

دلی که سخت ز هر غم تپید، شاد نماند کسی که زود دل آزرده گشت، دیر نزیست
هزار کوه گرت سد راه شوند، برو هزار ره گرت از پا درافکنند، بایست

آزمون تئوری پانزدهم

پنج شنبه، ۳ اسفند ۱۳۹۱ - زمان ۴ ساعت

۱. تخمه مرغ ضد ضربه

اخیرا محققان ایرانی موفق شدند یک نوع مرغ اصلاح شده بسازند(!) که ادعا می کنند تخم هایش ضدضربه است. ما برای اینکه تعیین کنیم آنها چقدر در کار خود موفق بوده اند قصد داریم بفهمیم بلند ترین طبق ای از ساختمان شهرداری که اگر تخم مرغ ها را از آنها بیاندازیم، تخم مرغ ها نمی شکنند کدام طبقه است! ساختمان شهرداری ۱۰۰ طبقه دارد، دو تخم مرغ ضد ضربه در اختیار ما قرار داده اند. حداقل تعداد پرتاب تخم مرغ ها را به دست بیاورید که بتوان با آن طبقه مورد نظر را پیدا کرد! (توجه کنید اگر یک تخم مرغ بشکند دیگر نمی توانیم از آن استفاده کنیم!) (۱۵ امتیاز)

۲. جدول خَشْک!

در یک جدول $2 \times n$ اعداد حقیقی مثبتی داریم که مجموع اعداد در هر یک از n ستون برابر با ۱ است. نشان دهید می توان یک عدد در هر ستون انتخاب کرد که مجموع اعداد انتخاب شده در هر سطر دست بالا $\frac{n+1}{4}$ باشد. (۲۵ امتیاز)

۳. تورنمنت شطرنج

چگائواس که بچه محل قدیمی شماست مسئول برگزاری یک تورنمنت شطرنج شده، تورنمنت n نفر شرکت کننده دارد. هر دو نفر از شرکت کننده ها باید دقیقا یکبار با هم بازی کنند و هر شرکت کننده در یک روز می تواند حداکثر یک مسابقه بدهد. چگائواس می خواد مسابقه در کمترین تعداد روز برگزار شود. شما باید به او کمک کنید!

الف) اگر n زوج باشد، تورنمنت حداقل چند روز طول می کشد؟ (۱۵ امتیاز)

ب) اگر n فرد باشد، تورنمنت حداقل چند روز طول می کشد؟ (۱۵ امتیاز)

۴. جدول ساده نشدنی

یک جدول $m \times n$ با علامت های " + " و " - " پر شده است. یک جدول "ساده نشدنی" است اگر نتوان آن را به یک جدول پر شده با " + " تبدیل کرد.

الف) در هر حرکت می توانیم علامت های خانه های یک سطر یا یک ستون را برعکس کنیم. ثابت کنید اگر جدولی در این شرایط ساده نشدنی باشد حتما یک زیر جدول 2×2 ساده نشدنی دارد. (۱۰ امتیاز)

ب) در هر حرکت علاوه بر حرکاتی که در حالت الف می توانیم انجام بدهیم، می توانیم علامت خانه های یک قطر فرعی از جدول را نیز برعکس کنیم، ثابت کنید اگر جدولی در این حالت ساده نشدنی باشد حتما یک زیر جدول 4×4 ساده نشدنی داد. (یک جدول $m \times n$ ، $2(n + m - 1)$ قطر فرعی دارد) (۲۰ امتیاز)