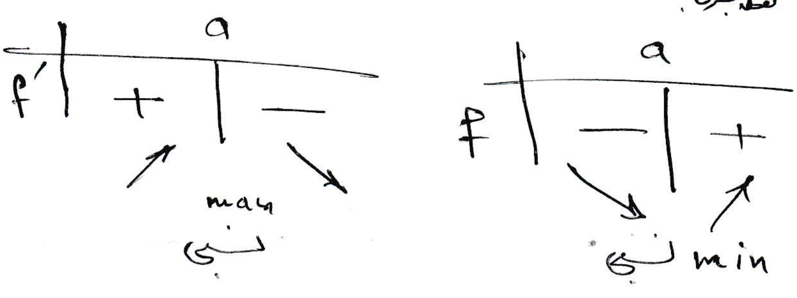
نقاط اکسترمم نسبی تابع حتماً بحرانی می‌باشند اما عکس آن برقرار نیست مثلاً: $f(x)=x^3$ در نقطه $(0,0)$ نقطه بحرانی دارد ولی آن نقطه، نقطه اکسترمم تابع نیست



برای این منظور دو آزمون به نام آزمون‌های اول و دوم را مطرح می‌کنیم

آزمون اول:

اگر $x=a$ نقطه بحرانی باشد.



آزمون دوم:

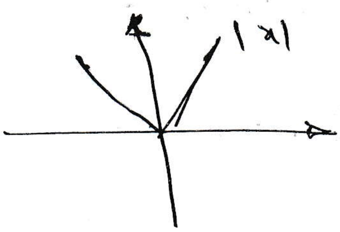
اگر $x=a$ نقطه بحرانی از نوع $f'(a)=0$ باشد

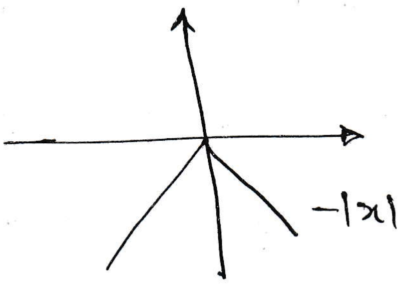
$$f''(a)\begin{cases} f''(a)>0 \longrightarrow x=a \leftarrow \text{min نسبی} \\ f''(a)<0 \longrightarrow \text{max نسبی} \rightarrow x=a \end{cases}$$

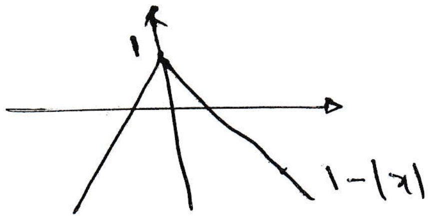
تابع: MBA $\frac{A}{40}$

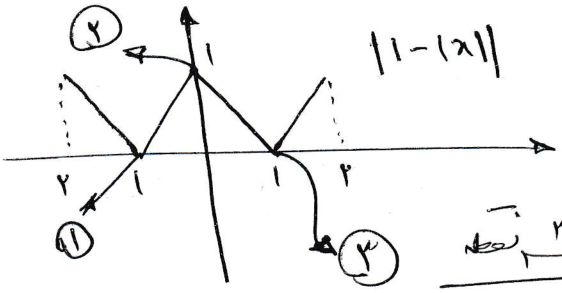
تابع $f(x)=\left|1-|x|\right|$ در بازه $[-2,2]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴









۳ نقطه

صنایع — مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-12x^2+1$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

$$f'(x)=4x^3-4x^2-24x=4x(x^2-x-6)=4x(x-3)(x+2)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{آزمون مشتق دوم}} f''(x)=12x^2-8x-24 \begin{cases} x=0 \longrightarrow f''(x)=-24 \ (\text{منفی}) \rightarrow \max f = f(0)=1 \end{cases}$$

گزینه ۲

A/41

مثال: در مورد تابع $f(x) = x \ln x$ $(0 \leq x \leq 1)$ (صفر نقطه ناپیوستگی رفع شدنی است) کدام درست است؟

۱) دارای مینیمم مقدار $\frac{1}{e}$ است → درست نیست

۲) دارای ماکزیمم مقدار $\frac{1}{e}$ است

۳) تقعر به بالا است

۴) تقعر به پایین است

$$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$$ → نقطه بحرانی

آزمون دوم: $f''(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$

$x = \frac{1}{e}$ نقطه min نسبی تابع است و مقدار min تابع $-\frac{1}{e}$ است

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

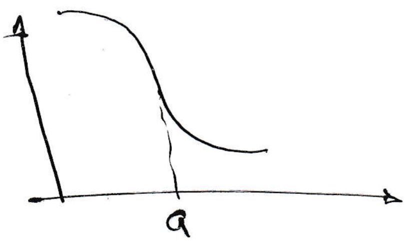
$f''(x) = \frac{1}{x} \geq 0 \quad 0 < x \leq 1$ پس می‌توانیم نتیجه بگیریم تقعر به سمت بالا است.

گزینه ۳

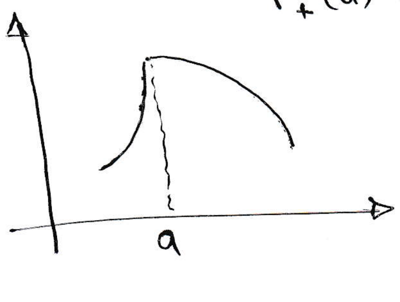
نقطه عطف: نقطه c را نقطه عطف تابع f گوییم هرگاه $f'(c)$ در c موجود باشد (مقدار ∞ مجاز است) (مشتق چپ و راست یکی باشد) (یعنی خط مماس در نقطه c بتوان رسم کرد) و مشتق دوم در آن نقطه تغییر علامت دهد

اگر مشتق دوم در نقطه c موجود باشد مقدار آن صفر است

به نمودارهای زیر دقت کنید



$$f'_-(a) = -\infty, \quad f'_+(a) = -\infty \rightarrow f'(a) = -\infty$$

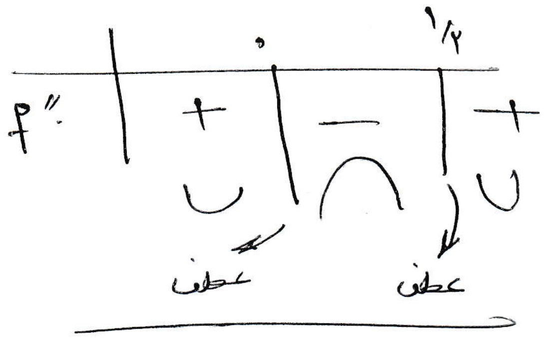


$$f'_-(a) = +\infty, \quad f'_+(a) = 0$$ → عطف نیست $x = a$

مثال: نقاط عطف تابع $f(x)=4x^4-4x^3$ را بدست آورید.

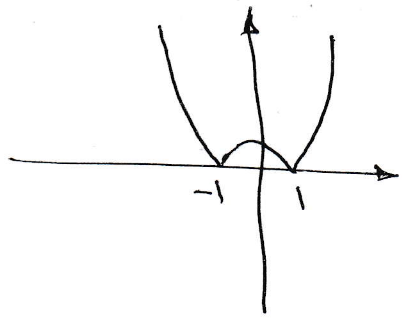
(چون تابع دارای مشتق دوم است، پس نقاط عطف را در نقاطی که مشتق دوم صفر می‌شود جستجو می‌کنیم)

$$f'(x)=12x^3-12x^2 \longrightarrow f''(x)=48x^2-24x=24x(2x-1)\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$



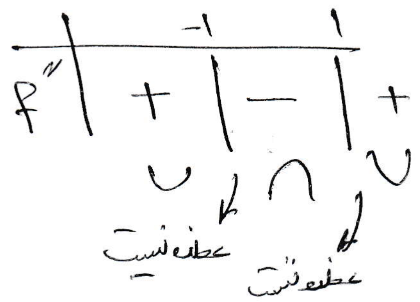
مثال: نقاط عطف تابع $f(x)=|x^2-1|$ را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2-1 & x>1 \text{ یا } x<-1\end{cases}$$



$$f'(x)=\begin{cases} -2x & -1<x<1 \\ 2x & x>1 \text{ یا } x<-1 \\ \text{موجود نیست} & x=1 \\ \text{موجود نیست} & x=-1\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} -2 & -1<x<1 \\ 2 & 1<x \text{ یا } x<-1\end{cases}$$



ریاضی: تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ دارای دو نقطه عطف است هرگاه؟

۱) $3a^2 \geq 8b$ ۲) $3a^2 > 8b$ ۳) $3a^2 \leq 8b$ ۴) $3a^2 < 8b$

$$f''(x)=0$$

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x)=12x^2+6ax+2b=0 \xrightarrow{\Delta>0} 36a^2-96b>0 \rightarrow$$

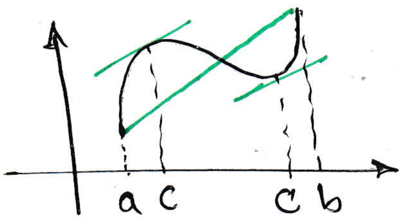
$$9a^2-24b>0$$

$$3a^2>8b$$

قضیه مقدار میانگین:

f بر بازه $[a,b]$ پیوسته
f بر (a,b) مشتق‌پذیر

$$\exists c\in(a,b) \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Big| \rightarrow$ شیب وتر منحنی

MBA: با استفاده از قضیه مقدار میانگین $\text{Arctan}\,7-\text{Arctan}\,3$ حدود تقریبی در کدام بازه واقع است؟

۱) $(0/07, 0/3)$ ۲) $(0/08, 0/2)$ ۳) $(0/2, 0/5)$ ۴) $(0/08, 0/4)$

$f(x)=\text{Arctan}\,x \qquad a=3 \quad b=7$

$$\frac{\text{Arctan}\,7-\text{Arctan}\,3}{7-3}=\frac{1}{1+c^2} \qquad 3<c<7$$

$$\underset{7^2+1}{\frac{1}{50}} < \frac{\text{Arctan}\,7-\text{Arctan}\,3}{4} < \underset{3^2+1}{\frac{1}{10}}$$

$$0/08=\frac{4}{50}<\text{Arctan}\,7-\text{Arctan}\,3<\frac{4}{10}=0/4 \longrightarrow$$ گزینه ۴

محاسبه نقاط اکسترمم مطلق تابع روی $[a, b]$:

برای این منظور نقاط بحرانی تابع را که درون بازه می‌باشند و نقاط ابتدا و انتهای بازه را در نظر گرفته. بیشترین مقدار تابع در این نقاط max مطلق و کمترین min مطلق است.

مثال: نقاط max و min مطلق تابع زیر را روی بازهٔ مشخص شده بدست آورید.

$$f(x) = |x|(x-2) \qquad [-1, 2]$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x - x^2 & -1 \leqslant x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & 0 < x \leqslant 2 \\ 2-2x & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

$x=0$ مشتق ندارد

$$\begin{cases} \max f = 0 \\ \min f = -3 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} x=0 & \text{نقطه بحرانی (موجود نیست)} \\ x=1 & (f'(1)=0 \text{ بحرانی}) \\ a=-1 & f(x) = -3 \\ b=2 & f(x)=0 \end{cases}$$

محاسبه خط مماس و خط قائم بر منحنی تابع:

$y = f(x)$

(x_0, y_0) خط مماس
$$\begin{cases} f'(x) < \infty \rightarrow y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ f'(x) = \infty \rightarrow y = y_0 \end{cases}$$

خط قائم:
$$\begin{cases} 0 \neq f'(x_0) < \infty & \rightarrow y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \\ f'(x_0) = \infty & x = x_0 \\ f'(x_0) = 0 & y = y_0 \end{cases}$$

مثال: خط مماس بر منحنی $y = x^3 + 3x^2 + 1$، عمود بر خط $2x - 6y = 1$ از کدام نقطه می‌گذرد

1) $(1, 2)$ 2) $(1, 0)$ 3) $(2, -6)$ 4) $(2, -4)$

نقطه تماس : (x_0 , y_0)

شیب خط مماس : $f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0$

شیب خط : $m = 1/3$

شرط عمود بودن $f'(x_0) \cdot m = -1 \rightarrow 3x_0^2 + 6x_0 = -3$

$x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \qquad (x_0 + 1)^2 = 0 \rightarrow x_0 = -1 \rightarrow y_0 = 3$

شیب خط مماس : $f'(-1) = -3 \rightarrow y - 3 = -3(x+1)$

$\rightarrow \underline{y = -3x}$

گزینه ۳ صحیح

خط مماس بر منحنی $y^2 + y\,Ln(2x+3) + x\,Ln(3y-5) = 4$ در نقطه $(-1, 2)$

محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۴

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{2y}{2x+3} + Ln(3y-5)}{2y + Ln(2x+3) + \frac{3x}{3y-5}}$$

شیب خط مماس $y'\Big|_{(-1,2)} = -\frac{4}{4-3} = -4$

خط مماس : $y - 2 = -4(x+1) \xrightarrow{x=0} \underline{y = -2} \rightarrow$ گزینه ۲

شیب خط مماس بر منحنی $\dfrac{x+\sqrt{y}}{y+\sqrt{x}} = \dfrac{y-x}{x+y}$ در نقطه $(1,4)$ کدام است؟

۱) $17/5$ ۲) $19/6$ ۳) $41/15$ ۴) $46/15$

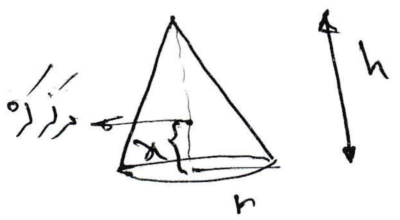
$$\ln(x+\sqrt{y}) - \ln(y+\sqrt{x}) - \ln(y-x) + \ln(x+y) = 0$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\dfrac{1}{x+\sqrt{y}} - \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{y+\sqrt{x}} + \dfrac{1}{y-x} + \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{y}}}{x+\sqrt{y}} - \dfrac{1}{y+\sqrt{x}} - \dfrac{1}{y-x} + \dfrac{1}{x+y}}$$

$$y'\Big|_{(1,4)} = \cdots = 46/15 \rightarrow$$ گزینه ۴

مسائل بهینه: دانشجویان گرامی مسائلی که توابع به عنوان تابع هدف تحت شروط یا قیدی می‌خواهیم max یا min شوند را بررسی می‌کنیم (بحث تکمیلی در فصل توابع چند متغیره در قسمت ضرایب لاگرانژ بیان خواهد شد)

– در کره‌ای به شعاع R مخروطی با بیشترین حجم می‌خواهیم محاط کنیم شرایط محاط را بدست آورید.



