

$y=f(x)$

درسنامه و پاسخ این فصل را از صفحه ۱۴۱ تا صفحه ۱۹۹ بخوانید

تابع

فصل ۱

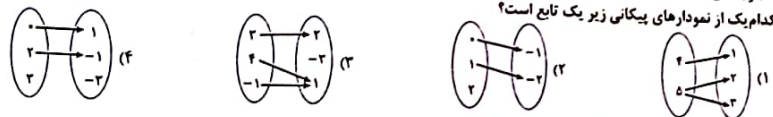
تعریف تابع و روش‌های نمایش آن

صفحه درسنامه: ۱۴۱
صفحه پاسخ: ۱۹۹

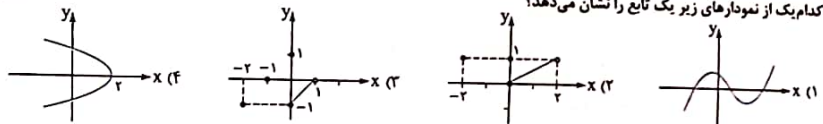
(برگرفته از کتاب درسی)

۱- کدام رابطه زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟
۱) رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی مثبت، ریشه دوم آن را نسبت می‌دهد.
۲) رابطه‌ای که به افراد، غذای مورد علاقه آن‌ها را نسبت می‌دهد.
۳) رابطه‌ای که مساحت مستطیل را به محیط آن نسبت می‌دهد.
۴) رابطه‌ای که به افراد، کد ملی آن‌ها را نسبت می‌دهد.

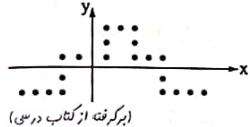
(برگرفته از کتاب درسی)



(برگرفته از کتاب درسی)



(برگرفته از کتاب درسی)



(برگرفته از کتاب درسی)

۲- کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟
۱) $y = x^2 + 1$
۲) $y = x^2 + 1$
۳) $y = x^2 + 1$
۴) $y = x^2 + 1$

۳- کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع است؟
۱) $\{(0,5), (\sqrt{-1}, 4), (2,2), (-1,2)\}$
۲) $\{(4, \sqrt{2}), (2,0), (4,-1)\}$
۳) $\{(2, \frac{1}{2}), (0,-1), (\sqrt{2}, \frac{1}{2})\}$
۴) $\{(0,2), (-1,2), (0,-1), (-1,2)\}$

(تفسیر خارج ۱۵)

۴- رابطه $A = \{(2,m), (2,1), (-2,m), (-2,m), (2,m+2), (m,4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟
۱) -2
۲) -1
۳) 2
۴) هیچ مقدار
۵- از مجموعه $A = \{a,b,c,d\}$ به مجموعه $B = \{1,2,3\}$ به چند حالت مختلف می‌توان نمودار بیکنی رسم کرد به طوری که رابطه به دست آمده یک تابع را نشان دهد؟
۱) 81
۲) 64
۳) 12
۴) 6

معادلات و ضابطه توابع

صفحه درسنامه: ۱۴۱
صفحه پاسخ: ۱۹۹

۱- در کدام یک از رابطه‌های زیر y تابعی از x می‌باشد؟
۱) $|y| = x + 2$
۲) $x^2 + y^2 = 9$

۲- در کدام یک از معادلات زیر y تابعی از x نمی‌باشد؟
۱) $2x + 3y = 5$
۲) $2y + 2x^2 + x = 3$

۳- اگر $f(x) = 3 + \sqrt{x}$ ، آن‌گاه $f(8)$ کدام است؟
۱) 5
۲) 3

۴- اگر $f(x) = \frac{2x^2 + 8x + 7}{4x^2 + 16x + 15}$ ، حاصل $f(x+2)$ کدام است؟
۱) $\frac{11}{15}$
۲) $\frac{5}{11}$

۵- در تابع $f(x) = x^2(2-x)^2$ ضابطه $f(1+x) - f(1-x)$ حاصل $f(x) = x^2(2-x)^2$ کدام است؟
۱) صفر
۲) $4x^2$
۳) $2x^2$
۴) $\frac{1}{15}$

۶- اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ ، حاصل $f(\frac{1}{5})$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{1}{15}$

۷- اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ ، حاصل $f(\frac{1}{5})$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{1}{15}$

۸- اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ ، حاصل $f(\frac{1}{5})$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{1}{15}$

۹- اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ ، حاصل $f(\frac{1}{5})$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{1}{15}$

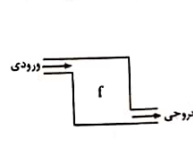
۱۰- اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ ، حاصل $f(\frac{1}{5})$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{1}{15}$

۱۱- اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ ، حاصل $f(\frac{1}{5})$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{1}{15}$

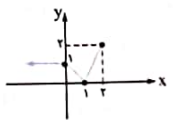
۱۲- اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ ، حاصل $f(\frac{1}{5})$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{1}{15}$

۱۳- اگر $f(x) - xf(x) = 2x - 1$ باشد، حاصل $f(2)$ کدام است؟
۱) 3
۲) -2

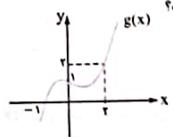
۱۴- ماشین تابع f به عنوان ورودی اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، آن را چهار برابر و سپس ۳ واحد از آن کسر می‌کند. اگر خروجی ماشین ۲۰ باشد، ورودی آن چه قدر بوده است؟
۱) $\frac{23}{4}$
۲) 5
۳) $\frac{20}{3}$
۴) $\frac{17}{4}$



