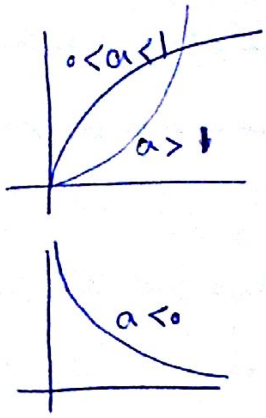
منطبق کردن تعریف جدید با نمونه های قبل :

$$x^a := e^{a\ln x} \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R} \;,\; x > 0$$

قرارداد : $0^a = 0$

برخی خواص :



$$x^{-a} = e^{-a\ln x} = \frac{1}{x^a}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$x^a . x^b = x^{a+b}$$

$$x^a / x^b = x^{a-b}$$

$$\frac{d}{dx} x^a = \frac{d}{dx} e^{a\ln x} = \underbrace{e^{a\ln x}}_{x^a} \times a\frac{1}{x} = a x^{a-1} \quad \checkmark$$

تابع نمایی در کلی ترین حالت که $f(x)$ تابعی مثبت باشد به صورت زیر داریم:

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\,\ln f(x)}}$$

مثال: مشتق بگیرید:

$$* \; y = \sqrt[x]{x}$$

روش اول: $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$$\Rightarrow y' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \times \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\,\frac{1}{x}\right) = \sqrt[x]{x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \ln x)$$

روش دوم: به کمک مشتق لگاریتمی

$$\ln|y| = \ln\left|\sqrt[x]{x}\right| = \frac{1}{x}\ln x$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\sqrt[x]{x}}_{y}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right)$$

محاسبه حد: به شرط وجود حد دو g, f:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim_{x\to a} g(x)}}$$

مثال

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} = \Big(\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}}_{\to \frac{0}{0}}\Big)^{\lim_{x\to 0}(1+x)}$$

$$\overset{H}{=} \left(\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1}\right)^{\lim_{x\to 0}(1+x)} = 2^1 = 2$$

* نکته: اگر $\lim_{x\to a} f = M \neq 1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ باشند آنگاه با توان‌رسانی معمول $M^{\pm\infty}$ محاسبه می‌شود.

مثال
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\lim_{x\to\infty} x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$$

صور مبهم: حالت‌های مبهم 0^0 ، ∞^0 و 1^∞ که برگرفته از نماها می‌باشند را بررسی می‌کنیم.

* الف

$$\lim_{x\to a} f^{g} \overset{\text{یکی از حالات بالا}}{=\!=} \lim_{x\to a} e^{g\,Ln f}$$

$$= \boxed{e^{\lim_{x\to a} g\,Ln f}} \quad \text{ب}$$

که در این حالت حالت‌های مبهم بالا به حالت $0\times\infty$ یا $\infty\times 0$ تبدیل می‌شوند. * ج

برای حل این حالت جدید نیز آن را با جابجا کردن یکی از عامل‌ها در صورت و مخرج به حالت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رسیم که آن حد را می‌توان با هوپیتال حل کرد. * هـ

د

و

مثال: (حالت 0^0)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x} \overset{0^0 \text{ * الف}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{x\,Ln x} \overset{\text{ب}}{=} e^{\lim_{x\to 0^+} x\,Ln x} \overset{0\times\infty \text{ * ج}}{=}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{Ln x}{\frac{1}{x}}} \underset{\text{هوپیتال}}{\overset{\frac{\infty}{\infty} \text{ * هـ}}{=}} e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim -\frac{x^2}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} -x}$$

د — و

$$= e^{0} = 1$$

مثال (حالت ∞^0):

$$* \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = ?$$

$$\overset{\infty^0}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \frac{\ln x}{1}} \underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1 .$$

مثال (حالت 1^∞: فرمول بسیار مهم و کاربردی):

$$* \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = ?$$

a, b: ثابت

$$\overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty} bx \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)} \overset{\infty\times 0}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{bx}}} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= e^{\lim \frac{\frac{a\left(\cancel{-\frac{1}{x^2}}\right)}{1+\frac{a}{x}}}{\frac{1}{b}\left(\cancel{-\frac{1}{x^2}}\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ab}{1+\frac{a}{x}}} = e^{ab} .$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}}$$

مثال:

$$* \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{\substack{a=b=1 \\ x=\frac{1}{t}\to 0 \\ t\to\infty}}{\overset{\text{مشابه ۸}}{=}} e^{1\times 1} = e .$$

حالت کلی: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}}$

$$* \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} .$$

مثال:

$$* \lim_{x \to 0^+} (x+\sin x)^{\operatorname{tg} x} = ?$$

$$\overset{0^0}{=} e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x \, \ln(x+\sin x)} = e^0 = 1$$

می‌توان حد را جداگانه حساب و جایگذاری کرد:

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x \, \ln(x+\sin x) \overset{0\times\infty}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+\sin x)}{\operatorname{cotg} x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1+\cos x}{x+\sin x}}{-\csc^2 x} \qquad -\csc^2 x \rightsquigarrow \frac{-1}{\sin^2 x} \qquad = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin^2 x(1+\cos x)}{x+\sin x}$$

که همان $\frac{0}{0}$ است ولی می‌توان قبل از هوپیتال، ساده نمود:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin^{\cancel{2}} x\,(1+\cos x)}{\cancel{\sin x}\left(\frac{x}{\sin x}+1\right)} = -\frac{\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x(1+\cos x)}{\left(\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} + \lim\limits_{x \to 0^+} 1\right)} = \frac{0}{1+1} = 0$$