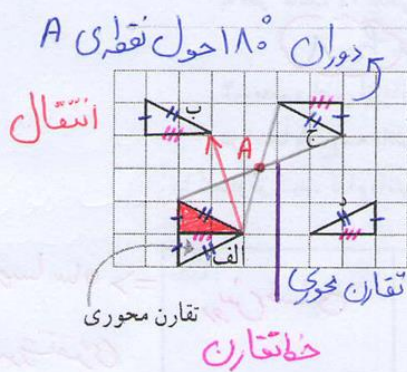


توجه: ابتدا فصل سوم کتاب هفتم مرور شود

تعریف هم نهشتی

شکل های هم نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر هم نهشت اند.



فعالیت (دست ورزی)



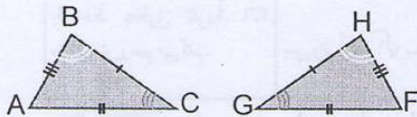
۱- در شکل روبه رو، مثلث های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده اند و با آن هم نهشت اند. مانند نمونه مشخص کنید از کدام یک تبدیل های انتقال، تقارن یا دوران استفاده شده است.
ضلع ها و زاویه های مساوی در این پنج مثلث را با علامت گذاری روی شکل نشان دهید.

$$\triangle ABC \cong \triangle GFE$$

۲- این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند:

پس اجزای متناظر آنها نیز با هم مساوی هستند.

با توجه به علامت های روی شکل ها، تساوی ضلع ها و زاویه های متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



$$\hat{A} = \hat{F} \quad \hat{B} = \hat{H} \quad \hat{C} = \hat{G}$$

$$\overline{BC} = \overline{GH} \quad \overline{AB} = \overline{HF} \quad \overline{AC} = \overline{FG}$$

۳- مثلث های XYZ و LMN با یکدیگر هم نهشت اند.
می خواهیم ببینیم مثلث XYZ با چه تبدیل یا تبدیلی های LMN منطبق می شود.
راه حل دو دانش آموز در اینجا آمده است.
شما هم راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید و آن را توضیح دهید. سپس راه حل خود را با راه حل های دوستانتان مقایسه کنید. خوب است بدانید که راه حل های درست بی شماری برای این مسئله وجود دارد.

مرحله ۱: دوران حول نقطه A
مرحله ۲: انتقال با بردار $\vec{AN}$
نکته: می توانیم دوران را حول هر ضلع دیگر انجام دهیم و سپس باید انتقال
مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کنیم

ترتیب دوتبدیل

دست ورزی

راه حل محمد:

با یک دوران 180° حول نقطه O می توان مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کرد.

راه حل حامد:

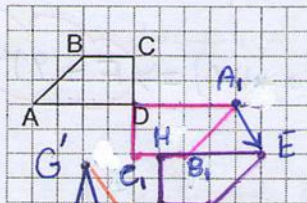
با یک دوران 180° حول نقطه X می توانیم مثلث XYZ را بر مثلث قرمز رنگ منطبق کنیم و سپس با یک انتقال، مثلث قرمز را بر مثلث LMN منطبق کنیم.

دوران حول نقطه X

دوران حول نقطه O به اندازه 180°

نقطه Z با دوران 180° روی نقطه X ماقابی

کار در کلاس



۱- تصویر دوزنقه $ABCD$ را پس از دوران 180° حول

نقطه D رسم کنید و آن را $A_1B_1C_1D_1$ بنامید.

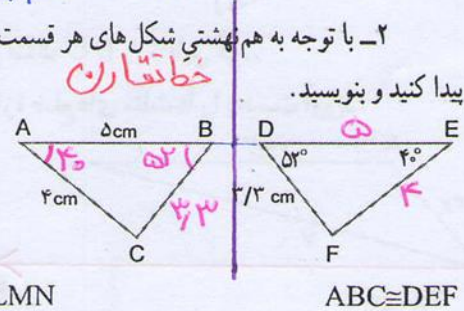
سپس آن را با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ انتقال دهید.

شکل جدید را نام گذاری کنید و عبارت هم نهشتی شکل ها را کامل کنید.

$$ABCD \cong A_1B_1C_1D_1 \cong EFGH$$

برابر انتقال

۲- با توجه به هم نهشتی شکل های هر قسمت، در صورت امکان اندازه ضلع ها و زاویه های متناظر را

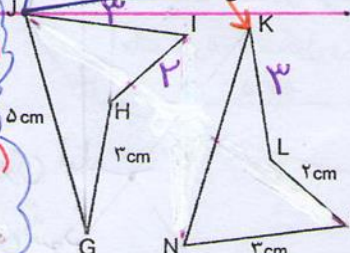


خط تقارن

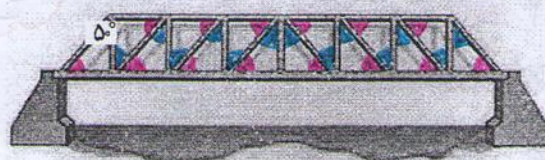
① تقارن نسبت

به خط d

② انتقال با بردار $G'K$



۳- دیواره های کنار پل از مثلث های قائم الزاویه هم نهشت ساخته شده اند.



زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص

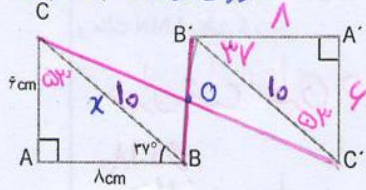
و اندازه هر یک از زاویه های یکی از مثلث ها

را بنویسید.

$$\triangle = 40$$

$$\triangle = 50$$

دوران حول ۵ به اندازه ۱۸۰ درجه



۱- در شکل مقابل $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ اندازه برخی ضلع‌ها و زاویه‌ها نوشته شده است. اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow BC = \sqrt{16+9} = 5$$

۲- چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی

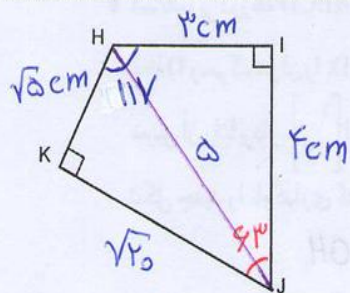
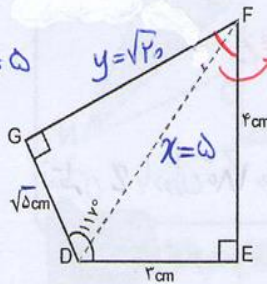
افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK

را به دست آورده‌ایم. اندازه برخی از ضلع‌ها

و زاویه‌ها معلوم است.

اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر این چهارضلعی

را به دست آورید.



$$F = 340 - (90 + 90 + 117) = 43$$

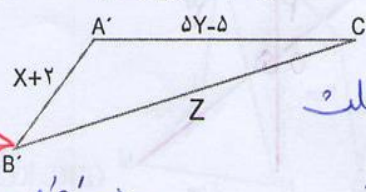
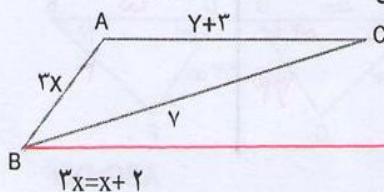
دربارۀ رابطه‌هایی که از آنها در این دو سؤال

استفاده کرده‌اید، با هم گفت‌وگو کنید.

کلای

۳- مثلث ABC را می‌توان با انتقال، بر مثلث A'B'C' منطبق کرد.

مانند نمونه، با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع‌های مثلث‌ها را به دست آورید.



مثلث ABC با

انتقال BB' بر روی مثلث A'B'C' منطبق می‌شود

$$2x = x + 2$$

$$2x - x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 1$$

$$AB = 3x = 3$$

$$A'B' = x + 2 = 3$$

$$AC = A'C' \Rightarrow$$

$$y + 3 = 5y - 5 \Rightarrow 1 = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$AC = 5, A'C' = 5$$

$$BC = B'C' \Rightarrow z = 7$$

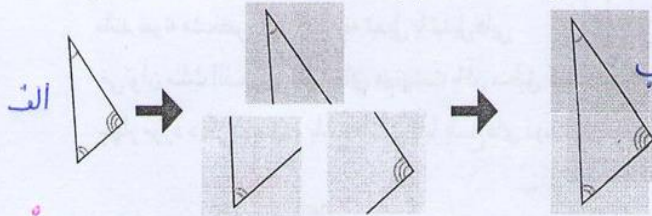
مثلث های هم نهشت

فعالیت



نتیجه: با مساوی بودن سه زاویه می توان هم نهشتی دو مثلث را نتیجه گرفت

آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت های هندسه بودند. معلم ریاضی مثلثی روی کاغذ رسم کرد. سپس، تصویر زاویه های آن را روی سه برگه کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به کمک هم مثلثی بسازند که زاویه هایش با آن سه زاویه برابر باشد. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب رویه رو ساختند.