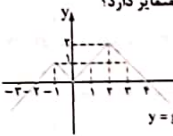
۱۵- با توجه به نمودار تابع مقابل، مقدار $f(\frac{1}{3}) + 2f(-5)$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{3}$
۲) 2
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{5}{3}$



۱۶- اگر $f = \{(1,2), (2,-1), (0,3), (-1,5)\}$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به شکل مقابل باشد، حاصل $f(g(0)) + g(f(2))$ چند است؟
۱) 1
۲) 2
۳) 3
۴) صفر



۱۷- اگر $f = \{(1,2), (-1,2), (2,-2), (-3,2)\}$ و نمودار $y = g(x)$ به شکل مقابل باشد، آن‌گاه معادله $g(f(x)) = 1$ چند جواب متمایز دارد؟
۱) صفر
۲) 1
۳) 2
۴) 3



۱۸- عرض یک مستطیل ۵ واحد کم‌تر از طول آن است. ضابطه تابعی که مساحت مستطیل را برحسب طول آن نشان دهد، کدام است؟
۱) $f(x) = x^2 + 5x$
۲) $f(x) = 5x + 5$
۳) $f(x) = x^2 + 5$
۴) $f(x) = x^2 - 5x$

۱۹- رابطه‌ای که محیط دایره را برحسب مساحت آن بیان کند، کدام است؟
۱) $P = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$
۲) $P = \sqrt{\pi S}$
۳) $P = 2\sqrt{\pi S}$
۴) $P = S\sqrt{\pi}$

انواع تابع

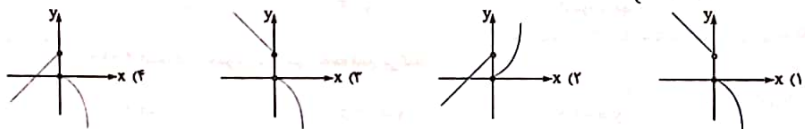
صفحه درسنامه: ۱۴۱
صفحه پاسخ: ۱۹۹

۲۰- اگر $-1 < x < 1$ باشد، مقدار $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ x^2-2x & -1 < x < 1 \\ -2x & x < -1 \end{cases}$ کدام است؟
۱) 6
۲) 11
۳) $2\sqrt{2} + 7$
۴) $15 - 4\sqrt{2}$

۲۱- در تابع $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 2 \\ 2x+3 & x \leq 2 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟
۱) 9
۲) 7
۳) 8
۴) 6

۲۲- اگر $f(x) = 1$ و $f(x) = f(f(x)) - f(\sqrt{2}) - f(-\sqrt{2})$ ، حاصل $f(-\sqrt{3}) - f(\sqrt{2})$ کدام است؟
۱) صفر
۲) -2
۳) -1
۴) 2

۲۳- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ x+2 & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟
۱) $x < -2$
۲) $-2 \leq x < 3$
۳) $x \geq 3$
۴) $-x - \frac{b}{c}$

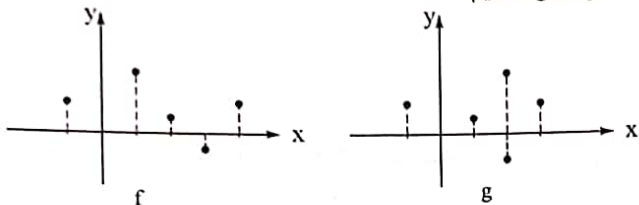


پس $m = 1$ یا $m = -1$. حالا وضعیت f را با مقدار $m = 1$ و $m = -1$ بررسی می‌کنیم:

$m = 1 \Rightarrow f = \{(1, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\} \Rightarrow$ تابع نیست

$m = -1 \Rightarrow f = \{(1, 2), (2, 1), (1, 2), (0, 2)\} \Rightarrow$ تابع هست
پس رابطه f به ازای $m = -1$ تابع می‌باشد.

۳. نمایش مختصاً | اگر همان X و Y های زوج مرتبها را به شکل مختصاً نقطه (X, Y) در نظر بگیریم و روی دستگاه مختصاً نشان دهیم، تابع را به شکل مختصاتی نشان داده‌ایم:



در دو نمودار بالا f تابع است اما g تابع نیست چون دو نقطه با X های یکسان و Y های متفاوت داریم. به طور کلی یک نمودار در دستگاه مختصاً وقتی نمایش یک تابع است که:
هر خط موازی محور Y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

گزینه ۴ | رابطه‌ای که به افراد کد ملی آن‌ها را نسبت می‌دهد تابع است، چرا که یک فرد نمی‌تواند بیش از یک کد ملی داشته باشد. (گزینه ۴)
اما سایر گزینه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم:

۱: یک عدد حقیقی مثبت دارای ۲ ریشه دوم است.

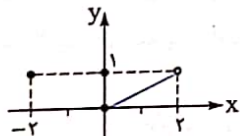
۲: یک فرد می‌تواند بیش از یک غذای مورد علاقه داشته باشد.

۳: مستطیل با مساحت ثابت، می‌تواند دارای محیط‌های متفاوت باشد. مثلاً مستطیلی به مساحت ۸ می‌تواند دارای طول و عرض ۸ و ۱ و یا طول و عرض ۴ و ۲ باشد.

