مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

حل مسأله
از طریق مسأله

تألیف لورن سی. لارسن

ترجمهٔ علی ساوجی

انتشارات فاطمی

هدف اصلی کتاب **حل مسأله ازطریق مسأله** آموزش اساسی‌ترین روشهای حل مسأله با آوردن مثالهای گوناگون از این روشهاست، این کتاب گلچینی از مسائل و یک راهنمای آموزشی است. افزون بر یک سوم از ۷۰۰ مسأله‌ای که در کتاب آمده به‌تفصیل حل شده است. هر مسأله به‌دلیل جذابیت طبیعی و زیبایی‌اش انتخاب شده است، ولی مقدم بر هر چیز خواسته شده است که هر مسأله‌ای مثالی برای روشن شدن یکی از روشهای حل مسأله باشد. درسراسر کتاب هدف این بوده است که نشان داده شود چگونه می‌توان به روشهای مختلف مجموعه‌ای از تکنیکهای اساسی را برای حل گونه‌های بسیار زیادی ازمسائل به‌کار برد.

برای مطالعهٔ این کتاب آگاهیهای مقدماتی از ترکیبیات، نظریهٔ اعداد، جبر، آنالیز و هندسه دانسته فرض شده‌اند. بیشترمطالب کتاب برای دانش‌آموزانی که یک سال حسابان مطالعه کرده‌اند قابل درك است. با وجود این بیشتر مسائل درسطح اندکی بالاتر ازمحتوای کتابهای درسی هستند.

بنابراین کتاب **حل مسأله ازطریق مسأله** به‌ویژه برای دانش‌آموزانی که خود را برای شرکت در مسابقه‌های ریاضی از نوع المپیادهای ریاضی آماده می‌کنند، دبیران، دانشجویان و سایرعلاقه‌مندان مناسب است.

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

زیر نظر :

یحیی تابش

عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

امید علی کرمزاده

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

از کتابهای این مجموعه

کتابهای زرد

نظریهٔ اعداد
هندسه
جبر
آنالیز
ترکیبیات
هنر مسأله حل کردن

کتابهای نارنجی

هندسهٔ مسطحه
پانصد مسألهٔ پیکارجو
از اردوش تا کییف
دایره‌ها
هندسه از دیدگاه تحلیلی
فنون مسأله حل کردن
محافل ریاضی

کتابهای قرمز

حل مسأله از طریق مسأله
المپیادهای ریاضی چین
شیوه‌های مسأله حل‌کردن

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

حل مسأله
از طریق مسأله

تألیف لورن سی. لارسن

ترجمهٔ علی ساوجی

انتشارات فاطمی

Problem-Solving Through Problems
Loren C. Larson
Springer-Verlag, 1983

حل مسأله از طریق مسأله

مؤلف: لورن سی. لارسن
مترجم: علی ساوجی
ویراستار: مهدی مدغم
ناشر: مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
چاپ اول، ۱۳۷۷
شابک ۸ـ۲۴۲ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-242-8
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی (TEX-پارسی): فاطمه صادقی
- صفحه‌آرا: حسین ابراهیمی
- نمونه‌خوان: فاطمه ثقفی
- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

لیتوگرافی: نقش سبز
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ مؤسسهٔ انتشارات سوره

انتشارات فاطمی
تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۶۵۱۴۲۲ ـ ۶۵۴۷۷۰ نمابر: ۸۸۶۶۲۵۸

لارسن، لورن، ۱۹۳۷ـ   Larson, Loren C.
حل مسأله از طریق مسأله / تألیف لورن سی. لارسن؛ ترجمهٔ علی ساوجی. ـ تهران: فاطمی، ۱۳۷۷.
ده، [۳۰۳] ص.: مصور، جدول، نمودار. ـ (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی. کتابهای قرمز)
ISBN 964-318-242-8
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
عنوان اصلی: Problem-solving through problems.
کتابنامه: ص. [۲۹۱]ـ۳۰۲.
۱. ریاضیات ـــ مسائل، تمرینها و غیره. ۲. حل‌المسائل. الف. ساوجی، علی، ۱۳۴۶ـ   ، مترجم.
ب. عنوان.
QA۴۳/ل۲ح۸   ۵۱۰/۷۶
۱۳۷۷
کتابخانهٔ ملی ایران   م۷۷ـ۶۴۸۹

فهرست

به‌نام خدا

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان. هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست‌ویکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این‌رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر المپیاد ریاضی اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ اتووش به نام بارون لوراند اتووش[1] به‌صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به‌کارگرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضی شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل

1- Baron Loránd Eötvös

مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو مؤسسهٔ انتشارات فاطمی به انتشار مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضی ۲ نظام جدید در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

* * *

کتاب حاضر از دستهٔ سوم است، و در آن اساسی‌ترین روشهای مسأله حل کردن با آوردن مثالهایی متنوع ذکر شده است. این کتاب از منابع اصلی آمادگی برای المپیادهای ریاضی در سطح جهان است و مطالعهٔ آن برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در المپیادهای ریاضی و دانشجویان مفید است.

پیشگفتار

هدف این کتاب آن است که برخی از مهمترین تکنیکهای حل مسأله را که نوعاً در ریاضیات دورهٔ پیش‌دانشگاهی و کارشناسی مطرح می‌شوند از دیگر روشها مجزا، و توجه خواننده را به آنها جلب کند و با استفاده از مثالها و مسائل جالبی که به‌آسانی در منابع دیگر یافت نمی‌شوند، کاربردهای آنها را به نمایش بگذارد. هر بخش کتاب، تنها به یک ایده می‌پردازد؛ ایده‌ای که قدرت و کاربردهای گوناگون آن در مثالها پدیدار و با مسائل کتاب تقویت می‌شود. کتاب حاضر به منزلهٔ مدخل و راهنمایی برای مسائل موجود در نوشتارهای ریاضی است (مانند آنچه در بخش مسائل مجله‌های ریاضی برای مقطع کارشناسی وجود دارد) و مرجعی است که به‌آسانی آگاهیهای اساسی را در اختیار دانش‌آموزان و مدرسان ریاضیات قرار می‌دهد.

این کتاب گلچینی از مسائل و نیز راهنمایی آموزشی است. کتاب شامل بیش از ۷۰۰ مسأله است که افزون بر یک‌سوم آنها به تفصیل حل شده‌اند. هر مسأله به‌دلیل جذابیت طبیعی و زیبایی‌اش انتخاب شده است، ولی مقدم بر هر چیز، خواسته‌ایم که مسألهٔ مزبور، مثالی برای روشن شدن یکی از روشهای حل مسأله باشد. در سراسر کتاب، هدف ما آن بوده است که نشان دهیم چگونه می‌توان به روشهای مختلف، مجموعه‌ای از تکنیکهای اساسی را برای حل گونه‌های بسیار زیادی از مسائل به‌کار برد. هر جا امکانپذیر بوده است، مسائلی در بخشها انتخاب شده‌اند که از مرزهای مورد انتظار فراتر رفته‌اند و به این ترتیب این حقیقت تقویت می‌شود که تنها یک شهود، می‌تواند کاربردهای وسیعی داشته باشد. هر بخش با «مثالهای اضافی» خاتمه می‌یابد. طی این مثالها به مباحث دیگری اشاره می‌شود که استفاده از این تکنیک در حل آنها سودمند است.

این کتاب در سطحی بالا از مباحث کارشناسی نوشته شده است. آگاهیهای مقدماتی از ترکیبیات، نظریهٔ اعداد، جبر، آنالیز و هندسه دانسته فرض شده‌اند. بیشتر مطالب کتاب برای دانش‌آموزانی که یک سال حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه کرده‌اند، قابل درک است و بخش قابل توجهی از مطالب، حتی این آگاهیها را لازم ندارد. با وجود این، بیشتر مسائل در سطح اندکی بالاتر از محتوای کتابهای درسی هستند. بنابراین، این مطالب به‌ویژه برای دانش‌آموزانی که خود را برای مسابقات ریاضی آماده می‌کنند، مناسب است.

روشها و مسائلی که در این کتاب آمده‌اند، حاصل تجربهٔ من از حل مسائلی در این سطح است. هر شمارهٔ تازه‌ای از ماهنامهٔ ریاضی آمریکا[1] (و دیگر مجلات ریاضی کارشناسی) شامل مطالبی است که به‌خوبی می‌توانند در این کتاب گنجانده شوند. از آنجاکه این ایده‌ها به‌طور مداوم صورتهای تازه‌ای به خود می‌گیرند، خواننده باید این گردایه را به‌عنوان مجموعه‌ای آغازین تلقی کند و بکوشد تا پرونده‌ای شخصی از مسائل و راه‌حلهای آنها به‌منظور توسعهٔ این مجموعه، چه از نظر وسعت و چه از نظر عمق، پدید آورد. بدیهی است که هیچ‌گاه نمی‌توانیم امیدوار باشیم که یک «نظام» برای حل مسأله ایجاد کنیم. با وجود این، فراگیری ایده‌ها در تمام مراحل پیشرفت، تجربه‌ای ارزشمند است.

بسیاری از مسأله‌های این کتاب قدیمی‌اند و تعیین مراجع کامل آنها بسیار دشوار است. من منابع مربوط به مسائلی را که تأخر بیشتری در نوشتارهای ریاضی دارند، مشخص کرده‌ام و هر زمان که امکان داشته است، مسابقات را ذکر کرده‌ام. دریافت منابع دقیق مسائلی که از آنها نام نبرده‌ام، موجب امتنان خواهد بود.

مایلم از این فرصت برای تشکر از همکاران و دانشجویانی استفاده کنم که به همراه من ساعتهای بسیاری را صرف کار لذتبخش روی این مسائل کرده‌اند. در این ارتباط، مراتب قدردانی خود را نسبت به اُ. ای. استانایتیس[2]، استاد بازنشستهٔ کالج سنت‌اولاف[3] ابراز می‌دارم. از کالج سنت‌اولاف و بنیاد ملون[4] برای ارائهٔ کمک مالی طی دو تابستان به‌منظور کمک به نگارش این متن تشکر می‌کنم. در نهایت از تمام افرادی که با ارائهٔ مسائل و در اختیار گذاشتن راه‌حلهای آنها در این‌کار سهیم بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم. به‌ویژه از موری اس. کلامکین[5] که در طول یک ربع قرن، به‌عنوان سرشناسترین فرد در زمینهٔ حل مسأله مطرح بوده است و من از راه‌حلهای او بهره‌های فراوانی برده‌ام، تشکر می‌کنم.

لورن سی. لارسُن
۲۱ام مارس، ۱۹۸۳

1- The American Mathematical Monthly   2- O.E. Stanaitis   3- St. Olaf College
4- Mellon foundation   5- Murray S. Klamkin

۱

راهیابی

استراتژی یا تاکتیکهای حل مسأله، راهیابی[1] نامیده می‌شود. در این فصل با آن بخش از فن راهیابی سر و کار داریم که به حل مسائل ریاضی مربوط می‌شود. متفکران این علم، چند ایدهٔ اساسی را که نوعاً در حل مسائل مفید هستند، معرفی کرده‌اند. پنج کتاب کلاسیک جورج پولیا دربارهٔ روشهای حل مسأله، شاهکارهایی هستند که تماماً به مطالعهٔ علمی راهیابی در ریاضیات اختصاص دارند. در بین ایده‌های ارائه شده در این کتابها، توجه خود را به موارد زیر معطوف می‌کنیم:

۱) جستجوی الگو.
۲) رسم شکل.
۳) تبدیل به مسأله‌ای هم ارز.
۴) تعدیل مسأله.
۵) انتخاب نماد کارآمد.
۶) بهره‌گیری از تقارن.
۷) تقسیم مسأله به چند حالت.
۸) عمل قهقرایی.
۹) استدلال از راه تناقض.
۱۰) دنبال کردن زوجیت.
۱۱) توجه به حالتهای اکسترم.
۱۲) تعمیم.

منظور ما از بیان این فهرست ایده‌های حل مسأله، توصیف آنها نیست بلکه علاقهٔ ما به اجرای آنهاست. با توجه به مثالهایی که نشان می‌دهند چگونه دیگران این ایده‌های ساده و در عین حال نیرومند را به کار بسته‌اند، می‌توانیم امیدوار باشیم که مهارتهایمان در حل مسأله بهبود یابد.

پیش از شروع بحث، چند توصیه دربارهٔ مسائل پایان هر بخش ضروری است: **بیش از حد پای‌بند استفاده از روش حل مسأله‌ای که در آن بخش ارائه شده است نباشید.** اگر چه مسائل به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که به عنوان تمرینی برای همان روش حل مسأله به کار برده شوند، ولی تمرکز با دیدگاهی محدود، از نظر روانشناسی تضعیف کننده است. هر مسأله معمولاً چند راه حل مختلف دارد و در هر راه حل غالباً راهیابی کاملاً متفاوتی به کارگرفته می‌شود. بنابراین بهتر است که با ذهنی باز به هر مسأله نزدیک شویم نه اینکه با فکری از پیش تعیین شده به دنبال راهی به منظور به کارگیری روش معینی برای حل آن مسأله باشیم. در برخورد با

1- heuristics

یک مسأله، آنچه که اهمیت دارد حل کردن آن است. این کوله‌باری از تجربهٔ همهٔ روشهای مختلف است که به اتفاق هم منجر به دستیابی به سطح بالایی از آگاهی دربارهٔ امکانات حل یک مسأله می‌شود.

۱ـ۱ جستجوی الگو

در واقع همهٔ حل کنندگان مسأله، کار حل مسأله را با متقاعد ساختن خود از موجه بودن حکم مسأله و توانایی حل آن آغاز می‌کنند. آزمودن چند حالت خاص که فوراً نتیجه می‌دهند، بهترین راه نیل به این مقصود است. هنگامی که این کشف به روشی اسلوبمند صورت گیرد، احتمالاً الگوهایی ظاهر می‌شوند که ایده‌هایی را جهت پیشبرد حل مسأله ارائه می‌دهند.

۱ـ۱ـ۱ ثابت کنید مجموعه‌ای از n عضو (متفاوت)، دقیقاً ۲^n زیر مجموعه (متفاوت) دارد.

ممکن است وقتی مسأله به این شکل آمرانه مطرح می‌شود، شخص تازه کار دچار هراس شود و نداند آن را چگونه حل کند. ولی فرض کنید که مسأله به شکل سؤالی مطرح شود، مثلاً

الف) از یک مجموعهٔ n عضوی، چند زیر مجموعه ساخته می‌شود؟

ب) این حکم را ثابت یا رد کنید: یک مجموعهٔ n عضوی، ۲^n زیر مجموعه دارد.

در هر یک از این دو صورت، به طور ضمنی پیشنهاد بررسی چند حالت خاص مطرح می‌شود. برخورد با هر مسأله‌ای باید چنین باشد که «همواره نسبت به حکم مسأله تردید داشته باشید تا وقتی که متقاعد شوید».

حل ۱. ابتدا ببینیم وقتی که مجموعه ۰، ۱، ۲ یا ۳ عضو دارد چه روی می‌دهد. نتیجه‌ها در جدول زیر آمده‌اند:

n	عضوهای S	زیر مجموعه‌های S	تعداد زیر مجموعه‌های S
۰	هیچ	$\varnothing$	۱
۱	x_1	$\varnothing, \{x_1\}$	۲
۲	x_1, x_2	$\varnothing, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}$	۴
۳	x_1, x_2, x_3	$\varnothing, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}$ $\{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}$	۸

هدف از ساختن این جدول نه تنها تحقیق دربارهٔ حکم است، بلکه جستجو به دنبال الگوهایی است که احتمالاً نشان می‌دهند در حالت کلی از چه راهی وارد حل مسأله شویم. لذا می‌کوشیم که تا حد امکان اسلوبمند عمل کنیم. در این حالت توجه کنید که وقتی $n = ۳$، ابتدا زیر مجموعه‌های $\{x_1, x_2\}$ را فهرست کرده‌ایم و سپس در سطر دوم به هر یک از زیر مجموعه‌های حاصل x_3 را افزوده‌ایم. این ایدهٔ کلیدی امکان می‌دهد که بتوانیم کار را برای مقادیر بالاتر n نیز ادامه دهیم. برای مثال، وقتی $n = ۴$ زیر مجموعه‌های $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ عبارت‌اند از هشت زیر مجموعهٔ $\{x_1, x_2, x_3\}$ (که در جدول نشان داده شده‌اند) به همراه هشت‌تای دیگر که از افزودن x_4 به هر یک از زیر مجموعه‌های قبلی به دست می‌آیند. این شانزده حالت، تمامی حالتهای ممکن را در بر می‌گیرند و لذا مجموعه‌ای با ۴ عضو، $(۱۶ =)۲^۴$ زیر مجموعه دارد.

برهانی بر اساس این ایده، کاربرد ساده‌ای از استقرای ریاضی است(بخش ۲-۱ را ببینید).

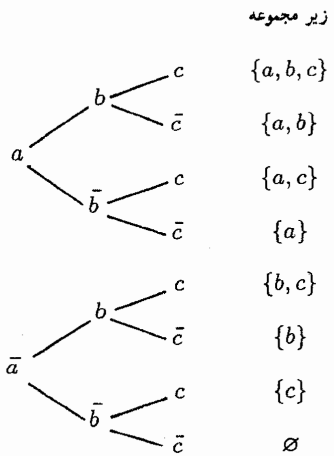
حل ۲. راه دیگری برای ارائهٔ راه حل قبلی استدلال به شکل زیر است. فرض کنید که به ازای هر n، A_n تعداد

زیر مجموعه‌های (متفاوت) یک مجموعه با n عضو (متفاوت) باشد. فرض کنید S مجموعه‌ای با $n+۱$ عضو باشد. یکی از عضوهای آن را به x نشان می‌دهیم. بین زیر مجموعه‌هایی از S که شامل عضو x نیستند و آنهایی که x را در بر دارند، تناظری یک به یک وجود دارد (یعنی زیر مجموعهٔ T از نوع اول با $T \cup \{x\}$ در تناظر قرار می‌گیرد). زیر مجموعه‌های نوع اول همگی زیر مجموعهٔ $S-\{x\}$ هستند که مجموعه‌ای با n عضو است و لذا داریم

$$A_{n+۱} = ۲A_n$$

این رابطهٔ بازگشتی که به ازای $n = ۰, ۱, ۲, ۳ \ldots$ برقرار است به همراه این حقیقت که $A_۰ = ۱$، ایجاب می‌کند که $A_n = ۲^n$ ($A_n = ۲A_{n-۱} = ۲^۲A_{n-۲} = \cdots = ۲^nA_۰ = ۲^n$).

حل ۳. راه دیگری برای شمارش اسلوبمند زیر مجموعه‌ها، ساختن یک «درخت» است. در شکل زیر، این درخت به ازای $n=۳$ و $S=\{a,b,c\}$ نشان داده شده است:



هر شاخه از درخت با یک زیرمجموعهٔ متمایز S در تناظر است (خط بالای هر عضو، به معنی آن است که آن عضو در مجموعهٔ متناظر با آن شاخه قرار ندارد). درخت در سه مرحله ساخته می‌شود که این مراحل متناظر با سه عضو مجموعهٔ S هستند. هر عضو S به دو امکان می‌انجامد: این عضو در زیر مجموعهٔ مورد نظر قرار دارد یا قرار ندارد، و این دو امکان به کمک دو شاخه نمایش داده شده‌اند. هر گاه عضو جدیدی را در نظر بگیریم، تعداد شاخه‌ها دو برابر می‌شود. لذا تعداد شاخه‌ها برای یک مجموعهٔ سه عضوی، $۸ = ۲ \times ۲ \times ۲$ است. تعداد شاخه‌های یک مجموعهٔ n عضوی عبارت است از

$$\underbrace{۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}_{n\text{بار}} = ۲^n$$

لذا یک مجموعه n عضوی، ۲^n زیر مجموعه دارد.

حل ۴. فرض کنید مجموعه‌ها را بر حسب اندازهٔ آنها شمارش کنیم. برای مثال، وقتی $S=\{a,b,c,d\}$، زیرمجموعه‌ها عبارت‌اند از

تعداد عضوها		تعداد زیر مجموعه‌ها
۰	$\varnothing$	۱
۱	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$	۴
۲	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$	۶
۳	$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$	۴
۴	$\{a, b, c, d\}$	۱

این طرز شروع، انگیزهٔ استدلالی به صورت زیر می‌شود. فرض کنید S مجموعه‌ای با n عضو باشد. در این صورت

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های } S = \sum_{k=۰}^{n} (\text{تعداد زیر مجموعه‌های } k \text{ عضوی } S)$$
$$= \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} = ۲^n$$

تساوی آخر از قضیهٔ دو جمله‌ای

$$(x+y)^n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

با قرار دادن $x = ۱$ و $y = ۱$ به دست می‌آید.

حل ۵. راه شروع اسلوبمند دیگری در جدول ۱-۱ آمده است که در آن زیر مجموعه‌های $S = \{x_۱, x_۲, x_۳\}$ فهرست شده‌اند. برای درک این الگو، به تناظر بین اندیسهای آخرین ستون طرف چپ و ۱های موجود در سه‌تاییهای ستون دوم توجه کنید. به‌خصوص اگر A زیر مجموعه‌ای از $S = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ باشد، a_i را به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_i = \begin{cases} ۱ & x_i \in A \\ ۰ & x_i \notin A \end{cases}$$

جدول ۱-۱

زیرمجموعه	سه‌تایی	عدد در مبنای۲	عدد اعشاری
$\varnothing$	$(۰, ۰, ۰)$	۰	۰
$\{x_۳\}$	$(۰, ۰, ۱)$	۱	۱
$\{x_۲\}$	$(۰, ۱, ۰)$	۱۰	۲
$\{x_۲, x_۳\}$	$(۰, ۱, ۱)$	۱۱	۳
$\{x_۱\}$	$(۱, ۰, ۰)$	۱۰۰	۴
$\{x_۱, x_۳\}$	$(۱, ۰, ۱)$	۱۰۱	۵
$\{x_۱, x_۲\}$	$(۱, ۱, ۰)$	۱۱۰	۶
$\{x_۱, x_۲, x_۳\}$	$(۱, ۱, ۱)$	۱۱۱	۷

حال به روشنی دیده می‌شود که می‌توانیم زیر مجموعه‌ای چون A از S را با n تایی $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ که از ۰ها و ۱ها تشکیل شده است، مشخص کنیم. به عکس، هر n تایی به این شکل، با زیر مجموعهٔ منحصر به فردی از S متناظر است. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های S با تعداد n تاییهای متشکل از ۰ها و ۱ها برابر است. به روشنی دیده می‌شود که مجموعهٔ اخیر، با مجموعهٔ عددهای نامنفی کوچکتر از 2^n که در مبنای دو نوشته شده باشند، در تناظر یک به یک است. پس هر عدد صحیح نامنفی کوچکتر از 2^n ، دقیقاً با یکی از زیر مجموعه‌های S متناظر است و به عکس. در نتیجه S باید 2^n زیرمجموعه داشته باشد.

به طور معمول برای هر مثال تنها یک راه حل ارائه می‌کنیم، راه حلی که برای روشن کردن ایدهٔ راهیابی مورد نظر مناسب باشد. ولی در این مثال اول، خواستیم صرفاً ادعای اولیه خود را تکرار کنیم که معمولاً یک مسأله را به روشهای گوناگون می‌توان حل کرد. درسی که از این مثال می‌گیریم آن است که باید درگامهای اولیهٔ کاوش در یک مسأله، انعطاف‌پذیر بود. اگر به نظر نمی‌آید که یک راه حل به نتیجه برسد، ناامید نشوید، بلکه به دنبال راه تازه‌ای بگردید. تا فرصت اندیشیدن به طور گسترده دربارهٔ رهیافتهای گوناگون را پیدا نکرده‌اید هرگز خود را به یک راه حل مشخص مقید نکنید.

۱ـ۱ـ۲ فرض کنید $S_{n,0}$، $S_{n,1}$ و $S_{n,2}$ مجموع دو در میان عضوهای سطر n ام مثلث پاسکال باشند که به ترتیب با اولین، دومین و سومین عضو از طرف چپ آغاز می‌شوند. مقدار $S_{100,1}$ را حدس بزنید.

حل. ابتدا به بررسی حالتهای مرتبهٔ پایین می‌پردازیم به امید آنکه الگویی بیابیم که قابل تعمیم باشد. در جدول ۱-۲، جمله‌هایی که زیر آنها خط کشیده نشده است، آنهایی هستند که جمعوندهای $S_{n,0}$ را تشکیل می‌دهند؛ آنهایی که زیر آنها یک خط و آنهایی که زیر آنها دو خط کشیده شده است، به ترتیب جمله‌هایی هستند که مربوط به $S_{n,1}$ و $S_{n,2}$ هستند.

جدول ۱-۲

مثلث پاسکال	n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	$S_{n,2}$
۱	۰	۱+	۰	۰
۱ ۱	۱	۱	۱	۰−
۱ ۲ ۱	۲	۱	۲+	۱
۱ ۳ ۳ ۱	۳	۲−	۳	۳
۱ ۴ ۶ ۴ ۱	۴	۵	۵	۶+
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱	۵	۱۱	۱۰−	۱۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱	۶	۲۲+	۲۱	۲۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱	۷	۴۳	۴۳	۴۲−

سه ستون سمت چپ نشان می‌دهند که در هر حالت دو تا از مجموعها با هم مساوی‌اند حال آنکه سومی یا یک واحد بزرگتر است(که به وسیلهٔ زبروند + مشخص شده است) و یا یک واحد کوچکتر است (که به وسیلهٔ زبروند − مشخص شده است). همچنین دیده می‌شود که در این دنباله، جملهٔ نابرابر در یک دور شش‌تایی تغییر می‌کند. لذا با توجه به الگوی به دست آمده در سطرهای اول، انتظار داریم که به ازای $n = 8$، ناهماهنگی در ستون میانی رخ دهد و عدد ظاهر شده یک واحد بیشتر از دو عدد دیگر باشد.