تابع هدف: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

قید: R: شعاع کره

$$R^2 = r^2 + x^2 \qquad h = x + R$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(x+R) \qquad 0 \leq x \leq R$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi(-2x(x+R) + R^2 - x^2) = \frac{1}{3}\pi(-3x^2 - 2xR + R^2)$$

$$= -\frac{1}{3}\pi(3x^2 + 2Rx - R^2) = 0$$

$$\Delta = ۴R^۲ + ۱۲R^۲ = ۱۶R^۲$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-۲R + ۴R}{۶} = \dfrac{۱}{۳}R \\ x = \dots \end{cases}$$

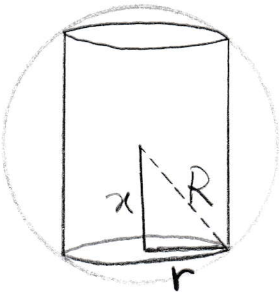
$$V_{max} = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۸}{۹}R^۲\right)\left(\frac{۴}{۳}R\right) = \frac{۳۲}{۸۱}\pi R^۳$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\sqrt{۸}}{۳}R \\ h = \dfrac{۴}{۳}R \end{cases}$$

MBA در کره‌ای به شعاع R مخروطی با بیشترین حجم ممکن محاط شده است. نسبت حجم مخروط به حجم کره کدام است؟

$$\frac{\text{حجم مخروط ماکزیمم}}{\text{حجم کره}} = \frac{\frac{۳۲}{۸۱}\pi R^۳}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} = ۸/۲۷$$

در کره‌ای به شعاع R استوانه‌ای با بیشترین حجم می‌خواهیم محاط کنیم شرایط محاط را بدست آورید؟



تابع هدف: $V = \pi r^۲ h$

قید: کره: R

$$R^۲ = x^۲ + r^۲ \qquad h = ۲x$$

$$V = \pi(R^۲ - x^۲)(۲x) \qquad ۰ \leq x \leq R$$

$$V = ۲\pi(R^۲x - x^۳)$$

$$V' = ۲\pi(R^۲ - ۳x^۲) = ۰ \qquad ۳x^۲ = R^۲ \rightarrow x^۲ = \frac{R^۲}{۳}$$

$$x = R/\sqrt{۳}$$

$$\max V = \pi\left(\frac{۲}{۳}R^۲\right)\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)R$$

$$r = \sqrt{\frac{۲}{۳}}R \longrightarrow \boxed{V_{max} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۹}\pi R^۳}$$

$$h = \frac{۲}{\sqrt{۳}}R$$

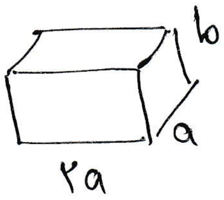
$\frac{A}{۴۸}$ ضیایی — در داخل کره‌ای به شعاع $\sqrt{۶}$ استوانه‌ای با حجم حداکثر محاط شده است. شعاع قاعده استوانه کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۳

$$r = \sqrt{\frac{۲}{۳}}\,R = \sqrt{\frac{۲}{۳}}\,\sqrt{۶} = ۲$$

MBA. می‌خواهیم از یک قطعه سیم به طول ۴۸ یک مکعب مستطیل بسازیم. بیشترین حجم این مکعب مستطیل در حالتی که یکی از ابعاد ۲ برابر دیگری باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۵۷۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵۱۲}{۹}$ ۳) $\frac{۴۸۸}{۹}$ ۴) $\frac{۴۷۲}{۹}$



هدف $V = ۲a^۲b$

$(۸a+۴a) \longleftarrow ۱۲a + ۴b = ۴۸$

$\longrightarrow ۳a + b = ۱۲$ شرط

$$V = ۲a^۲(۱۲ - ۳a) = ۲۴a^۲ - ۶a^۳$$

$$V' = ۴۸a - ۱۸a^۲ = ۰ \rightarrow a = ۰ \ \times$$

$$a = \frac{۴۸}{۱۸} = \frac{۸}{۳}$$

$$V_{max} = ۲۴ \cdot \frac{۶۴}{۹} - ۶ \cdot \frac{۸^۳}{۲۷} = \frac{۵۱۲}{۹}$$

---

۱۵) نزدیک‌ترین نقطه منحنی به معادله $y = \sqrt{x^۲+۱}$ به نقطه $(۱,۰)$ کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۱,\sqrt{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲}, \sqrt{۵}/۲)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۵}}{۲})$

تابع هدف: $d = \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۰)^۲}$ زیر رادیکال min شود رادیکال هم min می‌شود

قید: $y = \sqrt{x^۲+۱}$

$f: d^۲ = (x-۱)^۲ + y^۲$

$y = \sqrt{x^۲+۱}$

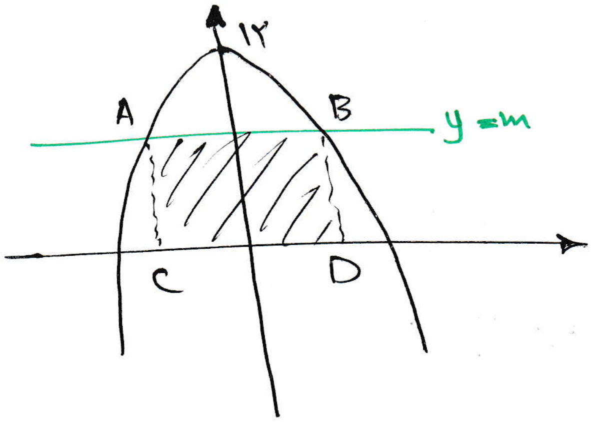
$\longrightarrow f(x) = ۲x^۲ - ۲x + ۲$

$\frac{A}{۴۹}$ $f'(x) = 4x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\min} y = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\rightarrow (x = 1/2 \,,\; y = \frac{\sqrt{5}}{2}) \rightarrow$ گزینه ۳

$\min f: \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow \min d = \sqrt{\frac{3}{2}}$

خط $y = m > 0$ منحنی تابع $y = 12 - x^2$ را در نقاط A, B قطع می‌کند مستطیلی می‌سازد



مطلوبست ماکزیمم مساحت مستطیل:

هدف $S = AB \times AC$

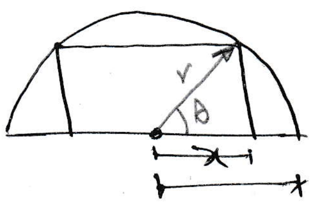
قید $y = 12 - x^2$

$AB = 2x$
$AC = y$ $\rightarrow S = 2x \cdot y = 2x \cdot (12 - x^2) = 24x - 2x^3$

$S' = 24 - 6x^2 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 8$

$\rightarrow S_{max} = 32$

در نیم دایره‌ای به شعاع a مستطیلی مطابق شکل محاط می‌کنیم. بیشترین محیط مستطیل محاط شده چقدر است؟



$4a\cos\theta + 2a\sin\theta$

$-4a\sin\theta + 2a\cos\theta = 0$

$\rightarrow -4a\tan\theta + 2a = 0$

$\tan\theta = \frac{-2a}{-4a} = \frac{1}{2}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2} \rightarrow \cos\theta = 2\sin\theta$

$4a\cos\theta + 2a(\frac{1}{2}\cos\theta) = 0$

$4a\cos\theta + a\cos\theta = 0$

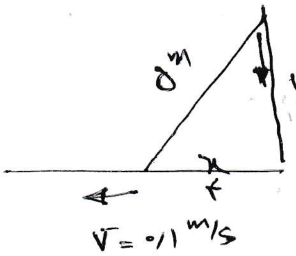
$5a\cos\theta = 0 \rightarrow 5a(\frac{x}{a}) = 0$

$5x = 0 \rightarrow x = 0$

متغیرهای مرتبط:

در این مورد مسائلی مطرح می‌شود که نوع رابطه بین چند متغیر وجود دارد که این متغیرها وابسته به متغیر دیگر هستند (معمولاً به t وابسته‌اند)، مشتق‌گیری از این رابطه برحسب متغیر t می‌توان رابطه بین تغییرات بین متغیرها را نسبت به هم دیگر بدست آورد.

— فرض کنیم نردبانی به طول 5^m به دیواری تکیه داده شده است. اگر پای نردبان با سرعت $0/1\ ^m/_s$ از دیوار دور شود زمانی که فاصله پای نردبان از دیوار 4^m است، سرعت سُر خوردن نردبان را محاسبه کنید.



$$x^2+y^2=25$$

$$\xrightarrow{t\ \text{مشتق به}} 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$$

$$\xrightarrow[\substack{x=4\\ y=3}]{\frac{dx}{dt}=0/1} 4\times 0/1+3\times\frac{dy}{dt}=0 \longrightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-0/4}{3}$$

علامت منفی جهت نشیبی سرعت را نشان می‌دهد

آمار ۹۱ — ضریب زاویه خط عمود بر منحنی $x^3+y^3=28$ در نقطه‌ای به طول یک کدام است؟

1) $-1/12$ 2) $-1/9$ 3) $\frac{1}{12}$ 4) 9

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{3x^2}{3y^2}=-\frac{x^2}{y^2} \longrightarrow \text{ضریب زاویه خط مماس}$$

$$\text{خطوط عمود}\quad \underline{m_1 m_2=-1} \longrightarrow \frac{y^2}{x^2} \longrightarrow \text{ضریب زاویه خط قائم}$$

$$m_2=\frac{y^2}{x^2}\Big|_{\substack{x=1\\ y=3}}=\frac{9}{1}=\underline{9}\quad \text{گزینه ۴}$$

حواله ۹۱ در مورد معادله $xe^x - 2e^x + 1 = 0$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) دقیقاً صفر ریشه دارد

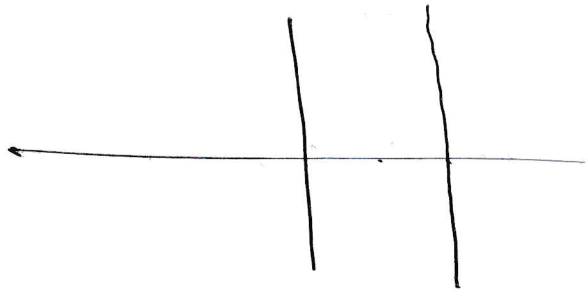
۲) حداکثر دارای یک ریشه است

۳) دقیقاً دارای دو ریشه است

۴) حداقل دارای سه ریشه است.