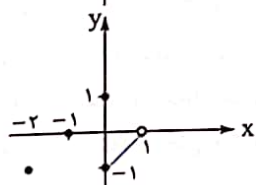
گزینه ۳ | دقت کنید در توابع با نمودار پیکانی بایستی از تمام عضوهای مجموعه اول استفاده شود، هم‌چنین هر یک از این اعضا فقط به یک عضو در مجموعه دوم مرتبط می‌شود. بنابراین فقط گزینه ۳ می‌تواند صحیح باشد.

در گزینه ۱) عضو ۵ با دو عضو ۲ و ۳ در رابطه است و تابع بودن را نقض می‌کند. در گزینه ۲) از عضو ۲ در مجموعه اول استفاده نشده است، بنابراین تابع نیست. در گزینه ۴) از عضو ۳ در مجموعه اول استفاده نشده است، بنابراین تابع نیست.

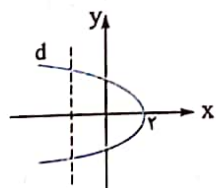
گزینه ۱ | شرط نموداری تابع این است که هر خط موازی محور Y ها (خط عمودی) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
بنابراین فقط گزینه ۱ صحیح است.



۲: خطی عمودی (محور Y ها) نمودار را در ۲ نقطه قطع کرده است. پس تابع نیست.



۳: خطی عمودی (محور Y ها) نمودار را در ۲ نقطه قطع کرده است. پس تابع نیست.

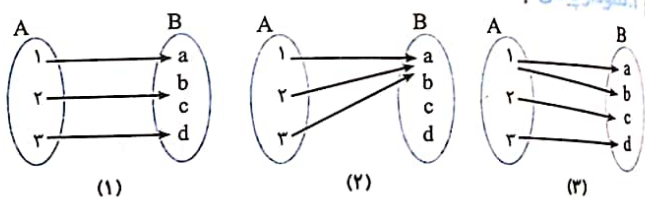


۴: خطی عمودی (خط d) نمودار را در ۲ نقطه قطع کرده است. پس تابع نیست.

ساده‌ترین تعریف تابع می‌شود: رابطه‌ای بین اعضای دو مجموعه به طوری که به هر عضو مجموعه اول فقط یک عضو مجموعه دوم را نسبت دهد. مثلاً: رابطه‌ای که به هر شخص کد ملی‌اش را نسبت دهد: تابع است، چون هر فرد فقط یک کد ملی دارد.
رابطه‌ای که به هر شخص دوست صمیمی‌اش را نسبت دهد: تابع نیست، چون یک فرد ممکن است بیشتر از یک دوست صمیمی داشته باشد.
رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی مثبت ریشه دومش را نسبت دهد: تابع نیست، چون هر عدد حقیقی مثبت مثل a دو ریشه دوم دارد یکی \sqrt{a} و دیگری $-\sqrt{a}$.

نمایش تابع

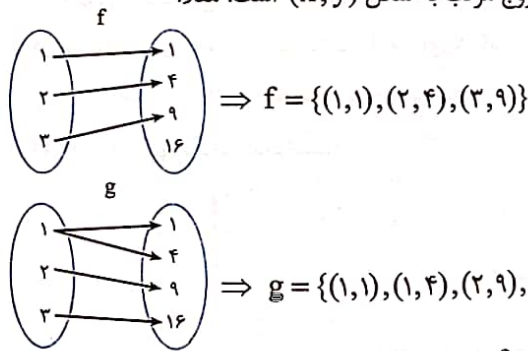
تابع را می‌توانیم به صورت‌های زیر نمایش دهیم:



در شکل‌های بالا (۱) و (۲) تابع‌اند ولی (۳) تابع نیست.

یعنی یک نمودار پیکانی وقتی تابع است که از هر عضو مجموعه اول فقط یک پیکان خارج شود.

۲. نمایش با زوج مرتب | در نمودار پیکانی اگر اعضای مجموعه اول (A) را با X و اعضای مجموعه دوم (B) را با Y نشان دهیم، هر کدام از پیکان‌ها نشان‌دهنده یک زوج مرتب به شکل (X, Y) است. مثلاً:



در مجموعه‌های بالا، f تابع است اما g تابع نیست چون در g دو زوج مرتب $(1, 1)$ و $(1, 4)$ را داریم یعنی به عضو ۱ از مجموعه اول دو عضو از مجموعه دوم نسبت داده شده است. پس می‌توانیم بگوییم:

شرط آن که یک مجموعه شامل زوج‌های مرتب تابع باشد، آن است که: اگر مؤلفه‌های اول دو یا چند زوج مرتب، برابر بودند مؤلفه‌های دوم هم باید برابر باشند.

