کنترل خطی

جلسه دوم

استاد : اصفهانیان

رشته :کارشناسی ارشد مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب جلسه دوم

لاپلاس معکوس		تعریف تابع تبدیل G(S)	۱) ترکیب سری
حالت اول – ریشه مخرج غیر تکراری		سیستم های الکتریکی	۲) ترکیب موازی
حالت دوم : ریشه مخرج تکراری		۱) روش امپدانس معادل	کاربردها
یادآوری		معرفی المانهای سیستم الکتریکی	
پروژه با استفاده از نرم افزار MATLAB		مقاومت – خازن – سلف	
مدل سازی سیستم های کنترلی		ترکیب اجزای الکتریکی	
تابع تبدیل			
معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم			

لاپلاس معکوس

حالت اول – ریشه مخرج غیر تکراری

$$F(s)=\frac{K(s+Z_1)\cdots(s+Z_m)}{(s+P_1)\cdots(s+P_n)}=\frac{a_1}{s+P_1}+\frac{a}{s+P_2}+\frac{a_3 s+a_4}{s^2+bs+c}+\cdots+\frac{a_n}{s+P_n}$$

صورت عدد ثابت — صورت معادله درجه یک

$$a_k=(s+P_1)\,F(s)\Big|_{s=-P_1}$$ ← به ازای ریشه مخرج

$$\frac{a_1(s^2+bs+c)}{s+P_1}+a_3 s+a_4+\cdots=(s^2+bs+c)\,F(s)\Big|_{s=1}^{s=0}$$

مثال ۱) لاپلاس معکوس تابع روبرو را بیابید.

$$F(s)=\frac{2s+12}{s(s^2+2s+5)}$$

نکته اول: تجزیه کردن از راه Δ

$$F(s)=\frac{a_1}{s}+\frac{a_2 s+a_3}{s^2+2s+5}$$

← صورت درجه اول
← مخرج درجه دوم

با استفاده از فرمول a_k — $\times$ (ریشه مخرج)

$$\longrightarrow\quad a_1=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}\Big|_{s=0}\Rightarrow\boxed{a_1=\frac{12}{5}}$$

$\xrightarrow{\times(s^2+2s+5)}$ دو طرف در مخرج درجه دو ضرب

$$\frac{2s+12}{s}=\frac{12(s^2+2s+5)}{5s}+a_2 s+a_3$$

دو مجهول داریم a_2 و a_3 که برای پیدا کردن آنها بهترین راه، قرار دادن دو عدد ثابت به جای s است. (مثل ۱ و ۱-)

* به جای s نمی‌توان صفر قرار داد چون ریشه صفر می‌شود.

$$\begin{aligned}
s=1 &\Rightarrow \begin{cases}14=\dfrac{26}{5}+a_2+a_3\\[4pt] -10=-\dfrac{46}{5}-a_2+a_3\end{cases}\\
s=-1 &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$4=\frac{48}{5}+2a_3\Rightarrow 2a_3=\frac{-26}{5}\Rightarrow\boxed{a_3=\frac{-14}{5}}$$

حالت دوم : ریشه مخرج تکراری

مثال ۲) لاپلاس معکوس تابع روبرو را بیابید.

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

گام اول : به تعداد ریشه های تکراری ، کسرها را در نظر می‌گیریم.
صورت کسرها را به صورت ثابت در نظر می‌گیریم.

$$= \frac{a_1}{(s+1)} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{(s+1)^3}$$

از بزرگترین توان مخرج حساب می‌کنیم

$$\xrightarrow{\times (s+1)^3} s^2+2s+3 = a_1(s\cancel{+1})^2 + a_2(s\cancel{+1}) + a_3 \Big|_{s=-1}$$

$$\Rightarrow 1-2+3 = a_3 \Rightarrow \boxed{a_3 = 2}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} 2s+2 = 2a_1(s+1) + a_2 \Big|_{s=-1} \Rightarrow -2+2 = a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} 2 = 2a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } a_1, a_2} F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

$$\xrightarrow[\text{جدول لاپلاس}]{L^{-1}} f(t) = e^{-t} - t^2 e^{-t}$$

یادآوری

$$L\, e^{-at} = \frac{1}{s+a}$$

$$L\, t^n = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

پروژه با استفاده از نرم افزار MATLAB

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

در نرم افزار متلب برای نوشتن ضرایب می بایست کروشه باز شده و ضریب ها را با فاصله داخل آن بنویسیم
در پایان کروشه را از علامت (;) استفاده می کنیم.

```
B = [ b0  b1  ...  bn ] ;
A = [ a   a1  ...  an ] ;

[ r , p , k ] = residue( B,A)
```

ماندهای صورت کسر — قطب های مخرج — مقادیر اضافه

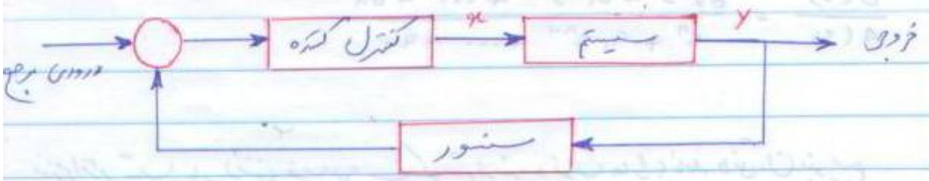
$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \dots + k$$

مثال ۳)

$s^3 + 2s + 5 \Rightarrow$ `[1 0 2 5] ;`

چون در عبارت بالا ضریب s^2 وجود ندارد، پس برای بجای آن عدد صفر قرار می دهیم.