۱) رسم نمودار:

$$e^x = \frac{-1}{x-2}$$



$$f'(x) = e^x + xe^x - 2e^x = xe^x - e^x = (x-1)e^x$$

$$f(1) = -e+1 < 0$$

$$f(2) = 1 > 0$$

f بر $[1,2]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است

پس f بنابه داراسفراس فقط یک ریشه در این فاصله دارد

$$f(1) < 0$$

$$f(-2) = \frac{-1}{e^2} + 1 > 0$$

$$[-2, 1]$$

داراسفراس

فقط یک ریشه

دقیقاً دو ریشه دارد

MBA ۹۱ اگر $x = t^2 e^t$ ، $y = (t+2)e^{2t}$ باشند، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ به ازای $t=-1$ کدام است؟

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{2t} + 2(t+2)e^{2t}}{2te^t + t^2e^t} = \frac{(2t+5)e^t}{2t+t^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{(2e^t + (2t+5)e^t)(2t+t^2) - (2-2t)((2t+5)e^t)}{(2t+t^2)^2}}{2te^t + t^2e^t}$$

$$t=-1 \longrightarrow \frac{\frac{-5e^{-1}}{1}}{-e^{-1}} = 5$$

MBA ۹۱ — مشتق عبارت $\dfrac{(x+2)^3(3x-1)^4}{(2x+1)^2\,x^5}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

$$\ln y = 3\ln(x+2) + 4\ln(3x-1) - 2\ln(2x+1) - 5\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+2} + \frac{12}{3x-1} - \frac{4}{2x+1} - \frac{5}{x}$$

$$\xrightarrow{x=1} y' = \left(\frac{3^3 \times 2^4}{3^2 \cdot 1^5}\right)\left(1 + \frac{12}{2} - \frac{4}{3} - 5\right) = 3\times 16\left(2 - \frac{4}{3}\right)$$

$$= 16(2) = \underline{32}$$

عمران ۹۰ — تعداد زوج مرتب‌های (x,y) که در معادله زیر صدق می‌کند برابر است با:

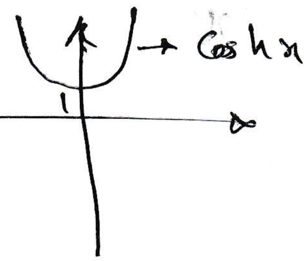
$$x^2 + \cosh(xy)\left[2x + \cosh(xy) + 1\right] - 1 = 0$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

$$x^2 + 2x\cosh(xy) + \cosh^2(xy) + \cosh(xy) - 1 = 0$$

$$(x + \cosh(xy))^2 = 1 - \underline{\cosh(xy)} \quad (*)$$

$$\cosh(xy) \geq 1$$



اگر اینجا هم تساوی برقرار باشد $\longrightarrow \cosh(xy) = 1 \longrightarrow xy = 0$

$$xy=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \xrightarrow{*} (0+1)^2=0 \to 1=0 \quad \times \\ \text{یا} \\ y=0 \xrightarrow{(*)} x+1=0 \to x=-1 \end{cases}$$

تنها نقطه $(-1,0)$ در این معادله صدق می‌کند ← پس یک زوج مرتب در این معادله صدق می‌کند

مولد ۹۰ اگر $f(x)=\dfrac{\int_1^{x+h} 5\cos t^2}{\quad}$

مولد ۹۰: اگر

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_1^{x+h} 5\cos t^2\,dt+\int_x^1 5\cos t^2\,dt}{h}$$

آنگاه $f(\sqrt{\pi})$ برابر است با:

۱) $-\infty$ ۲) -5 ۳) 5 ۴) $+\infty$

$$g(x)=\int_1^x 5\cos t^2\,dt$$

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

$$f(x)=5\cos x^2 \to f(\sqrt{\pi})=5\cos\pi=\underline{-5}$$

خارج ۹۰: فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر و $f'(x)=\dfrac{\cosh x}{1+\cosh x}$ باشد اگر $f(0)=0$

آنگاه برای $x\geq 0$ کدام گزینه درست است؟

۱) $f(x) \leq 0$ ۲) $x \leq f(x)$ ۳) $f(x) < x$ ۴) $0 \leq f(x) \leq x$

$f(0) = 0 \longrightarrow$ رد گزینه ۳ $(f(0) < 0)$

$f'(x) \geq 0 \longrightarrow$ f صعودی است $\qquad 0 \leq x \longrightarrow f(0) \leq f(x) \longrightarrow 0 \leq f(x)$

رد گزینه ۱

$[0, x] \qquad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \longrightarrow \dfrac{f(x)}{x} = f'(c) \leq 1$

قضیه مقدار میانگین

$$\boxed{f(x) \leq x}$$

گزینه ۴

صفحه ۹۰ اگر $f(x) = x^{-x}$ آنگاه روی $(0, +\infty)$ کدام گزینه درست است؟

۱) f در $x = e$ min مطلق دارد

۲) f در $x = 1$ max مطلق دارد

۳) f در $x = \frac{1}{e}$ max مطلق دارد ✓

۴) f نقطه کمینه min مطلق دارد و مقدار آن صفر است.

$f'(x) = (\underline{-1 - \ln x}) \cdot x^{-x} = 0$

$\longrightarrow x = 1/e \longrightarrow$ بحرانی

	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
f'	$+$		$-$	

max مطلق

علوم کامپیوتر — به ازای $x>0$ کدام نامساوی صحیح است؟

۱) $\frac{1}{1+x} < \ln x < \frac{1}{x}$

۲) $\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < \frac{1}{x}$

۳) $\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

۴) $\frac{2}{1+x} < \ln(1+x^2) < \frac{2}{x}$

رد گزینه با عددگذاری: $x=1 \rightarrow$ گزینه ۱: $\frac{1}{2} < 0 < 1 \rightarrow$ ✗

گزینه ۴: $1 < \ln 2 = 0/7 < 1$ ✗

قضیه مقدار میانگین: $f(t) = \ln t$ $\quad [x, x+1]$

$$\frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1-x} = \frac{1}{c} \qquad x < c < x+1$$

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \longrightarrow$$ گزینه ۳

$\frac{A}{54}$ $\frac{MBA}{91}$ ؛ خط مماس بر منحنی $y=\sinh^{-1}x$ در نقطه $x=\frac{3}{4}$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند.

1) $\frac{4}{5}-\ln 2$ 2) $\frac{3}{5}-\ln 2$ 3) $\ln 2-\frac{4}{5}$ 4) $\ln 2-\frac{3}{5}$

$$\begin{cases}\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\ \cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\end{cases}$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\xrightarrow{x=3/4}\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}=m$$

$$x=3/4\longrightarrow y=\ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)=\ln 2$$

$$y-\ln 2=\frac{4}{5}\left(x-\frac{3}{4}\right)\xrightarrow{x=0}\underline{y=\frac{-3}{5}+\ln 2}\longrightarrow$$ گزینه ۴

$\frac{MBA}{91}$ طول نقطه عطف منحنی $y=\frac{1}{x}e^{-x^2}$ کدام است؟

1) صفر   2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) ± 1 4) فاقد نقطه عطف

گزینه 1 رد است چون در دامنه تابع $x=0$ قرار ندارد

$$y'=\frac{-1}{x^2}e^{-x^2}-2e^{-x^2}=\left(\frac{-1}{x^2}-2\right)e^{-x^2}$$

در تمام نقاط $x\neq 0$ مشتق داریم
(بی‌نهایت ایراد ندارد)

$$y''=\frac{2}{x^3}e^{-x^2}-2x\left(\frac{-1}{x^2}-2\right)e^{-x^2}$$

$$y''=\left(\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x}+4x\right)e^{-x^2}=\left(\frac{\overset{+>0}{2+2x^2+4x^4}}{x^3}\right)\underset{+>0}{\left(e^{-x^2}\right)}$$

تعیین کننده علامت

$$f'' \;\big|\; - \;\overset{0}{|}\; +$$

در $x=0$ نمودار f'' تغییر علامت می‌دهد

ولی $x=0$ نقطه عطف نیست چون اصولاً جزو دامنه تابع نیست. پس فاقد نقطه عطف است.

انتگرال و کاربرد آن:

روش‌های انتگرال گیری:

توجه: در محاسبه انتگرال نامعین ابتدا از ذهن کمک می‌گیریم

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ قطعاً ذهن خیلی کمک می‌کند

$F'(x) = f(x)$

ذهن یاری نمی‌کند. برای این منظور روش‌های انتگرال‌گیری مطرح می‌شود

- روش تغییر متغیر:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

$$g(x) = u$$

توجه: عمدتاً عبارتی را u قرار می‌دهیم که بتوان dx را برحسب u و du نوشت. (عمدتاً انتگرال‌هایی که شامل $\sqrt{\ }$ می‌باشند

اگر $\sqrt{\ }$ درصورت باشد، زیر رادیکال دیگه $\sqrt{\ }$ در مخرج باشد کل رادیکال را u قرار می‌دهیم)

(بعضی از انتگرال‌های شامل $\sqrt{\ }$ با تغییر متغیر مثلثاتی حل می‌شوند که بعداً بیان خواهیم کرد)

عنوان انتگرال $\int \frac{dx}{e^x+1}$ برابر است با:

1) $c\ln(1-e^x) + x^2$

2) $c\ln(1-e^x) + x - x^2$

3) $x - \ln(1+e^x) + c$

4) $x + \ln(1+e^x) + c$

توجه: با توجه به فرم جواب سؤال انتگرال نامعین،

گزینه ۱ و ۲ رد می‌شوند. می‌توان با مشتق گیری از

گزینه‌ها گزینه درست را انتخاب کرد

$$1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} \longrightarrow \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} \qquad e^x+1=u \qquad e^x dx = du \qquad dx = \frac{du}{u-1}$$

$$\rightarrow \int \frac{du}{u(u-1)} = \int \left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right) du = \operatorname{Ln}(u-1) - \operatorname{Ln} u + c$$

$$\operatorname{Ln} e^x - \operatorname{Ln}(e^x+1) + c = x - \operatorname{Ln}(e^x+1) + c \checkmark$$

مثال: انتگرال‌های زیر را حساب کنید

الف)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \qquad 1+\sqrt{x}=u \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du$$

$$= \int \frac{2\,du}{u} = 2\operatorname{Ln} u + c = 2\operatorname{Ln}(1+\sqrt{x}) + c$$

ب)

$$\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{Ln} x}}{x} dx \qquad 1+\operatorname{Ln} x = u \qquad \frac{1}{x}dx = du$$

$$\int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(1+\operatorname{Ln} x)^{\frac{3}{2}} + c$$

ریاضی – تجربی $\int_1^a \frac{\operatorname{Log}_a x^2}{x} dx$ کدام است؟ چرا از حدود انتگرال Ln گرفتیم؟

1) $2\operatorname{Ln} a$ 2) 1 3) $\operatorname{Ln} a$ 4) $\frac{1}{\operatorname{Ln} a}$

$$\log_a b = \frac{\operatorname{Ln} b}{\operatorname{Ln} a}$$

پس

$$\frac{2}{\operatorname{Ln} a}\int_0^{\operatorname{Ln} a} \frac{\operatorname{Ln} x}{x} dx \qquad \operatorname{Ln} x = u \qquad \frac{1}{x}dx = du$$

$$\frac{2}{\operatorname{Ln} a}\int_0^{\operatorname{Ln} a} u\, du = \frac{2}{\operatorname{Ln} a}\left(\frac{u^2}{2}\right)_0^{\operatorname{Ln} a} = \frac{(\operatorname{Ln} a)^2}{\operatorname{Ln} a} = \operatorname{Ln} a$$

مثال: $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

۱) $\pi/2$ ۲) $\pi/12$ ۳) $\pi/6$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

روش: $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x \Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$\sqrt{x^2-1} = u \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = du \qquad u\Big|_{1}^{\sqrt{3}}$

$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u \Big|_{1}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

مثال: $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x}} \longrightarrow$ اتحاد مزدوج

$\int \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x}}{4} dx = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right) + c$

$= \frac{1}{6}\left((x+4)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right) + c$

اگر $x>0$ ، $F(x) = \int_{1}^{x} \frac{e^t}{t} dt$ باشد، مقدار انتگرال $\int_{1}^{x} \frac{e^{at}}{t} dt$ برحسب F برابر است با:

۱) $F(ax)$ ۲) $F(ax) + F(a)$ ۳) $F(ax) - F(a)$

۴) $F(ax) - F(a)$

$-F(a) + F(ax)$

$at = u \longrightarrow a\,dt = du \qquad u\Big|_{a}^{ax}$

$\int_{a}^{ax} \frac{e^u}{\frac{1}{a}u} \cdot \frac{1}{a} du = \int_{a}^{ax} \frac{e^u}{u} du = \int_{a}^{1} \frac{e^u}{u} du + \int_{1}^{ax} \frac{e^u}{u} du$

شکستن کران انتگرال

تمرین: اگر $A=\int_0^1 \frac{e^t}{t+1}\,dt$ آنگاه $\int_{a-1}^{a} \frac{e^{-t}}{t-a-1}\,dt$ کدام است

۱) $e^{-a}A$ ۲) $-e^{a}A$ ۳) $e^{a}A$ ۴) $-e^{-a}A$

$t+1=u \qquad dt=du \qquad u\Big|_1^2$

$$A=\int_1^2 \frac{e^{u-1}}{u}\,du \rightarrow eA=\int_1^2 \frac{e^u}{u}\,du$$

$\boxed{t-a-1=-w} \qquad dt=-dw \qquad w\Big|_2^1$

$$\cancel{\int_2^1 \frac{e^{w}}{w}\,dw} = -e^{-a-1}\int_1^2 \frac{e^{w}}{w}\,dw = -e^{-a-1}\cdot eA$$

$$=-e^{-a}A \rightarrow \text{گزینه ۴}$$

***توجه** اگر $f(x)$ فرد باشد $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

اگر $f(x)$ زوج باشد $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

مثال:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\ln\frac{1+x}{1-x}}_{\text{فرد}}\cdot \underbrace{\sin^{10}x}_{\text{زوج}=(\text{فرد})^{\text{زوج}}}\,dx=0$$

فرد = فرد × زوج

— روش جزء به جزء

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\rightarrow uv = \int u\,dv + \int v\,du \rightarrow$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

توجه: معمولاً روش جزء به جزء زمانی استفاده می شود که انتگرال از حاصل ضرب دو تابع از دو خانواده مختلف باشد و یا از توابعی باشد که مشتق آن تابع با خود تابع از یک خانواده نباشند (Ln و Arc)