نکته | اگر $f = \{(1, 2), (2, 1), (1, m^2 + 1), (m + 1, 3)\}$ تابع باشد، m کدام است؟
۱) ۱ یا -۱
۲) ۱
۳) -۱

پاسخ | گزینه ۳ | در رابطه f دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(1, m^2 + 1)$ را داریم که مؤلفه اول برابر دارند پس برای این که f تابع باشد باید $m^2 + 1 = 2$ باشد یعنی $m^2 = 1$

در کدام یک از معادلات زیر y تابعی از x است؟

(۱) $|x| + |y - 2| = 4$

(۲) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

(۳) $y - \sqrt{(x-1)^2} + 3 = 0$

(۴) $\sin y = x$

پاسخ: گزینه ۳. تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

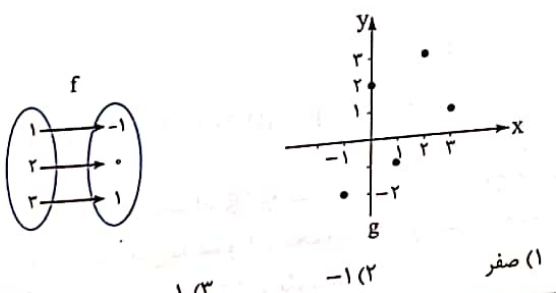
در $|x| + |y - 2| = 4$ هر دو داخل قدرمطلق اند و اگر فرض کنیم $y = 0$ داریم $|x| + |y - 2| = 4$ و دو مقدار برای y به دست می‌آید (چون حاصل قدرمطلق همیشه یک عدد مشخص است). پس گزینه (۳) تابع است. در $\sin y = x$ هم اگر فرض کنیم $x = 0$ داریم $y = 0$ یا $y = \pi$ یا $y = 2\pi$ پس گزینه (۴) هم تابع نیست.

مقدار تابع

گفتیم در نمایش زوج مرتبی (x, y) ، x متعلق به مجموعه اول و y متعلق به مجموعه دوم است. به y می‌گوییم مقدار تابع.

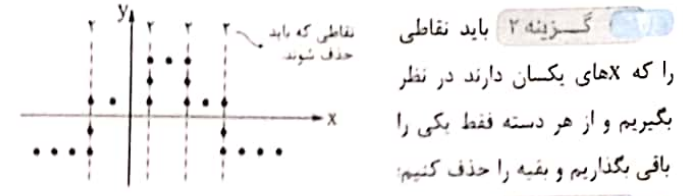
مثلاً اگر $f = \{(1, -1), (2, 5), (3, \sqrt{2})\}$ باشد می‌گوییم $f(1) = -1$ ، $f(2) = 5$ و $f(3) = \sqrt{2}$ یعنی تابع f به هر کدام از مقدارهای $x=1, 2, 3$ به ترتیب مقدارهای $-1, 5$ و $\sqrt{2}$ را نسبت می‌دهد. پس برای پیدا کردن مقدار تابع:

- در نمایش زوج مرتبی باید مؤلفه دوم مربوط به هر مقدار x را پیدا کنیم.
 - در نمودار پیکانی باید انتهای پیکان مربوط به هر مقدار x را در نظر بگیریم.
 - در نمودار مختصاتی باید y مربوط به هر مقدار x را مشخص کنیم.
 - در ضابطه جبری، باید مقدار داده شده را به جای x بگذاریم و y را پیدا کنیم.
- تست: تابع f و g به صورت زیر نمایش داده شده‌اند. مقدار عبارت $f(g(3)) + g(f(3))$ برابر کدام است؟



پاسخ: گزینه ۴. برای پیدا کردن $f(g(3))$ باید اول $g(3)$ را پیدا کنیم. شکل y مربوط به $x=3$ برابر ۱ است پس $f(g(3)) = f(1)$ می‌باشد و در نتیجه $f(g(3)) = -1$. حالا برویم سراغ $g(f(3))$ ، از نمودار پیکانی داریم $3 \rightarrow 1$ پس $f(3) = 1$ بنابراین $g(f(3)) = g(1)$ و روی نمودار مختصاتی $g(1)$ برابر -1 است پس $g(f(3)) = -1$ و در نتیجه: $f(g(3)) + g(f(3)) = (-1) + (-1) = -2$

تست: اگر $f = \{(1, 2), (2, -1), (3, 1), (-1, 0)\}$ باشد، حاصل $f(f(1)) - f(f(2))$ برابر کدام است؟



گزینه ۲. باید نقاطی را که x های یکسان دارند در نظر بگیریم و از هر دسته فقط یکی را باقی بگذاریم و بقیه را حذف کنیم.

گزینه ۲. می‌دانیم شرط تابع بودن این است که مؤلفه اول فقط با یک عضو از مؤلفه دوم در رابطه باشد. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

در گزینه (۱) $(\sqrt{-1}, 4)$ و $(-1, 2)$ تابع بودن را نقض می‌کند.

در گزینه (۳) $(4, \sqrt{2})$ و $(4, -1)$ تابع بودن را نقض می‌کند.

در گزینه (۴) $(0, -1)$ و $(0, 2)$ تابع بودن را نقض می‌کند.

اگر $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (2, m+2), (m, 4)\}$ با توجه به زوج مرتب $(3, m^2)$ و $(2, m+2)$ داریم. مؤلفه‌های دوم باید یکی باشد.

$m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$

حالا هر کدام از مقادیر m را جای گذاری می‌کنیم تا تابع بودن رو دوباره چک کنیم:

$m=2: A = \{(2, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (2, 4), (2, 4)\}$

به دلیل وجود زوج مرتب‌های $(2, 1)$ و $(2, 4)$ تابع بودن نقض می‌شود. $m=-1$:

$A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$ ✓

گزینه ۱. دقت کنید هر عضو در مجموعه A دارای ۳ انتخاب هست، پس تعداد حالات برابر است با: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

تعداد تابع‌هایی که از یک مجموعه M عضوی به یک مجموعه N عضوی تعریف می‌شود برابر است با n^m .