مدل سازی سیستم های کنترلی



تابع تبدیل TRANSFER FUNCTION

$x(t)$ = ورودی

$y(t)$ = خروجی

معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y$$

$$= b_0 x^{(m)} + b_1 (x)^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x$$

$$\xrightarrow{L} a_0 [s^n Y(s) - \cancel{s^{n-1} y(0)} - \dots - \cancel{y^{(n-1)}(0)}] + \dots +$$

$$+ a_{n-1} [sY(s) - y(0)] + a_n Y(s)$$

$$\Rightarrow b_0 [s^m X(s) - \cancel{s^{m-1} x(0)} - \dots - \cancel{x^{(m-1)}(0)}] + \dots + b_{m-1} [sX(s) - \cancel{x(0)}] +$$

فرض می‌کنیم تمام شرایط اولیه صفر باشد $t=0$

$$a_0 s^n y(s) + a_1 s^{n-1} y(s) + \dots + a_{n-1} s\, y(s) + a_n y(s)$$

$$= b_0 s^n x(s) + b_1 s^{n-1} x(s) + \dots + b_{m-1} s\, x(s) + b_m x(s)$$

در صورت ضرایب $x(s)$ و در مخرج ضرایب $y(s)$

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

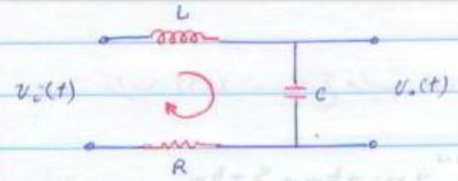
تعریف تابع تبدیل G(S)

نسبت لاپلاس خروجی سیستم به لاپلاس ورودی با فرض صفر بودن تمامی شرایط اولیه

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$$

مثال ۴) الف : سیستم کنترلی روبرو را به صورت ریاضی بیان کنید.

ب : تابع تبدیل سیستم را بدست آورید.



$G_s = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

از قوانین کیرشهف KVL و KCL استفاده می‌شود.

$$KVL: \; v_i(t) = L\underbrace{\frac{di(t)}{dt}}_{\text{مشتق جریان سلف}} + \frac{1}{c}\int i(t)\,dt + Ri(t)$$

برای اینکه بتوان از تابع بالا لاپلاس گرفت و برای اینکه انتگرال را از بین ببریم برای این کار از تابع بالا مشتق می‌گیریم.

$$\xrightarrow{\text{مشتق تابع}} \frac{dv_i(t)}{dt} = L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{c}i(t) + \frac{R\,di(t)}{dt}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} sV_i(s) = \left(Ls^2 + \frac{1}{c} + Rs\right) I(s)$$

$$\xrightarrow[\text{برای از بین بردن مخرج}]{\times c} c\,sV_i(s) = \left(Lcs^2 + Rs + 1\right) I(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_i(s)}{I(s)} = \frac{Lcs^2 + Rcs + 1}{cs}} \quad \text{I}$$

$$\xrightarrow{\text{ولتاژ دو سر خازن}} v_o(t) = \frac{1}{c}\int i(t)\,dt \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{1}{c}i(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} sV_o(s) = \frac{1}{c}I(s) \Rightarrow \boxed{\frac{V_o(s)}{I(s)} = \frac{1}{cs}} \quad \text{II}$$

$$\xrightarrow{\text{I},\text{II}} \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{V_o(s)}{I(s)} \times \frac{I(s)}{V_i(s)}$$

$$= \frac{1}{cs} \times \frac{cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}}$$

سیستم های الکتریکی:

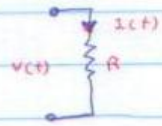
۱) روش امپدانس معادل

$$Z = \frac{V(s)}{I(s)}$$

$$\text{امپدانس الکتریکی} = \frac{\text{ولتاژ}}{\text{جریان}}$$

معرفی المانهای سیستم الکتریکی :

۱) مقاومت :



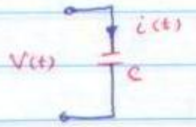
$$v(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V(s) = R \cdot I(s)$$

$$\Rightarrow Z_R = \frac{V(s)}{I(s)} = R$$

$$\boxed{Z_R = R}$$

۲) خازن :

$$i(t) = c\,\frac{dv(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s) = C\,s\,V(s)$$

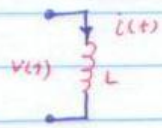


$$\Rightarrow Z_c = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{cs}$$

$$\boxed{Z_c = \frac{1}{cs}}$$

۳) سلف :

$$V(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} V(s) = L\,s\,I(s)$$



$$\Rightarrow Z_L = \frac{V(s)}{I(s)} = Ls$$

$$\boxed{Z_L = Ls}$$

ترکیب اجزای الکتریکی :

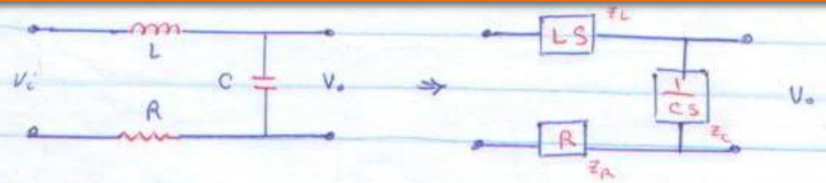
۱) ترکیب سری

$$Z_{eq} = \sum Z_i$$

۲) ترکیب موازی

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum \frac{1}{Z_i}$$

کاربردها :



$$Z_{eq} = LS + \frac{1}{CS} + R = \frac{V_i(S)}{I(S)}$$

$$\Rightarrow \frac{LCS^2 + RCS + 1}{CS}$$

$$Z_C = \frac{V_o(S)}{I(S)} = \frac{1}{CS}$$

وقتی خروجی مدار همان ولتاژ دو سر خازن باشد.