مثال:

$$\int \ln(x+a)\,dx$$

$$u = \ln(x+a)$$

$$du = \frac{1}{x+a}\,dx$$

$$dv = dx \rightarrow \underline{v = x}$$

$$= x\ln(a+x) - \underline{\int \frac{x+a-a}{x+a}\,dx}$$

$$x\ln(x+a) - x + a\ln(x+a) + c$$

$$= (x+a)\ln(x+a) - x + c$$

سوال: مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

۱) $\ln(\sqrt{2}+1)+1$ ۲) $\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}$

۳) $-\left(\sqrt{2}-1+\ln(\sqrt{2}-1)\right)$ ۴) $\ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1$

$u = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \to du = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$dv = dx \to v = x$

$$\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx}_{\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1}$$

$= \underbrace{\ln(1+\sqrt{2})}_{\text{مزدوج}} - \sqrt{2} + 1$

$-\ln(\sqrt{2}-1) \longrightarrow$ گزینه ۳

روش جزء به جزء:

$\int f(x)\,g(x)\,dx$

مشتق		انتگرال
$f(x)$	$+$	$g(x)$
$\vdots$	$-$	$\vdots$
0	$+$	

آزاد ۸۱ $\quad \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx \quad$ گزینه ۲

۱) $\pi-1$ ۲) $\pi-2$ ۳) $2\pi-1$ ۴) $2\pi-2$

مشتق		انتگرال
x^2	$+$	$\sin x$
$2x$	$-$	$-\cos x$
2	$+$	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\pi - 2}$$

ریاضی: اگر $A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}\,dx$ مقدار $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+2}\,dx$ کدام است؟ ۱۳۹۳

۱) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi+2} - A$ ۲) $\frac{1}{\pi+2} - \frac{1}{2} + A$ ۳) $\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A$ ۴) $\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} + A$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+2}\,dx \qquad \begin{cases} \frac{1}{x+2} = u \to \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx = du \\ \sin x\,dx = dV \to -\cos x = V \end{cases}$$

$$2 \Rightarrow I = \frac{-\cos x}{x+2}\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}\,dx}_{A} = \frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A$$

توجه:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \cancel{e^{ax}}\,\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + C$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\cdot\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C$$

$$\int x^m (\ln x)^n\,dx = \begin{cases} \text{if } m = -1 \xrightarrow{\text{روش تغییر متغیر}} u = \ln x \\ \text{if } m \neq -1 \xrightarrow{\text{روش جزء به جزء}} \begin{cases} u = (\ln x)^n \\ dV = x^m\,dx \end{cases} \end{cases}$$

حل:

$$\int \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx = \int u^4\,du = \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{5}(\ln x)^5 + c$$

$$u = \ln x$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int x^3 (\ln x)^2\,dx = \qquad \begin{cases} (\ln x)^2 = u \\ x^3\,dx = dv \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccl}
x^3 & & (\ln x)^2 \\
 & + & \\
3x^2 & & \frac{2}{x}(\ln x) \\
 & - & \\
6x & & \frac{-2}{x^2}\cdot \ln x + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}(1-\ln x) \\
 & + & \\
6 & & \frac{-4x}{x^4}(1-\ln x) - \frac{2}{x^4}
\end{array}$$

توجه: انتگرالهایی از توابعی که ترکیب توابع باشند معمولاً ابتدا با تغییر متغیر و سپس با جزء به جزء قابل حل می باشند

ریاضی: $I=\int_1^e \cos(\ln x)\,dx$ کدام است؟ ۱۲

$$\ln x = u \longrightarrow \frac{1}{x}dx = du \longrightarrow dx = x\,du = e^u du$$

$$u\Big|_0^1$$

$$I=\int_0^1 e^u \cos u\,du \xrightarrow{\text{جزء به جزء}}$$

$$\int_{-1}^{0} \cos(\sqrt{x+1})\,dx = ?$$

توجه:

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$a-x=u$$

$$-dx=du \qquad u\Big|_a^0$$

$$\longrightarrow I=\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(u)(-du) = \int_0^a f(u)\,du$$

مثال: نشان دهید

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{استفاده از توجه}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

نتیجه :

$$\to I=\begin{cases} \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{\pi}{2} & \text{if } n=2k \to n=2,4,\dots \\ \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{n-1}{n} & \text{if } \begin{cases} n=2k+1 \\ k\geq 1 \end{cases} \to n=3,5,7,\dots \end{cases}$$

توجه شود جواب به صورت فرد $(n=3,5,\dots)$ ، $\frac{\pi}{2}$ ندارد

$$\to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{\pi}{2}$$

یعنی: حاصل ، $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$ کدام است

$$I=\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx=\int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x)+f(x)}\,dx$$

$$\to 2I=\int_0^1 dx \to \underline{I=\frac{1}{2}}$$

۹۷ / A

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx=?$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx$$

$$2I=\int_0^{\pi/2} dx \longrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

MBA

- حاصل انتگرال $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ کدام است؟

۱) π ۲) π^2 ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

$$I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\overset{\sin x}{\sin(\pi-x)}}{1+\underset{-\cos x}{\cos^2(\pi-x)}}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx-\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx}_{I}$$

$\cos x=u$

$$2I=\pi\int_1^{-1}\frac{du}{1+u^2}\longrightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}\left(\tan^{-1}u\right)_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

تغییر متغیر مثلثاتی: اگر انتگرال شامل $\sqrt{\ }$ به فرم‌های زیر باشد تغییر متغیر مثلثاتی ارائه شده می‌تواند قابل استفاده باشد.

$$\sqrt{a^2-x^2} \longrightarrow x = a\sin\theta$$

$$\sqrt{a^2+x^2} \longrightarrow x = a\tan\theta$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \longrightarrow x = a\sec\theta$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad x=\sin\theta$$

$$dx = \cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sin^2\theta . \cos\theta\, dx \qquad \theta\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

انتگرال‌های مثلثاتی:

$$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \begin{cases} p \text{ فرد باشد: } \int \underbrace{\sin^{p-1} x}_{\text{تبدیل به } \cos} . \cos^q x . \sin x\, dx \qquad u = \cos x \\ q \text{ فرد باشد: } \int \sin^p x . \cos^{q-1} x . \cos x\, dx \qquad u = \sin x \\ p, q \text{ هر دو زوج باشند: } \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x \, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^8 x \cdot \sin x \, dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$$= \int (1-u^2)\, u^8 (-du) = \int (u^{10} - u^8)\, du$$

$$= \frac{1}{11}\cos^{11} x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C$$

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^5 x (1-\sin^2 x)\cos x \, dx$$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$$= \int u^5 (1-u^2)\, du = \dots$$

$$= \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C$$

$$\int \tan^p x \cdot \sec^q x \, dx = \begin{cases} p \text{ فرد} & \int \underbrace{\tan^{p-1} x}_{\text{تبدیل به } \sec} \cdot \sec^q x \cdot \tan x \, dx \qquad u = \sec x \\ q \text{ زوج باشد} & \int \tan^p x \cdot \sec^{q-2} x \cdot \sec^2 x \, dx \qquad u = \tan x \end{cases}$$

$$\int \cot^p x \, \csc^q x \, dx = \dots$$ مشابه بالا

$$\int \sec^5 x \tan^3 x \, dx =$$

$$\int \sqrt{\tan x}\, \sec^4 x \, dx$$

$$\int \csc^5 x \cdot \cot^3 x \, dx$$

انتگرال‌های حاصلضرب Sin و Cos با کمان‌های مختلف:

از روابط زیر استفاده شود

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{-1}{2}\left(\cos(a+b)x - \cos(a-b)x\right)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right)$$

مثال: $\displaystyle\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 8x - \sin 2x\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = \frac{-1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

روش تجزیه کسرها:

$$I = \int \frac{\overset{\text{درجه } m}{p(x)}}{\underset{\text{درجه } n}{q(x)}} \, dx$$

$$\text{if } m \geq n \to I = \int \Big(\underbrace{k(x)}_{\text{خارج قسمت}} + \frac{\overset{\text{باقیمانده}}{R(x)}}{q(x)} \Big) dx$$

$$I = \int k(x)\,dx + \int \frac{\overset{\text{درجه } s}{R(x)}}{\underset{\text{درجه } n}{q(x)}}$$

$$(s < n)$$

عبارتی که تجزیه کسرها باید
به صورت کسر مخرج کمتر باشد

در تجزیه $q(x)$ عاملهای تجزیه درجه ۱ و درجه ۲ هستند (درجه دوها با $\Delta<0$ هستند)

اگر عامل تجزیه $(x-\alpha)^k$ باشد برای آن k کسر در نظر می‌گیریم

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

اگر عامل تجزیه $(x^2+ax+b)^k$ باشد

$\Delta<0$ چون اگر $\Delta>0$ باشد تجزیه می‌شود

برای این عامل k کسر در نظر می‌گیریم

$$\frac{A_1x+b_1}{(x^2+ax+b)}+\frac{A_2x+b_2}{(x^2+ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_kx+b_k}{(x^2+ax+b)^k}$$

با مخرج مشترک گرفتن کسرهای در نظر گرفته شده مجهولات را بدست می‌آوریم

مثال: $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{4x^3-x}\,dx=\int\frac{x^2-1}{x(2x-1)(2x+1)}\,dx$

$$\frac{x^2-1}{x(2x-1)(2x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{2x+1}$$

$$A=1\qquad B=\frac{-3}{4}\qquad C=-3/4$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-\frac{3}{4}}{2x-1}+\frac{-3/4}{2x+1}\right)dx=\ln|x|-\frac{3}{8}\ln|2x-1|-\frac{3}{8}\ln|2x+1|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x}{(4x^2-1)^{\frac{3}{8}}}\right|+c$$

مثال:

حاصل $I=\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2-3x+2}\,dx$ کدام است

1) $\ln\frac{3^4}{2^{14}}$ 2) $\ln\frac{3^5}{2^{12}}$ 3) $\ln\frac{2^{12}}{3^5}$ 4) $\ln\frac{2^{13}}{3^6}$

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-1)}=\frac{7}{x-2}-\frac{5}{x-1}$$

$$I=7\ln|x-2|-5\ln|x-1|\Big|_3^4=\ln\frac{|x-2|^7}{|x-1|^5}\Big|_3^4=\ln\frac{2^7}{3^5}-\ln\frac{1}{2^5}$$

$$=\ln\frac{2^{12}}{3^5}$$

حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$ چیست؟

1) $\frac{1}{x}+\ln\frac{x}{x-1}+c$ 2) $x+\ln x+\ln(x-1)+c$

3) $x+(\ln x)^2+\ln(x^2-1)+c$ 4) $\frac{1}{x}+\ln(x-1)-\ln x+c$

راه اول: مشتق‌گیری از گزینه‌ها:

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \to C=1 \\ -A+B=0 \to A=-1 \\ -B=1 \to B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x-1} \to$$ گزینه ۴

توجه:

$$\int \frac{x+a}{x+b}\,dx = \int \frac{x+b+a-b}{x+b}\,dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{a-b}{x+b}\right) dx = x + (a-b)\,\mathrm{Ln}\,|x+b| + c$$

$$\underbrace{\int \frac{a_1x+b_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\,dx}_{\Delta<0} = \int \frac{\overbrace{\text{مشتق مخرج}}^{(2a_2x+b_2)}}{a_2x^2+b_2x+c_2}\,dx + \int \frac{\text{عدد ثابت} \rightarrow b_1}{\underbrace{a_2x^2+b_2x+c_2}_{\text{تبدیل به مربع کامل}}}$$

$\rightarrow \tan^{-1}$

مثال:

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x+1}^{u'}}{\underbrace{x^2+x+1}_{u}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1/2)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c$$

تغییر متغیر گویا ساز: انتگرال‌هایی که شامل چند رادیکال با فرجه‌های مختلف هستند از تغییر متغیر $x = u^b$

(b کوچکترین مضرب مشترک فرجه‌ها است) استفاده می‌کنیم

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}} \qquad \frac{x = u^6}{dx = 6u^5\,du}$$

$$\int \frac{6u^5\,du}{u^3+2u^2} = \int \frac{6u^3}{u+2}\,du$$

$$\begin{array}{r|l} 6u^3 & u+2 \\ \cline{2-2} -6u^3-12u^2 & 6u^2-12u+24 \\ \hline -12u^2 & \\ 12u^2+24u & \\ \hline 24u & \\ -24u-48 & \\ \hline -48 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \int (6u^2-12u+24)\,du + \int \frac{-48}{u+u}\,du$$

$$= 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} - 48\ln\left|\sqrt[6]{x}+2\right| + C$$

انتگرال توابع کسری برحسب $\sin$ ، $\cos$ ،

if f تابعی کسری از sin و cos است

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\Big(\underbrace{\frac{2u}{1+u^2}}_{\sin}, \overbrace{\frac{1-u^2}{1+u^2}}^{\cos}\Big)\frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$\boxed{u = \tan\frac{x}{2}}$$

مثال:

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} = \int \frac{1-\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$= \int \frac{1+u^2-2u}{2} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \int \left(1-\frac{2u}{1+u^2}\right) du$$

$$= u - \ln(1+u^2) + C = \tan\frac{x}{2} - \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) + C$$

فرمولهای تحویلی : بعضی از انتگرالها وقتی محاسبه می شوند همان انتگرال با توان کمتر ظاهر می شود که

انتگرال بدست آمده ضعیف تر نسبت به انتگرال اولیه می باشد . بعنوان مثال چند فرمول تحویل شده:

$$I_n=\int \sin^n x\,dx \Rightarrow I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n\geq 2)$$

$$I_n=\int \cos^n x\,dx \rightarrow I_n=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n\geq 2)$$

$$I_n=\int (\ln x)^n dx \rightarrow I_n=x(\ln x)^n-nI_{n-2} \quad (n\geq 1)$$

$$I_n=\int (\tan x)^n dx \rightarrow I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2} \quad (n\geq 2)$$

مثال: اگر $n\geq 1$ ، $I_n=\int_0^a (a^2-x^2)^n dx$ رابطه بین I_n ، I_{n-1} چیست؟

۱) $I_n=\frac{a^2n}{2n+1}I_{n-1}$ ۲) $I_n=\frac{2a^2}{n+2}I_{n-1}$

۳) $I_n=\frac{2a^2n}{n+2}I_{n-1}$ ۴) $\frac{2a^2n}{2n+1}I_{n-1}$

$n=1 \leftarrow$ ۳ گزینه مشابه یکدیگرند

$I_2=\int_0^a (a^2-x^2)^2 dx \leftarrow \underline{n=2}$

$$I_2=\int_0^a (a^2-x^2)^2 dx=a^5-\frac{2}{3}a^5+\frac{1}{5}a^5=\frac{8}{15}a^5$$

$$I_1=\int_0^a (a^2-x^2)dx=a^3-\frac{1}{3}a^3=\frac{2}{3}a^3$$

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{\frac{8}{15}a^5}{\frac{2}{3}a^3}=\frac{4}{5}a^2 \longrightarrow$$ به ازای $\underline{n=2}$ گزینه ۴ جواب است

اگر $I_{m,n}=\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$ آنگاه می‌توان نشان داد که $I_{m,n}=aI_{m,n-1}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ مقدار a کدام است؟

1) $a=\frac{-n}{m}$ 2) $\frac{-m}{n}$ 3) $a=\frac{n}{m+1}$ 4) $a=\frac{-n}{m+1}$

$\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$

$$I_{2,1}=\int_0^1 x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}x^2dx$$

$x^2 \quad \ln x$

$2x \quad x\ln x-x$

$I_{2,1}=x^3\ln x-x^3-\int(2x^2\ln x-2x^2)dx$

$I_{2,1}=x^3\ln x-x^3-2\int x^2\ln x+\int 2x^2dx$

$I_{2,1}=x^3\ln x-x^3-2I_{2,1}+\frac{2}{3}x^3$

$\begin{cases} \ln x=u \to \frac{1}{x}dx=du \\ x^2dx=dv\to\frac{1}{3}x^3=v\end{cases}$

$$=-\frac{1}{9}x^3\Big|_0^1=-1/9$$

$3I_{2,1}=x^3\ln x-x^3+\frac{2}{3}x^3 \longrightarrow I_{2,1}=x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3\Big|_0^1=-\frac{1}{9}$

$$I_{2,0}=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3} \qquad \frac{I_{2,1}}{I_{2,0}}=\frac{-\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}\to -1/3 \longrightarrow \text{گزینه } 4$$

انتگرال شامل قدرمطلق:

بازه انتگرال را روی تعیین علامت تابع انتگرال می‌شکنیم

$$\int_{-1}^1 |x-|x||dx=\int_{-1}^0 -2x\,dx+\int_0^1 0\,dx=-x^2\Big|_{-1}^0=0-(-1)=1$$

– مقدار انتگرال $\int_{-1}^2\sqrt{|x|-x}\;dx$ چقدر است؟

1) صفر 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 4) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$I=\int_{-1}^{0}\sqrt{-2x}\,dx \cancel{\int_{0}^{2} 0\,dx}$$

$$-2x=u \qquad -2dx=du \qquad dx=\frac{-1}{2}du \qquad u\Big|_{2}^{0}$$

$$\int_{2}^{0}\sqrt{u}\left(\frac{-1}{2}du\right)=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{1}{3}\,2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\longrightarrow$$ گزینه ۲

انتگرالهای شامل جزء صحیح : بازه انتگرال را طوری تقسیم بندی می‌کنیم که داخل جزء صحیح بین دو عدد صحیح متوالی قرار گیرد.

$$\int_{0}^{2}[x^2]\,dx=\cancel{\int_{0}^{1}0\,dx}+\int_{1}^{\sqrt{2}}1\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}2\,dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}3\,dx$$

$$=(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+3(2-\sqrt{3})=\cdots$$

چند فرمول مهم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+c$$

$$\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+c=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$$

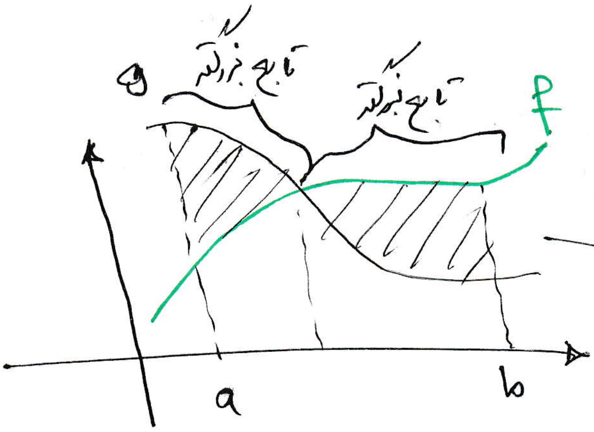
$$\int\csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|+c=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

$$\int\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + c$$

کاربرد انتگرال:

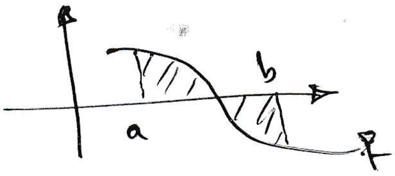
محاسبه مساحت سطح محصور بین دو منحنی تابع



همیشه تابع بزرگتر
منهای تابع کوچکتر می شود

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

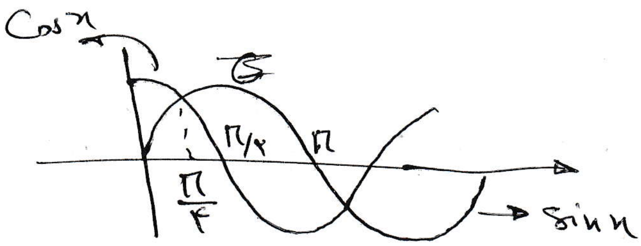
حالت خاص: مساحت محصور بین منحنی و محور x ها



$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

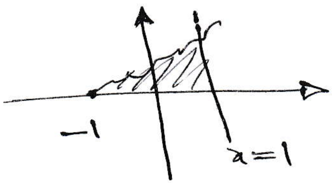
- مساحت محصور دو منحنی $y = \sin x$, $y = \cos x$ در $[0, \pi]$ بدست آورید

$$A = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx$$



$\sin x = \cos x \rightarrow x = \pi/4$

- سطح محدود به منحنی تابع $f(x)=(x+1)e^{-x}$ ، محور ها و خط به معادله $x=1$ کدام است؟



$x>-1 \to f>0$

۱) $e-2/e$ ۲) $e-\frac{1}{e}$ ۳) $e-\frac{3}{e}$ ۴) $2e-\frac{3}{e}$

$$A=\int_{-1}^{1}(x+1)e^{-x}\,dx$$

$$\begin{array}{ccc} x+1 & & e^{-x} \\ & \searrow^{+} & \\ 1 & & -e^{-x} \\ & \searrow^{-} & \\ 0 & & e^{-x} \end{array}$$

$$=-(x+1)e^{-x}-e^{-x}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=(-2e^{-1}-e^{-1})-(-e)=\frac{-3}{e}+e$$

طول منحنی تابع:

برای بدست آوردن طول منحنی تابع $y=f(x)$ روی بازه $[a,b]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

عمران، طول قوس منحنی $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$ از $x=1$ تا $x=2$ برابر است با:

۱) ۱۵ ۲) $\frac{۲۵}{۳}$ ۳) ۲۱ ۴) $\frac{۳۳}{۱۶}$

$$y'=\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^3} \qquad y'^2=\frac{x^6}{4}+\frac{1}{4x^6}-\frac{1}{2}$$

$$1+y'^2=\frac{x^6}{4}+\frac{1}{4x^6}+\frac{1}{2}=\left(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3}\right)^2$$

$$L=\int_1^2\left(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3}\right)dx=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4x^2}\Big|_1^2=\cancel{\frac{1}{8}\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)\Big|_1^2}$$

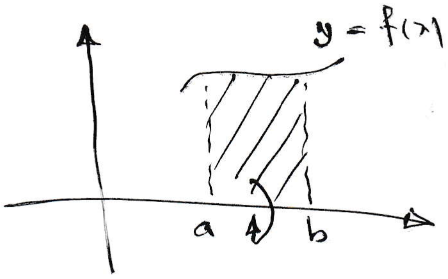
$$=\cancel{\frac{1}{8}\left[\left(16-\frac{1}{16}\right)-(1-1)\right]}=\quad\frac{33}{16}\to \text{گزینه ۴}$$

ریاضی : طول منحنی $3y - 2x^{\frac{3}{2}} = 0$ را از $x=0$ تا $x=1$ برابر است با

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \qquad y' = x^{\frac{1}{2}} \qquad 1+y'^2 = 1+x$$

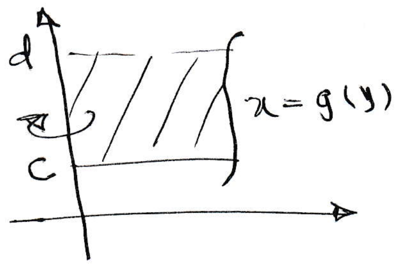
$$L = \int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

حجم حاصل از دوران :

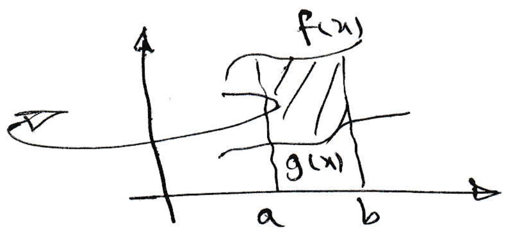


حجم حاصل از دوران منحنی $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$

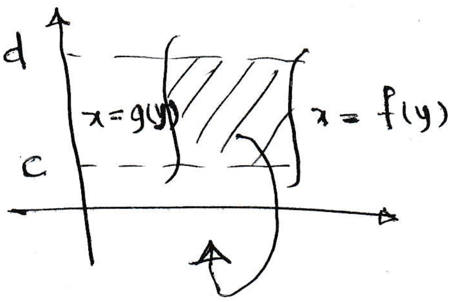
$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$



$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\,dy$$



$$V = 2\pi\int_a^b x\big(f(x)-g(x)\big)\,dx$$

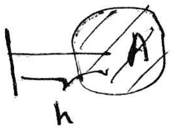


$$V = 2\pi\int_c^d y\big(f(y)-g(y)\big)\,dy$$

قضیه اول پاپوس: حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محوری که از آن نمی‌گذرد برابر است با

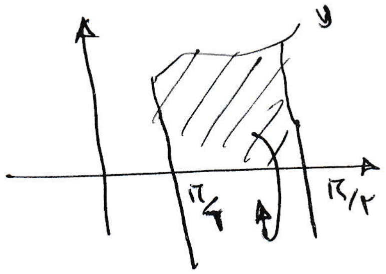
حاصل ضرب مساحت ناحیه A در محیط دایره ای که مرکز سطح آن طی می‌کند (مرکز گون)

$V = S_A \times 2\pi h$



MBA: سطح محدود به منحنی $y = \frac{\sqrt{\cos^3 x}}{\sin^2 x}$. محور xها، و خطوط $x = \frac{\pi}{6}$ ، $x = \frac{\pi}{2}$

را حول محور xها دوران داده‌ایم حجم حاصل کدام است؟



$$V = \pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x} \cdot \cos x \, dx$$

$u = \sin x$

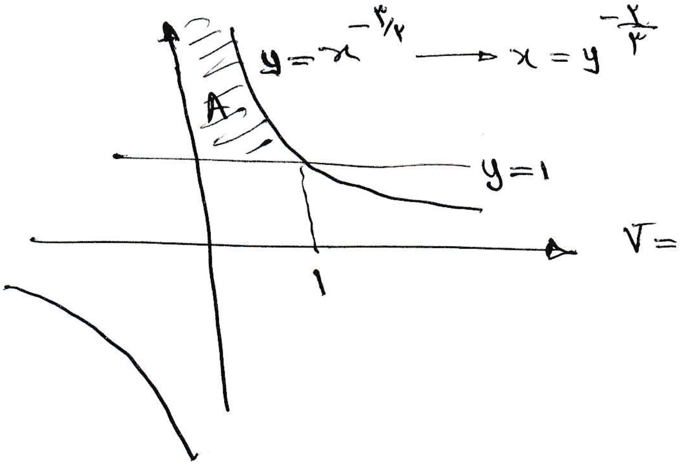
$$= \pi \int_{1/2}^{1} \frac{1-u^2}{u^4} du = \pi \left(-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u} \right)_{1/2}^{1} = \pi \left(\left(-\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{8}{3}+2\right) \right)$$

$$= \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

- ناحیه بی‌کران منحنی $y = x^{-\frac{3}{2}}$ ، $y=1$ از $x=0$ تا $x=1$ حول محور y دوران کرده است