فصل ۲: تابع

معادلات و ضابطه توابع

قبلاً دیدیم که تابع را به صورت زوج مرتب، نمایش مختصاتی و نمودار پیکانی نشان می‌دهیم. حالا شکل دیگری از نمایش تابع را بررسی می‌کنیم:

نمایش جبری یا ضابطه یا معادله تابع | تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب (x, y) بود. حالا اگر بتوانیم y را بر حسب رابطه جبری از x بنویسیم می‌گوییم ضابطه یا معادله تابع را نوشته‌ایم، مثلاً در رابطه:

$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

می‌دانیم که در تمام زوج مرتب‌ها، y مساوی ۲ برابر x است پس می‌توانیم بگوییم f تابعی است با دامنه $\{1, 2, 3, 4\}$ (همان x ها یا مؤلفه‌های اول) و ضابطه $y = 2x$. از طرف دیگر وقتی یک رابطه جبری بر حسب x و y داریم باید بتوانیم تعیین کنیم آیا رابطه داده شده تابع هست یا نه؟

در یک معادله، وقتی y تابعی از x است که به ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست آید. پس y را بر حسب x پیدا می‌کنیم و بعد:

سعی می‌کنیم تشخیص دهیم هر مقدار دلخواه x ، آیا فقط یک مقدار y ایجاد می‌کند؟

اگر بتوانیم مثال نقض می‌زنیم یعنی مقداری برای x در نظر می‌گیریم که دو یا چند y بدهد.

گزینه ۲ با توجه به ضابطه f: $f(x) = 2 + \sqrt{2x}$

$\Rightarrow f(8) = 2 + \sqrt{2 \times 8} = 2 + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$

گزینه ۲ اگر $f(x+2) = \frac{2x^2 + 8x + 7}{4x^2 + 16x + 15}$ با ساده کردن ضابطه

$f(x+2) = \frac{2x^2 + 8x + 8 - 1}{4x^2 + 16x + 16 - 1} = \frac{2(x+2)^2 - 1}{4(x+2)^2 - 1}$ داریم:

$\xrightarrow{x+2=1} f(t) = \frac{2t^2 - 1}{4t^2 - 1}$

بنابراین با جای گذاری $t = \sqrt{3}$ داریم: $f(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^2 - 1}{4(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{2 \times 3 - 1}{4 \times 3 - 1} = \frac{5}{11}$

گزینه ۱ روش اول با جای گذاری $x+1$ و $1-x$ در تابع f داریم:

$f(1+x) = (1+x)^2(2-1-x)^2 \Rightarrow f(1+x) = (1+x)^2(1-x)^2 = (1-x^2)^2$

$f(1-x) = (1-x)^2(2-1+x)^2 \Rightarrow f(1-x) = (1-x)^2(1+x)^2 = (1-x^2)^2$

بنابراین: $f(1+x) - f(1-x) = (1-x^2)^2 - (1-x^2)^2 = 0$

روش دوم عددگذاری

با جای گذاری عددی دلخواه در $f(1+x) - f(1-x)$ مقدار را به دست میاریم و با گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم. مثلاً $x = 2$:

اگر $x = 2: f(1+x) - f(1-x) = f(3) - f(-1)$

از طرفی طبق ضابطه f: $\begin{cases} f(3) = (3)^2(-1)^2 = 9 \\ f(-1) = (-1)^2(3)^2 = 9 \end{cases}$ بنابراین: $f(3) - f(-1) = 0$

که فقط گزینه (۱) به ازای $x = 2$ صفر خواهد بود.

گزینه ۲ با توجه به $f(2x) - xf(4) = 3x - 1$ ابتدا $x = 2$ را جایگزین کرده تا حاصل $f(4)$ را به دست آوریم:

$x = 2 \Rightarrow f(4) - 2f(4) = 3(2) - 1 \Rightarrow -f(4) = 5 \Rightarrow f(4) = -5$

بنابراین با جای گذاری $f(4) = -5$ در رابطه بالا داریم:

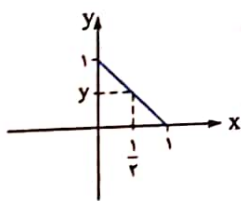
$\Rightarrow f(2x) - x(-5) = 3x - 1 \Rightarrow f(2x) = -2x - 1$

حالا با جای گذاری $x = 1$ داریم: $f(2) = -2(1) - 1 = -3$

گزینه ۱ با توجه به فرضیات مسئله ضابطه تابع f برابر است با:

$f(x) = 4x - 3$

بنابراین اگر خروجی 20 باشد، داریم: $4x - 3 = 20 \Rightarrow x = \frac{23}{4}$



گزینه ۴ با توجه به شکل $f(-5) = 1$

می‌باشد (تابع در نقاط منفی مقدار ثابت دارد که برابر با ۱ می‌باشد).

