

مشتق چندمتغیره

مشتق ضمنی

دکتر یوسف گوه‌مسکن

ریاضی ۲



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [REDACTED] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [REDACTED] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت  نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 -  بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 -  ساده جهت تثبیت مطالب
 -  متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب
 -  سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

اگر u و v تابعی از متغیرهای x و y باشند، حاصل $\frac{\partial u}{\partial y}$ را تعیین کنید.

$$\begin{cases} \sin xy + e^{xu^2} - u^2 + 2v = 0 \\ \cos(x+v) - e^{yv} + u = 0 \end{cases}$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: 😡 در توابع چندمتغیره‌ای که تابع قابل جداسازی از متغیرها نیست می‌توان از مشتق ضمنی استفاده کرد. در این مسئله چون مشتق تابع نسبت به y خواسته شده، باید از هر دو سطر نسبت به y مشتق گرفته شود. به دلیل حضور توابع u و v در هر دو سطر باید از آن‌ها هم به صورت ضمنی مشتق گرفت.

در مشتق سطر اول نسبت به y توجه شود که فقط x ثابت فرض می‌شود و مشتق u یا v باید در محاسبات لحاظ شود.

$$\frac{\partial}{\partial y}, \Rightarrow x \cos xy + (2xu u_y) e^{xu^2} - 2u u_y + 2v_y = 0$$

مرتب شده عبارت فوق:

$$(2xue^{xu^2} - 2u)u_y + 2v_y = -x \cos xy$$

مشتق نسبت به y از سطر دوم:

$$\frac{\partial}{\partial y}, \Rightarrow -v_y \sin(x+v) - (v + yv_y)e^{yv} + u_y = 0$$

مرتب شده عبارت فوق:

$$u_y - (\sin(x+v) + ye^{yv})v_y = ve^{yv}$$

اکنون باید دو معادله - دو مجهول بدست آمده حل شود:

$$\begin{cases} (2xue^{xu^2} - 2u)u_y + 2v_y = -x \cos xy \\ u_y - (\sin(x+v) + ye^{yv})v_y = ve^{yv} \end{cases}$$

در حالت ماتریسی می‌توان این معادله را به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} 2xue^{xu^2} - 2u & 2 \\ 1 & -(\sin(x+v) + ye^{yv}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \cos xy \\ ve^{yv} \end{bmatrix}$$

از روش کرامر برای تعیین مجهول u_y استفاده می‌شود:

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 2xue^{xu^2} - 2u & -x \cos xy \\ 1 & ve^{yv} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2xue^{xu^2} - 2u & 2 \\ 1 & -(\sin(x+v) + ye^{yv}) \end{vmatrix}} = \frac{2xuve^{xu^2}e^{yv} - 2uve^{yv} + x \cos xy}{-2u(\sin(x+v) + ye^{yv})(xe^{xu^2} - 1) - 2}$$

۳ مسائل مشابه

مثال ۱: اگر $u = x^2y$ و $x^3 + y^3 + 2xy = -2$ باشد، حاصل $\frac{du}{dx}$ در نقطه $(-1, 1)$ کدام است؟

- (مدیریت کسب و کار ۱۴۰۰)
- (۱) -7
(۲) -3
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) 3



پاسخ: در این عبارت u شامل x و y است. مشتق‌گیری از x به صورت مستقیم صورت می‌گیرد.

اما مشتق نسبت به y هم باید لحاظ شود، چون y تابعی از x است. این مشتق به صورت ضرب دو عبارت است، پس طبق قانون مشتق ضرب عمل می‌شود:

$$u_x = 2xy + x^2y'$$

برای تعیین y' باید از مشتق ضمنی استفاده شود:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 + 2y}{3y^2 + 2x}$$

با جایگذاری نقطه $(-1, 1)$ در مشتق‌ها، مشتق u نسبت به x بدست می‌آید.

$$u_x = 2xy + x^2\left(-\frac{3x^2 + 2y}{3y^2 + 2x}\right) = -7$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۲: فرض کنید $z = f(x, y)$ باشد، می‌دانیم که $f(xy, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$ است. در این صورت

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1)$ کدام است؟

- (صنایع و عمران ۹۷)
- (۱) -2
(۲) 0
(۳) 2
(۴) 4



پاسخ: ساده‌ترین مسیر برای یافتن جواب، بدست آوردن رابطه $f(x, y)$ است.

$$xy = u, \quad \frac{y}{x} = v, \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}$$

اگر در $f(xy, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$ جایگذاری شود:

$$f(u, v) = \frac{u}{v} - uv$$

با تغییر نامگذاری:

$$z = f(x, y) = \frac{x}{y} - xy$$

در نتیجه می‌توان یکبار نسبت به x و یکبار نسبت به y مشتق‌گیری نمود:

$$z_x = \frac{1}{y} - y, \quad \Rightarrow \quad z_{xy} = -\frac{1}{y^2} - 1$$

با جایگذاری نقطه $(1, -1)$ مقدار مشتق بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1) = -2$$

گزینه ۱ صحیح است.

مردی که کوه را از میان برداشت،
کسی بود که اول شروع به برداشتن
سنگ‌ریزه‌ها کرد.



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/@AvaEducation16)

  0935 210 4321

 AvaEducation16@gmail.com