زاویه های مثلث ب با زاویه های مثلث ب
الف برابر است و هر اضلاع آن بزرگتر
از اضلاع مثلث الف است

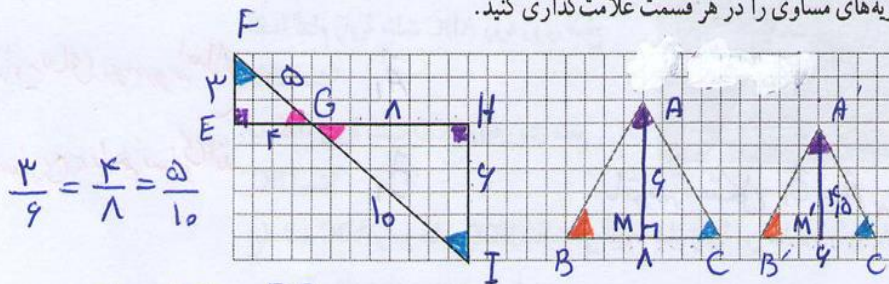
فکر می کنید مثلثی که آنها ساخته اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم نهشت است؟
آیا آنها می توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم نهشت باشد؟
خیر (مگر با اندازه گیری باشد)
با این روش، خیر نمی توانند

سه زاویه مساوی است اما ضلع ها برابر نیست

کار در کلاس



۱- زاویه های مساوی را در هر قسمت علامت گذاری کنید.



$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{HI} = \frac{EG}{GH} = \frac{FG}{IG}$$

۲- شکل های سؤال قبل را نام گذاری کنید و تساوی زاویه ها را بنویسید.

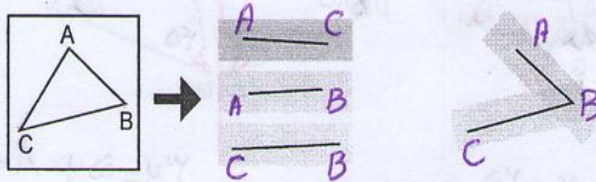
$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AM}{A'M'}$$

فعالیت



۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر ضلع های آن را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن گاه از بچه ها خواست مثلثی بسازند که ضلع هایش با این سه ضلع برابر باشد.



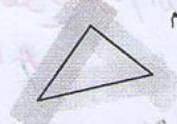
نتیجه: اگر اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر مساوی باشند آن گاه می توان نتیجه گرفت
آن دو مثلث هم نهشت می باشند

مرحله اول



سامان مثلث مورد نظر را به این ترتیب ساخت :

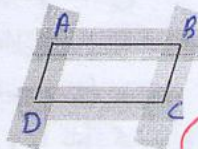
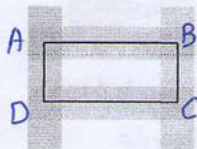
مرحله دوم



آرمان مطمئن بود مثلثی که سامان ساخته است، با مثلث معلم ریاضی هم نهشت است. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره آن فکر کنید.

۲- سامان پرسید: «فکر می‌کنی اگر ضلع‌های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل حتماً با یکدیگر هم نهشت‌اند؟»
آرمان گفت: «نه، من می‌گویم اگر ضلع‌های دو مثلث با هم مساوی باشند، آن دو مثلث حتماً با یکدیگر هم نهشت‌اند. مثلاً این دو چهارضلعی را ببین؛ با اینکه ضلع‌هایشان مساوی است، با یکدیگر هم نهشت نیستند.»

سپس، با کاغذ پوستی دو چهارضلعی زیر را ساخت و به سامان نشان داد.



تعریف میانه

کارد در کلاس



۱- در شکل زیر نقطه M وسط BC است. پاره خطی مانند AM که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند میانه می‌نامیم.

عبارت‌های زیر را کامل کنید و نشان دهید چرا ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده با هم برابرند.

$AB = AC$ چون ساق‌های مثلث متساوی الساقین ABC هستند.

$BM = CM$ چون AM میانه‌ی BC باشد (وسط BC است).

AM هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم‌نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ چون

۲- الف) لوزی مقابل را نام گذاری کنید و یکی از قطرهای آن را رسم کنید.

ب) دلیل تساوی ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید.

ج) زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

ب) چون چهارضلعی ABCD لوزی است

پس ضلع‌های دو مثلث با هم برابر می‌باشند

$$A_1 = A_2 = C_1 = C_2, B = D \quad \text{ج}$$

سه ضلع مثلث با هم برابرند

فعالیت

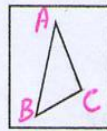


مثلثی رسم کنید.

سپس دو ضلع آن و زاویه

بین آن دو ضلع را روی سه برگ

کاغذ پوستی بکشید.