برای به دست آوردن $f(\frac{1}{4})$ به کمک قضیه تالس داریم: $\frac{1}{4} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

بنابراین: $f(\frac{1}{4}) + 2f(-5) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{5}{4}$

گزینه ۲ با توجه به شکل $g(0) = 1$ بنابراین: $f(g(0)) = f(1) = 2$

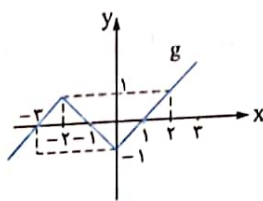
از طرفی $f(2) = -1$ بنابراین $g(f(2)) = g(-1) = 0$ هست. پس:

$f(g(0)) + g(f(2)) = 2 + (0) = 2$

گزینه ۳ مثل سؤال قبل، اول مقدار درونی‌ترها را پیدا می‌کنیم:

$$f(f(1)) = f(2) = -1 \quad f(f(2)) = f(-1) = 0$$

پس حاصل عبارت خواسته شده برابر است با: $-1 - 0 = -1$



گزینه ۳ اگر $f(x) = 2 - \sqrt{2x}$ و نمودار g به شکل روبه‌رو باشد، مجموع جواب‌های

معادله $g(f(x)) = 1$ برابر کدام است؟

- ۱) صفر
- ۲) ۸
- ۳) ۱۲
- ۴) ۴

گزینه ۳ برای حل معادله $g(f(x)) = 1$ اول باید معلوم کنیم

$g(?) = 1$ ، از روی نمودار معلوم است که $g(-2) = 1$ و $g(2) = 1$ پس باید داشته باشیم $f(x) = 2$ و $f(x) = -2$ ، حالا این دو معادله را با استفاده از ضابطه

f حل می‌کنیم: $f(x) = 2 \Rightarrow 2 - \sqrt{2x} = 2 \Rightarrow \sqrt{2x} = 0$

$\xrightarrow{\text{توان}} 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(x) = -2 \Rightarrow 2 - \sqrt{2x} = -2 \Rightarrow \sqrt{2x} = 4 \xrightarrow{\text{توان}} 2x = 16 \Rightarrow x = 8$

پس جواب‌های معادله $g(f(x)) = 1$ برابرند با $x = 8$ و $x = 0$ و مجموعشان می‌شود $8 + 0 = 8$.

نوشتن ضابطه تابع

برای نوشتن ضابطه یک تابع باید:

۱ متغیر تابع (همان چیزی که قرار است مقدار تابع را به آن نسبت دهیم) را مشخص کنیم.

۲ مقدار y را به شکل یک رابطه جبری بر حسب x بنویسیم.

۳ اگر لازم باشد مقادیرهای قابل قبول x را تعیین کنیم (دامنه تابع).

تست تابع S مساحت یک مربع را به محیط آن (P) نسبت می‌دهد، ضابطه S کدام است؟

- ۱) P^2
- ۲) $\frac{P^2}{4}$
- ۳) $\frac{P^2}{16}$
- ۴) $\frac{P^2}{32}$

گزینه ۳ اگر محیط مربع را P فرض کنیم، طول ضلعش برابر است

با $\frac{P}{4}$ ، پس مساحت مربع می‌شود $\frac{P^2}{16}$ بنابراین ضابطه تابع S برابر است

با: $S(P) = \frac{P^2}{16}$

گزینه ۳ گزینه (۳) صحیح است. چون در $y = -|x| + 1$ به ازای

هر مقدار x فقط یک مقدار برای y داریم. برای هر کدام از گزینه‌ها مثال نقض مناسب ارائه می‌کنیم.

۱) اگر $x = 1 \Rightarrow |y| = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

۲) اگر $x = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

۴) اگر $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(\frac{1}{2}) = 1 \\ y = 2(\frac{1}{2}) - 1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

گزینه ۳ در گزینه (۳) اگر $x = 1$ باشد، y هر مقدار دلخواهی

می‌تواند باشد. در واقع $x = 1$ با بی‌شمار نقطه از مجموعه yها در رابطه است و این شرط تابع بودن رو نقض می‌کند.



گزینه ۲ با توجه به شکل نمودار g زمانی مقدار آن یک می باشد که درون تابع g -1 و 1 باشد بنابراین
 $f(x) = 2 \Rightarrow x = -1$
 $f(x) = 1 \Rightarrow x$ وجود ندارد.
 $f(x) = -1 \Rightarrow x$ وجود ندارد.
 بنابراین $x = -1$ تنها رابطه معادله است.

۲. تابع چند جمله ای به تابعی که به ازای محدوده ها با مقادیر متفاوت ضابطه های متفاوت داشته باشد تابع چند ضابطه ای می گویند. اگر یک تابع چند ضابطه ای برای پیدا کردن مقدار تابع به ازای یک x مشخص اول باید تعیین کنیم متعلق به کدام ضابطه است و بعد مقدار تابع را مشخص کنیم.

گزینه ۲ طول x بر من y می باشد $y = x - 5$ از طرفی مساحت بر من است xy
 حالا با جای گذاری $y = x - 5$ داریم
 $xy = x(x - 5) = x^2 - 5x$

تست اگر $f(x) = (a-2)x - 2a$ یک تابع ثابت باشد و $x^0 < x^1 < x^2$
 مقدار $g(f(2))$ برابر کدام است؟
 ۹ (۱) ۱۶ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)
پاسخ گزینه ۲، اولاً $f(x)$ یک تابع ثابت است پس در ضابطه $f(x) = (a-2)x - 2a$ باید $a-2=0$ باشد (یعنی مقدار a به x سگی نداشته باشد) پس $a=2$ و در نتیجه $f(x) = -4$. حالا مقدار $g(f(2))$ برابر است با $g(-4)$ از طرفی چون $-4 < 0$ است پس باید در g از ضابطه اولی استفاده کنیم:
 $g(-4) = (-4)^2 = 16$

گزینه ۲ در یک دایره می دانیم
 $S = \pi r^2$ مساحت
 $P = 2\pi r$ محیط
 از رابطه اول r را بر حسب S پیدا می کنیم و در رابطه دوم جای گذاری می کنیم:

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{S}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$P = 2\pi r \Rightarrow P = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S} = 2\sqrt{\pi S}$$

درسنامه ۲ تابع: $y=f(x)$

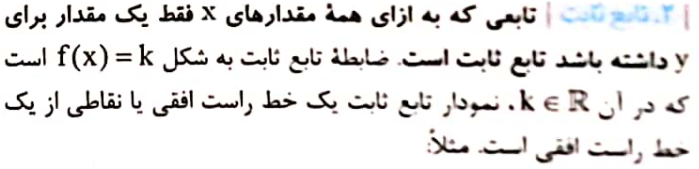
تست اگر $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x-2}$ یک تابع همانی با دامنه $x \neq 2$ باشد مقدار a برابر کدام است؟

۱. تابع های چند جمله ای

هر تابعی که شامل مجموع حملاتی از x با توان های صحیح بزرگ تر یا مساوی صفر باشد یک تابع چند جمله ای است مثلاً: $f(x) = x^2 - 2x^2 + 5x - 1$
 $g(x) = x^{10} + x^{100}$ و $h(x) = -\frac{1}{3}x^{50} + \frac{1}{9}x^5$ همگی چند جمله ای هستند اما $k(x) = x^{\frac{1}{2}} - 1$ و $p(x) = 2x^{-2} + 3x - 1$ چند جمله ای نیستند (ساده اش این که توان x باید اعداد صحیح $0, 1, 2, \dots$ باشد).

۲. تابع ثابت تابعی که به ازای همه مقادیر x فقط یک مقدار برای y داشته باشد تابع ثابت است. ضابطه تابع ثابت به شکل $f(x) = k$ است که در آن $k \in \mathbb{R}$. نمودار تابع ثابت یک خط راست افقی یا نقاطی از یک خط راست افقی است. مثلاً:

۵. تابع خطی هر تابعی که ضابطه اش به شکل $f(x) = ax + b$ باشد یک تابع خطی است. نمایش هر تابع خطی، یک خط راست است و برعکس! هر خط راست (به جز در حالتی که قائم باشد) نمایش دهنده یک تابع خطی است. برای نوشتن ضابطه یک تابع خطی می توانیم:



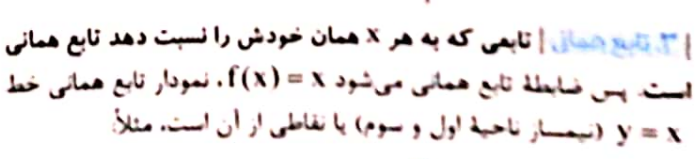
ضابطه را به شکل $f(x) = ax + b$ در نظر بگیریم و با توجه به شرایط سؤال a و b را پیدا کنیم.
 از روش نوشتن معادله خط راست استفاده کنیم.

تست نمودار تابع خطی f از نقاط $(1, -1)$ و $(3, 1)$ می گذرد جواب معادله $f(x) = 2$ برابر کدام است؟
 ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -۲

پاسخ گزینه ۳، روش اول: معادله خط گذرنده از $(1, -1)$ و $(3, 1)$ را می نویسیم:
 $m = \frac{1 - (-1)}{3 - 1} = 1$
 $y - (-1) = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow f(x) = x - 2$
 حالا اگر $f(x) = 2$ باشد، داریم:
 $x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$

۳. تابع همانی تابعی که به هر x همان خودش را نسبت دهد تابع همانی است. پس ضابطه تابع همانی می شود $f(x) = x$. نمودار تابع همانی خط $y = x$ (نیمسار ناحیه اول و سوم) یا نقاطی از آن است. مثلاً:

روش دوم فرض می کنیم $f(x) = ax + b$ داریم:
 $f(1) = -1 \Rightarrow a + b = -1$
 $f(3) = 1 \Rightarrow 3a + b = 1$



تست در تابع خطی f داریم $f(x) + f(x+1) = 4x + 10$ داریم مقدار $f(5)$ برابر کدام است؟
 ۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

$\Rightarrow f(-\frac{5}{3}) = -2(-\frac{5}{3}) = 5$ (در ضابطه سوم قرار می‌گیرد)

پس حاصل عبارت برابر است با: $f(-\sqrt{2}+1) + 2f(-\frac{5}{3}) = 1 + (2 \times 5) = 11$

با توجه به ضابطه ابتدا $f(1)$ و $f(5)$ را به دست می‌آوریم:

$f(1) = 2(1) + 2 = 5$

(چون $1 \leq 3$ بنابراین در ضابطه دوم قرار می‌گیرد)

$f(5) = 5 - \sqrt{5+2} = 2$

(چون $5 > 3$ بنابراین در ضابطه اول قرار می‌گیرد)

بنابراین: $f(f(5)) = f(2)$ و $f(f(1)) = f(5)$

با توجه به ضابطه f : $f(f(5)) = f(2) = 2(2) + 2 = 7$

(چون $2 \leq 3$ در ضابطه دوم قرار می‌گیرد)

بنابراین: $f(f(5)) + f(f(1)) = f(2) + f(5) = 7 + 2 = 9$

گزینه ۱ با توجه به این که در مسئله $f(-4) = f(4) = 1$ هست.