حجم V کدام است؟

1) π 2) 2π 3) 3π 4) 8π



راه اول:

$$V = \pi \int_{1}^{+\infty} y^{-\frac{4}{3}} dy = \pi \left(-3 y^{-\frac{1}{3}} \right)_{1}^{+\infty}$$

$$= \pi (0 + 3) = 3\pi$$

راه دوم $V = 2\pi \int_0^1 x(x^{-\frac{3}{2}} - 1)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^{-1/2} - x)\,dx$

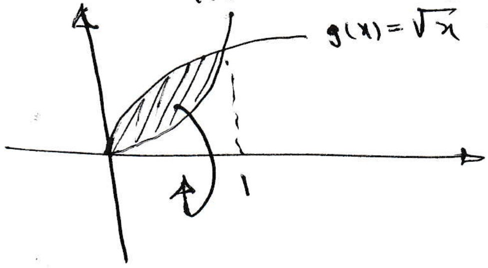
$= 2\pi\left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3\pi$

صنایع: حجم حاصل از دوران $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ را حول محور xها بدست آورید

۱) $\frac{3\pi}{10}$ ۲) $\frac{2\pi}{5}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{5}$

$f(x) = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$

$g(x) = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$



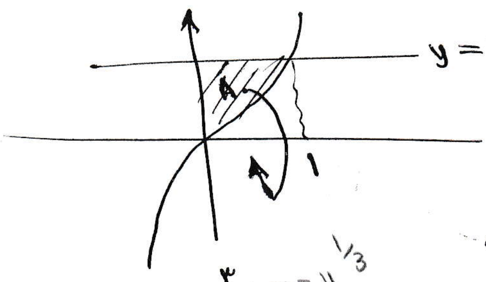
راه اول $V = \pi \int_0^1 x\,dx - \pi \int_0^1 x^4\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$

راه دوم: $V = 2\pi \int_0^1 y(\sqrt{y} - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^1 (y^{\frac{3}{2}} - y^3)\,dy$

$= 2\pi\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi\,\frac{3}{20} = \frac{3\pi}{10}$

عمران: هرگاه ناحیه محصور بین منحنی‌های $y = x^3$, $y = 1$ بین $x = 0$, $x = 1$ را حول محور xها دوران دهیم مقدار حجم حاصل کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{7}$ ۴) $\frac{6\pi}{7}$



$y = x^3 \rightarrow x = y^{1/3}$

راه اول:

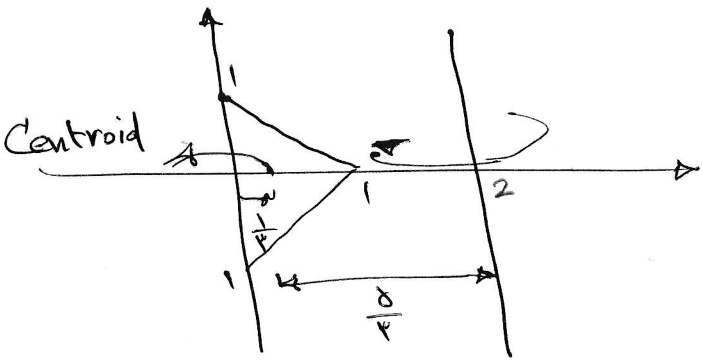
$V = \underbrace{\pi}_{\text{حجم استوانه}} - \pi \int_0^1 x^6\,dx = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$

راه دوم:

$V = 2\pi \int_0^1 y(y^{\frac{1}{3}} - \underbrace{0}_{x=0})\,dy = 2\pi \int_0^1 y^{\frac{4}{3}}\,dy = 2\pi\left(\frac{3}{7}y^{\frac{7}{3}}\right)\Big|_0^1 = \frac{6\pi}{7}$

حجم حاصل از دوران مثلث به رئوس $(0,1)$ ، $(0,-1)$ ، $(1,0)$ حول خط $x=2$ برابر است با:

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) $\frac{10\pi}{3}$ ۳) $\frac{8\pi}{3}$ ۴) $\frac{7\pi}{3}$

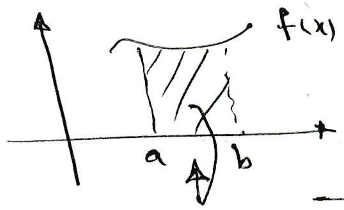


$$V = 1 \times 2\pi\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{10\pi}{3}$$

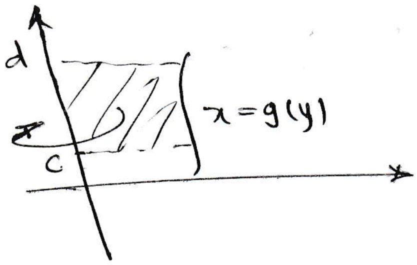
مساحت مثلث

$2 \times 1 \times \frac{1}{2}$

مساحت سطح حاصل از دوران:



$$\longrightarrow \quad S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



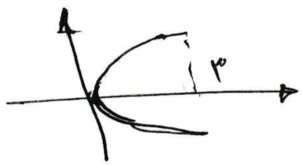
$$S = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

ـ مساحت رویه حاصل از دوران منحنی $y^2=4x$ حول محور x ها در $[0,3]$ حاصل می‌شود کدام است

۱) $\frac{34\pi}{3}$ ۲) $\frac{56\pi}{3}$ ۳) $\frac{48\pi}{3}$ ۴) $\frac{64\pi}{5}$

$y=2\sqrt{x} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x)^{-1/2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$



$$S = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx = 4\pi\left(\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^3 = \frac{8}{3}\pi(8-1) = \frac{56\pi}{3}$$

مقدار متوسط تابع $f(x)$ روی $[a,b]$:

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

تعبیر هندسی: مستطیلی که معادل سطح زیر منحنی $f(x)$ است

مثال: مقدار متوسط تابع $f(x)=x^3$ را روی بازه $[0,1]$ بدست آورید:

$$\bar{f} = \frac{\int_0^1 x^3\,dx}{1} = \frac{\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1}{1} = \frac{1}{4}$$

صنعتی: میانگین تابع $f(x)=[x]$ در $[0,100]$ کدام است؟

۱) $49/5$ ۲) 50 ۳) $50/5$ ۴) 51

$$\bar{f} = \frac{\int_0^{100} [x]\,dx}{100} = \frac{1+2+3+\cdots+99}{100} = \frac{\frac{99\times 100}{2}}{100} = 49/5$$

عمران ۹۱: با توجه به انتگرالهای زیر حاصل $5I+3J$ کدام است؟

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

۱) $\frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\pi + \ln\sqrt{2}$ ۳) $\pi + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$

$$I + J = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\overbrace{\cos x - \sin x}^{u'}}{\underbrace{\sin x + \cos x}_{u}}\,dx = \ln|\sin x + \cos x|\Big|_0^{\pi/4} = \ln\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \ln\sqrt{2} \end{cases}$$

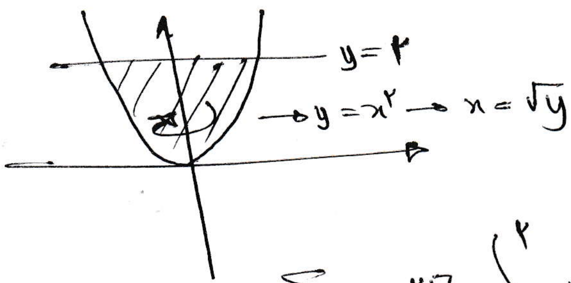
$$2I = \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} \longrightarrow I = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln\sqrt{2}}{2}$$

$$J = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln\sqrt{2}}{2}$$

$$5I + 3J = \frac{5\pi}{8} + \frac{5}{2}\ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{8} - \frac{3}{2}\ln\sqrt{2} = \underline{\pi + \ln\sqrt{2}}$$

MBA / ۹۱ منحنی به معادله $y \leq 2$ و $y = x^2$ را حول محور yها دوران می‌دهیم اندازه سطح رویه حاصل چند برابر $\frac{\pi}{3}$ است؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰



$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$S = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\right) dy = \pi \int_0^2 \sqrt{4y+1}\, dy$$

$$= \pi \int_1^9 u^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} du\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^9 = \frac{\pi}{6}(27 - 1) = \frac{26\pi}{6}$$

$$= \frac{13\pi}{3}$$

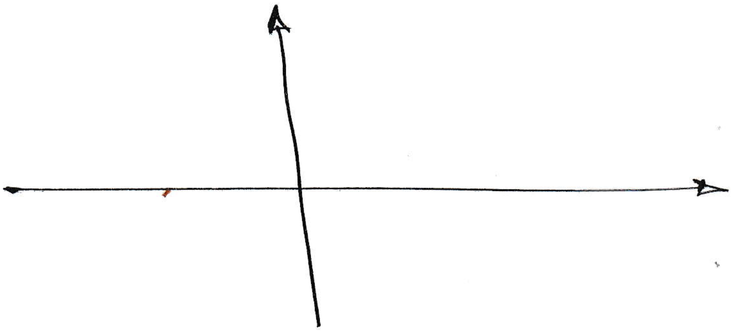
$4y + 1 = u$

$4\,dy = du \qquad u\Big|_1^9$

MBA مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=x^3e^{-x^2}$ محور xها و خطوط به معادله $x=1$ و $x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{e}$ ۲) $\frac{e-1}{e}$ ۳) $\frac{e-2}{e}$ ۴) $\frac{2}{e}$

تابع فرد است پس نسبت به محور و تقارن دارد:



$$S=2\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx=2\int_0^1 x^2\cdot x\cdot e^{-x^2}dx$$

$$-x^2=u$$

$$-x^2=u \to -2xdx=du \quad u\Big|_0^{-1}$$

$$=2\int_0^{-1}-ue^u\left(-\frac{1}{2}du\right)=-\int_{-1}^0 ue^u du=-(ue^u-e^u)\Big|_{-1}^0$$

u	e^u
$1 \xrightarrow{+}$	e^u
$\xrightarrow{-}$	e^u

$$=-(-1+e^{-1}+e^{-1})=1-\frac{2}{e}$$

$$\boxed{=\frac{e-2}{e}} \longrightarrow \text{گزینه ۳}$$

MBA حاصل $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ وقتی $t\to+\infty$ کدام است؟

۱) $\ln 2$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) $\frac{\pi}{2}$

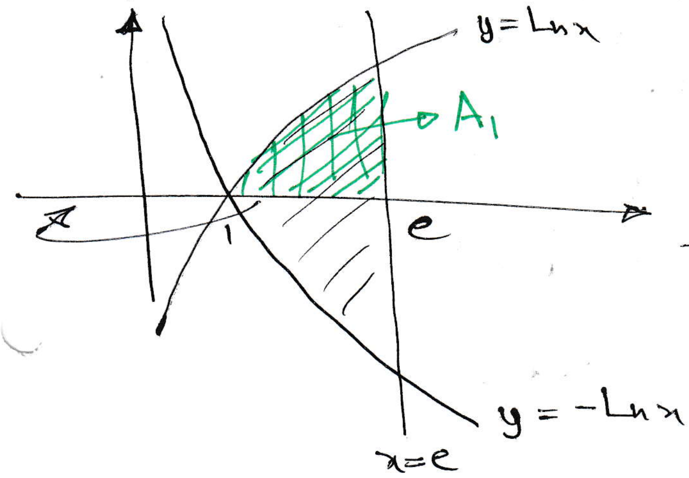
$$\sqrt{e^{2x}-1} = u \longrightarrow e^{2x} = u^2+1$$

$$\longrightarrow \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = du \longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{du}{u^2+1}$$

$$\int_0^{\sqrt{e^{2t}-1}} \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u \Big|_0^{\sqrt{e^{2t}-1}} = \tan^{-1}\sqrt{e^{2t}-1} \xrightarrow{t \to +\infty} \frac{\pi}{2}$$

ریاضی ۹۱ — سطح محصور توسط دو منحنی $y = \pm \ln x$ ، خط $x = e$ را حول محور y ها دوران کنیم حجم حاصل از دوران برابر است با:

1) $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$ 2) $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$ 3) $\pi(e^2-1)$ 4) $\pi(e^2+1)$



$$V = 2A_1 = 2\pi\int_1^e x \ln x \, dx$$

$$\begin{cases} \ln x = u \\ x\,dx = dv \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x}dx = du \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$V = 4\pi\left(\frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx\right) = 4\pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1)\right)$$

$$= \pi(2e^2 - e^2 + 1) = \pi(e^2+1)$$

$x \quad + \ln x$

$1 \longrightarrow x\ln x - x$

$$I = x^2 \ln x - x^2 - \int x \ln x\,dx - \int x\,dx$$

$$2I = x^2 \ln x - x^2 - \frac{x^2}{2} \qquad 2I = x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 \rightarrow I = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2$$

صنایع - حفظی ۹۱ — $y = \cos x$ را در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ حول محور xها دوران می‌دهیم حجم جسم حاصل کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\pi^2/8$ ۴) $\pi/4$

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \pi\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}\right) = \pi^2/4$$

صنایع - حفظی ۹۱ — $3y - x^3 = 0$ را در بازه $[0, 1]$ حول محور xها دوران می‌دهیم مساحت جانبی شکل حاصل برابر کدام است؟

$y = \frac{x^3}{3}$

$$S = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}\, dx \qquad \underline{1+x^4 = u} \qquad \frac{dy}{dx} = x^2$$

عمران - نقشه برداری — مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)\, dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) dx = x \mp \frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{1}{4}\right) - \left(\pm\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \mp \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\rightarrow I = \frac{\pi}{4} \mp \frac{1}{4}}$$

حاصل $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 1

تغییر متغیر مثلثاتی

$x=\sin\theta$

$dx=\cos\theta\, d\theta \qquad \theta\Big|_0^{\pi/2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2\cos^2(\theta/2)}$$

$$=\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sec^2(\theta/2)\, d\theta = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \qquad x=\sin\theta \qquad dx=\cos\theta\, d\theta \qquad \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(1+\sin^2\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(1+\sin^2\theta)\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$$

$\div \sin^2\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\csc^2\theta}{\csc^2\theta+1}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{\csc^2\theta\, d\theta}^{-u'}}{2+\underbrace{\cot^2\theta}_{u}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{\cot\theta}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

$\frac{90}{A}$

MBA – ۹۰ — منحنی به معادله $y = 6\cosh\frac{x}{6}$ ، $0 \leqslant x \leqslant 5$ را حول محور xها دوران می‌دهیم.
در شکل دوار حاصل نسبت عدد حجم به عدد سطح جانبی آن کدام است؟

۱) $2\pi/3$ ۲) $2/1$ ۳) $3/2$ ۴) $3/1$

$$V = \pi\int_0^5 36\cosh^2\frac{x}{6}\,dx$$

$$S = 2\pi\int_0^5 \left(6\cosh x/6\right)\sqrt{1+\sinh^2 x/6}\,dx = 12\pi\int_0^5 \cosh^2\frac{x}{6}\,dx$$

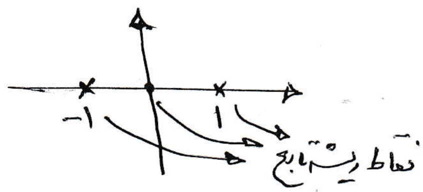
$$\frac{V}{S} = \frac{36}{12} = \frac{3}{1}$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

MBA – ۹۰ — مساحت ناحیه محدود به منحنی $y^2 = x^2 - x^4$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) 2 ۳) $2/3$ ۴) 1



$$y = \pm\sqrt{x^2 - x^4} = \pm|x|\sqrt{1-x^2}$$

قسمت مثبت منحنی را در نظر می‌گیریم و مساحت زیر آن را دو برابر می‌کنیم

$$S = 2S_1 = 2\int_{-1}^{1} \underbrace{|x|\sqrt{1-x^2}}_{\text{تابع زوج}}\,dx = 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$1 - x^2 = u$

$$\to S = 4\int_1^0 u^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}du\right) = 2\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$-2x\,dx = du$

$x\,dx = -\frac{1}{2}du$

کامپیوتر ۹۱ — تعداد انتگرال

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2}$$ کدام است؟

1) $\operatorname{Ln}\frac{3}{2} - 1$ 2) $\operatorname{Ln}\frac{2}{3}$ 3) $3\operatorname{Ln}\frac{3}{2}$ 4) $3\left(\operatorname{Ln}\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right)$

$$1+\sqrt[3]{x} = u \rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = du \rightarrow dx = 3\sqrt[3]{x^2}\,du$$

$$\sqrt[3]{x} = u-1 \rightarrow \qquad dx = 3(u-1)^2 du$$

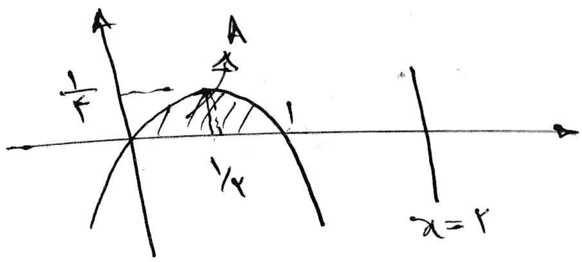
$$\int_2^3 \frac{3(u-1)^2 du}{(u-1)u^2} = 3\int_2^3 \frac{u-1}{u^2}du = 3\left(\operatorname{Ln}u + \frac{1}{u}\right)\Big|_2^3$$

$$= 3\left[\left(\operatorname{Ln}3 + \frac{1}{3}\right) - \left(\operatorname{Ln}2 + \frac{1}{2}\right)\right] = 3\left(\operatorname{Ln}\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

مثال: حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به $y = x - x^2$ ، $y=0$ حول خط $x=2$ چقدر است؟

1) $\pi/4$ 2) $\pi/3$ 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) π

$$y = x - x^2 = -(x^2 - x) = -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$



قضیه انتقال

$$S_A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

پاپوس $V = S_A \times 2\pi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}\times 3\pi = \frac{\pi}{2}$

مکانیک ۹۱ — مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ برابر است با:

(در صورت نیاز $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ، $\sum \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$)

۱) $\frac{\pi^2}{12}$ ۲) $\frac{\pi^2}{80}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) قابل محاسبه نیست چون انتگرال همگرا نیست

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) - \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots\right)} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

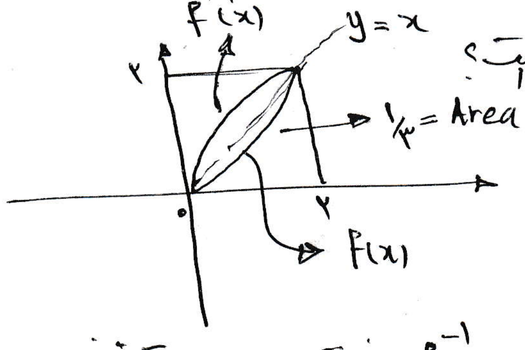
$$\sum \frac{1}{(2n)^2} + \sum \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\rightarrow \sum \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24}$$

صنایع ۹۱ فرض کنید $f(x)$ تابع پیوسته‌ای بر $[0,2]$ باشد، $f(0)=0$ ، $f(2)=2$

علاوه بر این به ازای هر $x \in [0,2]$ داریم $f'(x) > 0$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$ ؛ مقدار $\int_0^2 f^{-1}(y)\,dy$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $2/3$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $11/3$



$$\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\int_0^2 f^{-1}(y)\,dy = \frac{1}{3}$$

$f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به $y=x$ قرینه‌اند

سوال ۹۰ تعداد $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-e^{-\sqrt{x}})}$ برابر است:

$$1-e^{-\sqrt{x}} = u \rightarrow e^{-\sqrt{x}} = 1-u$$

$$du = \frac{-(-1)}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx \rightarrow \frac{2}{1-u}\, du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

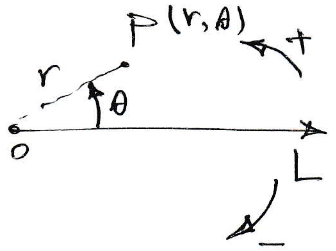
$$\int_{1-\frac{1}{e}}^{1-\frac{1}{e^2}} \frac{\frac{2}{1-u}\, du}{u} = 2\int_{1-\frac{1}{e}}^{1-\frac{1}{e^2}} \frac{1}{u(1-u)} = 2\left(-\ln|1-u| + \ln|u|\right)\Big|_{1-\frac{1}{e}}^{1-\frac{1}{e^2}}$$

$$\frac{1}{u(1-u)} \rightarrow \frac{1}{1-u} + \frac{1}{u}$$

$$= 2\ln(e+1)$$

مختصات قطبی: فرض کنید L نیم‌خط به نام محور قطبی که از نقطه ثابت O به نام مبدأ قطبی خارج شده باشد

هر نقطه در صفحه دارای مختصات به صورت زیر است.



$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

θ منحصر به فرد نیست

توجه: اگر P، $P(r,\theta)$ و $r<0$ قرینه نقطه P': $P'(|r|,\theta)$ نسبت به مبدأ قطبی است.

بنابراین هر نقطه در صفحه دو مختصات قطبی با r مثبت و r منفی دارد

رابطه بین مختصات قطبی و قائم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$ فرمول

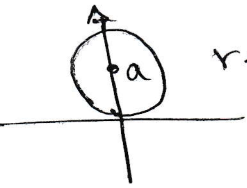
$$x^2 = r^2\cos^2\theta \qquad x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta$$
$$y^2 = r^2\sin^2\theta$$

نمودار معادلات قطبی: منظور از نمودار تابع قطبی $r = f(\theta)$ یا بطور کلی معادله $F(r,\theta) = 0$ ای

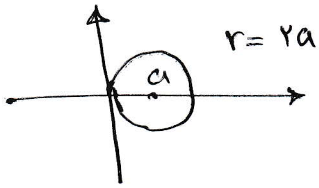
که به نمودار انواع معادلات منحنی قطبی می گویند.

چند نمودار قطبی خاص:

دایره: $r = a$ خط که از مبداء می گذرد: $\theta = \alpha$ نیم خط که از مبداء می گذرد: $\begin{cases} \theta = \alpha \\ r \geq 0 \end{cases}$

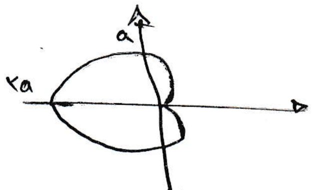


$r = 2a \sin\theta$

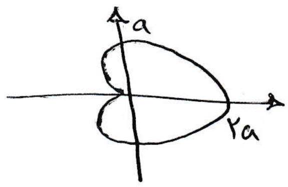


$r = 2a \cos\theta$

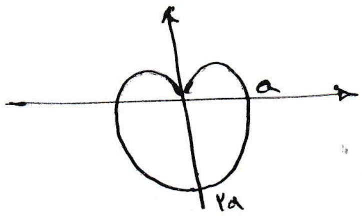
دلنما:



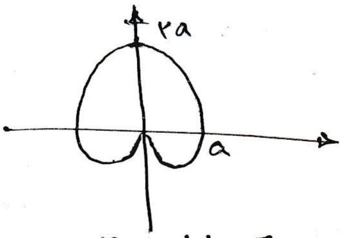
$r = a(1 - \cos\theta)$



$r = a(1 + \cos\theta)$



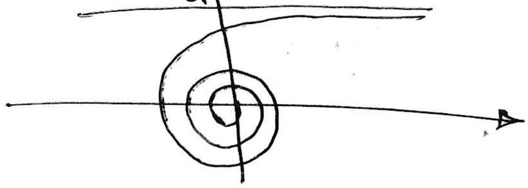
$r = a(1 - \sin\theta)$



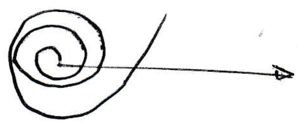
$r = a(1 + \sin\theta)$

مارپیچ هذلولی:

$r\theta = a \quad (a > 0)$

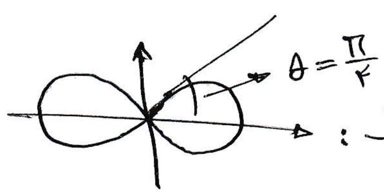


مارپیچ ارشمیدس:



$r = a\theta \quad (\theta \geq 0, a > 0)$

لمینسکات:

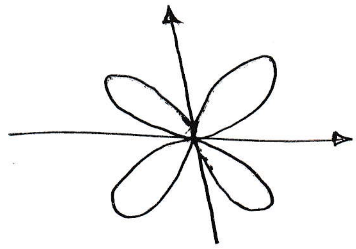


$r^2 = a^2 \cos 2\theta$

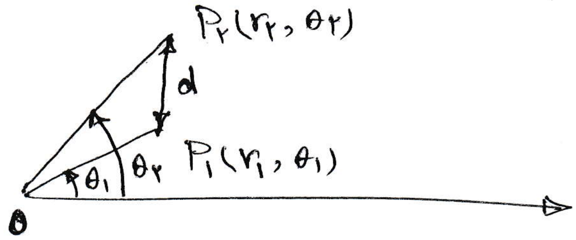
$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

تقارن‌ها:

نمودار معادله قطبی $r = \sin 2\theta$ را رسم کنید

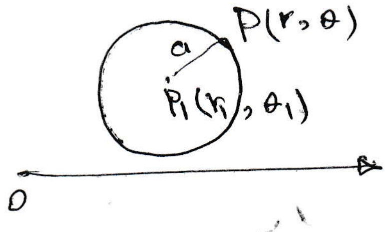


فاصله دو نقطه در مختصات قطبی:



$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

معادله کلی دایره

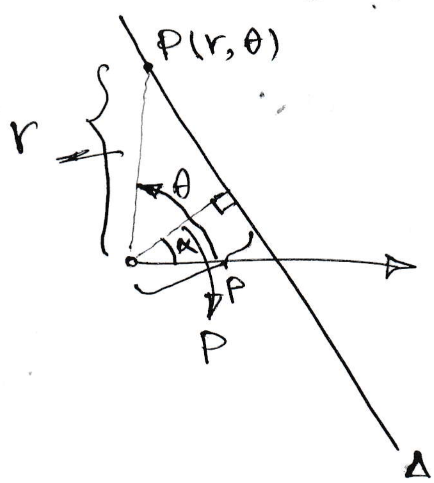


$$d_{PP_1} = a \longrightarrow d_{PP_1}^2 = a^2 \longrightarrow \boxed{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos(\theta - \theta_1) = a^2}$$

توجه: معادله خطی که از مبداء نمی‌گذرد:

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{P}{r}$$

$$\boxed{r \cos(\theta - \alpha) = P}$$



مثال: فاصله مبداء قطبی از خط $x + \sqrt{3} y = 1$ چیست؟

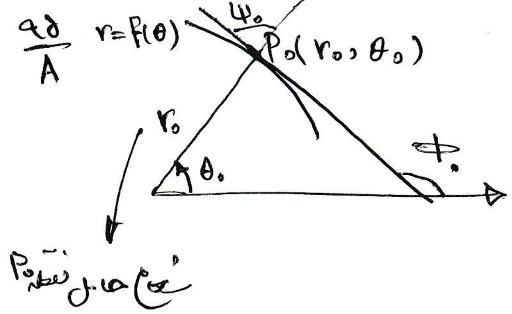
$$r \cos\theta + \sqrt{3}\, r \sin\theta = 1$$

$$r(\cos\theta + \sqrt{3} \sin\theta) = 1 \longrightarrow r\left(\cos\theta + \tan\frac{\pi}{3} \sin\theta\right) = 1$$

$$r\left(\frac{\cos\theta \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\theta}{\cos\frac{\pi}{3}}\right) = 1 \qquad r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ $\qquad P$

جواب $\frac{1}{2}$ است



خط مماس بر منحنی قطبی:

$$\tan\psi_0 = \frac{r}{r'}\Big|_{\theta=\theta_0}$$

$$\varphi_0 = \psi_0 + \theta_0 \xrightarrow{\text{از طرفین tan می‌گیریم}} \tan\varphi_0 = \frac{\tan\psi_0 + \tan\theta_0}{1-\tan\psi_0\tan\theta_0}$$

شیب خط مماس $m = \tan\varphi_0$

$$P_0(r_0, \theta_0) \to \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases} \to \text{معادله خط مماس}$$

ـ خط مماس بر منحنی قطبی $r = 6\sec^2\theta$ در نقطه $P_0(4, \frac{\pi}{6})$ بدست آورید.

$$\tan\psi_0 = \frac{r}{r'}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{6\sec^2\theta}{12\sec^2\theta \cdot \tan\theta}\Big|_{\theta=\pi/6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m = \tan\varphi_0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

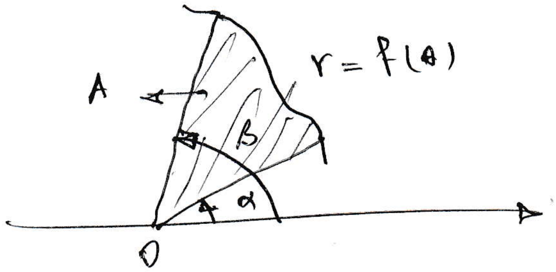
$$P_0 = \begin{cases} x_0 = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ y_0 = 4\times\frac{1}{2} = 2 \end{cases} \qquad \boxed{y-2 = \frac{5\sqrt{3}}{3}(x-2\sqrt{3})}$$

ـ زاویه α بین خط مماس بر منحنی $r = 2+2\sin\theta$ و شعاع حامل نقطه $(3, \pi/6)$ کدام است؟

$$\tan\alpha = \frac{r}{r'}\Big|_{\theta=\pi/6} = \frac{2+2\sin\theta}{2\cos\theta}\Big|_{\theta=\pi/6} = \frac{2+1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

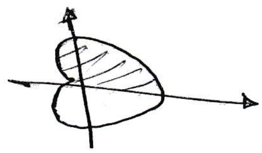
$$\to \boxed{\alpha = \pi/3}$$

مساحت در مختصات قطبی :



$$S=\frac{1}{۲}\int_{\alpha}^{\beta} f^{۲}(\theta)\,d\theta$$

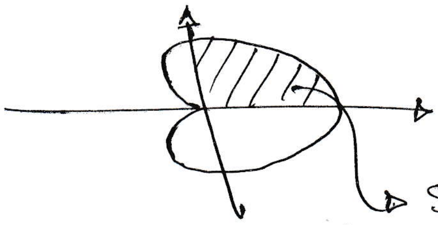
مثال : مساحت $r=a(1+\cos\theta)$



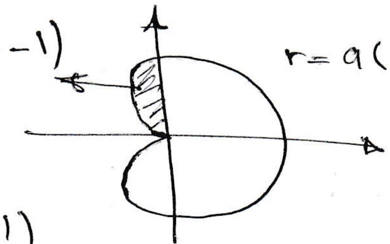
$$S=۲\left(\frac{1}{۲}\int_{0}^{\pi} a^{۲}(1+\cos\theta)^{۲}\,d\theta\right)$$

$$=a^{۲}\int_{0}^{\pi}\left(1+۲\cos\theta+\underbrace{\cos^{۲}\theta}_{\frac{1+\cos ۲\theta}{۲}}\right)d\theta$$

$$=a^{۲}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{۳}{۲}+\frac{1}{۲}\cos ۲\theta+۲\cos\theta\right)d\theta=a^{۲}\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)=\frac{۳\pi}{۲}a^{۲}$$

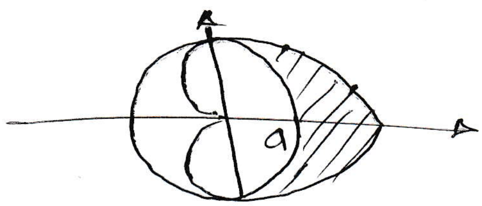


$S=a^{۲}\left(\frac{۳\pi}{۸}-1\right)$



مساحت خارج دایره $r=a$ و درون دلنمای $r=a(1+\cos\theta)$ را بدست آورید.

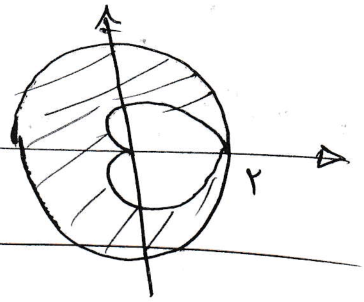
$$۲\left(a^{۲}\left(\frac{۳\pi}{۸}+1\right)-\frac{\pi a^{۲}}{۴}\right)$$



مکانیک مساحت ناحیه واقع در درون دایره $r=2$ و بیرون دلنمای $r=1+\cos\theta$ کدام است؟ $\frac{97}{8}$

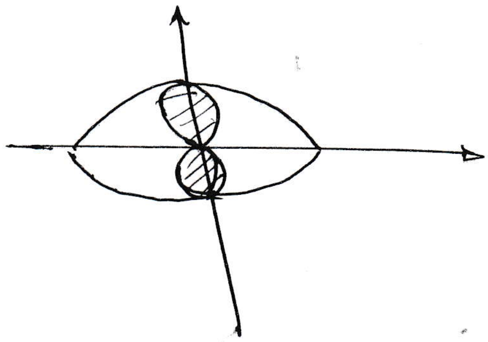
1) π 2) $\frac{5\pi}{2}$ 3) 3π 4) 2π

$$4\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$



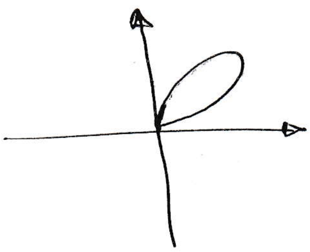
مساحت محصور بین دو دلنمای $r=1+\cos\theta$, $r=1-\cos\theta$ را بدست آورید

$$S=4\left(\frac{3\pi}{8}-1\right)=\frac{3\pi}{2}-4$$



مساحت یک برگ از گلبرگ‌های $r=\sin 3\theta$ کدام است؟

1) $\frac{\pi}{12}$ 2) $\pi/8$ 3) $\pi/6$ 4) $\pi/4$



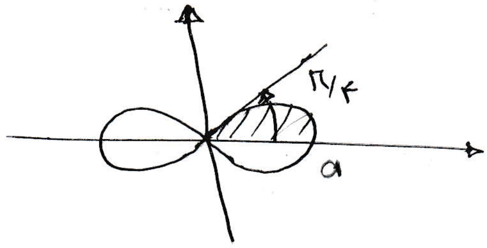
$0 \le 3\theta \le \pi/3$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\sin^2 3\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left(\frac{1-\cos 6\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{12}\sin 6\theta\right)\Big|_0^{\pi/3}=\frac{1}{2}\left(\pi/6-0\right)=\pi/12$$

۹۸/۸ مساحت محصور لمینسکات را بیابید:

$$r^2 = a^2\cos 2\theta \qquad \boxed{r = f(\theta)}$$



$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta\right)$$

$$= 2a^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} = \underline{a^2}$$

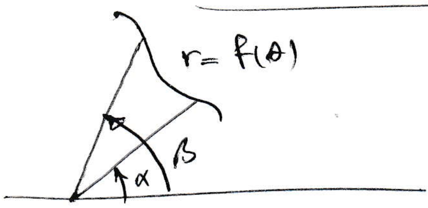
مثال: مساحت محدود به محور قطبی دور اول مارپیچ ارشمیدسی را بدست آورید

$$r = a\theta$$

$$S_A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\theta^2 \, d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\theta^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{8\pi^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

طول منحنی قطبی:



$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\theta$$

توجه:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} \, dr \qquad a < r < b$$

طول منحنی از روی $\underline{r}$ بدست می آید

مثال: طول منحنی قطبی دلنما را بدست آورید:

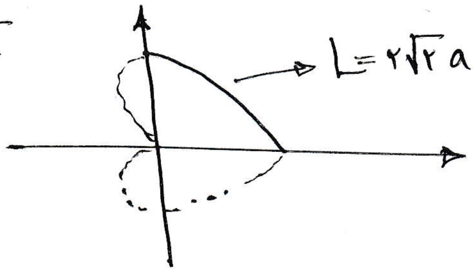
$$r = a(1 + \cos\theta)$$

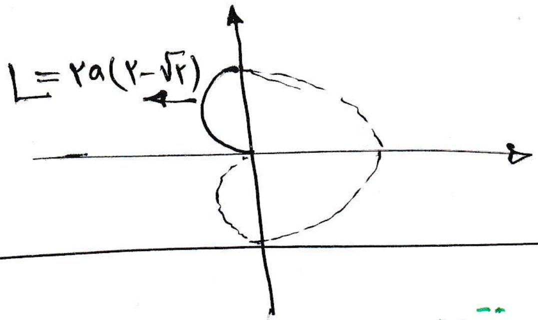
$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} \, d\theta = 2a\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta} \, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\, a\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\theta} \, d\theta = 2\sqrt{2}\, a\int_0^\pi \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2} \, d\theta$$

$$= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2} \, d\theta = 4a\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi = 8a$$

۹۹/۸





اعداد مختلط :

$3x+2iy-ix+5y=7+5i$

$$\begin{cases} 3x+5y=7 \\ 2y-x=5 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \end{matrix}$$

$Z=x+iy$

$Z+\bar{Z}=2\,\mathrm{Re}\,Z$

$Z-\bar{Z}=2i\,\mathrm{Im}\,Z$

$\bar{Z}=-Z \longleftrightarrow$ Z موهومی محض

$Z=\bar{Z} \longleftrightarrow$ Z حقیقی

فرض کنید $f(z)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد (مثلاً $f(\bar{Z})=\overline{f(Z)}$

$4Z^3-2Z+7$) حکم: چندجمله‌ای اگر Z جواب باشد $\bar{Z}$ باز هم جواب چندجمله‌ای است (ریشه است)

مقدار x برحسب u, v کدام است؟

$$\begin{cases} z=x+iy \\ w=u+iv \\ w=\dfrac{2}{z} \end{cases} \longrightarrow z=\frac{2}{w}=\frac{2}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{2u}{u^2+v^2}-\frac{2iv}{u^2+v^2}$$

$z=x+iy$

مکان $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)<1$ کدام است؟

مکان $R\left(\frac{1}{z}+1\right)\geq 2$ کدام است؟

مکان $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\leq 1$ کدام است؟

$Re(\frac{1}{z}) < 1$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

$\rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} < 1 \rightarrow x^2+y^2-x > 0$

$Z\bar{Z} + (1+i)Z + \overline{(1+i)Z} + 1 = 0$ مکان Z که در رابطه

$(1+i)Z = (1+i)(x+iy) = x-y+i(x+y)$

$\rightarrow (1+i)Z + \overline{(1+i)Z} = 2Re((1+i)Z) = 2(x-y)$

$\rightarrow x^2+y^2+2(x-y)+1 = 0$

$\boxed{(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1}$

$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1} = \frac{3(i^2)^{15} - i(i^2)^9}{2i-1} = \frac{-3+i}{2i+1} \times \frac{2i-1}{2i-1} = \dots$

$= 1+i$

$Re(\bar{Z}^2) = 1$ کدام است؟ مکان هندسی

$(\bar{Z})^2 = (x-iy)^2 = x^2-y^2-2ixy \rightarrow$

$Re(\bar{Z}^2) = x^2-y^2 = 1 \longrightarrow$ هذلولی