مرحله اول



مرحله دوم



اکنون سعی کنید مثلثی بسازید که دو ضلع آن با این

دو ضلع برابر باشد و زاویه بین این دو ضلع هم

برابر زاویه رسم شده باشد.

کلاسی توضیح ده شود

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

بله

آیا با این شرایط می توانید مثلثی بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

خیر

کار در کلاس



در شکل مقابل نیمساز زاویه روبه رو به قاعده مثلث متساوی الساقین

ABC را رسم کرده ایم.

عبارت های زیر را کامل کنید و به کمک آنها نشان دهید دو مثلث

ABD و ADC با هم هم نهشت هستند و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند.

چون $\overline{AB} = \overline{AC}$ ؛ مثلث ABC متساوی الساقین است

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ؛ چون AD نیمساز است.

AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. چون دو ضلع و زاویه بین آن دو از این دو مثلث

برابرند پس $ABD \cong ACD$

فعالیت



مثلثی رسم کنید و این بار دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید.

سعی کنید مثلثی بسازید که دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در آن با مثلث اولیه مساوی باشد.

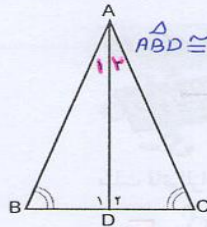
آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

بله

آیا می توانید مثلثی بسازید با همین شرایط که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

خیر

کار در کلاس: چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{B} = \hat{C}$ و مجموع سزاویہی $\hat{A}_2$ و $\hat{C}$ برابر 180° است و مجموع سزاویہی $\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ هم برابر 180° است پس $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ است پس $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$
 ضلع AD بین هر دو مثلث مشترک است
 چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 چون AD نیم سزاویہ

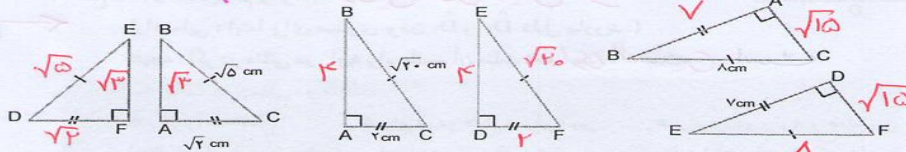


در شکل مقابل زاویہهای B و C با هم برابرند و نیمساز زاویہ A را رسم کرده ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم نهشت هستند و دو ضلع AB و AC با هم برابرند.
 (دلائل کلایی بیان شود)
 (راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ دلیل بیاورید.)
 نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویہ برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.
 سه حالت هم نهشتی دو مثلث:
 • برابری سه ضلع • برابری دو ضلع و زاویہ بین • برابری دو زاویہ و ضلع بین
 یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ض ض ز) یا به اختصار: (ز ض ز)

هم نهشتی مثلث های قائم الزاویہ

فعالیت

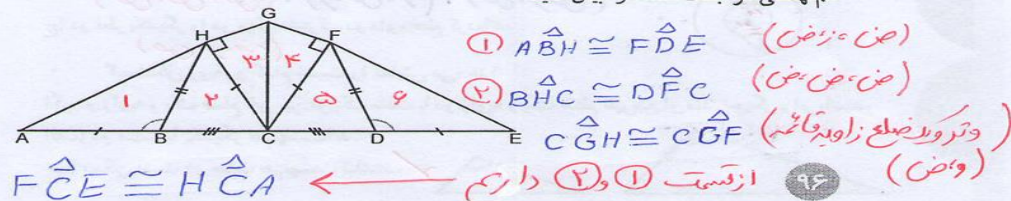
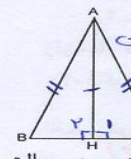
۱- در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویہ ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویہ DEF برابر است.
 (ض، ض، ض)



اندازه ضلع سوم هر یک از مثلث ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، سه ضلع مثلث ABC با سه ضلع مثلث DEF مساوی است؟
 آیا این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ در چه حالتی؟
 ۲- می دانیم وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویہ ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویہ دیگری برابر است. آیا می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ چرا؟ توضیح دهید.

از رابطه فیثاغورس ضلع سوم را هم پیدا کنید.
 کار در کلاس: برابر می شوند
 ۱- پاره خط AH، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین ABC است.
 چرا مثلث های ایجاد شده با یکدیگر هم نهشت اند؟
 ۱. $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$
 ۲. $AB = AC$ چون ABC متساوی الساقین است
 ۳. ضلع مشترک AH
 پس به حالت وتر و یک ضلع متساوی
 بگویم دو مثلث هم نهشت می باشند $\hat{ABH} \cong \hat{ACH}$
 ۲- با توجه به علامت های شکل زیر، مثلث های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت هم نهشتی هر جفت مثلث را بیان کنید.