بنابراین چون $-4 < -2$ پس: (در ضابطه اول قرار می‌گیرد) $f(-4) = -(-4) - \frac{b}{2} = 4 - \frac{b}{2} = 1$

و چون $4 > 3$ پس: (در ضابطه سوم قرار می‌گیرد) $f(4) = 2(4) - a = 8 - a = 1$

حالا با توجه به معادلات به دست آمده a و b رو به دست میاریم:

$$\begin{cases} 4 - \frac{b}{2} = 1 \\ 8 - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = 7 \end{cases}$$

در نتیجه با توجه به a و b ضابطه $f(x)$ رو دوباره می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & x < -2 \\ -1 & -2 \leq x < 3 \\ 2x-7 & x \geq 3 \end{cases}$$

پس حاصل $f(\sqrt{2})$ و $f(-\sqrt{3})$ برابر است با:

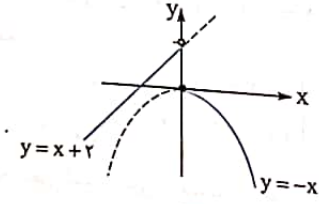
$f(-\sqrt{3}) = -1$ (چون $-2 \leq -\sqrt{3} < 3$ از ضابطه دوم پیروی می‌کند)

$f(\sqrt{2}) = -1$ (چون $-2 \leq \sqrt{2} < 3$ از ضابطه دوم پیروی می‌کند)

$\Rightarrow f(-\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) = (-1) - (-1) = 0$

گزینه ۴ با توجه به ضابطه f : (ابتدا نمودار $y = -x^2$ و $y = x+2$ رو رسم می‌کنیم و سپس هر کدوم رو در بازه مربوط به خودشون مشخص می‌کنیم)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ x+2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



گزینه ۱

روش اول: به سادگی با عددگذاری داریم: $y = 1$ طبق شکل اگر $x = -1$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) می‌توانند صحیح باشند، هم‌چنین:

طبق شکل اگر $x = 1$ $y = 2$

بنابراین گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

روش دوم: نمودار تابع $1 < x < 1$ را رسم می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & 0 < x < 1 \\ -x^2 - 2x & x < 0 \end{cases}$$

مختصات رأس: $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2(-1)} = -1$

$$\Rightarrow y_S = -(-1)^2 - 2(-1) = 1 \Rightarrow S(-1, 1)$$

گزینه ۳ فرض می‌کنیم $f(x) = ax + b$ پس:

$f(x) + f(x+1) = ax + b + a(x+1) + b = 2ax + a + 2b$

حالا باید برابر $2x + 10$ باشد، پس:

$2a = 2 \Rightarrow a = 1, a + 2b = 10 \Rightarrow 2 + 2b = 10 \Rightarrow b = 4$

پس $f(x) = 2x + 4$. حالا $f(5)$ را پیدا می‌کنیم: $f(5) = 2(5) + 4 = 14$

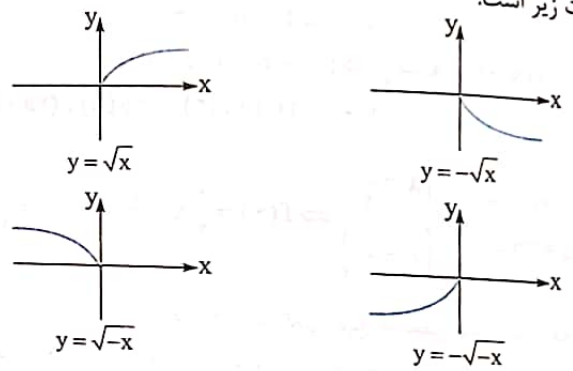
تابع رادیکالی | در این کتاب منظورمان از تابع رادیکالی تابع‌هایی به شکل $f(x) = \sqrt{ax+b}$ است. در توابع رادیکالی:

۱ برای پیدا کردن دامنه عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم.

۲ برای پیدا کردن برد از این که حاصل رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، استفاده می‌کنیم.

۳ برای رسم نمودار تابع از انتقال و تبدیل نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ استفاده می‌کنیم.

۴ نمودار تابع‌های $y = \sqrt{x}, y = -\sqrt{x}, y = \sqrt{-x}, y = -\sqrt{-x}$ به صورت زیر است:



گزینه ۱ دامنه و برد تابع $y = \sqrt{2x+1} - 3$ به ترتیب برابر بازه‌های $[a, +\infty)$ و $[b, +\infty)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

گزینه ۴ برای پیدا کردن دامنه تابع داریم: $2x+1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1$

$\Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ دامنه $[-\frac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

و برای پیدا کردن برد می‌نویسیم: $\sqrt{2x+1} - 3 \geq -3$

$\Rightarrow \sqrt{2x+1} \geq 0 \Rightarrow 2x+1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

\Rightarrow برد $y \geq -3 \Rightarrow$ برد $[-3, +\infty) \Rightarrow b = -3$

پس $a = -\frac{1}{2}$ و $b = -3$ و در نتیجه $a+b = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$

تابع $y = \frac{1}{x}$ نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ به شکل مقابل است:

دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ می‌باشد و از دسته توابع هموگرافیک است. در آینده توضیح بیشتری در مورد این توابع خواهیم داد.

گزینه ۲ با توجه به ضابطه تابع:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ x^2-2x & -1 < x < 1 \\ -3x & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ (x-1)^2-1 & -1 < x < 1 \\ -3x & x < -1 \end{cases}$$

بنابراین چون $-1 < -\sqrt{2}+1 < 1$ پس: (در ضابطه دوم قرار می‌گیرد) $f(-\sqrt{2}+1) = (-\sqrt{2}+1-1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

چون $-\frac{5}{3} < -1$ پس: