

## دنباله‌ها

اگر به هر عدد صحیح (مثبت)  $n$  عدد حقیقی  $a_n$  را اختصاص دهیم. در این صورت دنباله حقیقی

$$a_1, a_2, \dots = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

رایج دنباله متناهی داریم.

در آن دنباله را به صورت یک تابع نیز در نظر می‌گیرند:

$$a: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$

n: جمله nام

مثال:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, \pi, \sqrt{2}, \dots\}$$

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{c_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

$$\{d_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$$

مثال: چه دهم هفتم دنباله‌ها زیر را مشخص کنید

الف  $\{c_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

حل:  $n=5 \Rightarrow c_n = \frac{1}{5}$  &  $n=17 \Rightarrow c_n = \frac{1}{17}$

ب  $\{(-1)^n \sin(n\pi)\}$

حل:  $n=5 \Rightarrow (-1)^5 \sin(5\pi) = 0$

$n=17 \Rightarrow (-1)^{17} \sin(17\pi) = 0$

$$\Rightarrow \{(-1)^n \sin(n\pi)\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}$$

برخی خواص دنباله ها:

\* صعودی یا نزولی (یکنواختی): اگر با جدول شدن (بزرگ شدن یا کوچک شدن) جمله دنباله (یعنی  $n < n+1$ )

- جملات بزرگتر شوند  $\Rightarrow$  دنباله صعودی است، (یعنی برای هر  $n$ ،  $a_n \leq a_{n+1}$ )
- جملات کوچکتر شوند  $\Rightarrow$  دنباله نزولی است، (یعنی برای هر  $n$ ،  $a_n \geq a_{n+1}$ )

مثال: دنباله  $\{ \frac{1}{n} \}$  نزولی است زیرا  $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

دنباله  $\{ n^2 \}$  صعودی است و دنباله  $\{ (-1)^n \}$  یکنواخت نیست.

\* کران دار یا بی کران: اگر عدد  $M > 0$  موجود باشد که برای هر  $n$ ،  $|a_n| < M$ ،  $\Rightarrow$  لولیم

دنباله کران دار است و در غیر اینصورت دنباله بی کران است.

مثال: دنباله  $\{ \frac{1}{n} \}$  کران دار است زیرا برای هر  $n \in \mathbb{N}^+$ ،  $0 < \frac{1}{n} \leq 1$

ولی دنباله  $\{ 2n+1 \}_{n=1}^{\infty}$  بی کران است.

\* همگرایی یا واگرایی (پیش بینی جمله به نیتیم دنباله):  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

اگر حد درجی نیت دنباله ای، موجود باشد لولیم دنباله همگرایی است و

اگر حد ناموجود باشد لولیم واگرایی است،

اگر حد  $(\pm \infty)$  شود لولیم واگرایی به نیت است.

مثال: همگرایی یا واگرایی دنباله ها را زیر را چک کنید.

\*  $\{ \frac{1}{n} \} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  همگرایی است

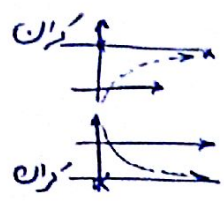
\*  $\{ \frac{2n-1}{2n+7} \} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+7} = \frac{2}{2} = 1$  همگرایی است

① هر دنباله همرا  $\Leftarrow$  کران دار است.

② هر دنباله هم کران  $\Leftarrow$  واگراست.

③ کران دار  $\not\Leftarrow$  همرا  $\Leftarrow$  صلا  $\{(-1)^n\}$

لحظه کران دار و یکنوا  $\Leftarrow$  همراست.



$\Leftarrow$  دقیق تر:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{دنباله همگوس و از بالا کران دار} \Leftarrow \text{ همراست.} \\ \text{دنباله تروی و از پایین کران دار} \Leftarrow \text{ همراست.} \end{array} \right.$

مثال: الف) دنباله  $\{2, 2, 2, \dots\}$  کران دار و همراست ب) ۲.

ب) دنباله  $\{(-1)^n\}$  کران دار و واگراست.  $(\{1, -1, 1, -1, \dots\})$

ج) دنباله  $\{\frac{1}{n}\}$  کران دار و همراست ب) صفر و تروی است.  $(\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \rightarrow 0)$

د) دنباله  $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$  کران دار و همراست ب) صفر و یکنوا نیست.  $(\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\} \rightarrow 0)$

ه) دنباله  $\{n\}$  هم کران و واگرا و همگوس است.  $(\{1, 2, 3, 4, \dots\} \rightarrow \infty)$

و)  $\{\sin n\}$  کران دار و واگراست و یکنوا نیست.  $(\sin 1, \sin 2, \sin 3, \dots)$

مثال: همگرایی دنباله  $\{\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}\}$  را بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{n} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

همگرایی استوار است.

\* نکته مهم: هر دو دنباله  $\{\sqrt[n]{c}\}$  و  $\{\sqrt[n]{n}\}$  همگرایی یکنواست:  $\left. \begin{array}{l} \lim \sqrt[n]{c} = 1 \\ \lim \sqrt[n]{n} = 1 \end{array} \right\}$  c: عدد ثابت