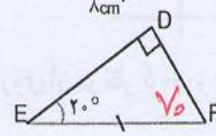
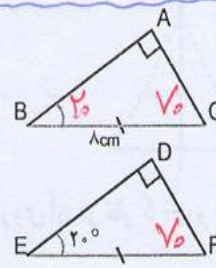
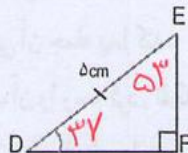
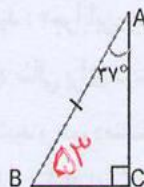
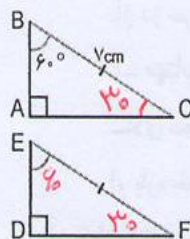


حالت (ض، ض، ض) (ض، ض، ض) (ض، ض، ض) (ض، ض، ض)
 (وز) و (وض)



۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.

(از من ز)



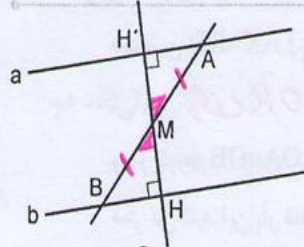
زاویه دیگر هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟ **بیم: به حالت دو زاویه ضلع بین آن دو**

۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید. **بیم: در این حالت می‌توانیم ثابت کنیم زاویه سوم نیز مساوی است پس به حالت**

دو حالت دیگر برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: **(از من ز) دو مثلث هم نهشت می‌باشند**

- برابری وتر و یک ضلع
- برابری وتر و یک زاویه تند
- یا به اختصار (وض)
- یا به اختصار (وز)



۱- از نقطه M، وسط پاره خط AB، بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده‌ایم. **کلاهی**

دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم نهشت‌اند؟

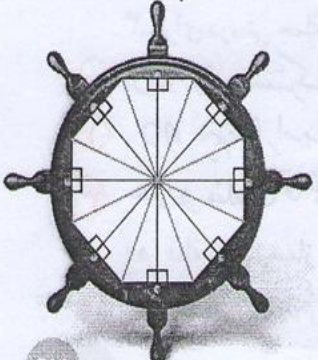
وتر و یک زاویه تند (وز)

۲- در شکل روبه‌رو، هر شانزده زاویه کوچک وسط شکل با هم

مساوی و هشت پاره خط‌ابی نیز با هم مساوی‌اند. **کلاهی**

شانزده مثلث قائم الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم نهشت‌اند؟

وتر و یک زاویه تند (وز)



نیاز به دلیل آوردن

فعالیت



شادی و مهتاب داشتند یک کتاب هندسه را مطالعه می کردند که به این جمله برخوردند :



«هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط

از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»

۱- مهتاب پرسید : «چرا این جمله درست است؟»

شادی سعی کرد مثالی برای درستی آن جمله پیدا کند.

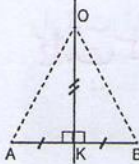
او پاره خطی کشید و عمود منصف آن را رسم کرد. نقطه ای را روی آن در نظر گرفت و فاصله

آن نقطه را از دو سر پاره خط اندازه گرفت؛ فاصله ها مساوی بود.

(یادآوری : فاصله دو نقطه از هم برابر طول پاره خطی است که آن نقاط را به هم وصل می کند.)

فکر می کنید شادی توانسته است دلیلی برای درستی جمله مورد نظر بیاورد؟ **خیر، چون فقط یک نقطه را بررسی کرده**

۲- مهتاب گفت : «از کجا بفهمیم این جمله در مورد همه نقاط روی عمود منصف درست است؟»



شادی سعی کرد دلیلی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او به شکلی که کشیده بود نگاه کرد. آن را مانند

شکل رو به رو علامت گذاری کرد و گفت : «برای همه نقاط روی عمود منصف AB، مانند نقطه

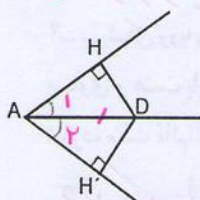
O، زاویه K زاویه ای قائمه است. (چرا؟) **چون OK عمود بر AB است**

همچنین $AK=KB$ (چرا؟) **چون** OK هم ضلع مشترک دو مثلث است. پس $\triangle AOK \cong \triangle BOK$ (در

چه حالتی؟) **چون OK منصف AB است - (ض: عرض)**

و در نتیجه $OA=OB$ (چرا؟) **چون دو مثلث هم نهشت هستند**

فکر می کنید این بار شادی توانسته است برای درستی جمله مورد نظر دلیلی بیاورد؟ **بله**



۳- برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید :

① **AD وتر مشترک هر دو مثلث است**

② **AD نیم سازه است پس داریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$**

③ **هر دو مثلث قائم الزامی باشند**

«هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

(یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن خط عمود می شود.)

۹۸

نتیجه ای بگیریم به حالت وتر و یک زاویه تند دو مثلث هم نهشت می باشند ①, ②, ③

یادآوری ضرب اعداد توان دار

توان

یادآوری در سال گذشته ضرب دو عدد توان دار با پایه های مساوی و نیز توان های مساوی را یاد گرفتید. این قواعد را با نمادهای ریاضی به صورت زیر می نویسیم.
اگر a عددی دلخواه و m, n دو عدد طبیعی باشند:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

(یا برای سادگی: $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ و $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$)

برای آمادگی بیشتر، تمرین های زیر را انجام دهید.

۱- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\begin{aligned} 2^6 \times 2^2 &= 2^8 & (-\frac{2}{3})^7 \times (-\frac{2}{3})^5 &= (-\frac{2}{3})^{12} & 8^2 \times 2^2 &= 16^2 & (-6)^4 \times (\frac{1}{6})^4 &= (-3)^4 = 3^4 \\ 2^5 \times 3^2 \times 6^5 \times 4^2 &= 12^7 & 3 \times (\frac{3}{5})^4 \times 81 &= 3^5 & 3^6 \times 12^2 &= 72^2 & 2^2 \times 8^5 \times 4^2 &= 16^7 \end{aligned}$$

۲- حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان دار بنویسید. اصلاح شود

$$\begin{aligned} a^2 \times a^3 &= a^5 & x^4 \times y^4 &= (x \cdot y)^4 & (ab)^5 \times a^3 \times b^2 &= a^5 \times b^5 \times a^3 \times b^2 = a^8 \cdot b^7 = (ab)^8 \\ (xy)^2 \times (xy)^7 &= (xy)^9 & 120 \times 18^3 \times (\frac{1}{9})^3 &= 10 & 8a \times (2a)^3 \times 2a &= 2^3 \times a \times 2^3 \times a^3 \times 2a = 2^7 \times a^4 = (2a)^4 \end{aligned}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2a)^3}{a^3} = 2^3 = 8$$

۳- حجم مکعبی به ضلع $2a$ چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است؟

۴- جاهای خالی را با عددها و حرف های مناسب پر کنید.

$$18^5 = (6 \times 3)^5 \quad a^4 = a^2 \times a^2 \quad 7^0 \times 4^5 = 4^5$$

$$(-\frac{7}{9})^4 \times (-\frac{7}{9})^2 = (-\frac{7}{9})^6$$

می توانیم پاسخ را به نظر بگیریم

$$(4 \times 3)^6 = 4^6 \times 3^6$$

$$2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 3^4 \times 3^4 \times 3^4 \times 3^4 \times 3^4 \times 3^4$$

صادق ← ضرب اعداد توان دار با پایه‌های برابر **بهر روز** ← ابتدا حاصل $2^3 = 8$ را بدست آورده از تعریف توان استفاده کرده **بهرام** ← ابتدا کار بهر روز و سپس هر دو تا $8 \times 8 = 64$ را بدست آورده و در نهایت از تعریف توان **هادی** ← قانون ضرب اعداد توان دار را روی هر دو عدد انجام داده و در نهایت دوباره از همان قانون کمک گرفته است **مجید** ← هر دو با عدد را با قانون ضرب اعداد توان دار **ماترین‌های مساوی** محاسبه کرده و در انتها با زهم از همان قانون کمک گرفته است

تنوع روش‌ها

فعالیت



حاصل عبارت $2^2 \times 2^3 \times 2^2 \times 2^2$ را پنج دانش آموز به صورت یک عدد توان دار حساب کرده‌اند. راه حل هر دانش آموز را توضیح دهید و تفاوت آنها را بیان کنید.

$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2+2} = 2^{12}$	صادق: قانون ضرب اعداد توان دار
$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$	بهر روز: چون $2^3 = 8$ و قانون ضرب
$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 64 \times 64 = 64^2$	بهرام:
$2^2 \times 2^3 \times 2^2 \times 2^2 = 2^6 \times 2^6 = 2^{12}$	هادی:
$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 4^2 \times 4^2 = 16^2$	مجید:

با محاسبه، نشان دهید که تساوی‌های زیر درست‌اند: (می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید.)

$$8^4 = 4096 \quad 4^4 = 256 \quad 2^{12} = 4096$$

توضیح دهید که تساوی زیر چگونه به دست آمده است. عدد 2^3 در ضرب با خودش 4 بار تکرار شده

$$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = (2^2)^4 \quad \square \times \square \times \square \times \square = \square \rightarrow (2^2)^4$$

با مقایسه این تساوی و تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت: $(2^2)^4 = 2^{12}$ **بله**

اکنون، درستی تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید. $(7^2)^5 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2 = 7^{10}$ $(7^2)^5 = 7^{10}$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \quad \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$(a^2)^4 = a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 = a^8 \quad (-2^3)^7 = [(-2)^3]^7 = (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 \times (-2)^3 = (-2)^{21}$$

آنچه را فرا گرفته‌اید، به صورت یک قانون کلی بیان کنید.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

اگر a عددی دلخواه و m و n عددهایی طبیعی باشند، آن گاه:

برای به توان رساندن یک عدد توان دار می‌توانیم پایه آن عدد را به توان حاصل ضرب توان‌ها رسانیم

کار در کلاس



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$\begin{aligned}
 (5^2)^3 &= 5^{2 \times 3} = 5^6 \\
 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \times 3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \\
 [(-6)^2]^0 &= (-6)^{2 \times 0} = (-6)^0 = 1 \\
 \left[(-\frac{1}{5})^2\right]^4 &= (-\frac{1}{5})^{2 \times 4} = (-\frac{1}{5})^8 \\
 (18^2)^3 &= 18^{2 \times 3} = 18^6 \\
 (x^2)^4 &= x^{2 \times 4} = x^8 \\
 [(ab)^2]^3 &= (ab)^{2 \times 3} = (ab)^6 \\
 ((xy)^2)^3 &= (xy)^{2 \times 3} = (xy)^6 \\
 (xy^2)^3 &= (xy^2)^3 \\
 (2^m)^n &= 2^{m \times n}
 \end{aligned}$$

۲- کدام یک از تساوی‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ توضیح دهید.

$$\begin{aligned}
 (3^2)^3 &= 3^2 \times 3^2 \quad \text{نادرست} & 3^5 \times 3^5 &= (3^5)^2 \quad \text{درست} \\
 (3^2)^3 &= 3^6 \quad \text{درست} & (3^5)^2 &= 3^7 \quad \text{نادرست} \\
 (5^2)^3 &= 5^5 \quad \text{نادرست} & 3^2 \times 3^2 &= 3^6 \quad \text{نادرست} \\
 3^5 \times (2^2)^5 &= 12^5 \quad \text{درست} & a^2 \cdot a^2 &= 1 \quad \text{نادرست} \\
 ((-2)^2)^2 &= 2^6 \quad \text{درست} & (-4^2) &= 4^2 \quad \text{نادرست}
 \end{aligned}$$

$(5^2)^3 = 5^6$
 $5^4 \neq 5^9$

$(3^0)^2 = 1^2 = 1$
 $3^9 = 19683$

در صورتی درست است که $a = a$ باشد

عددی منفی $\rightarrow (-4^2)$
 عددی مثبت $\rightarrow 4^2$

۳- حاصل عبارت $[(-5)^2]^3 \times (-5)^2$ برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟

$$\begin{aligned}
 &= (-5)^6 \times (-5)^2 = (-5)^8 = 5^8 \\
 &\text{الف) } (-5)^8 \quad \text{ب) } -5^8
 \end{aligned}$$

جواب منفی می‌دهد و نادرست است

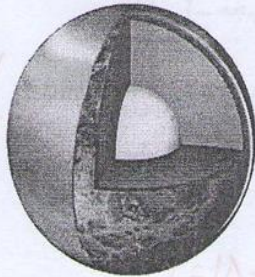
۴- در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$$9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$$

تقسیم اعداد توان دار

تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی

فعالیت



دمای مرکز خورشید حدود 10^7 درجه سانتی گراد است. این دما چند برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید؟ پاسخ را ضمن کامل کردن جاهای خالی به صورت یک عدد توان دار بیان کنید و مراحل حل مسئله را نیز توضیح دهید.

حل: آب در 100 درجه سانتی گراد به جوش می آید و داریم: $100 = 10^2$

$$10^7 \div 10^2 = \frac{10^7}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10^5$$

بنابراین: $10^7 \div 10^2 = 10^5$

یعنی دمای مرکز خورشید 10^5 برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید. آیا تقسیم بالا را به شکل زیر نیز می توانیم انجام دهیم؟

$$\frac{10^7}{10^2} = \frac{10^2 \times 10^5}{10^2} = 10^5$$

اکنون، حاصل هر یک از تقسیم های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-9)^5 \div (-9)^3 = \frac{(-9)^3 \times (-9)^2}{(-9)^3} = (-9)^2 = (-9)^{\textcircled{2}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\textcircled{4}}$$

با استفاده از نمونه های داده شده، برای محاسبه تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی قانونی بنویسید. یکی از پایه ها را a و توان اولی را m و توان دومی را n بنویسید.

a عددی دلخواه و m, n عددهای طبیعی باشند:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

کار در کلاس



۱- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$8^1 \div 8^0 = 8^{1-0} = 8^1 = 8$$

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4 = 81$$

$$6^2 \div 6^1 = 6^{2-1} = 6^1 = 6$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{5-2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^3$$

$$\frac{(-2)^9}{(-2)^7} = (-2)^{9-7} = (-2)^2 = 4$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^4 \div \left(\frac{1}{9}\right)^1 = \left(\frac{1}{9}\right)^{4-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^3$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^4 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{4-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{5-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$$

$$\frac{7^5}{7^1} = 7^{5-1} = 7^4 = 2401$$

نیازی به برانترنی باشد

۲- جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(2^3)^5 = 2^{15}$$

$$3^5 \div 3^1 = 3^4$$

$$14^5 \div (14^2)^2 = 14^1 = 14$$

$$\frac{7^3}{7^5} = \frac{7^3}{7^3 \times 7^2} = \frac{1}{7^2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$$

۳- حاصل را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

$$a^{12} \div a^5 = a^7$$

$$(xy)^9 \div (xy)^4 = (xy)^5$$

$$(-x)^9 \div (-x)^2 = (-x)^7 = -x^7$$

تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی

فعالیت



مثال‌های داده شده را مطالعه کنید و با پر کردن جاهای خالی توضیح دهید که پاسخ هریک از تقسیم‌ها چگونه به دست آمده است.

$$12^4 \div 6^2 = \frac{12^4}{6^2} = \frac{12 \times 12 \times 12 \times 12}{6 \times 6} = \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} = \left(\frac{12}{6}\right)^4 = 2^4 = 16$$

$$3^5 \div 7^5 = \frac{3^5}{7^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = \left(\frac{3}{7}\right)^5$$

$$(-4)^3 \div 6^3 = \frac{(-4)^3}{6^3} = \frac{(-4) \times (-4) \times (-4)}{6 \times 6 \times 6} = \left(-\frac{4}{6}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$12^4 \div 6^4 = \frac{12^4}{6^4} = \frac{12 \times 12 \times 12 \times 12}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

پایه‌ها بر هم تقسیم می‌شوند

$$8^5 \div 2^5 = (8 \div 2)^5 = 4^5$$

با توجه به مثال‌های بالا، توضیح دهید تساوی $8^5 \div 2^5 = 4^5$ چگونه به دست آمده است.

اکنون، برای تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی قانون زیر را کامل کنید.

در تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی کمی از توان‌ها را منقسم و پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم

به کمک قانونی که نوشته‌اید، حاصل تقسیم‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$6^8 \div 3^8 = \left(\frac{6}{3}\right)^8 = 2^8 \quad (-2)^4 \div (-3)^4 = \left(\frac{-2}{-3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

اکنون قانون فوق را با نمادهای ریاضی هم نشان دهید.

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

a و b دو عدد دلخواه و m یک عدد طبیعی و $b \neq 0$

کار در کلاس



۱- حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$5^7 \div 3^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^7 \quad 14^2 \div 7^2 = \left(\frac{14}{7}\right)^2 = 2^2$$

$$(-8)^5 \div (-2)^5 = \left(\frac{-8}{-2}\right)^5 = 4^5 \quad 9^2 \div 27^2 = \left(\frac{9}{27}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید و در صورت امکان، پاسخ را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$5^7 \times 3^2 \times 2^7 \times 3^3 = 10^7 \times 3^5 = 30^5 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{3^7 \times 3^5}{6^{10} \times 5^{10}} = \frac{3^{12}}{3^{10} \times 2^{10}} = \frac{3^2}{2^{10}} = \frac{9}{1024} \quad \frac{(a^2)^4}{a^2} = \frac{a^8}{a^2} = a^6 \quad \frac{(x^2)^5 \times x^7}{x^{11}} = \frac{x^{10} \times x^7}{x^{11}} = \frac{x^{17}}{x^{11}} = x^6$$

$$(a^3)^{4-1} = (a^3)^3 = a^9$$

تمرین