می‌دانیم که $S_{n,\circ}+S_{n,۱}+S_{n,۲}=۲^n$ (۱-۱-۱ را ببینید). از آنجا که $۱۰۰=۶\times۱۶+۴$ ، انتظار داریم که جملهٔ نابرابر در ستون سوم ($S_{۱۰۰,۲}$) روی دهد و یک واحد بیشتر از دو عدد دیگر باشد. لذا $S_{۱۰۰,\circ}=S_{۱۰۰,۱}=S_{۱۰۰,۲}-۱$ و $S_{۱۰۰,۱}+S_{۱۰۰,۱}+S_{۱۰۰,۱}+۱=۲^{۱۰۰}$. از این تساوی حدس می‌زنیم که

$$S_{۱۰۰,۱}=\frac{۲^{۱۰۰}-۱}{۳}$$

اثبات دقیقی از این حدس، کاربرد ساده‌ای از استقرای ریاضی است(فصل ۲ را ببینید).

۱-۱-۳ فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، . . . ، دنباله‌ای از عددهای حقیقی و نا صفر باشد که در تساوی

$$x_n=\frac{x_{n-۲}x_{n-۱}}{۲x_{n-۲}-x_{n-۱}} \quad , \quad n=۳,۴,۵,\ldots$$

صدق می‌کند. شرطی لازم و کافی برای $x_۱$و $x_۲$ بنویسید که به ازای تعدادی نامتناهی از مقدارهای n، x_n عدد صحیح باشد.

حل. برای به دست آوردن دیدگاهی از این دنباله، چند جملهٔ اول آن را محاسبه و آنها را بر حسب $x_۱$ و $x_۲$ بیان می‌کنیم. (با حذف محاسبه‌ها) به دست می‌آوریم

$$x_۳=\frac{x_۱x_۲}{۲x_۱-x_۲}$$
$$x_۴=\frac{x_۱x_۲}{۳x_۱-۲x_۲}$$
$$x_۵=\frac{x_۱x_۲}{۴x_۱-۳x_۲}$$

خوشبختانه در این مثال خاص، محاسبه‌ها را می‌توان به آسانی انجام داد و از آن الگویی پیدا کرد. با استقرایی ساده، نتیجه می‌گیریم

$$x_n=\frac{x_۱x_۲}{(n-۱)x_۱-(n-۲)x_۲}$$

که با جدا کردن ضریب n، به شکل

$$x_n=\frac{x_۱x_۲}{(x_۱-x_۲)n+(۲x_۲-x_۱)}$$

در می‌آید. در این حالت می‌بینیم که اگر $x_۱\neq x_۲$، در نهایت اندازهٔ مخرج از صورت بیشتر می‌شود و لذا x_n عددی صحیح نخواهد بود. ولی اگر $x_۱=x_۲$، آنگاه همهٔ جمله‌های دنباله مساوی می‌شوند. در نتیجه x_n به‌ازای تعدادی نامتناهی از مقدارهای n صحیح است اگر و فقط اگر $x_۱=x_۲$.

۱-۱-۴ عددهای صحیح مثبت n و $a_۱$، $a_۲$، . . . ، a_n را طوری بیابید که $a_۱+\cdots+a_n=۱۰۰۰$ و حاصل‌ضرب $a_۱a_۲\ldots a_n$ تا حد ممکن بزرگ باشد.

حل. هنگامی که وجود یک پارامتر در مسأله موجب پیچیدگی تحلیل آن مسأله می‌گردد، غالباً بهتر است که در مرحلهٔ کشف راه حل مسأله، آن را موقتاً با عبارتی جایگزین کرد که ساده‌تر مورد بررسی قرار گیرد. در مسأله

حاضر، می‌توانیم دنباله‌ای از حالتهایی خاص را آزمایش کنیم که با قرار دادن ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ... به جای ۱۰۰۰ به دست می‌آیند. به این ترتیب در می‌یابیم که در یک حاصلضرب ماکسیمم،

i) هیچ a_i ای بیشتر از ۴ نیست،

ii) هیچ a_i ای مساوی ۱ نیست،

iii) می‌توان همهٔ a_i ها را مساوی ۲ یا ۳ گرفت (زیرا ۲ + ۲ = ۴ و ۲ × ۲ = ۴).

iv) حداکثر دو تا از a_i ها مساوی ۲ هستند (زیرا ۳ × ۳ > ۲ × ۲ × ۲ و ۳ + ۳ = ۲ + ۲ + ۲).

هر یک از اینها به سادگی ثابت می‌شوند. لذا وقتی که مانند مسألهٔ فعلی، پارامتر مساوی ۱۰۰۰ است، مقدار ماکسیمم حاصلضرب باید مساوی با ۲^۲ × ۳^۳۳۲ باشد.

۱ـ۱ـ۵ فرض کنید S یک مجموعه و $*$ یک عمل دوتایی روی S باشد که در دو قانون

به ازای هر x در S، $\quad x * x = x$

به ازای هر x و y و z در S، $\quad (x * y) * z = (y * z) * x$

صدق کند. نشان دهید که به ازای هر x و y در S، $x * y = y * x$.

حل. راه حلی چنین شسته و رُفته که در پایین ملاحظه می‌کنید، در واقع نتیجهٔ نهایی مقدار قابل توجهی نوشتن و خط زدن است. تنها می‌توان روند حل این مسأله را به عنوان جستجویی به دنبال یک الگو توصیف کرد (درحقیقت الگوی اصلی، ماهیت دوری بودن عاملها در شرط دوم است). به ازای هر x و y در S داریم

$$\begin{aligned} x * y &= (x * y) * (x * y) = [y * (x * y)] * x = [(x * y) * x] * y = [(y * x) * x] * y \\ &= [(x * x) * y] * y = [(y * y)] * (x * x) = y * x \end{aligned}$$

مسائل

با روش جستجوی الگو، دیدگاهی نسبت به هر یک از مسأله‌های زیر به‌دست آورید. چند حدس مناسب بزنید و دربارهٔ چگونگی اثبات آنها فکر کنید.

۱ـ۱ـ۶ فرض کنید با شروع از عددهای ۲ و ۷، دنبالهٔ ... ,۲, ۷, ۱, ۴, ۷, ۴, ۲, ۸ را به این صورت بسازیم که هر دو عضو متوالی آن را در هم ضرب کنیم و نتیجهٔ حاصل را، بر حسب اینکه عددی یک رقمی یا دو رقمی باشد، به عنوان عضو بعدی یا دو عضو بعدی دنباله به آن ملحق کنیم. ثابت کنید که رقم ۶ بی‌نهایت بار در این دنباله ظاهر می‌شود.

۱ـ۱ـ۷ فرض کنید S_1 دنبالهٔ اعداد صحیح و مثبت ... ,۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ باشد و دنبالهٔ S_{n+1} را بر حسب S_n به این طریق تعریف کنیم که به عددهای صحیح موجود در S_n که بر n بخشپذیرند، ۱ واحد بیفزاییم. در نتیجه برای مثال، S_2 عبارت است از ... ,۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷؛ S_3 عبارت است از ... ,۳, ۳, ۵, ۵, ۷, ۷. عددهای صحیح n را طوری بیابید که اولین $n - 1$ عدد صحیح دنبالهٔ S_n مساوی n باشند.

۱ـ۱ـ۸ ثابت کنید که می‌توان فهرستی از همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ متناهی ساخت به طوری که

الف) مجموعهٔ تهی در ابتدای این فهرست باشد،

ب) هر زیر مجموعه دقیقاً یک بار ظاهر شود،

ج) هر زیر مجموعه در فهرست، با اضافه کردن یک عضو به زیر مجموعهٔ قبلی و یا با حذف یک عضو از زیر مجموعهٔ قبلی به دست آمده باشد.

۱ـ۱ـ۹ تعداد ضریبهای فرد دو جمله‌ای را در بسط $(x+y)^{۱۰۰۰}$ به دست آورید (مسألهٔ ۴-۳-۵ را ببینید).

۱ـ۱ـ۱۰ قضیه‌ای مشهور بیان می‌کند که عدد اول $p > ۲$ را فقط و فقط وقتی می‌توان به شکل مجموع دو مربع کامل نوشت (یعنی $p = m^۲ + n^۲$ که n, m عددهای صحیح‌اند) که p از یکی از مضربهای ۴، یک واحد بیشتر باشد. دربارهٔ عددهای اولی که می‌توان آنها را با استفاده از عددهای صحیح (و نه لزوماً مثبت) x و y به یکی از صورتهای زیر نوشت، حدسی ارائه دهید: الف) $x^۲ + ۱۶y^۲$، ب) $۴x^۲ + ۴xy + ۵y^۲$. (۱-۵-۱۰ را ببینید).

۱ـ۱ـ۱۱ هر گاه به ازای $n \geqslant ۱$ ، $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد به طوری که $a_{n+۱}(۲ - a_n) = ۱$، وقتی که n به بی‌نهایت میل کند، برای a_n چه روی می‌دهد؟

۱ـ۱ـ۱۲ فرض کنید S یک مجموعه و $*$ یک عمل دوتایی روی S باشد که در قانونهای زیر صدق کند:

به ازای هر x و y در S، $\quad x * (x * y) = y$

به ازای هر x و y در S، $\quad (y * x) * x = y$

نشان دهید که به ازای هر x و y در S، $\quad x * y = y * x$.

مثالهای اضافی. اکثر مسأله‌های استقرایی متکی بر روش کشف الگو هستند. در نتیجه، مسأله‌های بخشهای ۲-۱، ۲-۲، ۲-۳ و ۲-۴، تمرینهایی اضافی را در این روش حل مسأله ارائه می‌کنند. همچنین ۱-۷-۲، ۱-۷-۷، ۱-۷-۸، ۲-۵-۶، ۳-۱-۱، ۳-۴-۶، ۴-۳-۱، ۴-۴-۱، ۴-۴-۳، ۴-۴-۱۵، ۴-۴-۱۶ و ۴-۴-۱۷ را ببینید.

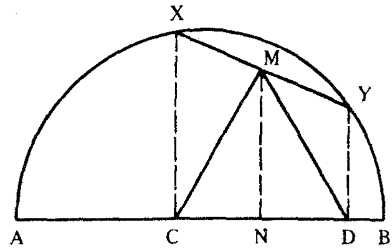
۱ـ۲ رسم شکل

هر زمان که ممکن باشد، توصیف تصویری یک مسأله با استفاده از یک شکل یا نمودار مفید است. معمولاً نمایش یک مسأله با استفاده از نمودار موجب سهولت جمع‌آوری و شکل دادن اطلاعات مرتبط با مسأله و توجه به ارتباطها و وابستگیهای موجود در آن می‌شود.

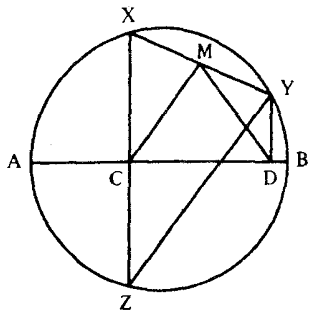
۱ـ۲ـ۱ وتری با طول ثابت روی یک نیمدایره می‌لغزد. وسط این وتر و تصویرهای نقطه‌های انتهایی آن روی قطر نیمدایره، رأسهای یک مثلث را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که این مثلث متساوی‌الساقین است و این مثلثها در وضعیتهای مختلف متشابه‌اند.

حل. فرض کنید که AB قاعدهٔ نیمدایره، XY وتر، M وسط XY و C و D تصویر نقطه‌های X و Y روی AB باشند (شکل ۱-۱). فرض کنید N تصویر M روی AB باشد. در این صورت N وسط CD است و نتیجه می‌شود که $\triangle CMD$ متساوی‌الساقین است.

برای نشان دادن آنکه شکل مثلث مستقل از وضع قرار گرفتن وتر است، کافی است نشان دهیم که $\angle MCD$ بدون تغییر می‌ماند یا به طور معادل، نشان دهیم که به ازای تمام وضعیتهای XY، $\angle XCM$ ثابت می‌ماند. برای اثبات این مطلب، پاره خط XC را امتداد دهیم تا دایرهٔ کامل شده را در Z قطع کند (شکل ۱-۲). در این صورت CM با ZY موازی است (زیرا C و M به ترتیب وسطهای XZ و XY هستند)، و در



شکل۱-۱



شکل۱-۲

نتیجه $\angle XCM = \angle XZY$. ولی $\angle XZY$ مساوی است با نصف کمان XY و این کمان تنها به طول وتر XY بستگی دارد. این برهان را کامل می‌کند.

ممکن است سؤال شود: چگونه ممکن است کسی به فکر امتداد دادن XY به این صورت بیفتد؟ در حقیقت این همان گامی است که به استدلال زیبایی می‌دهد و در واقع یافتن این گام، کار بسیار دشواری است. همهٔ آنچه را که می‌توان گفت این است که در هندسه، استفاده از خطها و کمانهای کمکی (که اغلب به وسیلهٔ تقارن، امتداد و یا دوران پیدا می‌شوند) کاری عادی و معمول است. تنها آگاهی از این حقیقت، به رهیافتهای مختلف برای حل یک مسأله می‌افزاید.

رهیافت جالب دیگری برای حل این مسأله، استفاده از مختصات برای نقطه‌ها و اثبات تحلیلی است. برای آنکه نشان دهیم که شکل مثلث مستقل از وضعیت قرار گرفتن وتر است، کافی است نشان دهیم که نسبت ارتفاع به وتر یعنی $\frac{MN}{CD}$ ، مقداری ثابت است.

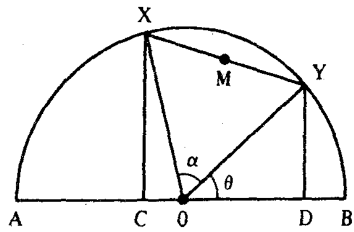
فرض کنید O وسط AB باشد و $\angle YOB = \theta$. روشن است که تمامی شکل به وسیلهٔ θ مشخص می‌شود (شکل ۱-۳).

فرض کنید $\angle XOY = \alpha$. با استفاده از این نماد، داریم

$$CD = \cos\theta - \cos(\theta+\alpha) \qquad , \qquad MN = \frac{\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)}{۲}$$

و نسبت ارتفاع به قاعده مساوی است با

$$F(\theta) = \frac{\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)}{۲\,(\cos\theta - \cos(\theta+\alpha))}, \qquad ۰ \leqslant \theta < \pi - \alpha$$



شکل۱-۳

اینکه این مقدار مستقل از θ است، امری است که بلافاصله روشن نمی‌شود.این حکم، محتوای مسأله‌های ۱-۸-۱ و ۶-۶-۷ است.

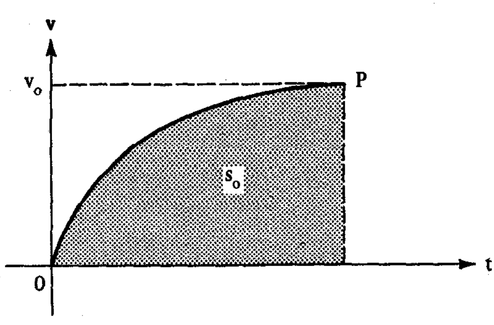
۱ـ۲ـ۲ یک ذره روی مسیری مستقیم از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از پیمودن مسافت $s_{\circ}$، سرعتی به اندازهٔ $v_{\circ}$ به دست می‌آورد. اگر حرکت طوری باشد که هیچ گاه شتاب صعودی نباشد، بیشترین زمان لازم برای طی کردن مسیر را بیابید.

حل. به نمودار سرعت $v = v(t)$ توجه کنید (شکل ۱-۴). می‌دانیم که $v(\circ) = \circ$ و هیچگاه نمودار v به طرف بالا مقعر نیست (زیرا هیچگاه شتاب یعنی dv/dt صعودی نیست). $s_{\circ}$ با مساحت زیر منحنی برابر است ($\int_{\circ}^{t} v(t)dt =$ مسافت طی شده). از این نمایش به روشنی دیده می‌شود که وقتی زمان لازم برای طی کردن مسیر ماکسیمم است که منحنی $v(t)$ از $\circ$ تا P، یک خط راست باشد (شکل ۱-۵). در زمان ماکسیمم $t_{\circ}$، $s_{\circ} = \frac{۱}{۲}t_{\circ}v_{\circ}$ و یا به طور معادل، $t_{\circ} = ۲s_{\circ}/v_{\circ}$.

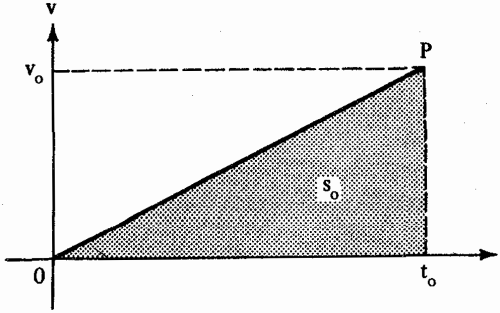
۱ـ۲ـ۳ اگر a و b عددهای صحیح و مثبتی باشند که عامل مشترکی نداشته باشند، نشان دهید که

$$\left[\!\left[\frac{a}{b}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{۲a}{b}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{۳a}{b}\right]\!\right] + \cdots + \left[\!\left[\frac{(b-۱)a}{b}\right]\!\right] = \frac{(a-۱)(b-۱)}{۲}$$

حل. وقتی که $b = ۱$، می‌بینیم که مجموع طرف چپ مساوی $\circ$ است و در نتیجه حکم برقرار است. روشن نیست که چگونه شکل می‌تواند در اثبات این گزارهٔ حسابی محض، مؤثر باشد. با این حال، این گزاره شامل دو متغیر a و b است و a/b و $۲a/b$ و $۳a/b$ ... به ترتیب مقدارهای تابع $f(x) = ax/b$ به ازای $x = ۱, ۲, ۳, \ldots$



شکل۱-۴



شکل ۱-۵

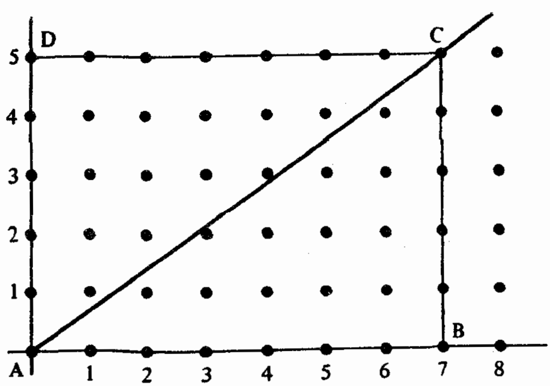
هستند. آیا می‌توان مقدارهای $[\![a/b]\!]$ و $[\![۲a/b]\!]$ ... را به صورت هندسی بیان کرد؟

برای روشن شدن بحث، حالت $a = ۵$ و $b = ۷$ را در نظر بگیرید. هر یک از نقطه‌های $P_k = (k, ۵k/۷)$، $k = ۱, ۲, \ldots, ۶$، روی خط $y = ۵x/۷$ قرار دارند و $[\![۵k/۷]\!]$ برابر است با تعداد نقاط مشبکه‌ای روی خط قائم گذرنده از نقطهٔ P_k که بالای محور x و زیر نقطهٔ P_k قرار دارند. پس $\sum_{k=۱}^{۶}[\![۵k/۷]\!]$ برابر است با تعداد نقطه‌های مشبکه‌ای واقع در درون $\triangle ABC$ (شکل ۱-۶ را ببینید).

این تعداد بنابر تقارن، مساوی است با نصف تعداد نقطه‌های مشبکه‌ای واقع در درون مستطیل $ABCD$. در $ABCD$، $۲۴ = ۶ \times ۴$ نقطهٔ مشبکه‌ای وجود دارد و در نتیجه، ۱۲ نقطهٔ مشبکه‌ای در درون مثلث ABC قرار می‌گیرد.

این استدلال در حالت کلی نیز درست است. شرط اینکه a و b عامل مشترکی ندارند، به ما اطمینان می‌دهد که هیچیک از نقطه‌های مشبکه‌ای واقع در درون $ABCD$ روی خط $y = ax/b$ قرار نمی‌گیرد. در نتیجه

$$\sum_{k=۱}^{b-۱}\left[\!\!\left[\frac{ka}{b}\right]\!\!\right] = \frac{۱}{۲}(\text{تعداد نقطه‌های مشبکه‌ای درون } ABCD)$$
$$= \frac{(a-۱)(b-۱)}{۲}$$



شکل ۱-۶

۱ـ۲ـ۴ (مسألهٔ دست دادن). آقای آدامز و آقای جونز به نمایندگی از کشور انگلستان در کنفرانسی شرکت کردند که در آنجا سه زوج نماینده از سه کشور دیگر نیز حضور داشتند. افراد حاضر در این جمع با یکدیگر دست دادند. هیچ نماینده‌ای با نمایندهٔ دیگر هم وطنش دست نداد، هیچ کس با فرد دیگری دو بار دست نداد و البته هیچکس هم با خودش دست نداد.

پس از آنکه کار دست دادن پایان یافت، آقای آدامز از هر یک از حاضرین و از جمله آقای جونز دربارهٔ تعداد دفعاتی که با دیگران دست دادند، سؤال کرد. با نهایت شگفتی، همهٔ جوابها متفاوت بودند. آقای جونز با چند نفر دست داد؟

حل. اگر چه استفاده از یک نمودار در حل این مسأله ضروری نیست، ولی اگر داده‌ها را به شکل زیر به صورت نموداری جلوه‌گر سازیم، کمکی به یافتن راه‌حل مسأله خواهد بود. همان‌طور که در شکل ۱-۷ دیده می‌شود، هشت شرکت کننده را با هشت نقطه نشان می‌دهیم.

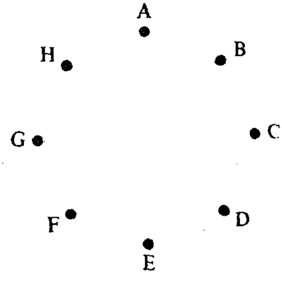
حال باید پاسخ سؤال آقای آدامز، عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشند. بنابراین یکی از افراد، مثلاً A، با شش نفر دیگر، مثلاً B، C، D، E، F و G دست داده است. این مطلب را روی نمودار، (همان‌طور که در شکل ۱-۸ دیده می‌شود)، با رسم پاره‌خطهایی بین A و این نقطه‌ها نشان می‌دهیم.

از این نمودار معلوم می‌شود که H، کسی است که با هیچ یک از افراد دست نداده. همچنین A و H باید نمایندگان یک کشور باشند زیرا A، بدون احتساب نمایندهٔ دیگر کشورش، با شش نفر دیگر دست داده است.

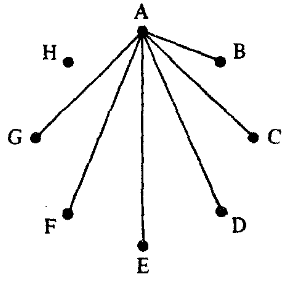
بنابر فرض، یکی از افراد B، C، D، E، F و G با پنج نفر دیگر دست داده است. می‌توانیم در صورت لزوم با نام‌گذاری مجدد، فرض کنیم که این فرد، B باشد. بی آنکه خللی به کلیت مسأله وارد شود، فرض می‌کنیم پنج نفری که با B دست داده‌اند، A و C و D و E و F باشند. این مطلب در شکل ۱-۹ نشان داده شده است. از این شکل، دیده می‌شود که G تنها کسی است که می‌توانسته پاسخ دهد «یک بار» و B و G باید نمایندگان یک کشور باشند.

بار دیگر در صورت لزوم، با نام‌گذاری مجدد نقطه‌های C، D و E، فرض می‌کنیم که C با چهار نفر یعنی A و B و D و E دست داده است. نمودار مربوط به این حالت در شکل ۱-۱۰ آمده است. با استدلالی مشابه قبل، نتیجه می‌شود که F و C نمایندگان یک کشور و در نتیجه D و E نیز نمایندگان یک کشور هستند.

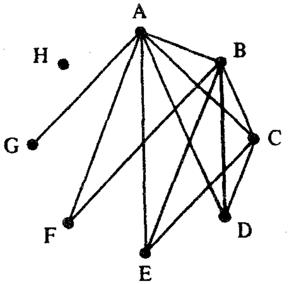
D و E هر کدام با سه نفر دیگر دست داده‌اند. از آنجا که آقای آدامز دوبار جواب «سه» دریافت نکرده است، لذا D و E همان آقای آدامز و آقای جونز هستند و این می‌رساند که آقای جونز با سه نفر دست داده است.



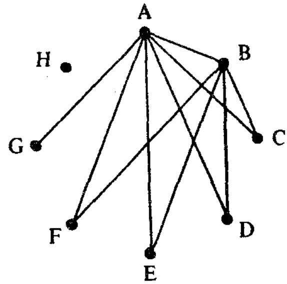
شکل ۱-۷



شکل ۱-۸



شکل ۱-۱۰



شکل ۱-۹

مسائل

۱ـ۲ـ۵ دو تیرک به ارتفاعهای a و b، به فاصلهٔ d در زمینی مسطح به طور قائم نصب شده‌اند. این دو تیرک با دو سیم که دو سر هر یک از آنها را به نقطهٔ P روی سطح زمین وصل می‌کند مهار شده‌اند. نقطهٔ P کجا باشد تا طول سیم مینیمم شود؟ (راهنمایی: فرض کنید تیرکها در نقاط C و D بر پا شده باشند و نوک آنها را به ترتیب A و B بنامید. می‌خواهیم $AP + PB$ را مینیمم کنیم. قرینهٔ این شکل را نسبت به قاعدهٔ CD به دست آورید. فرض کنید B' قرینهٔ B باشد ($PB = PB'$). حال مسأله این است: P کجا باشد تا $AP + PB'$ مینیمم شود؟).

۱ـ۲ـ۶ فرض کنید ABC یک مثلث حاده و D نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد. نقطهٔ E روی AC و F روی CB را طوری بیابید که مثلث محاط شدهٔ DEF، کمترین محیط را داشته باشد. (راهنمایی: فرض کنید قرینهٔ D نسبت به AC، نقطهٔ D' و قرینهٔ D نسبت به CB، نقطهٔ D'' باشد و پاره‌خط $D'D''$ را در نظر بگیرید.)

۱ـ۲ـ۷ یک اتاق به شکل مکعب مستطیل، ۱۰ متر طول و ۴ متر ارتفاع و در دو انتها، ۴ متر عرض دارد. مگسی با بال شکسته در نقطه‌ای واقع در وسط یکی از دو انتهای اتاق و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ متر زیر سقف قرار دارد. یک لکهٔ غذا در وسط انتهای دیگر آن و به ارتفاع $\frac{۱}{۳}$ متر از کف اتاق واقع است. مگس تنها انرژی لازم برای $۱۳\frac{۱}{۳}$ متر راه رفتن را در اختیار دارد. نشان دهید مسیری وجود دارد که مگس می‌تواند با راه رفتن آن مسیر را بپیماید و به غذا دست یابد.

۱ـ۲ـ۸ روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC، مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABP و ACQ را بیرون مثلث ABC می‌سازیم. ثابت کنید $CP = BQ$. (راهنمایی: برای برهانی زیبا، صفحهٔ مثلث را حول نقطهٔ A به اندازهٔ ۶۰° دوران دهید به‌طوری که B به طرف C حرکت کند. برای پاره خط CP چه روی می‌دهد؟)

۱ـ۲ـ۹ فرض کنید a و b اعدادی حقیقی و مثبت باشند به طوری که $a < b$. هر گاه به تصادف دو نقطه از پاره خطی به طول b انتخاب کنیم، احتمال آنکه فاصلهٔ بین این دو نقطه دست کم a باشد، چقدر است؟ (راهنمایی: فرض کنید x و y اعدادی باشند که به تصادف از بازهٔ $[0, b]$ انتخاب می‌شوند و این دو متغیر تصادفی مستقل را روی دو محور جداگانه در نظر بگیرید. مساحت ناحیهٔ متناظر با $|x - y| \geqslant a$ چقدر است؟)

۱ـ۲ـ۱۰ تعبیری هندسی از مسأله زیر ارائه دهید. فرض کنید f مشتق‌پذیر و f' روی $[a, b]$ پیوسته باشد. نشان دهید که اگر عددی چون c در $(a, b]$ موجود باشد به طوری که $f'(c) = 0$، آنگاه می‌توان عددی

چون d در (a,b) یافت به طوری که

$$f'(d)=\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$

۱ـ۲ـ۱۱ فرض کنید a و b عددهای حقیقی باشند و $a<b$. محل دقیق هر یک از نقطه‌های زیر را به روش هندسی مشخص کنید: $\frac{a+b}{۲}\left(=\frac{۱}{۲}a+\frac{۱}{۲}b\right)$؛ $\frac{۲}{۳}a+\frac{۱}{۳}b$؛ $\frac{۱}{۳}a+\frac{۲}{۳}b$؛ $[m/(m+n)]\,a+[n/(m+n)]\,b$ که در آن $m>۰$ و $n>۰$ (عدد اخیر متناظر است با گرانیگاه دستگاهی متشکل از دو جسم، یکی به جرم m واقع در a و دیگری به جرم n واقع در b).

۱ـ۲ـ۱۲ با استفاده از نمودار $y=\sin x$، نامساویهای زیر را در مثلث ABC ثابت کنید.

الف) $\frac{\sin B+\sin C}{۲}\leqslant \sin\frac{B+C}{۲}$

ب) $\frac{m}{m+n}\sin B+\frac{n}{m+n}\sin C\leqslant \sin\left(\frac{m}{m+n}B+\frac{n}{m+n}C\right)$، که در آن $m>۰$، $n>۰$.

۱ـ۲ـ۱۳ با استفاده از یک نمودار (یعنی آرایه‌ای مستطیلی چون $((a_ia_j))$)، نشان دهید که

الف) $\sum_{i=۰}^{n}\sum_{j=۰}^{n}a_ia_j=\sum_{j=۰}^{n}\sum_{i=۰}^{n}a_ia_j$

ب) $\sum_{j=۰}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_ia_j=\sum_{i=۰}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_ia_j$

ج) $\left(\sum_{i=۰}^{n}a_i\right)^۲=\sum_{i=۰}^{n}\sum_{j=۰}^{n}a_ia_j=۲\sum_{i=۰}^{n}\sum_{j=۰}^{i}a_ia_j-\sum_{i=۰}^{n}a_i^۲$

مثالهای اضافی. اکثر مسأله‌های فصل ۸ (هندسه)، همچنین ۱-۳-۱۱، ۱-۹-۲ ، ۱-۹-۴، ۱-۱۱-۳، ۲-۱-۳، ۲-۵-۵، ۲-۶-۱۱، ۵-۱-۲، ۶-۲-۲، ۶-۴-۱، ۶-۶-۳، ۶-۸-۱، ۷-۱-۱۴، ۷-۴-۱۹، ۷-۶-۱ و ۸-۱-۱.

۱ـ۳ تبدیل به مسأله‌ای هم‌ارز

پیام بخش قبل آن است که اولین گام در راه حل هر مسأله، گردآوری داده‌ها، کشف، درک، ایجاد ارتباط، حدس و تحلیل آن مسأله است. ولی اگر به دلیل پیچیده شدن محاسبات یا عدم وجود حالتهای خاص روشن کننده، نتوان این کار را به شکلی با معنی انجام داد، چه باید کرد؟ در این بخش به بررسی چند مسأله از این نوع می‌پردازیم. در این بخش پیشنهاد می‌شود که مسأله را به صورتی هم‌ارز ولی ساده‌تر از حالت اصلی فرمولبندی کنید. این کار به قدرت تخیل و خلاقیت فرد بستگی دارد. برخی تکنیکهای استاندارد در فرمولبندی مجدد شامل عملیات جبری و مثلثاتی، جایگزینی یا تغییر متغیر، استفاده از تناظر یک به یک و بیان مسأله به زبان مبحث دیگری(مانند جبر، هندسه، آنالیز، ترکیبیات و غیره) است.

۱ـ۳ـ۱ دستوری برای مشتق مرتبهٔ nام $f(x)=۱/(x^۲-۱)$ بیابید.

حل. هنگام کار با تابعهای گویا، یکی از راههای معمول برای ساده کردن حل مسأله، نوشتن کسر گویا به صورت مجموعی از کسرهای ساده است. در این حالت داریم

$$f(x) = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۱-x} + \frac{۱}{۱+x}\right]$$

می‌توان به سادگی نشان داد که

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{۲}\left[\frac{۱}{(۱-x)^{n+۱}} + \frac{(-۱)^n}{(۱+x)^{n+۱}}\right]$$

۱ـ۳ـ۲ همهٔ جوابهای معادلهٔ $x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱ = ۰$ را بیابید.

حل. می‌توان این معادله را بر $x^۲$ تقسیم، سپس با جایگزینی $y = x + ۱/x$ و استفاده از دستور حل معادلهٔ درجه دوم آن را حل کرد. در نتیجه داریم

$$x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + x + \frac{۱}{x} + ۱ = ۰$$

$$\left(x^۲ + ۲ + \frac{۱}{x^۲}\right) + \left(x + \frac{۱}{x}\right) + (۱-۲) = ۰$$

$$\left(x + \frac{۱}{x}\right)^۲ + \left(x + \frac{۱}{x}\right) - ۱ = ۰$$

$$y^۲ + y - ۱ = ۰$$

ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از

$$y_۱ = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲} \quad , \quad y_۲ = \frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

تنها باقی می‌ماند که x را از حل دو معادلهٔ

$$x + \frac{۱}{x} = y_۱ \quad , \quad x + \frac{۱}{x} = y_۲$$

که معادل‌اند با

$$x^۲ - y_۱ x + ۱ = ۰ \quad , \quad x^۲ - y_۲ x + ۱ = ۰$$

به دست آورد. چهار ریشه‌ای که از حل این معادله‌ها به دست می‌آیند عبارت‌اند از

$$x_۱ = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۴} + i\frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

$$x_۲ = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۴} - i\frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

$$x_۳ = \frac{-۱-\sqrt{۵}}{۴} + i\frac{\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

$$x_۴ = \frac{-۱-\sqrt{۵}}{۴} - i\frac{\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

راه حل دیگری برای حل این مسأله آن است که دو طرف معادلهٔ اصلی را در $x - ۱$ ضرب کنیم. از آنجا که $(x-۱)(x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱) = x^۵ - ۱$، مسأله‌ای معادل، یافتن همهٔ x هایی است (به جز $x = ۱$) که

در معادلهٔ $x^۵ = ۱$ صدق می‌کنند. اینها همان ریشه‌های پنجم واحدند که عبارت‌اند از

$$x_۱ = \cos\frac{۲}{۵}\pi + i\sin\frac{۲}{۵}\pi$$
$$x_۲ = \cos\frac{۴}{۵}\pi + i\sin\frac{۴}{۵}\pi$$
$$x_۳ = \cos\frac{۶}{۵}\pi + i\sin\frac{۶}{۵}\pi$$
$$x_۴ = \cos\frac{۸}{۵}\pi + i\sin\frac{۸}{۵}\pi$$
$$x_۵ = ۱$$

به عنوان نتیجه‌ای فرعی از دو راه حل مختلف این مسأله، مشاهده می‌کنیم که

$$\cos\frac{۲}{۵}\pi + i\sin\frac{۲}{۵}\pi = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۴} + i\frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

با مساوی قرار دادن جزءهای حقیقی از یک طرف با جزءهای موهومی از طرف دیگر، به دست می‌آوریم

$$\cos ۷۲^\circ = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۴} \quad , \quad \sin ۷۲^\circ = \frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

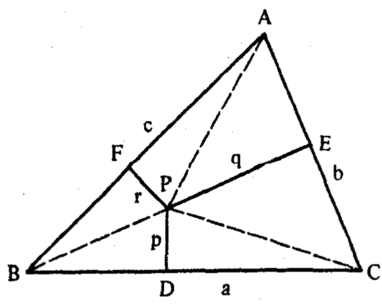
(فرمولهای مشابهی را می‌توان برای $x_۲, x_۳, x_۴$ به دست آورد).

۱ـ۳ـ۳ P نقطه‌ای درون مثلث ABC و D، E، F، به ترتیب پای عمودهای وارد از P بر خطهای BC، CA و AB هستند. همهٔ نقطه‌هایی مانند P را بیابید به طوری که

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل. طولهای BC، AC، AB را به ترتیب با a، b، c و طولهای PD، PE، PF را به ترتیب با p، q، r نشان می‌دهیم (شکل ۱-۱۱ را ببینید). می‌خواهیم $a/p + b/q + c/r$ را مینیمم کنیم.



شکل۱-۱۱

توجه کنید که

$$\text{مساحت } \triangle ABP + \text{مساحت } \triangle CAP + \text{مساحت } \triangle BCP = \text{مساحت } \triangle ABC$$
$$= \frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}bq + \frac{1}{2}cr$$
$$= \frac{ap + bq + cr}{2}$$

بنابراین، مقدار $ap + bq + cr$ ثابت و مستقل از محل قرار گرفتن P است. در نتیجه به جای مینیمم کردن $a/p + b/q + c/r$، مقدار $(ap + bq + cr)(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r})$ را مینیمم می‌کنیم. (پس از مطالعهٔ بخش ۷-۳ دربارهٔ نامساویهایی که مقید به شروطی هستند، این گام طبیعیتر به نظر خواهد رسید). برای این منظور می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
&(ap+bq + cr)(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r})\\
&= a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) + bc\left(\frac{q}{r} + \frac{r}{q}\right) + ac\left(\frac{p}{r} + \frac{r}{p}\right)\\
&\geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac\\
&= (a + b + c)^2
\end{aligned}$$

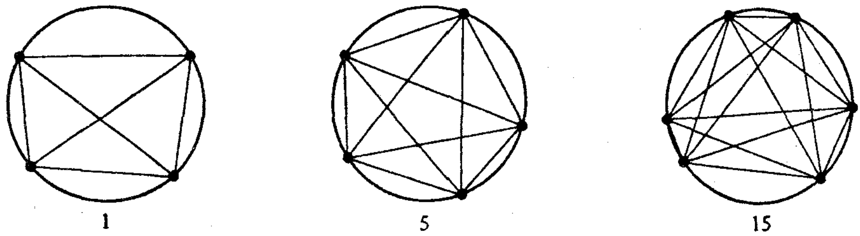
نامساوی گام دوم از این واقعیت نتیجه می‌شود که به ازای هر دو عدد مثبت x و y، داریم $x/y + y/x \geqslant 2$ و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $x = y$. به عنوان نتیجه‌ای از این مطلب، عبارت $(ap + bq + cr)(a/p + b/q + c/r)$ مقدار مینیمم خود یعنی $(a + b + c)^2$ را وقتی و فقط وقتی اتخاذ می‌کند که $p = q = r$. به طور معادل $a/p + b/q + c/r$ وقتی مقدار مینیمم خود را می‌گیرد که P مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باشد.

۱ـ۳ـ۴ ثابت کنید که اگر m و n عددهای صحیح و مثبت باشند و $1 \leqslant k \leqslant n$، آنگاه

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

حل. گزارهٔ موجود در این مسأله، یکی از اتحادهای اساسی دربارهٔ ضریبهای دو جمله‌ای است. در طرف چپ، مجموعی از حاصلضربهای ضریبهای دو جمله‌ای قرار دارد. روشن است که قرار دادن فاکتوریلها به جای ضریبهای دو جمله‌ای، هیچ‌گونه روزنهٔ امیدی را در حل مسأله نشان نمی‌دهد.

اغلب می‌توان مجموع سریهای متناهی (به ویژه آنهایی را که شامل ضریبهای دو جمله‌ای هستند) به روش ترکیبیاتی به دست آورد. برای آنکه منظورمان را در اینجا روشن کنیم مسألهٔ یافتن مجموع سری بالا را به ترتیب زیر، به یک مسأله شمارشی تبدیل می‌کنیم. فرض کنید $S = A \cup B$ ، که در آن A مجموعه‌ای با n عضو و B مجموعه‌ای با m عضو و مجزای از A باشد. به دو روش مختلف، تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی (متفاوت) S را می‌شماریم. از یک طرف این عدد مساوی است با $\binom{m+n}{k}$. از طرف دیگر تعداد زیر مجموعه‌های



شکل۱-۱۲

kعضوی S که دقیقاً i عضو از A (و $k-i$عضو از B) دارند، مساوی است با $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$. در نتیجه

$$\binom{m+n}{k} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های } k \text{ عضوی } S$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (\text{تعداد زیرمجموعه‌های } k \text{ عضوی } S \text{ با } i \text{ عضو از } A)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

(راه حل دیگری از این مسأله بر اساس ویژگیهای چند جمله‌ایها، در مسأله ۴-۳-۲ آمده است.)

اغلب می‌توان مسأله‌های شمارشی را با استفاده از «تطبیق» عضوهای یک مجموعه (به کمک تناظر یک به یک) با مجموعهٔ دیگری که شمارش عضوهای آن آسانتر انجام می‌شود، ساده کرد. سه مسأله بعدی این ایده را نشان می‌دهند.

۱ـ۳ـ۵ n نقطه روی یک دایره انتخاب و وترهای بین هر جفت از این نقطه‌ها رسم شده‌اند. با فرض اینکه هیچ سه وتری (مگر در نقطه‌های انتهایی) همرس نباشند، چند نقطهٔ تقاطع وجود دارد؟

حل. حالتهای مربوط به $n = ۴,۵,۶$، در شکل ۱-۱۲ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که هر نقطهٔ تقاطع (داخلی) چهار نقطه را مشخص می‌کند و خود به وسیلهٔ چهار نقطهٔ واقع بر دایره مشخص می‌شود (این چهار نقطه به شکل منحصر به فردی دو وتر را مشخص می‌کنند که در داخل دایره یکدیگر را قطع می‌کنند). پس تعداد نقطه‌های تقاطع $\binom{n}{۴}$ است.

۱ـ۳ـ۶ به ازای عدد صحیح و مثبت n، تعداد چهارتاییهای (a,b,c,d) از عددهای صحیح را بیابید به طوری که $۰ \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant n$.

حل. ایدهٔ کلیدی که موجب روشن شدن حل مسأله می‌شود، توجه به این نکته است که تناظری یک به یک بین چهارتاییهای مجموعهٔ مورد نظر ما و زیر مجموعه‌های چهارتایی مجموعهٔ $\{۰,۱,\ldots,n+۳\}$ وجود دارد. به ویژه فرض کنید (a,b,c,d)، که در آن $۰ \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant n$، با زیر مجموعهٔ $\{a, b+۱, c+۲, d+۳\}$ نظیر شود. به سادگی دیده می‌شود که این، تناظری یک به یک است. به عبارت دیگر هر عضو مجموعهٔ مورد نظر ما، دقیقاً با یکی از زیر مجموعه‌های چهارتایی $\{۰,۱,\ldots,n+۳\}$ متناظر است و به عکس. در نتیجه عدد خواسته شده $\binom{n+۴}{۴}$ است.

۱ـ۳ـ۷ می‌توان عدد ۵ را با در نظر گرفتن ترتیب عاملهای جمع، به ۶ طریق به صورت مجموعی از عددهای طبیعی نوشت؛ یعنی $۵ = ۱ + ۲ + ۲ = ۲ + ۱ + ۲ = ۲ + ۲ + ۱ = ۱ + ۱ + ۳ = ۱ + ۳ + ۱ = ۳ + ۱ + ۱$. فرض کنید m و n عددهایی طبیعی باشند به طوری که $m \leqslant n$. با در نظر گرفتن ترتیب عاملهای جمع، به چند طریق می‌توان عدد n را به شکل مجموعی از m عدد طبیعی نوشت؟

حل. n را به شکل مجموعی از n تا یک می‌نویسیم:

$$n = \underbrace{۱ + ۱ + \cdots + ۱}_{n\text{بار}}$$

عددی که به دنبالش هستیم مساوی است با تعداد راههای انتخاب $m - ۱$ علامت از میان $n - ۱$ علامت جمع، یعنی $\binom{n-۱}{m-۱}$.

مسائل

۱ـ۳ـ۸ نشان دهید که $x^۷ - ۲x^۵ + ۱۰x^۲ - ۱$ ریشه‌ای بزرگتر از ۱ ندارد. (راهنمایی: از آنجا که معمولاً نشان دادن اینکه یک معادله ریشهٔ مثبتی ندارد، کاری ساده‌تر است، بهتر است مسأله هم‌ارزی را که با استفاده از جاگذاری $x = y + ۱$ به دست می‌آید، در نظر بگیرید.)

۱ـ۳ـ۹ با در نظر گرفتن ترتیب عاملهای جمع، می‌توان عدد ۳ را به چهار راه مختلف، یعنی ۳، $۲ + ۱$، $۱ + ۲$، $۱ + ۱ + ۱$ به شکل مجموعی از یک یا چند عدد صحیح و مثبت نوشت. نشان دهید که می‌توان هر عدد صحیح و مثبت n را به $۲^{n-۱}$ راه مختلف به این شکل نوشت.

۱ـ۳ـ۱۰ با در نظر گرفتن ترتیب عاملهای جمع، به چند راه مختلف می‌توان عدد ۱۰ را به شکل مجموعی از ۵ عدد صحیح نامنفی نوشت؟ (راهنمایی: مسأله هم‌ارزی را پیدا کنید که در آن عبارت «۵ عدد صحیح نامنفی» با عبارت «۵ عدد صحیح و مثبت» جایگزین شده باشد.)

۱ـ۳ـ۱۱ به ازای چه مقدارهایی از a، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^۲ = y^۲ \\ (x - a)^۲ + y^۲ = ۱ \end{cases}$$

به ترتیب صفر، یک، دو، سه یا چهار جواب دارد؟ (راهنمایی: این مسأله را به مسألهٔ هم ارزی در هندسه ترجمه کنید.)

۱ـ۳ـ۱۲ n شیئ در یک سطر مرتب شده‌اند. یک زیر مجموعه از این اشیاء را نامساعد گوییم هر گاه هیچ دو عضو آن متوالی نباشند. نشان دهید که تعداد زیر مجموعه‌های نامساعد k عضوی این سطر مساوی با $\binom{n-k+۱}{k}$ است. (راهنمایی: از روشی مشابه با مسألهٔ ۱-۳-۶ استفاده کنید.)

۱ـ۳ـ۱۳ فرض کنید $a(n)$ تعداد نمایشهای عدد n به شکل مجموعی از ۱ها و ۲ها، با در نظر گرفتن ترتیب عاملهای جمع باشد. همچنین فرض کنید $b(n)$، تعداد نمایشهای عدد n به شکل مجموعی از عددهای صحیح

بزرگتر از ۱، با در نظرگرفتن ترتیب آنها و در نظرگرفتن خود عدد n به عنوان یکی از حالتها باشد. جدول زیر نشان می‌دهد که $a(۴) = ۵$ و $b(۶) = ۵$:

a ـ مجموعها	b ـ مجموعها
۱ + ۱ + ۲	۴ + ۲
۱ + ۲ + ۱	۳ + ۳
۲ + ۱ + ۱	۲ + ۴
۲ + ۲	۲ + ۲ + ۲
۱ + ۱ + ۱ + ۱	۶

الف) با توصیف تناظری یک به یک بین a-مجموعها و b-مجموعها، نشان دهید که به ازای هر n، $a(n) = b(n+۲)$.

ب) نشان دهید که $a(۱) = ۱$، $a(۲) = ۲$ و به ازای $n > ۲$، $a(n) = a(n-۱) + a(n-۲)$.

۱ـ۳ـ۱۴ با محاسبهٔ مساحت یک مثلث به دو روش مختلف، ثابت کنید که اگر $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ ارتفاعهای یک مثلث و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن باشد، آنگاه $۱/r = ۱/p_۱ + ۱/p_۲ + ۱/p_۳$.

۱ـ۳ـ۱۵ با استفاده از یک استدلال شمارشی، ثابت کنید که به ازای عددهای صحیح r و n به‌طوری که $۰ < r \leqslant n$، داریم

$$\binom{r}{r} + \binom{r+۱}{r} + \binom{r+۲}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+۱}{r+۱}$$

مثالهای اضافی. ۱-۲-۳، ۵-۱-۵، ۵-۱-۱۴، ۷-۴-۶، ۸-۲-۶. مثالهایی که به این روش قابل حل‌اند آنقدر زیادند که انتخاب مناسبترین آنها کار دشواری است. از جمله، برهانهای غیر مستقیم بخشهای ۱-۹، ۱-۱۰، ۱-۱۱، مسأله‌های همنهشتی در بخش ۳-۲ و مسأله‌های مربوط به حد در بخش ۶-۸ قابل توجه‌اند. مثالهای دیگری از کسرهای جزئی (۱-۳-۱ را ببینید) عبارت‌اند از ۴-۳-۲۳، ۵-۳-۱، ۵-۳-۲، ۵-۳-۳، ۵-۳-۶، ۵-۳-۱۲، ۵-۴-۹، ۵-۴-۱۳، ۵-۴-۲۰، ۵-۴-۲۴، ۵-۴-۲۵. مثالهای مبتنی بر اتحاد $x = \exp(\log x)$ عبارت‌اند از ۵-۳-۷ (ج)، ۶-۳-۳، ۶-۷-۱، ۶-۷-۴ ، ۶-۷-۵، ۶-۷-۷، ۶-۹-۵، ۷-۴-۱، ۷-۴-۲، ۷-۴-۹، ۷-۴-۲۰.

۱ـ۴ تعدیل مسأله

ممکن است ضمن کار روی مسألهٔ A، نیاز به بررسی مسألهٔ B پیدا کنیم. به طور مشخص این تغییر در مسأله‌ها با عبارتهایی نظیر «کافی است نشان دهیم که ... » یا «می‌توانیم فرض کنیم که ... » یا «بدون کاستن از کلیت ...» اعلام می‌شود. در بخش قبل مثالهایی را دیدیم که در آنها، A و B مسأله‌هایی هم‌ارز بودند، به این معنی که حل یکی از آنها، حل دیگری را ایجاب می‌کرد. در این بخش حالتهایی را بررسی می‌کنیم که حل مسألهٔ تعدیل شده (یا کمکی) یعنی B، حل مسألهٔ A را ایجاب می‌کند ولی عکس آن لزوماً درست نیست.

۱ـ۴ـ۱ ثابت کنید که به ازای عددهای مثبت a، b، c و d،

$$\frac{a^۳+b^۳+c^۳}{a+b+c} + \frac{b^۳+c^۳+d^۳}{b+c+d} + \frac{c^۳+d^۳+a^۳}{c+d+a} + \frac{d^۳+a^۳+b^۳}{d+a+b} \geqslant a^۲+b^۲+c^۲+d^۲$$

حل. به دلیل تقارن مسأله، کافی است ثابت کنیم که به ازای همهٔ عددهای مثبت x، y و z،

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x+y+z} \geqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

زیرا در این صورت، طرف چپ نامساوی اصلی دست‌کم مساوی است با

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\frac{b^2+c^2+d^2}{3}+\frac{c^2+d^2+a^2}{3}+\frac{d^2+a^2+b^2}{3}$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2$$

حال در اثبات نامساوی اخیر، اگر فرض کنیم $x+y+z=1$، از کلیت مسأله کاسته نمی‌شود. زیرا در غیر این صورت کافی است دو طرف نامساوی را بر $(x+y+z)^2$ تقسیم کنیم و قرار دهیم $X=x/(x+y+z)$، $Y=y/(x+y+z)$ و $Z=z/(x+y+z)$.

در نتیجه مسألهٔ اصلی به مسالهٔ تعدیل شدهٔ زیر تبدیل می‌شود:

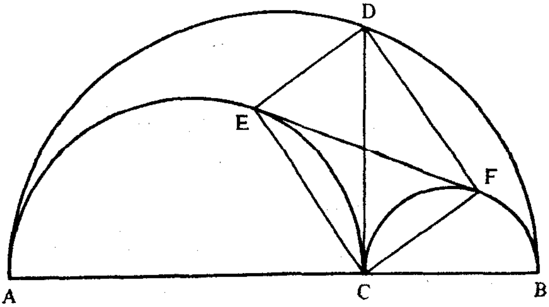
هرگاه به ازای عددهای X، Y و Z داشته باشیم $X+Y+Z=1$، ثابت کنید که

$$X^3+Y^3+Z^3 \geqslant \frac{X^2+Y^2+Z^2}{3}$$

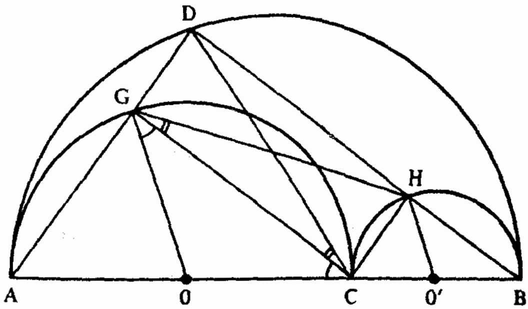
(برای اثبات این نامساوی، ۷-۳-۵ را ببینید.)

۱-۴-۲ فرض کنید C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB بین A و B باشد و در یک طرف AB، نیمدایره‌هایی با قطرهای AB، AC و CB رسم شده باشند (شکل ۱-۱۳). همچنین فرض کنید D نقطه‌ای روی نیمدایرهٔ به قطر AB باشد به طوری که CD بر AB عمود باشد و E و F به ترتیب نقطه‌هایی روی نیمدایره‌های به قطرهای AC و CB باشند به طوری که EF بخشی از مماس مشترک آنها باشد. نشان دهید که چهارضلعی $ECFD$ مستطیل است.

حل. توجه کنید که کافی است نشان دهیم که نقطه‌های A و E و D بر یک استقامت‌اند (استدلالی مشابه نشان می‌دهد که نقطه‌های B، F و Dنیز بر یک استقامت‌اند). زیرا در این صورت $\angle AEC = 90^\circ$ (E روی دایرهٔ AEC است)، $\angle ADB = 90^\circ$ و $\angle CFB = 90^\circ$ و حکم ثابت می‌شود. ولی دیده می‌شود که در این روش،



شکل۱-۱۳



شکل ۱-۱۴

بدون داشتن آگاهی کافی، امکان بروز اشتباه زیاد و پرهیز از به کارگیری حکم مسأله کاری دشوار است.

یکی از راههای کسب آگاهی دربارهٔ ارتباط بین پارامترهای یک مسأله، توجه به تأثیر ناشی از تغییر یکی از آنها روی مسأله است (تعدیل مسأله). فرض کنید که در اینجا، D روی نیمدایره حرکت کند. فرض کنید G و H (شکل ۱-۱۴) به ترتیب نقطه‌های تقاطع پاره‌خطهای AD و BD با نیمدایره‌های به قطر AC و CB (و به مرکزهای O و O') باشند. در این صورت $\angle AGC = \angle ADB = \angle CHB = ۹۰^\circ$ و در نتیجه $GDHC$ مستطیل است. به علاوه $\angle OGC = \angle OCG$ (زیرا ΔOGC متساوی‌الساقین است) و $\angle CGH = \angle GCD$ زیرا GH و CD قطرهای مستطیل‌اند. در نتیجه $\angle OGH = \angle OCD$. حال همین‌طور که D حرکت می‌کند و باعث می‌شود که CD بر AB عمود شود، $\angle OGH$ نیز به ۹۰° نزدیک می‌شود و در نتیجه GH بر دایرهٔ O مماس و G بر E منطبق می‌شود. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که GH بر دایرهٔ O' مماس می‌شود و در نتیجه $H = F$. این برهان را کامل می‌کند. (به عبارت «استدلالی مشابه» توجه کنید. این تکنیکی دیگر در ساده‌سازی است و چنانچه بعد از یک استدلال قرار گیرد، همان اثری را دارد که عبارت «کافی است نشان دهیم که» پیش از یک استدلال دارد.)

توجه کنید که این مسأله را با حل مسألهٔ کلیتری، حل کردیم. این یکی از تکنیکهای معمول در حل مسأله است و ما مثالهای بیشتری از آن را در بخش ۱-۱۲ خواهیم دید.

۱ـ۴ـ۳ ثابت کنید که عددهای صحیح و مثبتی چون x، y و z وجود ندارند به طوری که

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲xyz$$

حل. فرض کنید x، y و z عددهای صحیح مثبتی باشند به طوری که $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲xyz$. از آنجا که $x^۲ + y^۲ + z^۲$ زوج است (زیرا با $۲xyz$ مساوی است)، یا دو تا از x، y و z فرد و دیگری زوج است و یا هر سه زوج‌اند. فرض کنید x، y، z زوج باشند. در این صورت عددهای صحیح و مثبت $x_۱$، $y_۱$ و $z_۱$ موجودند به طوری که $x = ۲x_۱$، $y = ۲y_۱$، $z = ۲z_۱$. از این واقعیت که $(۲x_۱)^۲ + (۲y_۱)^۲ + (۲z_۱)^۲ = ۲(۲x_۱)(۲y_۱)(۲z_۱)$، نتیجه می‌شود که $x_۱$، $y_۱$، $z_۱$، در معادلهٔ $x_۱^۲ + y_۱^۲ + z_۱^۲ = ۲^۲x_۱y_۱z_۱$، صدق می‌کنند. بار دیگر اگر $x_۱$، $y_۱$ و $z_۱$ هر سه زوج باشند، با استدلالی مشابه، از این معادله نتیجه می‌شود که عددهای صحیح و مثبت $x_۲$، $y_۲$، $z_۲$ موجودند به طوری که $x_۲^۲ + y_۲^۲ + z_۲^۲ = ۲^۳x_۲y_۲z_۲$.

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. در نهایت باید به معادله‌ای به شکل $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۲^n abc$ برسیم که در آن هر سه عدد a، b و c زوج نیستند (و در نتیجه یکی زوج و دو تای دیگر فردند).

پس به مسألهٔ تعدیل شدهٔ زیر می‌رسیم: ثابت کنید که عددهای صحیح و مثبت x، y، z و n وجود ندارند به طوری که x و y فرد باشند و داشته باشیم

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲^n xyz$$

(این همان مسألهٔ ۱-۹-۳ است.)

۱ـ۴ـ۴ انتگرال $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx$ را محاسبه کنید.

حل. تکنیکهای انتگرالگیری که در حسابان سال اول دانشگاه مطالعه می‌شوند، در این انتگرال مؤثر نیستند. برای محاسبه این انتگرال، آن را به انتگرال دوگانه تبدیل می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $I = \int_۰^\infty e^{-x^۲}dx$. در این صورت

$$\begin{aligned} I^۲ &= \left[\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx\right]\left[\int_۰^\infty e^{-y^۲}dy\right] \\ &= \int_۰^\infty \left[\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx\right] e^{-y^۲}dy \\ &= \int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-x^۲}e^{-y^۲}dxdy \\ &= \int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-(x^۲+y^۲)}dxdy \end{aligned}$$

حال با استفاده از مختصات قطبی، این انتگرال را به انتگرالی هم‌ارز تبدیل می‌کنیم. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} I^۲ &= \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \int_۰^\infty e^{-r^۲} r dr d\theta \\ &= \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} -\frac{۱}{۲}e^{-r^۲}\Big]_۰^\infty d\theta \\ &= \frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} d\theta \\ &= \frac{۱}{۴}\pi \end{aligned}$$

در نتیجه $I = \sqrt{\pi}/۲$.

یک مسأله تعدیل شده (یا کمکی) می‌تواند به راههای گوناگونی ظاهر شود. ممکن است این مسأله در اثر تغییر نماد (۱-۴-۴، بخش ۱-۵ را ببینید) و یا به دلیل تقارن (۱-۴-۱، و بخش ۱-۶ را ببینید) به وجود آید. اغلب این گونه مسأله‌ها، ناشی از استدلال قهقرایی (بخش ۱-۸ را ببینید) و یا استدلال به روش برهان خلف (۱-۴-۳ و بخش ۱-۹ را ببینید) هستند. بررسی مسألهٔ کلیتر در اولین مرحله غیر معمول نیست (۱-۴-۲ و بخش ۱-۱۲ را

ببینید). در نتیجه می‌بینیم که تعدیل مسأله یکی از روشهای بسیار کلی در راهیابی است. به همین دلیل، ارائهٔ مثالها و مسأله‌های اضافی را به بخشهایی اختصاصیتر و مناسبتر که بعداً خواهند آمد، موکول می‌کنیم.

۱ـ۵ انتخاب نماد کارآمد

یکی از گامهای اولیه در حل مسأله‌های ریاضی، ترجمهٔ آن به عبارتهای نمادی است. در آغاز باید همهٔ مفاهیم کلیدی شناسایی و نامگذاری شوند. به تدریج با کشف ارتباطهای موجود در مسأله، می‌توان نمادهای زاید را حذف کرد.

۱ـ۵ـ۱ یک روز صبح، برف سنگینی با سرعت ثابت شروع به باریدن کرد. یک ماشین برف روب، کار خود را در ساعت ۰۰ : ۸ صبح آغاز کرد. در ساعت ۰۰ : ۹ صبح، ۲ کیلومتر و در ساعت ۰۰ : ۱۰ صبح، ۳ کیلومتر پیش رفته بود. به فرض آنکه ماشین برف روب در هر ساعت حجم ثابتی از برف را پاک کند، تعیین کنید که برف در چه ساعتی شروع به باریدن کرده است.

حل. به سختی می‌توان تصور کرد که اطلاعات موجود در این مسأله برای پاسخ به این سؤال کافی باشد. با وجود این اگر راهی وجود داشته باشد، نخست باید به روشی اسلوبمند کمیتهای ناشناخته را شناسایی کرد. نماد زیر را معرفی می‌کنیم: فرض کنید t مدت زمانی باشد که از شروع بارش برف می‌گذرد و T زمان آغاز کار برف روب باشد (که از $t = \circ$ محاسبه می‌شود). فرض کنید $x(t)$ مسافتی باشد که برف روب تا زمان t طی کرده است ($x(t)$ تنها به ازای $t \geqslant T$ مورد نظر است). بالاخره فرض کنید $h(t)$ نشان دهندهٔ عمق برف در زمان t باشد.

اکنون آماده‌ایم که مسأله را به عبارتهای نمادی ترجمه کنیم. این مطلب که برف با سرعتی ثابت می‌بارد به معنی آن است که عمق آن با سرعتی ثابت افزایش می‌یابد، یعنی

$$\frac{dh}{dt} = c \qquad (c \text{ ثابت است})$$

با انتگرالگیری از دو طرف خواهیم داشت

$$h(t) = ct + d \qquad (c \text{ و } d \text{ ثابت‌اند})$$

از آنجا که $h(\circ) = \circ$، نتیجه می‌گیریم که $d = \circ$. در نتیجه $h(t) = ct$.

این حقیقت که برف روب برف را با سرعت ثابتی پاک می‌کند به معنی آن است که در هر لحظهٔ t، سرعت برف روب با عمق برف، نسبت عکس دارد (برای مثال، با دو برابر شدن عمق، سرعت نصف می‌شود). به شکل نمادی به ازای $t \geqslant T$، داریم

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{h(t)} \qquad (k \text{ ثابت است})$$

$$= \frac{k}{ct} = \frac{K}{t} \qquad (K = \frac{k}{c} \text{ ثابت است})$$

با انتگرالگیری از دو طرف نتیجه می‌شود که

$$x(t) = K\log t + C \qquad (C \text{ ثابت است})$$

سه شرط در اختیار داریم: وقتی $t = T$، $x = \circ$، وقتی $t = T + ۱$، $x = ۲$ و وقتی $t = T + ۲$، $x = ۳$.
با استفاده از دو تا از شرطهای فوق، می‌توانیم ثابتهای K و C و با استفاده از شرط سوم، مقدار T را به دست

آوریم. جزئیات حل مسأله را کنار می‌گذاریم و نتیجه می‌گیریم که

$$T = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618 \text{ ساعت } \approx \text{ ۳۷ دقیقه و ۵ ثانیه}$$

بنابراین، برف در ساعت ۵۵ : ۲۲ : ۷ شروع به باریدن کرده است.

۱ـ۵ـ۲ الف) هرگاه n عددی صحیح و مثبت و $2n+1$ مربع کامل باشد، نشان دهید که $n+1$ مجموع مربعهای دو عدد متوالی است.

ب) اگر $3n+1$ مربع کامل باشد، آنگاه نشان دهید که $n+1$ مجموع سه مربع کامل است.

حل. با معرفی نماد مناسب، مسأله به یک مسألهٔ سادهٔ جبر خلاصه می‌شود. در قسمت (الف)، فرض کنید $2n+1 = s^2$ که در آن s عددی صحیح است. از آنجا که s^2 عددی فرد است، s نیز فرد است. فرض کنید t عدد صحیحی باشد به طوری که $s = 2t+1$. در این صورت $2n+1 = (2t+1)^2$. اگر این معادله را بر حسب n حل کنیم، خواهیم داشت

$$n = \frac{(2t+1)^2 - 1}{2} = \frac{4t^2+4t}{2} = 2t^2+2t$$

در نتیجه

$$n+1 = 2t^2+2t+1 = t^2+(t+1)^2$$

ب) فرض کنید $3n+1 = s^2$ که در آن s عددی صحیح است.روشن است که s مضربی از ۳ نیست، پس به ازای عدد صحیحی چون t، $s = 3t\pm1$. بنابراین $3n+1 = (3t\pm1)^2$و در نتیجه

$$n = \frac{(3t\pm1)^2 - 1}{3} = \frac{9t^2\pm6t}{3} = 3t^2\pm2t$$

در نتیجه

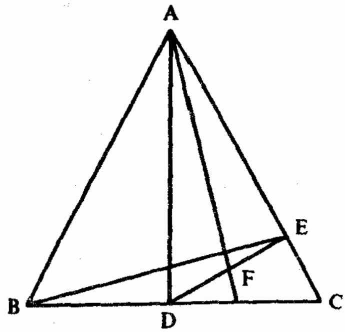
$$n+1 = 3t^2\pm2t+1 = 2t^2+(t\pm1)^2 = t^2+t^2+(t\pm1)^2$$

۱ـ۵ـ۳ در مثلث ABC، $AB = AC$، D وسط BC، E پای عمود وارد بر AC از D، و F وسط DE است(شکل ۱-۱۵). ثابت کنید AF بر BE عمود است.

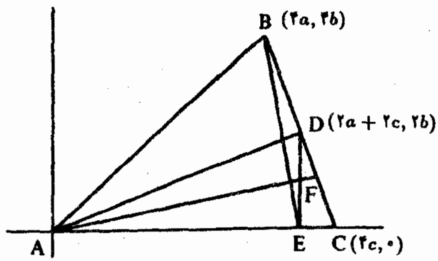
حل. می‌توانیم با اختصاص دادن مختصات به نقطه‌های مورد بحث و نشان دادن اینکه شیبهای m_{BE} و m_{AF} عکس قرینهٔ یکدیگرند، مسأله را بر حسب عبارتهای جبری بیان کنیم.

یکی از راه حلها، در نظر گرفتن مثلث به صورتی است که در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است: D را به عنوان مبدأ $(0,0)$ می‌گیریم، $A = (0,a)$، $B = (-b,0)$، $C = (b,0)$. این راهی طبیعی برای بر چسب گذاری شکل است زیرا به این صورت می‌توان از تقارن دو طرفهٔ موجود در مثلث متساوی‌الساقین سود برد (مثالهای بخش ۱-۶ را ببینید). ولی در این مثال خاص، نمادگذاری بالا موجب بروز پیچیدگیهای مختصری در تعیین مختصات نقطه‌های E و F می‌شود.

راه بهتری برای استفاده از مختصات، همان طور که در شکل ۱-۱۶ دیده می‌شود، آن است که قرار دهیم $A = (0,0)$، $B = (4a, 4b)$، $C = (4c, 0)$. در این صورت، $a^2+b^2 = c^2$، $D = (2a+2c, 2b)$،



شکل۱-۱۵



شکل۱-۱۶

$E = (۲a + ۲c, ۰)$ و $F = (۲a + ۲c, b)$ (تقریباً بدون هیچگونه محاسبه‌ای، توانستیم مختصات همهٔ نقطه‌های مربوط به مسأله را به دست آوریم).

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$m_{AF} m_{BE} = \left(\frac{b}{۲(a+c)}\right)\left(\frac{۴b}{۴a - (۲a + ۲c)}\right) = \frac{b^۲}{a^۲ - c^۲} = -۱$$

و برهان تمام است.

۱ـ۵ـ۴ فرض کنید $۱ > a_۰ > -۱$ و به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم

$$a_n = \left(\frac{۱ + a_{n-۱}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} \quad , \quad n > ۰$$

فرض کنید $A_n = ۴^n(۱ - a_n)$. وقتی که n به بینهایت میل کند، برای A_n چه روی می‌دهد؟

حل. در صورتی که بخواهیم با تلاش زیاد مستقیماً a_n را بر حسب $a_۰$ بیان کنیم به عبارتهای پیچیدهٔ ناامید کننده‌ای، شامل دنباله‌ای از رادیکالهای تودرتو می‌رسیم که راهی برای خلاصه کردن آنها به صورتی جمع‌وجور وجود ندارد.

در اینجا روش کلیدی مورد نیاز، آن است که ملاحظه کنیم زاویهٔ منحصر به فردی چون θ، $۰ < \theta < \pi$

وجود دارد به طوری که $a_{\circ} = \cos\theta$. به ازای این θ داریم

$$a_{۱} = \left(\frac{۱+\cos\theta}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \cos\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

به همین ترتیب

$$a_{۲} = \left(\frac{۱+\cos(\theta/۲)}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \cos\left(\frac{\theta}{۴}\right), \ldots, a_n = \cos\left(\frac{\theta}{۲^n}\right)$$

حال می‌توانیم محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} A_n &= ۴^n\left(۱-\cos(\theta/۲^n)\right) \\ &= \frac{۴^n\left(۱-\cos(\theta/۲^n)\right)\left(۱+\cos(\theta/۲^n)\right)}{۱+\cos(\theta/۲^n)} \\ &= \frac{۴^n \sin^۲(\theta/۲^n)}{۱+\cos(\theta/۲^n)} \\ &= \left(\frac{\theta^۲}{۱+\cos(\theta/۲^n)}\right)\left(\frac{\sin(\theta/۲^n)}{\theta/۲^n}\right)^۲ \end{aligned}$$

با بزرگ شدن n، $\theta^۲\Big/\Big(۱+\cos(\theta/۲^n)\Big)$ به $\theta^۲/۲$ میل می‌کند و $\big(\sin(\theta/۲^n)\big)/(\theta/۲^n)$ به ۱ می‌گراید (به خاطر بیاورید که وقتی $x \to ۰$، $(\sin x)/x \longrightarrow ۱$). بنابراین وقتی که n به بینهایت میل می‌کند، A_n به $\theta^۲/۲$ می‌گراید.

مسائل

۱ـ۵ـ۵ هر یک از گزاره‌های زیر را به شکل معادله‌ای نمایش دهید:

الف) در یک رستوران، به ازای هر چهار نفری که کیک پنیر سفارش می‌دهند، پنج نفر دسر میوه سفارش می‌دهند.

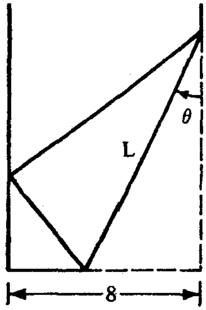
ب) در این دانشکده، تعداد دانشجویان شش برابر استادان است.

۱ـ۵ـ۶ از سر دو تیرک قائم، دو سیم حایل به پایهٔ دیگری کشیده شده است. ارتفاع محل برخورد سیمها از سطح زمین چقدر است؟

۱ـ۵ـ۷ مطابق شکل ۱-۱۷، تکه کاغذی به عرض ۲۰۰ سانتیمتر را تا می‌کنیم تا یکی از گوشه‌های کاغذ روی ضلع مقابل به آن گوشه قرار گیرد. طول خط تای L را تنها بر حسب زاویهٔ θ بیان کنید.

۱ـ۵ـ۸ فرض کنید $P_۱$، $P_۲$، ...، $P_{۱۲}$ رأسهای متوالی یک دوازده ضلعی منتظم باشند. آیا قطرهای $P_۱P_۹$، $P_۲P_{۱۱}$، $P_۴P_{۱۲}$ همرس‌اند؟

۱ـ۵ـ۹ در هر یک از موارد زیر، با استفاده از جبر، برای جواب خود دلیل بیاورید:



شکل۱-۱۷

الف) اتومبیلی با سرعت ۴۰ کیلومتر بر ساعت از A به B سفر می‌کند و سپس با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت از B به A باز می‌گردد. سرعت متوسط رفت و برگشت، از ۵۰ کیلومتر بر ساعت بیشتر است یا کمتر؟

ب) یک فنجان قهوه و یک فنجان شیر در اختیار دارید که مقدار مایع در هر دوی آنها مساوی است. یک قاشق شیر از فنجان برمی‌داریم و به فنجان قهوه اضافه می‌کنیم، سپس یک قاشق از مخلوط را به فنجان شیر بر می‌گردانیم. حال مقدار شیر موجود در فنجان قهوه از مقدار قهوهٔ موجود در فنجان شیر بیشتر است یا کمتر؟ (برای این مسأله یک راه حل زیبا وجود دارد که جبری نیست. این راه بر این نظر استوار است که قهوهٔ موجود در فنجان شیر جایگزین مقداری مساوی از شیری شده است که باید در فنجان قهوه باشد.)

ج) تصور کنید که زمین کره‌ای هموار باشد و رشته نخی را دور تا دور استوای آن کشیده باشیم. حال فرض کنید که شش متر به طول نخ افزوده شود و نخ با این طول جدید، به شکلی یکنواخت، از زمین فاصله بگیرد تا درست بالای خط استوا، دایرهٔ بزرگتری بسازد. فاصلهٔ بین رشتهٔ نخ و سطح زمین از یک دوازدهم متر بیشتر است یا کمتر؟

۱ـ۵ـ۱۰ قضیه‌ای مشهور می‌گوید که یک عدد اول $p > ۲$ را فقط و فقط وقتی می‌توان به شکل مجموع دو مربع کامل نوشت ($p = m^۲ + n^۲$ که در آن m و n صحیح‌اند) که p یک واحد بیشتر از یکی از مضربهای ۴ باشد. با فرض درستی این حکم، نشان دهید که:

الف) می‌توان هر عدد اول را که یک واحد بیشتر از یکی از مضربهای ۸ باشد، به صورت $x^۲ + ۱۶y^۲$ نوشت که در آن x و y عددهای صحیح‌اند.

ب) می‌توان هر عدد اول را که پنج واحد بیشتر از یکی از مضربهای ۸ باشد، به شکل $(۲x + y)^۲ + ۴y^۲$ نوشت که در آن x و y عددهای صحیح‌اند.

مثالهای اضافی. ۱-۱-۱۰، ۲-۵-۱۰، ۳-۲-۱۵، ۳-۳-۱۱، ۳-۳-۲۸، ۳-۴-۲، ۳-۴-۴، ۴-۱-۵، ۶-۴-۲، ۷-۲-۴، ۸-۱-۱۵، ۸-۲-۳، ۸-۲-۱۷. همچنین بخشهای ۲-۵ (رابطه‌های بازگشتی)،۳-۲ (حساب پیمانه‌ای)، ۳-۴ (نماد مکانی)، ۸-۳ (هندسهٔ برداری) و۸-۴ (اعداد مختلط در هندسه) را ببینید.

۱ـ۶ بهره‌گیری از تقارن

معمولاً وجود تقارن در یک مسأله موجب می‌شود که مقدار کار لازم برای رسیدن به جواب، کاهش یابد. برای مثال، حاصلضرب $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ را در نظر بگیرید. از آنجا که هر یک از عاملها نسبت به a، b و c متقارن‌اند (یعنی با جا به جا کردن هر جفت از متغیرها، عبارت بدون تغییر می‌ماند)، حاصلضرب نیز چنین خاصیتی را دارد. در نتیجه اگر در حاصلضرب، جملهٔ a^3 ظاهر شود، جمله‌های b^3 و c^3 نیز ظاهر می‌شوند. به همین ترتیب اگر جملهٔ a^2b در حاصلضرب موجود باشد، جمله‌های a^2c، b^2a، b^2c، c^2a، c^2b نیز وجود دارند و ضریب همهٔ آنها برابر است و الی‌آخر. در نتیجه، با یک بررسی سریع نتیجه می‌گیریم که حاصلضرب به شکل زیر است:

$$A(a^3+b^3+c^3)+B(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+C(abc)$$

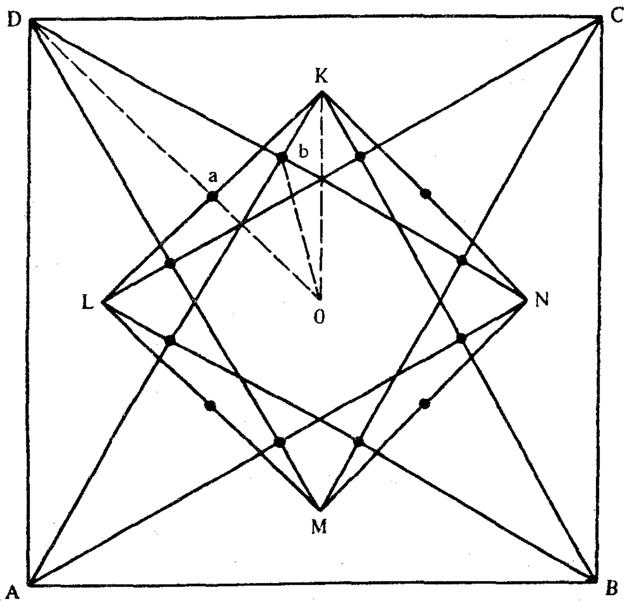
به سادگی می‌توان بررسی کرد که $A=1$، $B=0$، $C=-3$.

۱ـ۶ـ۱ مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABK، BCL، CDM، DAN درون مربع $ABCD$ ساخته شده‌اند. ثابت کنید که وسطهای چهار پاره خط KL، LM، MN، NK و وسطهای هشت پاره‌خط AK، BK، BL، CL، CM، DM، DN و AN، دوازده رأس یک دوازده ضلعی منتظم هستند.

حل. در شکل ۱-۱۸، دوازده رأس مزبور با خالهای توپر نشان داده شده‌اند و همان طور که دیده می‌شود، دوتای آنها را با نامهای a و b مشخص کرده‌ایم.

کافی است با استفاده از تقارن شکل، نشان دهیم که $\angle bOK = 15^\circ$، $\angle aOb = 30^\circ$ و $|aO| = |bO|$.

توجه کنید که AN بخشی از عمود منصف BK است و در نتیجه $|KN| = |NB|$. با استفاده از



شکل ۱-۱۸

تقارن نتیجه می‌گیریم که MBN مثلثی متساوی‌الاضلاع با طول ضلعی چون s است و $\angle CBN = ۱۵^\circ$. حال مثلث DBN را در نظر بگیرید. توجه کنید که Ob وسطهای DB و DN را به هم وصل می‌کند، درنتیجه Ob موازی با BN و برابر با نصف آن است. پس $|Ob| = s/۲$ و $\angle bOK = ۱۵^\circ$. با توجه به این، می‌توان به سادگی بررسی کرد که $\angle aOb = \angle DOK - \angle bOK = ۴۵^\circ - ۱۵^\circ = ۳۰^\circ$ و $|Oa| = |KN|/۲ = s/۲$.

وجود تقارن در یک مسأله، باعث وضوح دید در آن مسأله نیز می‌شود و این خود غالباً موجب می‌شود که بتوانیم رابطه‌هایی را مشاهده و کشف کنیم که احتمالاً یافتن آنها به روشهای دیگر، دشوار است. برای مثال، تنها با استفاده از تقارن، حدس می‌زنیم که مقدار ماکسیمم xy باشرطهای $x + y = ۱$، $x > ۰$، $y > ۰$، باید وقتی روی دهد که $x = y = \frac{۱}{۲}$ (رابطهٔ بین x و y متقارن است). این مثالی است از اصل عدم کفایت دلیل که می‌توان آن را به اختصار به شکل زیر بیان کرد: «هنگامی که دلیل کافی برای تمایز وجود ندارد، نمی‌تواند تمایزی وجود داشته باشد». بنابراین دلیلی وجود ندارد که انتظار داشته باشیم که ماکسیمم وقتی روی دهد که x عددی غیر از $\frac{۱}{۲}$، یعنی به ۰ یا ۱ نزدیکتر باشد. برای تحقیق درستی این مطلب، قرار می‌دهیم $x = \frac{۱}{۲} + e$. در این صورت $y = \frac{۱}{۲} - e$ و $xy = \left(\frac{۱}{۲} + e\right)\left(\frac{۱}{۲} - e\right) = \frac{۱}{۴} - e^۲$. از این شکل به روشنی دیده می‌شود که ماکسیمم هنگامی روی می‌دهد که $e = ۰$، یعنی $x = y = \frac{۱}{۲}$.

مسأله بعدی چند نمونهٔ دیگر از این اصل را بیان می‌کند.

۱ـ۶ـ۲ الف) بین تمام مستطیلهای محاط در دایره‌ای مفروض، کدام یک بیشترین مساحت را دارد؟

ب) ماکسیمم مقدار $\sin A + \sin B + \sin C$ را بیابید که در آن A و B و C اندازه‌های سه زاویهٔ یک مثلث‌اند.

ج) بین همهٔ مثلثهای با محیط ثابت، کدام یک بیشترین مساحت را دارد؟

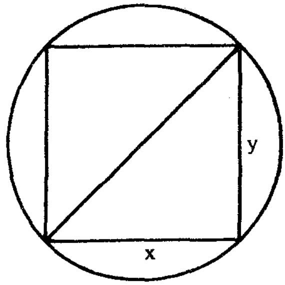
د) بین همهٔ متوازی‌السطوحهای به حجم ۱، کدام یک کوچکترین مساحت جانبی را دارد؟

هـ) بین همهٔ چند ضلعیهای محاط در یک دایرهٔ مفروض، کدام یک بیشترین مساحت را دارد؟

حل. الف) باتوجه به اصل عدم کفایت دلیل، حدس می‌زنیم که مستطیلی که در یک دایره محاط شود و بیشترین مساحت را داشته باشد، مربع است (شکل ۱-۱۹). برای تحقیق درستی این مطلب، فرض کنید x و y، طول و عرض مستطیل باشند و بدون کاسته شدن کلیت، فرض می‌کنیم که واحد اندازه‌گیری طوری انتخاب شده باشد که قطر دایره مساوی واحد باشد. می‌خواهیم مقدار xy را با شرط $x^۲ + y^۲ = ۱$ ماکسیمم کنیم. این معادل است با ماکسیمم کردن $x^۲y^۲$ با شرط $x^۲ + y^۲ = ۱$. ولی این همان مسأله‌ای است که پیش از این مثال بررسی کردیم: مقدار ماکسیمم هنگامی روی می‌دهد که $x^۲ = y^۲ = \frac{۱}{۲}$، یعنی وقتی که مستطیل، مربع باشد.

ب) توجه کنید که مجموع $\sin A + \sin B + \sin C$ همواره مثبت است (زیرا هر یک از جمله‌های آن مثبت است) و می‌توانیم A را به اندازهٔ دلخواه به ۱۸۰° نزدیک کنیم تا (اندازهٔ) این مجموع به میزان دلخواه کوچک شود. دلیلی وجود ندارد که ماکسیمم در نقطه‌ای به جز $A = B = C = ۶۰^\circ$ (یعنی وقتی که یک مثلث متساوی‌الاضلاع داریم) روی دهد. این مطلب با توجه به بحث ۲-۴-۱ ثابت می‌شود.

به روشی مشابه، حدس می‌زنیم که پاسخهای (ج)،(د)و(هـ) به ترتیب یک مثلث متساوی‌الاضلاع، یک



شکل۱-۱۹

مکعب و یک چند ضلعی منتظم هستند. برهانهای این حدسها، در مسأله‌های ۷-۲-۱، ۷-۲-۱۲، ۲-۴-۱ آمده‌اند.

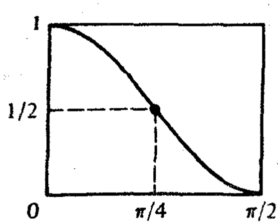
۱ـ۶ـ۳ مقدار انتگرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

را به دست آورید.

حل. مقدار این انتگرال را نمی‌توان با روشهای معمول انتگرالگیری به دست آورد. به عبارت دیگر تابع زیر انتگرال تابع اولیه ندارد. با وجود این، اگر توجه کنیم که تابع زیر انتگرال نسبت به نقطهٔ $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ متقارن است (شکل ۱-۲۰)، می‌توان آن را حل کرد. برای نشان دادن این مطلب (که چندان بدیهی هم نیست)، فرض می‌کنیم $f(x) = 1/(1+(\tan x)^{\sqrt{2}})$. کافی است نشان دهیم که به ازای هر x که $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ داریم $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$. پس تساوی کلیتر زیر را به ازای $r = \sqrt{2}$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(x) &= \frac{1}{1+\tan^r\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \frac{1}{1+\tan^r x} \\ &= \frac{1}{1+\cot^r x} + \frac{1}{1+\tan^r x} \\ &= \frac{\tan^r x}{1+\tan^r x} + \frac{1}{1+\tan^r x} \\ &= 1 \end{aligned}$$



شکل۱-۲۰

از تقارن تابع نتیجه می‌گیریم که مساحت زیر منحنی روی $\left[\circ, \frac{\pi}{۲}\right]$ برابر با نصف مساحت مستطیل است (شکل ۱-۲۰ را ببینید)، یعنی مقدار انتگرال مساوی است با $(\pi/۲)/۲ = \pi/۴$.

روش دیگری برای استفاده از تقارن، انتخاب نماد مناسب است. در اینجا دو مثال از این نوع را می‌آوریم.

۱ـ۶ـ۴ فرض کنید P نقطه‌ای روی نمودار $y = f(x)$ باشد که در آن f یک چند جمله‌ای درجه سوم است. فرض کنید که مماس بر نقطهٔ P، بار دیگر منحنی را در Q قطع کند و A مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی و پاره‌خط PQ باشد و B ناحیه‌ای باشد که به روشی مشابه، با شروع از نقطهٔ Q به جای P به دست می‌آید. ارتباط بین A و B چیست؟

حل. می‌دانیم که نمودار یک چند جمله‌ای درجهٔ سوم نسبت به نقطهٔ عطف خود متقارن است (۸-۲-۱۷ را ببینید). از آنجا که انتخاب محورهای مختصات بر مساحتهای مورد نظر تأثیری ندارد، نقطهٔ عطف را مبدأ مختصات می‌گیریم. بنابراین فرض می‌کنیم که معادلهٔ درجهٔ سوم مفروض به شکل

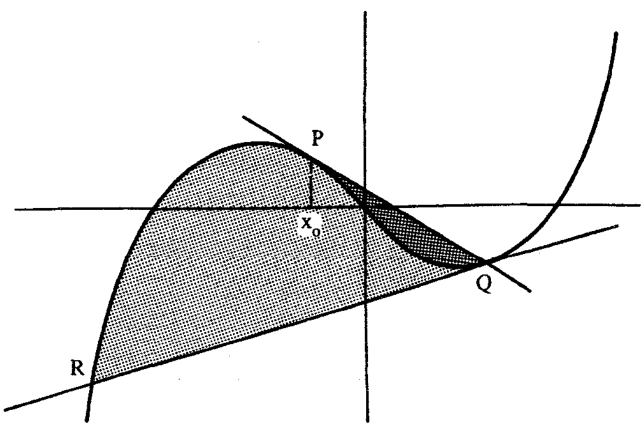
$$f(x) = ax^۳ + bx \qquad , \qquad a \neq \circ$$

باشد (شکل ۱-۲۱ را ببینید).

فرض کنید $x_\circ$ طول نقطهٔ P باشد. در این صورت نتیجه می‌شود که طول نقطهٔ Q مساوی با $-۲x_\circ$ است (این محاسبهٔ ساده را انجام نمی‌دهیم. در حقیقت راه زیبایی برای رسیدن به این واقعیت وجود دارد ولی این امر، نیاز به دانستن روشهای موجود در بخش ۴-۳ دارد (۴-۳-۷ را ببینید).)

یک انتگرالگیری سر راست نشان می‌دهد که مساحت A مساوی است با $Kx_\circ^۴$، که در آن K عددی مستقل از $x_\circ$ است (همانند قبل، در اینجا جزئیات محاسبات مربوط به این مطلب مورد نظر نیست).

حال می‌توانیم نتیجه‌های قبلی خود را دربارهٔ نقطه Q به کار ببریم. مماس در نقطهٔ Q منحنی را در R قطع می‌کند که طول آن به روشنی مساوی است با $-۲(-۲x_\circ) = ۴x_\circ$ و مساحت B مساوی است با $K(-۲x_\circ)^۴ = ۱۶Kx_\circ^۴ = ۱۶A$.



شکل ۱-۲۱

۱ـ۶ـ۵ همهٔ x هایی را تعیین کنید که در معادلهٔ

$$\tan x = \tan(x + 10^\circ)\tan(x + 20^\circ)\tan(x + 30^\circ)$$

صدق کنند.

حل. با استفاده از یک تغییر متغیر ساده، تقارن را در مسأله وارد می‌کنیم. قرار می‌دهیم $y = x + 15^\circ$. در این صورت معادله به شکل

$$\tan(y - 15^\circ) = \tan(y - 5^\circ)\tan(y + 5^\circ)\tan(y + 15^\circ)$$

در می‌آید که معادل است با

$$\frac{\sin(y - 15^\circ)\cos(y + 15^\circ)}{\cos(y - 15^\circ)\sin(y + 15^\circ)} = \frac{\sin(y - 5^\circ)\sin(y + 5^\circ)}{\cos(y - 5^\circ)\cos(y + 5^\circ)}$$

با استفاده از اتحادهای

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A - B) + \sin(A + B)\right]$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A - B) - \cos(A + B)\right]$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A - B) + \cos(A + B)\right]$$

به دست می‌آوریم

$$\frac{\sin(-30^\circ) + \sin 2y}{\sin(30^\circ) + \sin 2y} = \frac{\cos(-10^\circ) - \cos 2y}{\cos(-10^\circ) + \cos 2y}$$

یا به طور معادل

$$\frac{2\sin 2y - 1}{2\sin 2y + 1} = \frac{\cos 10^\circ - \cos 2y}{\cos 10^\circ + \cos 2y}$$

پس از ساده کردن، خواهیم داشت

$$\sin 4y = \cos 10^\circ$$

که ایجاب می‌کند

$$4y = 80^\circ + 360^\circ k,\quad 100^\circ + 360^\circ k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x = 5^\circ + 90^\circ k,\quad 10^\circ + 90^\circ k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

مسائل

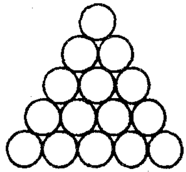
۱ـ۶ـ۶ الف) با استفاده از تقارن، حاصلضرب زیر را بسط دهید:

$$(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2)$$

ب) ثابت کنید که اگر $x + y + z = 0$، آنگاه

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)\left(\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5}\right) = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7}$$

(قرار دهید $z = -x - y$ و قضیهٔ دو جمله‌ای را به کار ببرید. برای رهیافتی دیگر، ۴-۳-۹ را ببینید).



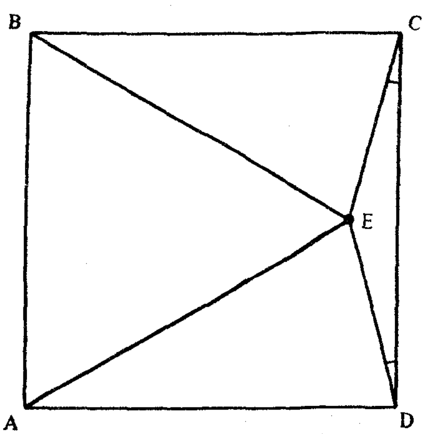
شکل۱-۲۲

۱ـ۶ـ۷ هر دو روی هر یک از پانزده سکه‌ای را که مطابق شکل ۱-۲۲ کنار هم قرار داده شده‌اند، با رنگ سفید و یا با رنگ سیاه، رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید سه سکهٔ همرنگ وجود دارند به طوری که مرکزهای آنها رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند(در اینجا راههای زیادی برای استفاده از تقارن و استدلالهایی از نوع «بدون کاسته شدن از کلیت» وجود دارد).

۱ـ۶ـ۸ با استفاده از اصل عدم کفایت دلیل، مینیمم عبارت $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ را با توجه به شرطهای $1 > x_i > 0$ و $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$، بیابید. حدس خود را ثابت کنید (برای اثبات، قرار دهید $x_i = \frac{1}{n} + e_i$).

۱ـ۶ـ۹ نقطه‌ای چون P درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. عمودهای رسم شده از P بر هر یک از ضلعها، آنها را به ترتیب در نقطه‌های D، E و F قطع می‌کنند. نقطهٔ P را باید کجا اختیار کنیم تا مجموع $PD + PE + PF$ ماکسیمم شود؟ نقطهٔ P را کجا بگیریم تا مجموع $PD + PE + PF$ مینیمم شود؟ جوابهای خود را توجیه کنید. به دست آوردن قرینهٔ شکل نسبت به یکی از ضلعها در حل مسأله مؤثر است. وقتی که نقطهٔ P به موازات خط تقارن حرکت می‌کند، برای مجموع $PD + PE + PF$ چه روی می‌دهد؟

۱ـ۶ـ۱۰ در شکل ۱-۲۳، $ABCD$ مربع است و $\angle ECD = \angle EDC = 15^\circ$. نشان دهید که مثلث AEB متساوی‌الاضلاع است.(در این مسألهٔ بسیار زیبا، کلید حل مسأله ایجاد تقارن مرکزی است. به ویژه زاویه‌هایی



شکل۱-۲۳

به اندازهٔ °۱۵ روی هر یک از ضلعهای AB، BC، AD (همان‌طور که روی CD وجود دارد) ایجاد کنید و نموداری مشابه با نمودار مسألهٔ ۱-۶-۱ بسازید).

مثالهای اضافی. ۱-۴-۱، ۸-۱-۴، ۸-۱-۵، ۸-۱-۸، ۸-۲-۳.

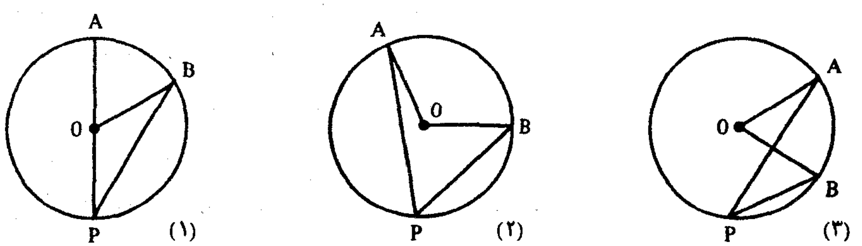
۱ـ۷ تقسیم مسأله به چند حالت

اغلب مواردی پیش می‌آید که می‌توانیم یک مسأله را به تعدادی مسأله‌های فرعی کوچکتر تقسیم کنیم به طوری که هر یک از آنها را بتوان به طور جداگانه به روش حالت به حالت بررسی کرد. به ویژه این مطلب دربارهٔ مسأله‌ای که در آن از سور عمومی استفاده شده است (یعنی «به ازای هر x ... ») درست است. برای مثال ممکن است گزاره‌ای به شکل «به ازای هر عدد صحیح ... » را بتوان با بررسی حالتهای زوج و فرد، به طور جداگانه ثابت کرد. همین‌طور ممکن است قضیه‌ای در بارهٔ مثلثها، با استفاده از تقسیم آن به سه حالت مثلث حاده، قائم‌الزاویه یا منفرجه ثابت شود. در برخی از مواقع می‌توان مسأله‌های فرعی را به شکل متوالی طوری مرتب کرد که پس از ثابت شدن اولین حالت، بتوان به کمک آن گامهای بعدی را نیز ثابت کرد. به چنین روندی، تپه نوردی می‌گویند.

در نخستین مراحل تجزیه و تحلیل یک مسأله، باید فکر کنیم که چگونه می‌توان آن را به چند مسأله فرعی (امیدوار کنندهٔ) ساده‌تر تقسیم کرد. روش حل مسأله‌ای را که در این بخش بررسی می‌کنیم، اغلب به شکل زیر است: «اگر نمی‌توانید مسأله را حل کنید، مسألهٔ ساده‌تری را در ارتباط با مسألهٔ اصلی بیابید و آن را حل کنید».

۱ـ۷ـ۱ ثابت کنید که اندازهٔ زاویهٔ محاط در دایره، مساوی است با نصف اندازهٔ زاویه‌ای مرکزی که همان کمان را دربردارد.

حل. دایره‌ای به مرکز O و زاویه‌ای محاطی چون APB را در اختیار داریم. نمونه‌هایی را در شکل ۱-۲۴ می‌بینید. باید ثابت کنیم که در همهٔ حالتها $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$. سه حالتی که در شکل نشان داده شده‌اند، نمایش دهندهٔ سه وضعیت متفاوت اساسی هستند. به بیانی صریحتر، مرکز دایره یعنی O درون $\angle APB$ است (نمودار۲)، بیرون $\angle APB$ است (نمودار ۳) و یا روی یکی از نیمخطهای $\angle APB$ قرار دارد (نمودار ۱). هر یک از این حالتها را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم و قضیه را ثابت می‌کنیم.



شکل۱-۲۴

حالت ۱. فرض کنید که مرکز O روی PA باشد. در این صورت داریم

$$\angle OBP + \angle OPB = \angle AOB \quad \text{(زاویهٔ بیرونی مساوی است با مجموع دو زاویهٔ درونی غیر مجاور)}$$
$$= ۲\angle OPB \quad (\triangle OPB \text{ متساوی‌الساقین است})$$
$$= ۲\angle APB$$

حالت ۲. اگر O درون $\angle APB$ باشد (نمودار ۲)، خط PO را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. هم اکنون ثابت کردیم که $۲\angle APD = \angle AOD$ و $۲\angle DPB = \angle DOB$. با جمع این تساویها، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

حالت ۳. اگر O بیرون $\angle APB$ باشد (نمودار ۳)، PO را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. در این صورت با استفاده از حالت ۱ نتیجه می‌شود که $۲\angle DPB = \angle DOB$ و$۲\angle DPA = \angle DOA$. با کاستن تساوی دوم از تساوی اول حکم به دست می‌آید. این برهان را تمام می‌کند.

۱ـ۷ـ۲ تابع f با مقادیر حقیقی که روی مجموعهٔ عددهای گویا تعریف شده است، به ازای هر دو عدد گویای x و y در تساوی

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

صدق می‌کند. ثابت کنید که به ازای هر عدد گویای x داریم $f(x) = f(۱) \times x$.

حل. برهان را در چند مرحله انجام می‌دهیم. ابتدا حکم را برای اعداد صحیح مثبت، سپس برای اعداد صحیح نامثبت و بعد برای عکس اعداد صحیح و سرانجام برای همهٔ عددهای گویا ثابت می‌کنیم.

حالت ۱ (عددهای صحیح مثبت). حکم وقتی که $x = ۱$ برقرار است. به ازای $x = ۲$ داریم

$$f(۲) = f(۱+۱) = f(۱) + f(۱) = ۲f(۱)$$

به ازای $x = ۳$،

$$f(۳) = f(۲+۱) = f(۲) + f(۱) = ۲f(۱) + f(۱) = ۳f(۱)$$

روشن است که می‌توان این روند را برای هر عدد صحیح مثبت n ادامه داد و نتیجه گرفت که $f(n) = nf(۱)$ (برهان رسمی این حکم بر اساس اصل استقرای ریاضی است، فصل ۲ را ببینید).

حالت ۲ (عددهای صحیح نامثبت). ابتدا داریم $f(۰) + f(۰) = f(۰+۰) = f(۰)$. با کم کردن $f(۰)$ از دو طرف تساوی به دست می‌آوریم $f(۰) = ۰$ یعنی $f(۰) = ۰ \times f(۱)$. حال $f(۱) + f(-۱) = f(۱ + (-۱)) = f(۰) = ۰$. از اینجا دیده می‌شود که $f(-۱) = -f(۱)$. به طور مشابه به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، داریم

$$f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(۰) = ۰$$

در نتیجه $f(-n) = -nf(۱)$.

حالت ۳ (عکس عددها). به ازای $x = \frac{۱}{۲}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$f(۱) = f(\tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۱}{۲}) = f(\tfrac{۱}{۲}) + f(\tfrac{۱}{۲}) = ۲f(\tfrac{۱}{۲})$$

با تقسیم دو طرف بر ۲ به دست می‌آوریم $f(\frac{1}{2}) = f(1)/2$. برای $x = \frac{1}{3}$، داریم

$$f(1) = f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{3}) = 3f(\frac{1}{3})$$

یا به طور معادل $f(\frac{1}{3}) = f(1)/3$. به روشی مشابه، به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، داریم $f(\frac{1}{n}) = f(1)/n$. به‌ازای $x = \frac{-1}{n}$، داریم $f(\frac{1}{n})+f(\frac{-1}{n}) = f\left(\frac{1}{n}+\frac{-1}{n}\right) = f(0) = 0$ ، در نتیجه $f(\frac{-1}{n}) = -f(1)/n$.

حالت ۴ (همهٔ عددهای گویا). فرض کنید n عددی صحیح باشد. در این صورت

$$f(\frac{2}{n}) = f(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n}) == 2f(\frac{1}{n}) = (\frac{2}{n})f(1)$$

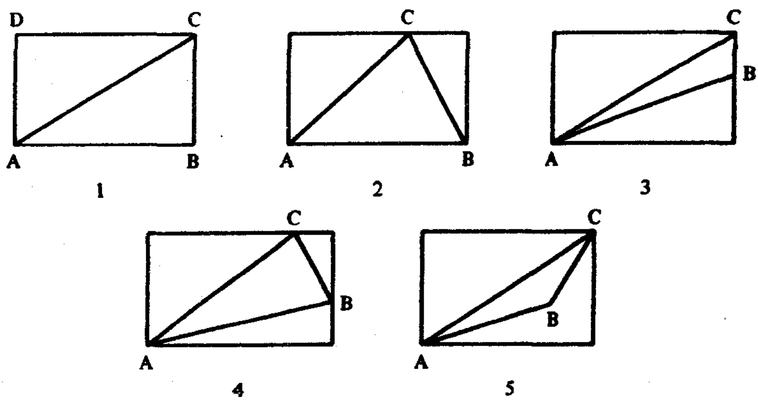
به طور مشابه، اگر $\frac{m}{n}$ عدد گویای دلخواهی باشد که در آن m عددی صحیح و مثبت و n عددی صحیح است، آنگاه

$$f(\frac{m}{n}) = f\underbrace{(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n})}_{m\text{بار}} = \underbrace{f(\frac{1}{n})+\cdots+f(\frac{1}{n})}_{m\text{بار}} = mf(\frac{1}{n}) = \frac{m}{n}f(1)$$

به این ترتیب حکم مسأله، که مثال خوبی از روش تپه نوردی است، ثابت می‌شود.

۱ـ۷ـ۳ ثابت کنید که مساحت یک مثلث مشبکه‌ای مساوی است با $I + \frac{1}{2}B - 1$ که در آن I و B به ترتیب عبارت‌اند از تعداد نقطه‌های مشبکه‌ای درونی و روی مرز مثلث. (مثلث مشبکه‌ای مثلثی واقع در صفحه است که رأسهای آن نقطه‌های مشبکه‌ای (یعنی با مختصات صحیح) هستند.)

حل. این حالت خاصی از قضیهٔ پیک (*pick*) است (۲-۳-۱ را ببینید). چندین راه‌حل زیرکانه برای حل این مسأله وجود دارد که در هر یک از آنها، مجموعهٔ مثلثهای مشبکه‌ای به چند نوع خاص تقسیم می‌شوند. یکی از این راهها آن است که مثلث مورد بحث را در مستطیلی که ضلعهای آن موازی با محورهای مختصات است، محاط کنیم. دست کم باید یکی از رأسهای مستطیل بر یکی از رأسهای مثلث منطبق شود. می‌توان بررسی کرد که هر مثلث مشبکه‌ای را می‌توان در یکی از رده‌های ناهم‌ارزی که در شکل ۱-۲۵ آمده است، طبقه‌بندی کرد.



شکل۱-۲۵

در ردهٔ اول، مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای قرار دارند که ضلعهای زاویهٔ قائمه آنها موازی با محورهای مختصات‌اند. ردهٔ دوم شامل مثلثهای حاده‌ای است که یک ضلع آنها موازی با یکی از محورهای مختصات است. هر مثلث از این نوع مساوی با «مجموع» دو مثلث از نوع اول است. در ردهٔ سوم مثلثهای منفرجه‌ای قرار دارند که یک ضلع آنهاموازی با یکی از محورهای مختصات است. آنها «تفاضل» دو مثلث از نوع اول هستند. رده‌های چهارم و پنجم مثلثهایی را در بردارند که هیچ یک از ضلعهای آنها با محورهای مختصات موازی نیستند.

برهان حکم مثالی از الگوی تپه نوردی است. برای شروع، مستطیل $ABCD$ را در حالت اول در نظر بگیرید. فرض کنید که پاره‌خطهای AB و AD، به جز نقطه‌های انتهایشان، به ترتیب شامل a و b نقطهٔ مشبکه‌ای باشند. در این صورت اگر $ABCD$، I نقطهٔ درونی و B نقطهٔ مرزی داشته باشد، داریم

$$\begin{aligned} I+\frac{۱}{۲}B-۱ &= ab+\frac{۱}{۲}(۲a+۲b+۴)-۱ \\ &= ab+a+b+۱=(a+۱)(b+۱)=ABCD \text{ مساحت} \end{aligned}$$

حال فرض کنید که روی پاره‌خطهای AB، BC و AC به جز نقاط انتهایشان، به ترتیب a، b و c نقطهٔ مشبکه‌ای قرار داشته و فرض کنید که مثلث ABC، i نقطهٔ درونی داشته باشد. در این صورت مستطیل $ABCD$، $۲i+c$ نقطهٔ درونی خواهد داشت و اگر ABC، I نقطهٔ درونی و B نقطهٔ مرزی داشته باشد، داریم

$$\begin{aligned} I+\frac{۱}{۲}B-۱ &= i+\frac{۱}{۲}(a+b+c+۳)-۱ \\ &= \frac{۱}{۲}(۲i+a+b+c+۱) \\ &= \frac{۱}{۲}\left[(۲i+c)+\frac{۱}{۲}(۲a+۲b+۴)-۱\right] \\ &= \frac{۱}{۲}(ABCD\text{مساحت})=ABC\text{مساحت} \end{aligned}$$

حالتهای دیگر را نیز می‌توان به روشی مشابه بررسی کرد که ما آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

مسائل

۱ـ۷ـ۴ (نابرابری مثلثی)

الف) ثابت کنید که به ازای همهٔ عددهای حقیقی x و y، $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

ب) ثابت کنید که به ازای همهٔ عددهای حقیقی x، y و z، $|x-y|\leqslant|x-z|+|y-z|$.

۱ـ۷ـ۵ همهٔ مقدارهای x را که در نامعادلهٔ زیر صدق می‌کنند، بیابید

$$\frac{۳}{x-۱}<\frac{۲}{x+۱}$$

۱ـ۷ـ۶ فرض کنید

$$S=\{i(۳,۸)+j(۴,-۱)+k(۵,۴) \mid \text{عددهای صحیح‌اند } k \text{، } j \text{، } i\}$$

و

$$T=\{m(۱,۵)+n(۰,۷) \mid \text{عددهای صحیح‌اند } n \text{ و } m\}$$

ثابت کنید $S=T$. (توجه: در جمع جفتهای مرتب عددهای صحیح، مؤلفه‌هایشان با هم جمع می‌شوند، یعنی $(s,t)+(s',t')=(s+s',t+t')$ وهمچنین $n(s,t)=(ns,nt)$.)

۱ـ۷ـ۷ تابع f با مقدار حقیقی که روی مجموعهٔ عددهای گویای مثبت تعریف شده است، به ازای همهٔ عددهای گویای مثبت x و y در رابطهٔ $f(x+y) = f(x)f(y)$ صدق می‌کند. ثابت کنید که به ازای همهٔ عددهای گویای مثبت x، $f(x) = [f(۱)]^x$.

۱ـ۷ـ۸ اگر به ازای همهٔ عددهای حقیقی x و y داشته باشیم $F(x)F(y) - F(xy) = x + y$، تابع $F(x)$ را مشخص کنید.

مثالهای اضافی. ۱-۱-۷، ۲-۵-۱۱ (ج)، ۲-۵-۱۲، ۲-۵-۱۳، ۲-۶-۳، ۳-۲-۱۴، ۳-۲-۱۵، ۳-۲-۱۶، ۳-۲-۱۷، ۳-۲-۱۸، ۳-۴-۱، ۴-۱-۳، ۴-۱-۴، ۴-۴-۱۴، ۴-۴-۲۹، ۵-۲-۱، ۵-۳-۱۴ (ج)، ۶-۵-۴، ۷-۴-۳، ۷-۶-۲، ۷-۶-۴، ۷-۶-۱۰، ۸-۲-۴. برخی از مثالهایی که هر یک از نظری جالب هستند و به بررسی حالتهای بسیار خاصی منجر می‌شوند، عبارت‌اند از ۳-۳-۸، ۳-۳-۹، ۳-۳-۲۱، ۳-۳-۲۲،۳-۳-۲۶ .

۱ـ۸ عمل قهقرایی

عمل به قهقرا در یک مسأله به معنای آن است که نتیجهٔ آن مسأله را بپذیریم و بر این اساس، پس از نتیجه‌گیریهای متوالی از نتیجه، به آنچه معلوم است یا به حکمی که بتوان آن را به سادگی ثابت کرد، دست یابیم. پس از رسیدن به فرض یا معلوم، مراحل استدلال را معکوس می‌کنیم و به سوی حکم اصلی پیش می‌رویم.

این شیوه در جبر و مثلثات دبیرستانی معمول است. مثلاً برای یافتن همهٔ عددهای حقیقی که در معادلهٔ $۲x + ۳ = ۷$ صدق می‌کنند، به شکل زیر استدلال می‌کنیم. فرض کنید x در معادلهٔ $۲x + ۳ = ۷$ صدق کند. در این صورت با کاستن ۳ از دو طرف معادله و تقسیم دو طرف آن بر ۲، به دست می‌آوریم $x = ۲$. از آنجا که هر یک از گامهای به کار رفته در استدلال برگشت پذیر است، نتیجه می‌گیریم که ۲ واقعاً در معادلهٔ $۲x + ۳ = ۷$ صدق می‌کند و این تنها جواب ممکن است.

اغلب در عملهای رایجی چون مثال قبلی، بازنویسی گامهای استدلال به شکل صریح انجام نمی‌شود. ولی این مطلب مهم است که بدانیم چه چیزی برگشت پذیر است و چه چیزی برگشت پذیر نیست. مثلاً معادلهٔ $\sqrt{x+۱} - \sqrt{x-۱} = ۲$ را در نظر بگیرید. (در اینجا مطابق معمول، ریشه دوم مثبت در نظر گرفته شده است.) معادله را به شکل $\sqrt{x+۱} = \sqrt{x-۱} + ۲$ بنویسید و دو طرف را به توان دو برسانید تا به دست آورید $x + ۱ = x - ۱ + ۴\sqrt{x-۱} + ۴$ یا معادلاً $\sqrt{x-۱} = -\frac{۱}{۲}$. اگر بار دیگر دو طرف را به توان دو برسانیم، به دست می‌آوریم $x - ۱ = \frac{۱}{۴}$ یا $x = \frac{۵}{۴}$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که اگر عددی چون x در معادلهٔ $\sqrt{x+۱} - \sqrt{x-۱} = ۲$ صدق کند، آن عدد باید $\frac{۵}{۴}$ باشد. ولی $\frac{۵}{۴}$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند. دلیل آن است که گامهای استدلال برگشت‌پذیر نیستند، به این معنی که در این مثال از برابری $\sqrt{x-۱} = -\frac{۱}{۲}$ به برابری $x - ۱ = \frac{۱}{۴}$ می‌رسیم. ولی وقتی عملیات را به ترتیب عکس در نظر بگیریم، از $x - ۱ = \frac{۱}{۴}$ به $\sqrt{x-۱} = \frac{۱}{۲}$ خواهیم رسید.

۱ـ۸ـ۱ فرض کنید α عدد حقیقی ثابتی باشد که $۰ < \alpha < \pi$ و قرار دهید

$$F(\theta) = \frac{\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)} \quad , \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha$$

نشان دهید که F عددی ثابت است (طی مسألهٔ ۱-۲-۱ به این مسأله رسیدیم).

حل. فرض کنید که F عددی ثابت باشد. در این صورت به ازای هر θ که $\circ \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha$ دار. $F(\theta) = F(\circ)$. این می‌رساند که

$$\frac{\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\text{۱} - \cos\alpha}, \qquad (\text{۱})$$

$$[\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)]\,[\text{۱} - \cos\alpha] = \sin\alpha\,[\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)], \qquad (\text{۲})$$

$$\begin{aligned}&\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - \sin\theta\cos\alpha - \sin(\theta+\alpha)\cos\alpha\\ &\qquad = \sin\alpha\cos\theta - \sin\alpha\cos(\theta+\alpha),\end{aligned} \qquad (\text{۳})$$

$$\begin{aligned}&\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - [\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta]\\ &\qquad - [\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\theta+\alpha)] = \circ,\end{aligned} \qquad (\text{۴})$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta+\alpha-\alpha) = \circ \qquad (\text{۵})$$

آخرین تساوی یک اتحاد است. برای برهان، باید مراحل استدلال را به عکس در نظر بگیریم. تنها گامی که سؤال برانگیز است، رسیدن از (۲) به (۱) است زیرا برهان تنها وقتی معتبر است که در رسیدن از (۲) به (۱)، تقسیم بر صفر صورت نگیرد. ولی چون $\pi > \alpha > \circ$ داریم $\circ \neq (\text{۱} - \cos\alpha)$ و نیز $\cos\theta - \cos(\theta+\alpha) > \circ$ زیرا $\pi \leqslant \theta + \alpha > \theta \leqslant \circ$. بنابراین، برهان انجام‌پذیر است، یعنی اینکه با شروع از اتحاد معلوم (۵)، می‌توانیم (با استفاده از مراحل (۴)، (۳)، (۲)و (۱)) استدلال کنیم که به ازای هر θ که $\circ \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha$،

$$F(\theta) = \frac{\sin\alpha}{(\text{۱} - \cos\alpha)} = \text{مقدار ثابت}$$

۱ـ۸ـ۲ اگر a، b، c طول ضلعهای یک مثلث باشند، نشان دهید

$$\text{۳}(ab+bc+ca) \leqslant (a+b+c)^{\text{۲}} \leqslant \text{۴}(ab+bc+ca)$$

حل. نابرابری طرف چپ را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\text{۳}(ab+bc+ca) &\leqslant (a+b+c)^{\text{۲}},\\ \text{۳}(ab+bc+ca) &\leqslant a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}+c^{\text{۲}}+\text{۲}(ab+bc+ca),\\ ab+bc+ca &\leqslant a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}+c^{\text{۲}},\end{aligned}$$

$$a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}+c^{\text{۲}}-ab-bc-ca \geqslant \circ,$$

$$\text{۲}a^{\text{۲}}+\text{۲}b^{\text{۲}}+\text{۲}c^{\text{۲}}-\text{۲}ab-\text{۲}bc-\text{۲}ca \geqslant \circ,$$

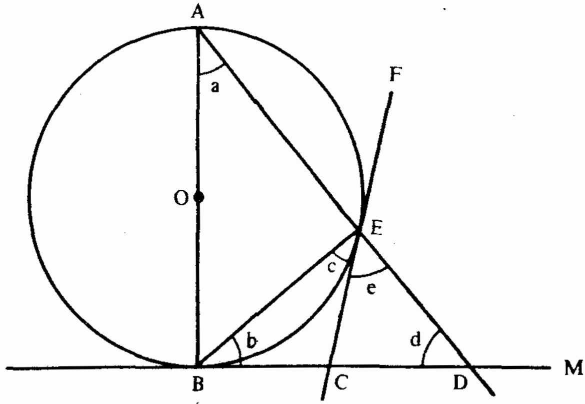
$$(a^{\text{۲}}-\text{۲}ab+b^{\text{۲}})+(b^{\text{۲}}-\text{۲}bc+c^{\text{۲}})+(c^{\text{۲}}-\text{۲}ca+a^{\text{۲}}) \geqslant \circ,$$

$$(a-b)^{\text{۲}}+(b-c)^{\text{۲}}+(c-a)^{\text{۲}} \geqslant \circ$$

نابرابری آخر به ازای همهٔ مقدارهای a، b و c درست است. حال نابرابری طرف راست را در نظر بگیرید:

$$(a+b+c)^{\text{۲}} \leqslant \text{۴}(ab+bc+ca),$$

$$a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}+c^{\text{۲}}+\text{۲}(ab+bc+ca) \leqslant \text{۴}(ab+bc+ca),$$



شکل۱-۲۶

$$a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} \leqslant ۲(ab + bc + ca)$$

$$a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} \leqslant a(b + c) + b(a + c) + c(b + a)$$

نابرابری آخری درست است زیرا در هر مثلث، مجموع دو ضلع، بزرگتر از ضلع سوم است. بنابراین، $a^{۲} \leqslant a(b + c)$، $b^{۲} \leqslant b(a + c)$ و $c^{۲} \leqslant c(b + a)$.

از آنجا که می‌توان هر یک از مراحل استدلال را بر عکس کرد، برهان کامل است.

۱ـ۸ـ۳ اگر AOB قطری از دایرهٔ O، BM مماس بر دایره در B، CF مماس بر دایره در E، C محل تلاقی آن با BM و D محل برخورد ادامهٔ وتر AE با BM باشد، ثابت کنید $BC = CD$. (شکل ۱-۲۶ را ببینید.)

حل. فرض کنید $BC = CD$. در این صورت $CE = CD$ زیرا $BC = CE$ (مماسهای رسم شده از C بر دایره در نقطه‌های E و B، مساوی‌اند). در نتیجه $\angle CED = \angle CDE$ (زاویه‌های مجاور به قاعده در مثلث متساوی‌الساقین، مساوی‌اند). این نتایج ما را راهنمایی می‌کنند تا زاویه‌هایی را که در شکل ۱-۲۶ نامگذاری شده‌اند، بررسی کنیم. می‌دانیم که $\angle d$ متمم $\angle a$ است زیرا $\triangle ABD$ قائم‌الزاویه است و نیز $\angle e$ متمم $\angle c$ است زیرا $\triangle BEA$ قائم‌الزاویه است (AOB قطر دایره است). در نتیجه $\angle c = \angle a$. ولی می‌دانیم که $\angle a = \angle c$، زیرا هر دوی آنها رو به روبه کمان BE از دایرهٔ O هستند.

حال می‌توان با معکوس کردن مراحل استدلال، برهان را کامل کرد. بنابراین (برهانها حذف شده‌اند) $\angle a = \angle c$ و در نتیجه $\angle d = \angle e$. نتیجتاً $CD = CE$، $CE = BC$ و بنابراین $BC = CD$.

۱ـ۸ـ۴ در یک مسابقهٔ ورزشی، n بازیکن $P_{۱}$، $P_{۲}$، ...، P_{n} شرکت دارند که در آن $n > ۱$ و هر یک از بازیکنان، یک بار با هر بازیکن دیگر مسابقه می‌دهد و قانون بازی طوری است که هیچ‌گاه به تساوی نمی‌انجامد. فرض کنید W_{r} و L_{r} به ترتیب تعداد بازیهای برده و باختهٔ بازیکن P_{r} باشد. نشان دهید که

$$\sum_{r=۱}^{n} W_{r}^{۲} = \sum_{r=۱}^{n} L_{r}^{۲}$$

حل. فرض کنید $\sum_{r=1}^{n} L_r^2 = \sum_{r=1}^{n} W_r^2$. در این صورت

$$\sum_{r=1}^{n}(W_r^2 - L_r^2) = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n}(W_r + L_r)(W_r - L_r) = 0$$

ولی به ازای هر r، $W_r + L_r = n - 1$، در نتیجه

$$(n-1)\sum_{r=1}^{n}(W_r - L_r) = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n}(W_r - L_r) = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} L_r$$

تساوی آخر درست است زیرا تعداد کل بازیهای برده و تعداد کل بازیهای باختهٔ n بازیکن، با هم مساوی‌اند. با معکوس کردن استدلال بالا، برهان حاصل می‌شود.

مسائل

۱ـ۸ـ۵ الف) ثابت کنید که به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y،

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

ب) اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند به طوری که $a + b = 1$، ثابت کنید

$$\frac{2}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}} \leqslant ax + by \qquad , \qquad x > 0, y > 0$$

۱ـ۸ـ۶ الف)اگر a، b، c عددهای حقیقی و مثبت باشند و $a < b + c$، نشان دهید که

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

ب) اگر a، b، c طولهای سه پاره‌خط باشند که بتوانند ضلعهای یک مثلث را تشکیل دهند، نشان دهید که همین حکم دربارهٔ $\frac{1}{(a+c)}$، $\frac{1}{(b+c)}$ و $\frac{1}{(a+b)}$ نیز درست است.

۱ـ۸ـ۷ دو دایره در A مماس خارج‌اند و یک مماس مشترک بیرونی در B و C بر آنها مماس است. پاره‌خط BA را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ دوم را در D قطع کند. ثابت کنید که CD قطری از دایره است.

۱ـ۸ـ۸ استدلال زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید θ در معادلهٔ

$$\cot\theta + \tan 3\theta = 0$$

صدق کند. در این صورت از برابری

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}&\cot\theta+\frac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta}=0,\\&\cot\theta(1-\tan\theta\tan 2\theta)+\tan\theta+\tan 2\theta=0,\\&\cot\theta-\tan 2\theta+\tan\theta+\tan 2\theta=0,\\&\cot\theta+\tan\theta=0,\\&1+\tan^2\theta=0,\\&\tan^2\theta=-1\end{aligned}$$

از آنجا که معادلهٔ آخر نمی‌تواند بر قرار باشد، در نتیجه معادلهٔ اصلی فاقد جواب است (نیازی به معکوس کردن مراحل استدلال نداریم، زیرا آخرین مرحله جای بحثی را باقی نمی‌گذارد). با وجود این، $\theta=\frac{1}{4}\pi$ در معادلهٔ $\cot\theta+\tan 3\theta=0$ صدق می‌کند. کجای استدلال بالا نادرست است؟

۱ـ۸ـ۹ با استفاده از ابزارهای اقلیدسی یعنی ستاره (خطکش نامدرج) و پرگار، مربعی را در یک مثلث مفروض طوری محاط کنید که یکی از ضلعهای مربع، روی ضلع معینی از مثلث مفروض قرار بگیرد. (راهنمایی: از مربع شروع کنید و مثلثی متشابه با مثلث مفروض، دور مربع بسازید. سپس از این واقعیت استفاده کنید که شکلهای متشابه، اجزای متناسب دارند.)

مثالهای اضافی. ۲-۱-۵، ۷-۱-۱، ۷-۴-۶. همچنین بخش ۲-۲ (استقرا) و بخش ۲-۵ (بازگشت) را ببینید.

۱ـ۹ استدلال از راه تناقض

استدلال از راه تناقض، آن است که حکم مسأله را نادرست فرض کنیم و سپس بر اساس این فرض، با استنتاجهای متوالی به نتیجه‌ای برسیم که یا با فرض مسأله در تناقض است (روش غیر مستقیم) و یا با حقیقتی که درستی آن معلوم است، تناقض دارد (برهان خلف). مثلاً برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$، می‌توانیم آن را عددی گویا فرض کنیم و بر اساس این فرض، به تناقضی برسیم. این روش استدلال اغلب در مواقعی به کار می‌رود که بتوان حکم مسأله را به سادگی نفی کرد، یا فرضهای مسأله امکان کمی برای استدلال فراهم می‌آورند، و یا هنگامی به کار می‌رود که ایدهٔ مناسبی برای نحوهٔ عمل به ذهن نمی‌رسد.

به عنوان مثال ساده‌ای از این روش اثبات، استدلال زیر را در نظر بگیرید که ثابت می‌کند سری همساز واگراست. به عکس فرض می‌کنیم که سری به عددی چون r همگرا باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}r&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots\\&>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\dots\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\\&=r\end{aligned}$$

اما این یک تناقض است. به ناچار می‌پذیریم که سری همساز واگراست.

۱ـ۹ـ۱ با فرض اینکه a، b، c عددهای صحیح فردند، ثابت کنید که معادلهٔ $ax^{۲} + bx + c = ۰$ ریشهٔ گویا ندارد.

حل. فرض کنید p/q ریشه‌ای گویا باشد که در آن (بدون کاسته شدن از کلیت مسأله) p و q هر دو عددهای صحیح زوج نیستند. ابتدا ثابت می‌کنیم که نه p زوج است و نه q. فرض کنید p زوج باشد. از تساوی $a(p/q)^{۲} + b(p/q) + c = ۰$ نتیجه می‌شود که $ap^{۲} + bpq + cq^{۲} = ۰$. چون $ap^{۲} + bpq$ زوج است، $cq^{۲}$ نیز زوج خواهد بود ولی این غیر ممکن است زیرا c و q هر دو فردند. به همین ترتیب اگر فرض کنیم که q زوج است به تناقض می‌رسیم. در نتیجه p و q هر دو فردند و $ap^{۲} + bpq + cq^{۲} = ۰$. ولی این تساوی بیان می‌کند که مجموع سه عدد فرد مساوی با صفر می‌شود که غیر ممکن است.

بررسی راه حل دیگری از این مسأله آموزنده است. ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲} + bx + c = ۰$ وقتی و فقط وقتی گویا هستند که $b^{۲} - ۴ac$ مربع کامل باشد. در نتیجه فرض کنید که به ازای عدد صحیحی چون n، $b^{۲} - ۴ac = (۲n + ۱)^{۲}$ (بنابر فرض مسأله، $b^{۲} - ۴ac$ فرداست و بنابراین اگر به شکل مربع کامل باشد، باید مربع عدد فردی باشد). با انتقال مضربهای ۴ به یک طرف، خواهیم داشت

$$b^{۲} - ۱ = ۴\,[n(n+۱) + ac]$$

از آنجا که یکی از دو عدد n و $n + ۱$ زوج است، عدد $n(n+۱) + ac$ فرد است. در نتیجه طرف راست تساوی بالا بر ۴ بخشپذیر است اما بر ۸ بخشپذیر نیست در صورتی که طرف چپ بر ۸ بخشپذیر است زیرا $b^{۲} - ۱ = (b-۱)(b+۱)$ و یکی از دو عدد $b - ۱$ و $b + ۱$ بر ۲ و دیگری بر ۴ بخشپذیر است. بنابراین تساوی بالا نمی‌تواند برقرار باشد و این تناقض است. (در این برهان با بررسی وضعیت دو عدد نسبت به مضربهای عدد ۸ به تناقض رسیدیم، بر خلاف برهان اول که این کار را نسبت به مضربهای ۲ انجام دادیم. در بخش ۳-۲ به بررسی عمیقتری از این روش می‌پردازیم.)

دو بخش بعدی، شامل مثالهای بیشتری از استدلال از راه تناقض هستند.

مسائل

۱ـ۹ـ۲ درضیافتی که ۲۰۰۰ نفر در آن شرکت دارند، بین هر چهار نفر، دست کم یک نفر سه تای دیگر را می‌شناسد. سه نفر هستند که هیچیک، دیگری را نمی‌شناسد. ثابت کنید که ۱۹۹۷ نفر بقیه، همهٔ مهمانهای دیگر را می‌شناسند. (فرض کنید که «آشنایی» رابطه‌ای متقارن باشد، یعنی اگر A، B را بشناسد، B نیز A را بشناسد. اگر «آشنایی» لزوماً متقابل نباشد، پاسخ چیست؟)

۱ـ۹ـ۳ ثابت کنید که عددهای صحیح و مثبتی مانند a، b، c و n وجود ندارند به طوری که $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} = ۲^{n}abc$. (با توجه به مسألهٔ ۱-۴-۳، می‌توانیم فرض کنیم که a و b فرد و c زوج باشد. دو طرف تساوی چگونه با عدد ۴ مرتبط هستند؟)

۱ـ۹ـ۴ هر جفت از شهرهای یک استان، دقیقاً با یک نوع وسیلهٔ حمل و نقل یعنی اتوبوس، قطار یا هواپیما مستقیماً به هم مرتبط هستند. می‌دانیم که از هر سه نوع وسیلهٔ حمل و نقل در استان استفاده می‌شود، هیچ شهری هر سه نوع وسیله را به کار نمی‌گیرد و هیچ سه شهری نیستند که هر سه با یک نوع وسیلهٔ حمل و نقل به هم مرتبط باشند.

می‌توان چهار شهر را با توجه به شرطهای بالا به شکل زیر به هم مرتبط کرد: AB، BC، CD، DA به وسیلهٔ اتوبوس، AC به وسیلهٔ قطار، BD به وسیلهٔ هواپیما.

الف) با استدلال، نشان دهید که هیچ شهری نمی‌تواند تنها با یک نوع وسیلهٔ حمل و نقل به سه شهر دیگر مرتبط باشد.

ب) برهانی بیاورید که نشان دهد که پنج شهر نمی‌توانند به روش بالا به هم مرتبط باشند.

۱ـ۹ـ۵ فرض کنید S مجموعه‌ای از عددهای گویا باشد که نسبت به دو عمل جمع و ضرب بسته است (یعنی وقتی که a و b عضوهای S باشند، $a+b$ و ab نیز عضوهای S باشند) و این ویژگی را دارد که به ازای هر عدد گویای r، دقیقاً یکی از سه گزارهٔ $r \in S$ ، $-r \in S$، $r = ۰$ برقرار است.

الف) ثابت کنید که ۰ به S تعلق ندارد.

ب) ثابت کنید که همهٔ عددهای صحیح مثبت به S تعلق دارند.

ج) ثابت کنید که S مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای مثبت است.

مثالهای اضافی. ۱-۵-۱۰، ۱-۶-۷، ۳-۲-۱، ۳-۲-۶، ۳-۲-۱۱، ۳-۲-۱۳، ۳-۲-۱۵، ۳-۲-۱۷، ۳-۲-۱۸، ۳-۳-۴، ۳-۳-۱۱، ۳-۳-۱۵، ۳-۳-۲۸، ۳-۴-۲، ۴-۱-۳، ۴-۴-۶، ۵-۴-۱. همچنین بخش ۱-۱۰ (زوجیّت) و بخش ۱-۱۱ (حالتهای انتهایی) را ببینید.

۱ـ۱۰ دنبال کردن زوجیت

مفهوم سادهٔ زوجیت، یعنی زوج بودن و فرد بودن، مفهوم نیرومندی در حل مسائل است که کاربردهای متعدد و بسیار گسترده‌ای دارد. در این بخش، به ذکر چند مثال می‌پردازیم و سپس در بخش ۳-۲، این مفهوم را تعمیم می‌دهیم.

۱ـ۱۰ـ۱ نُه نقطهٔ مشبکه‌ای در فضای سه بعدی اقلیدسی مفروض است. نشان دهید که روی پاره خطی که دو نقطه از این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کند، نقطه‌ای مشبکه‌ای وجود دارد.

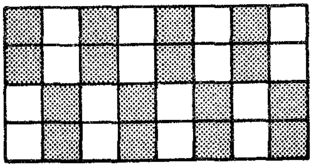
حل. تنها هشت الگوی زوجیت برای نقطه‌های مشبکه‌ای وجود دارد: (زوج، زوج، زوج)، (زوج، زوج، فرد)، ...، (فرد، فرد، فرد). از آنجا که نُه نقطهٔ مشبکه‌ای داریم، باید دو تای آنها زوجیت یکسان داشته باشند. نقطهٔ وسط پاره خط واصل بین این دو نقطه، یک نقطهٔ مشبکه‌ای است و برهان کامل است.

۱ـ۱۰ـ۲ روی هر یک از خانه‌های یک صفحه شطرنج ۷ × ۷، یک اسب قرار می‌دهیم. آیا برای هر یک از اسبها امکان دارد که به طور همزمان حرکت مجازی را انجام دهد؟

حل. فرض کنید که صفحهٔ شطرنج با الگوی معمول شطرنجی رنگ آمیزی شده باشد. این صفحه ۴۹ خانه دارد. فرض کنید ۲۴ تای آنها سفید و ۲۵ تای آنها سیاه باشند.

۲۵ اسبی را که روی خانه‌های سیاه قرار دارند، در نظر بگیرید. اگر هر یک از آنها می‌توانستند حرکت مجازی انجام دهند، همگی به ۲۵ خانه سفید منتقل می‌شدند. ولی تنها ۲۴ خانهٔ سفید وجود دارد و در نتیجه چنین حرکتی ممکن نیست.

۱ـ۱۰ـ۳ یک اسب روی صفحهٔ شطرنج ۴ در n قرار می‌دهیم. آیا می‌توان با $۴n$ حرکت متوالی اسب، از



شکل۱-۲۷

همهٔ خانه‌های صفحه عبور کرد و به خانهٔ اول بازگشت؟

حل. پیش از حل این مسأله، جالب است همین مسأله را روی یک صفحهٔ شطرنج ۷ در ۷ در نظر بگیریم. فرض کنید که توانسته باشیم چنین مسیری را بیابیم. در حرکت اول، اسب به خانه‌ای با رنگ مخالف منتقل می‌شود، در حرکت دوم به خانه‌ای همرنگ می‌رود و الی‌آخر. ملاحظه می‌کنیم که پس از تعداد فردی از حرکتها، رنگ خانه‌ای که اسب اشغال خواهد کرد مخالف رنگ خانهٔ اولی است. ولی مسیر بسته‌ای که همهٔ خانه‌های صفحهٔ ۷ در ۷ را بپیماید، نیازمند ۴۹ حرکت است که این عددی فرد است. بنابراین اسب نمی‌تواند به خانهٔ اولی‌اش بازگردد و مسیر بستهٔ مورد نظر ممکن نیست.

اکنون صفحهٔ ۴ در n را در نظر می‌گیریم. استدلالی که دربارهٔ صفحهٔ ۷ در ۷ به کار رفت در اینجا سودمند نیست زیرا $4n$ عددی زوج است. برای حل این مسأله، صفحه را مطابق شکل ۱-۲۷ رنگ آمیزی می‌کنیم.

توجه کنید که اگر اسب از خانه‌های سفید واقع در سطرهای بالایی یا پایینی حرکت کند، در یکی از خانه‌های سفید سطرهای دوم یا سوم قرار خواهد گرفت. به عکس در مسیری از نوع مطلوب، اسب لزوماً باید از دو سطر وسطی به خانه‌های سفید واقع در دو سطر کناری برود، زیرا، در دو سطر کناری دقیقاً n خانهٔ سفید وجود دارد و تنها می‌توان از طریق n خانهٔ سفید واقع در دو سطر وسطی به آنها رسید. بنابراین مسیر یک اسب، هیچ گاه نمی‌تواند از خانه‌های سفید شروع شده و به خانه‌های سیاه ختم شود و در نتیجه چنین مسیر بسته‌ای ناممکن است.

۱ـ۱۰ـ۴ فرض کنید n عدد صحیح فردی بزرگتر از ۱ باشد و A ماتریس n در n و متقارنی باشد که هر سطر و هر ستون A، از جایگشتی روی عددهای ۱، ...، n، به وجود آمده است. نشان دهید که هر یک از عددهای ۱، ...، n روی قطر اصلی A ظاهر می‌شوند.

حل. درایه‌های غیر قطری A به صورت جفت جفت ظاهر می‌شوند زیرا A متقارن است. هر عدد دقیقاً n بار ظاهر می‌شود و با توجه به فرد بودن n، حکم ثابت می‌شود.

۱ـ۱۰ـ۵ فرض کنید a_1، a_2، ...، a_{2n+1}، مجموعه‌ای از عددهای صحیح با این ویژگی باشند که اگر هرکدام از آنها را حذف کنیم، عددهای صحیح باقیمانده را بتوان به دو مجموعهٔ n عددی تقسیم کرد به طوری که مجموع عضوهای این مجموعه‌ها با هم مساوی باشند (این ویژگی را P می‌نامیم). ثابت کنید $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2n+1}$.

حل. ابتدا توجه کنید که همهٔ عددهای a_1، ...، a_{2n+1} زوجیت یکسان دارند (همه زوج یا همه فردند). برای

درک این مطلب، فرض می‌کنیم $A = a_۱ + \cdots + a_{۲n+۱}$. ادعای ما از آنجا نتیجه می‌شود که به ازای هر i، $A - a_i$ زوج است (زیرا در غیر این صورت نمی‌توانستیم آن را به روش مورد نظر تقسیم کنیم).

فرض کنید a کوچکترین عدد بین $a_۱$، … ، $a_{۲n+۱}$ باشد و به ازای هر i، قرار دهید $b_i = a_i - a$. مسأله موردنظر معادل است با این که ثابت کنیم به ازای هر i، $b_i = ۰$.

فرض کنید $b_۱$، $b_۲$، … ، $b_{۲n+۱}$ در شرط (P) صدق کنند. از آنجا که یکی از آنها صفر است، بقیه باید زوج باشند. اگر همهٔ آنها صفر نباشند، k را بزرگترین عدد صحیح مثبتی فرض می‌کنیم که به ازای آن، ۲^k هر یک از b_iها را بشمارد. به ازای هر i، قرار می‌دهیم $c_i = \frac{b_i}{۲^k}$. در این صورت $c_۱$، $c_۲$، … ، $c_{۲n+۱}$ در شرط (P) صدق می‌کنند ولی زوجیت همهٔ آنها یکسان نیست (زیرا یکی از آنها صفر است و با توجه به انتخاب k، یکی از آنها فرد خواهد بود). در نتیجه، همهٔ b_i ها صفرند و برهان کامل است.

مسائل

۱ـ۱۰ـ۶ الف) از یک صفحهٔ شطرنج معمولی ۸ در ۸، خانه‌های واقع در گوشهٔ پایینی چپ و گوشهٔ بالایی راست را حذف می‌کنیم. آیا می‌توان صفحهٔ حاصل را با استفاده از ۳۱ مستطیل ۱×۲ پوشاند به طوری که هر یک از مستطیلها دو خانهٔ مجاور صفحه را بپوشانند؟

ب) سیزده نقطهٔ $P_۱$، … ، $P_{۱۳}$ در صفحه داده شده‌اند. فرض کنید که این نقاط به وسیلهٔ پاره‌خطهای $P_۱P_۲$، $P_۲P_۳$، … ، $P_{۱۲}P_{۱۳}$، $P_{۱۳}P_۱$ به هم وصل شده باشند. آیا می‌توان خط راستی رسم کرد که هر یک از این پاره‌خطها را درون آن قطع کند؟

۱ـ۱۰ـ۷ الف) آیا می‌توان در شکل ۱-۲۸ (الف)، مسیری را انتخاب کرد که در طی آن از هر یک از کمانها یک و تنها یک بار عبور کنیم؟ (راهنمایی: تعداد کمانهایی را که از هر یک از رأسها خارج شده‌اند، بشمارید.)

ب) آیا می‌توان در شکل ۱-۲۸ (ب)، مسیری را انتخاب کرد که در طی آن، از هر نقطهٔ تقاطع، یک و تنها یک بار عبور کنیم؟ (راهنمایی: رأسها را به صورت یک در میان رنگ کنید.)

۱ـ۱۰ـ۸ فرض کنید $a_۱$،$a_۲$ ، … ، a_n ترتیب دلخواهی از عددهای ۱، ۲، … ، n باشند. ثابت کنید درصورتی که n فرد باشد، حاصلضرب

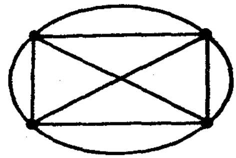
$$(a_۱ - ۱)(a_۲ - ۲)\dots(a_n - n)$$

عددی زوج است.

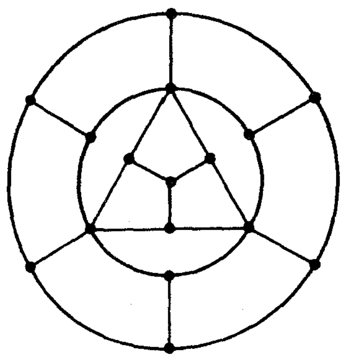
۱ـ۱۰ـ۹ نشان دهید که معادلهٔ $(۲^a - ۱)(۲^b - ۱) = ۲^{۲^c} + ۱$ به ازای عددهای صحیح و نامنفی a، b و c، جواب ندارد. (راهنمایی: معادله را به شکل معادل $۲^{a+b} - ۲^a - ۲^b = ۲^{۲^c}$ بنویسید و حالتهای ممکن برای a، b و c را بررسی کنید.)

۱ـ۱۰ـ۱۰ ثابت کنید که به ازای هر مقدار صحیح مثبت a، معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = a^۳$ همواره جوابهای صحیحی چون x و y دارد.

مثالهای اضافی. ۱-۵-۱۰، ۱-۹-۱، ۲-۲-۷، ۳-۲-۱۳، ۳-۳-۴، ۳-۳-۲۰، ۴-۲-۱۶ (الف)، ۴-۳-۴، ۷-۴-۶. برای تعمیمی از این روش، بخش ۳-۲ را ببینید.



(الف)



(ب)

شکل۱-۲۸

۱ـ۱۱ در نظر گرفتن حالتهای انتهایی

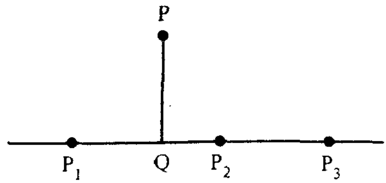
در مراحل اولیهٔ کاوش در یک مسأله، اگر بگذاریم پارامترهای مسأله از یک مقدار انتهایی به مقدار انتهایی دیگر تغییر کند، به حل مسأله کمک خواهد کرد.

در این بخش خواهیم دید که وضعیتهای انتهایی غالباً کلید درک مسأله‌های وجودی است (مسائلی از نوع «ثابت کنید xای وجود دارد که $P(x)$»).

۱ـ۱۱ـ۱ تعدادی متناهی از نقاط یک صفحه را در نظر می‌گیریم که همگی همخط نیستند. ثابت کنید خط راستی وجود دارد که دقیقاً از دو تای آنها می‌گذرد.

حل. فاصلهٔ نقطهٔ P تا خط L را به $d(P, L)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید S مجموعهٔ فاصله‌های مثبت $d(P, L)$ باشد که از تغییر نقطهٔ P روی مجموعهٔ نقطه‌های داده شده، و تغییر L روی مجموعه خطهایی به وجود می‌آیند که از P نمی‌گذرند ولی دست کم از دو نقطهٔ داده شده عبور می‌کنند. مجموعهٔ S ناتهی است (زیرا همهٔ نقاط همخط نیستند) و متناهی است (زیرا تعداد نقطه‌ها و در نتیجه تعداد خطهایی که دست کم از دو تا از این نقطه‌ها می‌گذرند، متناهی است). در نتیجه S کوچکترین عضوی چون $d(P, M)$ دارد. ادعا می‌کنیم که M دقیقاً از دو نقطهٔ این نقاط مفروض می‌گذرد.

فرض کنید که M از سه نقطهٔ P_1، P_2 و P_3 بگذرد و Q نزدیکترین نقطهٔ M به P باشد. دست کم دو تا از نقطه‌های P_1، P_2، P_3 در یک طرف Q قرار دارند (یکی از آنها می‌تواند خود Q باشد)، که آنها را P_2 و P_3 می‌نامیم (شکل ۱-۲۹ را ببینید). فرض کنید نقاط را طوری شماره‌گذاری کرده‌ایم که P_2 به P نزدیکتر باشد تا P_3 به P. حال فرض کنید که N خط گذرنده از نقطه‌های P و P_3 باشد و توجه کنید که $d(P_2, N) < d(P, M)$ که



شکل ۱-۲۹

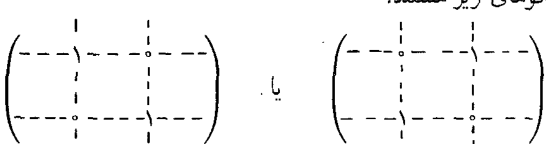
این با انتخاب P و M در تناقض است. از اینجا نتیجه می‌شود که M تنها می‌تواند از دو تا از این نقطه‌ها بگذرد.

۱ـ۱۱ـ۲ فرض کنید A مجموعه‌ای از $2n$ نقطه در صفحه باشد به طوری که هیچ سه نقطهٔ آنها همخط نباشند. فرض کنید n تا از نقطه‌ها را به رنگ قرمز و n نقطهٔ دیگر را به رنگ آبی رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. حکم زیر را ثابت یا رد کنید: n پاره‌خط راست (شامل دو نقطهٔ انتهایی) وجود دارد به طوری که هیچ دوتای آنها نقطهٔ مشترکی ندارند و دو نقطهٔ انتهای هر یک از آنها نقطه‌هایی از مجموعهٔ A با رنگهای متفاوت‌اند.

حل. اگر از متقاطع بودن پاره‌خطها چشمپوشی کنیم، راههای زیادی وجود دارد که بتوانیم به وسیلهٔ n پاره خط از چنین پاره خطهایی n نقطهٔ قرمز را با n نقطهٔ آبی جفت کنیم. به هر یک از این راهها، مجموع طول پاره‌خطهایی را نسبت می‌دهیم که در این پیکربندی به کار رفته‌اند. از آنجا که تعداد چنین جفت کردنهایی متناهی است، یکی از آنها کمترین مجموع طول را دارد. در این جفت کردن، هیچ دو پاره‌خطی یکدیگر را قطع نمی‌کنند. (اگر پاره‌خطهای R_1B_1 و R_2B_2 که در آنها R_1 و R_2 نقطه‌های قرمز و B_1 و B_2 نقطه‌های آبی هستند، یکدیگر را قطع کنند، آن وقت می‌توانیم با جایگزین کردن پاره‌خطهای R_1B_2 و R_2B_1 به جای آنها، مجموع طول پیکربندی را کاهش دهیم.)(برای دیدن راه حل دیگری از این مسأله، ۶-۲-۳ را ببینید.)

۱ـ۱۱ـ۳ در یک دورهٔ مسابقه شطرنج، دو تیم A و B شرکت دارند. فرض کنید هیچ یک از بازیکنان تیم A با همهٔ بازیکنان تیم B بازی نکند ولی هر بازیکن تیم B، دست کم با یکی از بازیکنان تیم A بازی کند. ثابت کنید دو جفت ab و $a'b'$ وجود دارند به طوری که a با b' و b با a' بازی نمی‌کند.

حل. شاید بیان مسأله به زبان ماتریسها موجب شود که آن را بهتر درک کنیم (اگر چه این کار الزامی نیست). فرض کنید که سطرهای ماتریس به تیم A و ستونهای آن به تیم B مربوط شوند. اگر دو بازیکن a و b با هم بازی کنند، در سطر a و ستون b عدد ۱ را قرار می‌دهیم و در غیر این صورت عدد ۰ را می‌گذاریم. از این که هیچ بازیکنی از تیم A با همهٔ بازیکنان تیم B بازی نمی‌کند نتیجه می‌شود که (الف) در هر سطر دست کم یک درایهٔ ۰ وجود دارد. به طور مشابه، نتیجه می‌شود که (ب) در هر ستون نیز دست‌کم یک درایهٔ ۱ وجود دارد. می‌خواهیم ثابت کنیم که دو سطر a و a' و دو ستون b و b' وجود دارند به طوری که درایه‌های موجود در محل برخورد آنها به شکل الگوهای زیر هستند:



فرض کنید h سطری دلخواه باشد. بنابر (الف) درایه‌ای مساوی ۰ در این سطر، مثلاً در ستون k و بنابر (ب)

درایه‌ای مساوی با ۱ در ستون k، مثلاً در سطر m، وجود دارد

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} & & & & & & k & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} h \\ \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\ & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ - & - & 0 & ? & - & - & 1 & - & - & - \end{pmatrix}
\end{array}$$

حال اگر ستونی را بیابیم که در سطر h آن عدد ۱ و در سطر m آن عدد ۰ باشد، حکم ثابت می‌شود. در حالت کلی ممکن است چنین ستونی وجود نداشته باشد. با وجود این اگر در ابتدا h را سطری می‌گرفتیم که بیشترین تعداد ۱ های ممکن را داشته باشد، آن وقت می‌توانستیم چنین ستونی را بیابیم و مسأله حل می‌شد.

حال با توجه به مطالب بالا، می‌توانیم مسأله را به زبانی مستقل از شکل ماتریسی آن بازنویسی کنیم. فرض کنید a بازیکنی باشد که بیشترین تعداد بازی را با بازیکنان تیم B داشته است. فرض کنید b' بازیکنی باشد که با a بازی نمی‌کند و a' بازیکنی باشد که با b' بازی می‌کند. در بین حریفهای a دست کم یک b وجود دارد که با a' بازی نمی‌کند (زیرا در غیر این صورت، تعداد حریفهای a' از a بیشتر می‌شود). جفتهای ab و $a'b'$ مسأله را حل می‌کنند.

۱ـ۱۱ـ۴ ثابت کنید که حاصلضرب n عدد صحیح متوالی همواره بر $n!$ بخشپذیر است.

حل. ابتدا توجه کنید که کافی است مسأله را برای n عدد صحیح مثبت متوالی ثابت کنیم زیرا اگر یکی از عددهای موجود در حاصلضرب ۰ باشد، حکم بدیهی است و اگر همه عددهای صحیح، منفی باشند، کافی است نشان دهیم که $n!$ قدرمطلق حاصلضرب آنها را می‌شمارد.

بنابراین، فرض کنید n عدد صحیح مثبت متوالی وجود داشته باشند به طوری که حاصلضرب آنها بر $n!$ بخشپذیر نباشد. بین چنین n هایی، کوچکترین آنها را انتخاب می‌کنیم و آن را N می‌نامیم. توجه کنید $N > 2$ زیرا حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی همواره زوج است. در نتیجه فرض ما چنین می‌شود که: عدد صحیح و نا منفی m وجود دارد به طوری که $(m+1)(m+2)\ldots(m+N)$ بر $N!$ بخشپذیر نیست. بین چنین m هایی، M را کوچکترین آنها فرض می‌کنیم. توجه کنید که $M > 0$، زیرا $N!$ بر $N!$ بخشپذیر است. به این ترتیب فرض ما به این صورت در می‌آید که $(M+1)(M+2)\ldots(M+N)$ بر $N!$ بخش‌پذیر نیست. حال داریم

$$\begin{aligned}
&(M+1)(M+2)\ldots(M+N-1)(M+N) \\
&\quad = M\left[(M+1)(M+2)\ldots(M+N-1)\right] \\
&\qquad + N\left[(M+1)(M+2)\ldots(M+N-1)\right]
\end{aligned}$$

با توجه به انتخاب M، $N!$ عدد $M\left[(M+1)(M+2)\ldots(M+N-1)\right]$ را می‌شمارد. بنابر انتخاب N ، $(N-1)!$ عدد $(M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)$ را می‌شمارد و در نتیجه $N!$ عدد $N\left[(M+1)(M+2)\ldots(M+N-1)\right]$ را می‌شمارد. با ترکیب این نتیجه‌ها می‌بینیم که $N!$طرف راست معادلهٔ بالا را می‌شمارد که این با فرض در تناقض است. این تناقض، حکم را ثابت می‌کند.

(برهان زیرکانه‌ای از این حکم آن است که توجه کنیم که نسبت $(m+1)(m+2)\ldots(m+n)/n!$ مساوی است با ضریب دو جمله‌ای $\binom{n+m}{n}$ و این ضریب در صورت صحیح بودن عدد m، عددی صحیح است.)

مسائل

۱ـ۱۱ـ۵ فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n با ضریبهای حقیقی باشد به طوری که به ازای هر عدد حقیقی x، $f(x) \geqslant ۰$. نشان دهید که به ازای هر x حقیقی، $f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x) \geqslant ۰$.
(منظور از $f^{(k)}(x)$ مشتق kام $f(x)$ است.)

۱ـ۱۱ـ۶ با ارائهٔ یک مثال، نشان دهید که حکم مسألهٔ ۱-۱۱-۱ الزاماً برای تعداد نامتناهی از نقاط صفحه، برقرار نیست. در حالت نامتناهی، درکدام قسمت برهان مسألهٔ ۱-۱۱-۱ اشکال به وجود می‌آید؟

۱ـ۱۱ـ۷ ثابت کنید که عدد گویایی چون $\frac{c}{d}$ با شرط $d < ۱۰۰$ وجود دارد به طوری که

$$\left[\!\left[k\frac{c}{d}\right]\!\right] = \left[\!\left[k\frac{۷۳}{۱۰۰}\right]\!\right], \qquad k = ۱, ۲, ۳, \ldots, ۹۹ \text{ به ازای}$$

۱ـ۱۱ـ۸ فرض کنید که به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، P_n یک گزاره باشد. همچنین فرض کنید که
الف) $P_۱$ درست است، و
ب) به ازای هر عدد صحیح مثبت m، اگر P_m درست باشد، $P_{m+۱}$ نیز درست است.
ثابت کنید که به ازای هر n، P_n درست است. (راهنمایی: فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح مثبتی باشد که به ازای آنها، P_n درست نباشد. با فرض این که S ناتهی است، m را کوچکترین عضو S بگیرید.)

مثالهای اضافی. ۳-۱-۹، ۳-۳-۱۱، ۳-۳-۲۸، ۴-۴-۷، ۴-۴-۱۰ و مراجعی که در ۶-۳-۷ آمده‌اند. همچنین بخشهای ۷-۶ (اصل فشار) و ۶-۲ (قضیهٔ مقدار میانی) را برای مثالهایی که در آنها نیازمند بررسی حالتهای «اکسترم مانند» هستیم، ببینید.

۱ـ۱۲ تعمیم

ممکن است مهمل به نظر آید، اما اغلب چنین است که وقتی مسأله‌ای را تعمیم می‌دهیم، آن مسأله ساده‌تر، ملموستر و قابل فهم‌تر می‌شود. ریاضیدانان به خوبی ارزشهای این واقعیت را درک کرده‌اند و در حقیقت، تجرید و تعمیم، ویژگیهای اصلی ریاضیات جدید هستند. شکل کلیتری از یک مسأله، دیدگاهی گسترده‌تر را موجب می‌شود، جزئیات غیر ضروری را حذف می‌کند و مجموعه‌ای کامل از تکنیکهای تازه را در اختیار ما می‌گذارد.

۱ـ۱۲ـ۱ مجموع $\sum\limits_{k=۱}^{n} \frac{k^۲}{۲^k}$ را بیابید.

حل. به جای جواب این مسأله، مجموع $S(x) = \sum\limits_{k=۱}^{n} k^۲x^k$ را می‌یابیم و سپس مقدار $S(\frac{۱}{۲})$ را به دست می‌آوریم. دلیل آنکه متغیر x را وارد مسأله کردیم، آن است که با این کار می‌توانیم از تکنیکهای آنالیز استفاده کنیم. می‌دانیم که

$$\sum_{k=۱}^{n} x^k = \frac{۱ - x^{n+۱}}{۱ - x}, \qquad x \neq ۱$$

با مشتقگیری از دو طرف این تساوی به دست می‌آوریم

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(1-x)(-(n+1)x^n)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

دو طرف این تساوی را در x ضرب می‌کنیم و با مشتقگیری مجدد و ضرب نتیجهٔ حاصل در x، به دست می‌آوریم

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k = \frac{x(1+x)-x^{n+1}(nx-n-1)^2-x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$S(\tfrac{1}{2}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{1}{2^{n-2}}\left(\frac{1}{2}n-n-1\right)^2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$= 6 - \left(\frac{n^2+4n+6}{2^n}\right)$$

۱ـ۱۲ـ۲ دترمینان زیر را محاسبه کنید (دترمینان واندرموند):

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

حل. فرض می‌کنیم که اگر $i \neq j$، $a_i \neq a_j$ زیرا در غیر این صورت دترمینان مساوی صفر می‌شود. برای آنکه بتوانیم بر فکر اصلی حل مسأله تمرکز روشنتری داشته باشیم، حالت $n = 3$ را در نظر می‌گیریم:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

در این دترمینان، c را به جای x می‌گذاریم. در این صورت، دترمینان به صورت یک چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ ۲ خواهد بود. همچنین $P(a) = 0$ و $P(b) = 0$ زیرا ماتریس حاصل از قرار دادن a یا b به جای c، دو سطر مساوی دارد. در نتیجه به ازای عدد ثابتی چون A، داریم

$$P(x) = A(x-a)(x-b)$$

در این چندجمله‌ای، A ضریب جملهٔ x^2 است و با توجه به دترمینان، نتیجه می‌گیریم که این ضریب مساوی است با

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

بنابراین $A = b - a$ و دترمینان ۳در۳ی اولیه برابر است با

$$P(c) = (b-a)\left[(c-a)(c-b)\right]$$

حل مسأله در حالت کلی نیز شبیه به همین حالت است. فرض کنید D_n، مقدار دترمینان (از مرتبهٔ n) مورد نظر باشد. در سطر پایینی ماتریس، a_n را به جای x می‌گذاریم. دترمینان حاصل به شکل یک چند جمله‌ای $P_n(x)$ از درجه $n-1$ در می‌آید که به ازای مقادیر a_1، a_2، ...، a_{n-1} صفر می‌شود. در نتیجه بنابر قضیهٔ عاملها (بخش ۴-۲ را ببینید) داریم

$$P_n(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})$$

که در آن A عددی ثابت است. همانند قبل، A ضریب جملهٔ x^{n-1} است و اگر دترمینان را نسبت به سطر آخر بسط دهیم، معلوم می‌شود که $A = D_{n-1}$، به عبارت دیگر

$$D_n = P_n(a_n) = D_{n-1}\left[(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})\right]$$

می‌توانیم استدلال را برای D_{n-1} و الی‌آخر، تکرار کنیم. نتیجهٔ نهایی عبارت خواهد بود از

$$D_n = \prod_{k=2}^{n}\left[\prod_{i=1}^{k-1}(a_k-a_i)\right]$$

۱-۱۲-۳ اگر بدانیم که $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\pi$، مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ را بیابید.

حل. انتگرال کلیتر

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}dx \quad , \quad a \geqslant 0$$

را با استفاده از تکنیکی موسوم به مشتقگیری نسبت به پارامتر محاسبه می‌کنیم. از دو طرف تساوی اخیر نسبت به a مشتق می‌گیریم

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{2\sin ax \cos ax \cdot x}{x^2}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin 2ax}{x}dx$$

حال با قرار دادن $y = 2ax$، نتیجه می‌شود $dy = 2adx$ و

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}dy = \frac{1}{2}\pi$$

با انتگرالگیری از دو طرف به دست می‌آوریم

$$I(a) = \frac{1}{2}\pi a + C$$

که در آن C مقداری ثابت است. از آنجا که $I(0) = 0$، نتیجه می‌گیریم که $C = 0$. در نتیجه $I(a) = \frac{1}{2}\pi a$ که $a \geqslant 0$. با قرار دادن $a = 1$ نتیجه می‌شود که $I(1) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\pi$. (ضمناً می‌توان مقدار انتگرال

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ را با محاسبهٔ انتگرال کلیتری به دست آورد. این انتگرال، انتگرال یک تابع مختلط روی مسیری در صفحهٔ مختلط است.)

مسائل

۱ـ۱۲ـ۴ با قرار دادن مقدارهای مناسب برای x در بسط دو جمله‌ای

$$(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

(یا یکی از مشتقهای آن و الی آخر)، هر یک از مقدارهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ ب) $\sum_{k=1}^{n} 3^k \binom{n}{k}$

ج) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ د) $\sum_{k=1}^{n} (2k+1) \binom{n}{k}$

۱ـ۱۲ـ۵ مقدار دترمینان زیر را به دست آورید

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{bmatrix}$$

(مقدار d را با متغیر x جایگزین کنید و از این حقیقت استفاده کنید که مجموع ریشه‌های یک چند جمله‌ای درجه چهارم مساوی است با ضریب جملهٔ x^3 (بخش ۴-۳ را ببینید).)

۱ـ۱۲ـ۶ الف) مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{x}dx$ را بیابید. (تابع $G(k) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin kx}{x}dx$ را در نظر بگیرید و از مشتقگیری نسبت به پارامتر استفاده کنید.)

ب) مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}dx$ را به دست آورید. (تابع $H(m) = \int_0^1 \frac{x^m-1}{\ln x}dx$ را در نظر بگیرید و از مشتقگیری نسبت به پارامتر استفاده کنید.)

ج) مقدار انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(\pi x) - \arctan x}{x}dx$$

را بیابید. (تابع $F(a) = \int_0^\infty \frac{\arctan(ax) - \arctan x}{x}dx$ را در نظر بگیرید و از مشتقگیری نسبت به پارامتر استفاده کنید.)

۱ـ۱۲ـ۷ کدام عدد بزرگتر است، $\sqrt[3]{60}$ یا $\sqrt[3]{7} + 2$؟ (اگر هر یک از این عددها را به توان سه برسانیم، محاسبات بسیار پیچیده می‌شوند و نتیجه به سادگی به دست نمی‌آید. به جای این کار، مسألهٔ کلیتر زیر را در نظر بگیرید: کدام بزرگتر است، $\sqrt[3]{4(x+y)}$ یا $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ که در آن $x, y \geqslant 0$. قرار دهید $x = a^3$ و $y = b^3$.)

مثالهای اضافی. ۱-۴-۲، ۲-۲-۶، ۲-۲-۷، ۴-۱-۴، ۵-۱-۴، ۵-۱-۳، ۵-۱-۴، ۵-۱-۹، ۵-۱-۱۱، ۵-۴-۴، ۵-۴-۵، ۵-۴-۶، ۵-۴-۷، ۶-۹-۲، ۷-۴-۴. همچنین بخش ۲-۴ (استقرا و تعمیم) را ببینید.

۲

دو اصل مهم: استقرا و حجره‌ها

گزاره‌های ریاضی بر دو نوع‌اند: یکی گزاره‌های عمومی که درستی مطلبی را به‌ازای همهٔ مقادیر x و دیگر گزاره‌های وجودی، که درستی مطلبی را به‌ازای برخی از مقادیر x در مجموعهٔ مشخصی بیان می‌کنند. گزاره‌های نوع اول را می‌توان به‌صورت «به‌ازای هر x (در مجموعه S)، $P(x)$» و گزاره‌های نوع دوم را می‌توان به‌شکل «xی (در مجموعهٔ S) وجود دارد به‌طوری‌که $P(x)$» نوشت که در آن $P(x)$ گزاره‌ای دربارهٔ x است. در این فصل به بررسی دو تکنیک مهم می‌پردازیم که با این قبیل گزاره‌ها سر و کار دارند: (الف) اصل استقرای ریاضی برای گزاره‌های عمومی، و (ب) اصل حجره‌ها برای گزاره‌های وجودی.

۲ـ۱ استقرا: ساختن براساس $P(k)$

فرض‌کنید a عددی صحیح بوده و به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant a$، $P(n)$ گزاره‌ای (یا عبارتی) دربارهٔ n باشد. اصل استقرای ریاضی بیان می‌کند که:

اگر

الف) $P(a)$ درست باشد، و

ب) به‌ازای هر عدد صحیح $k \geqslant a$، درستی $P(k)$، درستی $P(k+۱)$ را ایجاب کند،

آنگاه $P(n)$ به‌ازای هر $n \geqslant a$ درست است.

توجه کنید که با استفاده از این اصل می‌توانیم طی دو مرحلهٔ ساده، بی‌نهایت گزاره را ثابت کنیم (وقتی ثابت می‌کنیم گزاره $P(n)$ به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geqslant a$ درست است، در واقع بی‌نهایت گزاره را ثابت کرده‌ایم). استفاده از این روش به‌خصوص وقتی که الگویی از حالتهای خاص ابتدایی (یعنی $P(a)$, $P(a+۱)$, $P(a+۲)$, ...) به‌دست آمده باشد، مناسب است («جستجوی الگو» را در بخش ۱-۱ ملاحظه کنید). در این بخش به آن دسته از استدلالهای استقرایی می‌پردازیم که در گام (ب)، درستی $P(k+۱)$، مستقیماً از درستی $P(k)$ نتیجه می‌شود، یعنی درستی $P(k+۱)$ براساس فرض اولیهٔ درستی $P(k)$ «ساخته می‌شود». این روش تا حدی برخلاف استدلالهایی است که در آنها کار با بررسی $P(k+۱)$ آغاز می‌شود (این نوع استدلالها، در بخش بعد بررسی می‌شوند).

۲ـ۱ـ۱ با استفاده از استقرای ریاضی، قضیه دو جمله‌ای

$$(a+b)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

را ثابت کنید که در آن n عددی صحیح و مثبت است.

حل. به آسانی می‌توان درستی حکم را به‌ازای $n = ۱$ بررسی کرد.

با فرض درستی حکم به‌ازای عدد صحیح k (استدلال را براساس $P(k)$ می‌سازیم)، دو طرف را در $(a+b)$ ضرب می‌کنیم

$$(a+b)^k(a+b) = \left[\sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}\right](a+b)$$

$$= \sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} a^{i+۱} b^{k-i} + \sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k+۱-i}$$

با تغییر متغیر $j = i + ۱$ در اولین مجموع، حاصل می‌شود

$$= \sum_{j=۱}^{k+۱} \binom{k}{j-۱} a^j b^{k+۱-j} + \sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k+۱-i}$$

$$= \left[\sum_{j=۱}^{k} \binom{k}{j-۱} a^j b^{k+۱-j} + a^{k+۱}\right] + \left[\sum_{i=۱}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k+۱-i} + b^{k+۱}\right]$$

$$= a^{k+۱} + \left[\sum_{i=۱}^{k} \left[\binom{k}{i-۱} + \binom{k}{i}\right] a^i b^{k+۱-i}\right] + b^{k+۱}$$

$$= a^{k+۱} + \sum_{i=۱}^{k} \binom{k+۱}{i} a^i b^{k+۱-i} + b^{k+۱}$$

$$= \sum_{i=۰}^{k+۱} \binom{k+۱}{i} a^i b^{k+۱-i}$$

در اینجا از اتحاد اساسی $\binom{k+۱}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-۱}$ استفاده کرده‌ایم (۲-۵-۲ را ببینید). این همان $P(k+۱)$ است و لذا بنابر استقرا، برهان کامل است.

۲ـ۱ـ۲ فرض‌کنید $۰ < a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$ و $e_i = \pm ۱$. ثابت کنید که وقتی e_i تغییر می‌کند، از ۲^n حالت ممکنی که برای $\sum_{i=۱}^{n} e_i a_i$ به‌وجود می‌آید، دست‌کم $\binom{n+۱}{۲}$ مقدار متمایز حاصل می‌شود.

حل. در حالت $n = ۱$، دقیقاً دو مقدار متمایز ($a_۱$ و $-a_۱$) وجود دارند و $۱ = \binom{۲}{۲}$، لذا حکم برقرار است.

فرض‌کنید که حکم در حالت $n = k$ برقرار باشد، یعنی $\sum_{i=۱}^{k} e_i a_i$ دست‌کم $\binom{k+۱}{۲}$ مقدار متمایز اختیار کند. عدد دیگری چون $a_{k+۱}$ را درنظر می‌گیریم به‌قسمی که $a_{k+۱} > a_k$. باید ثابت کنیم که $\sum_{i=۱}^{k+۱} e_i a_i$ دست‌کم $\binom{k+۲}{۲}$ مجموع متمایز تولید می‌کند. بنابر فرض، تا حال دست‌کم $\binom{k+۱}{۲}$ مجموع متمایز داشتیم (که توسط $a_۱, \ldots, a_k$ تولید می‌شدند)، لذا لازم است $k + ۱ = \binom{k+۲}{۲} - \binom{k+۱}{۲}$ مجموع دیگر نیز تولید کنیم.

این مجموعها را می‌توان به‌روش زیر یافت: فرض کنید $S = \sum_{i=1}^{k} a_i$ (در نتیجه به‌ازای هر انتخاب دلخواه از e_iها، $S \geqslant \sum_{i=1}^{k} e_i a_i$) و توجه کنید که $S + a_{k+1}$، $S + (a_{k+1} - 2a_1)$، ...، $S + (a_{k+1} - 2a_{k-1})$، $S + (a_{k+1} - 2a_k)$ همگی متمایز و به‌ترتیب از هریک از مجموعهایی که در بالا به دست آمده‌اند، بزرگترند. (برای آنکه ببینید این مطلب درست است، توجه کنید که $S - a_{k+1} = S + (a_{k+1} - 2a_{k+1}) < S + (a_{k+1} - 2a_k)$.) اعداد اخیر $k + 1$ تا هستند و لذا حکم بنابر استقرا نتیجه می‌شود.

در مسائلی به شکل «ثابت کنید که $P(n)$ به‌ازای هر $n \geqslant a$ برقرار است» می‌توان روش استقرای ریاضی را آزمایش کرد. حضور صرف پارامتر n، راهنمای ما برای آزمایش این روش است. با وجود این، لازم به‌تذکر است که علاوه بر این، از استقرا در بسیاری از مسائلی که از جرح و تعدیل روی مجموعه‌های کلیتری به‌وجود می‌آیند، نیز می‌توان استفاده کرد. مثلاً ممکن است بتوانیم گزاره‌ای دربارهٔ چندجمله‌ایها را با استقرا روی درجهٔ چندجمله‌ای ثابت کنیم. ممکن است بتوان با استقرا روی اندازهٔ ماتریس، قضیه‌ای را دربارهٔ همه ماتریسها نتیجه گرفت. بسیاری از احکام مربوط به گزاره‌های منطق نمادی، با استفاده از استقرا روی تعداد رابطهای منطقی موجود در آن گزاره ثابت می‌شوند. فهرست مجموعهٔ مسائل استقرایی ناآشنا می‌تواند همچنان ادامه یابد، با وجود این، در اینجا تنها به ارائهٔ دو مثال دیگر بسنده می‌کنیم. مثالهای دیگری در سراسر این کتاب پراکنده‌اند (به عنوان مثال چهار بخش آینده و فهرست موجود در «مثالهای اضافی» راملاحظه کنید).

۲ـ۱ـ۳ اگر V، E و F به‌ترتیب تعداد رأسها، یالها و وجه‌های یک نقشهٔ مسطح همبند باشند، آنگاه

$$V - E + F = 2$$

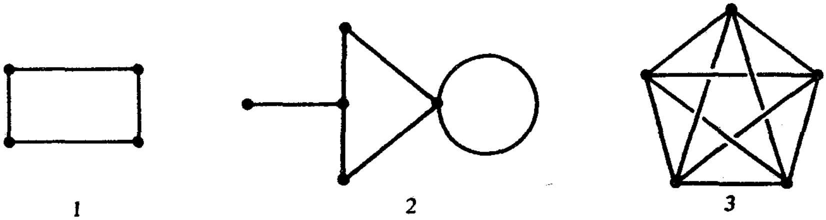
حل. احتمالاً درک شهودی شما از عبارتهای به‌کار رفته در این گزاره درست‌اند، ولی برای اطمینان بیشتر، به تعریفهای زیر توجه کنید.

شبکه شکلی (در صفحه یا فضا) است که از کمانهایی به تعداد متناهی و ناصفر تشکیل شده باشد و جز احتمالاً در نقاط انتهایی، هیچ دو کمانی متقاطع نباشند. نقاط انتهای این کمانها را رأسهای شبکه می‌نامند. مسیر در شبکه دنباله‌ای است از کمانهای متمایز آن شبکه به‌طوری‌که بتوانیم به‌طور پیوسته آنها را طی کنیم، بی‌آنکه کمانی را دوبار بپیماییم. شبکه‌ای را همبند گوییم اگر هر دو رأس متمایز این شبکه، رأسهای مسیری از این شبکه باشند. نقشه عبارت است از یک شبکه همراه با رویه‌ای که این شبکه را در بردارد. چنانچه رویهٔ مزبور صفحه باشد، نقشه را نقشهٔ مسطح می‌نامیم. کمانهای یک نقشهٔ مسطح را یالهای آن نقشه می‌نامند. وجه‌های نقشه مسطح ناحیه‌هایی هستند که با مرزها (و یا یالها)ی نقشهٔ مشخص می‌شوند (مثلاً «اقیانوس» یک وجه محسوب می‌شود).

شکل ۲-۱ سه مثال از شبکه‌های همبند را نشان می‌دهد. شبکه‌های اول و دوم مسطح‌اند. در اولی، $V = 4$، $E = 4$، $F = 2$ و در دومی $V = 5$، $E = 6$، $F = 3$. شبکه سوم نقشه‌ای مسطح نیست. با این حال، اگر آن را روی یک صفحه می‌گستردیم و در نقاط تقاطع، رأسهایی قرار می‌دادیم، در آن صورت $V = 10$، $E = 20$، $F = 12$.

حال به بررسی قضیه برمی‌گردیم. راهنمای ما در اثبات این قضیه آگاهی از این حقیقت است که می‌توان نقشه‌های مسطح همبند را با استفاده از یک رأس منفرد و به کارگیری دنباله‌ای از روشهای زیر (که همبندی نقشه را حفظ می‌کنند) ساخت.

الف) به یالی که از قبل وجود دارد، رأسی را اضافه می‌کنیم (مثلاً ـــــ به ـــــ تبدیل می‌شود).



شکل ۲-۱

ب) یالی اضافه می‌کنیم که از یک رأس شروع و به همان رأس باز می‌گردد (مثلاً • به تبدیل می‌شود).

ج) بین دو رأسی که وجود دارند، یالی رسم می‌کنیم (مثلاً به تبدیل می‌شود).

د) به رأسی که وجود دارد، یک یال و یک رأس اضافه می‌کنیم (مثلاً • به تبدیل می‌شود).

حال استقرا را روی تعداد گامهای لازم برای ساختن نقشه مسطح همبند به‌کار می‌بریم. اگر شبکه تنها از یک نقطهٔ منفرد تشکیل شده باشد، آنگاه $V = 1$، $F = 1$، $E = 0$ و $V - E + F = 2$.

فرض‌کنید که حکم قضیه، در حالتی که k گام برای ساختن نقشه لازم است، برقرار باشد. تغییری که در نتیجهٔ هر یک ازگامها حاصل می‌شود، در جدول زیر آمده است:

عمل	ΔV	ΔE	ΔF	$\Delta(V - E + F)$
(الف)	$+1$	$+1$	0	0
(ب)	0	$+1$	$+1$	0
(ج)	0	$+1$	$+1$	0
(د)	$+1$	$+1$	0	0

با توجه به اینکه مقدار $V - E + F$ درگام $(k+1)$ام بدون تغییر باقی می‌ماند، برهان بنابر استقرا کامل است.

۲ـ۱ـ۴ ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n و هر عدد حقیقی x،

$$\llbracket x \rrbracket + \llbracket x + \frac{1}{n} \rrbracket + \llbracket x + \frac{2}{n} \rrbracket + \cdots + \llbracket x + \frac{n-1}{n} \rrbracket = \llbracket nx \rrbracket$$

حل. اگرچه در این مسأله پارامتری صحیح چون n وجود دارد، با این حال به‌ازای مقداری ثابت برای x، استفاده از استقرا روی n بی‌نتیجه است. همچنین نمی‌توان از استقرا روی x استفاده کرد زیرا تغییرات x در مجموعه اعداد حقیقی است (هر عدد حقیقی x را که در نظر بگیریم، هیچ عدد حقیقی چون y وجود ندارد که بلافاصله پس از آن قرار بگیرد). درنتیجه روشن نیست که از استقرا در این مسأله کاری ساخته باشد.

روش حل به این شکل است که به‌ازای $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$، حکم را برای مقدار ثابت n و به‌ازای هر مقدار x در بازهٔ $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ ثابت می‌کنیم.

ابتدا فرض‌کنید که x در بازه $[0, \frac{1}{n})$ باشد. در این صورت به ازای $i = 0, 1, \ldots, n-1$، $\llbracket x + \frac{i}{n} \rrbracket = 0$ و لذا $\sum_{i=0}^{n-1} \llbracket x + \frac{i}{n} \rrbracket = 0$. همچنین $\llbracket nx \rrbracket = 0$ و درنتیجه درستی حکم در «اولین» زیر بازه ثابت می‌شود.

حال فرض‌کنید که به‌ازای عدد صحیح مثبت k، حکم در بازهٔ $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$ درست و x عددی حقیقی

در این بازه باشد. در این‌صورت

$$[\![x]\!] + [\![x + \frac{۱}{n}]\!] + [\![x + \frac{۲}{n}]\!] + \cdots + [\![x + \frac{n-۱}{n}]\!] = [\![nx]\!]$$

با افزودن $\frac{۱}{n}$، به x (و درنتیجه تبدیل آن به عدد دلخواهی در بازهٔ $[\frac{k}{n}, \frac{k+۱}{n})$)، هریک از عبارتهای موجود در طرف چپ تساوی بالا، به‌جز آخرین جمله، یک جمله به راست منتقل می‌شوند و جمله آخر، یعنی $[\![x + \frac{n-۱}{n}]\!]$ به $[\![x + ۱]\!]$ بدل می‌شود که ۱ واحد از $[\![x]\!]$ بیشتر است. درنتیجه با قرار دادن $x + \frac{۱}{n}$ به‌جای x، مقدار طرف چپ تساوی بالا، ۱ واحد افزایش می‌یابد.

در همین حال، با قرار دادن $x + \frac{۱}{n}$ به‌جای x، مقدار $[\![nx]\!]$ نیز ۱ واحد افزایش می‌یابد. از آنجا که جایگزین کردن $x + \frac{۱}{n}$ به‌جای x در دو طرف تساوی به مقدار هردو طرف ۱ واحد می‌افزاید، لذا حکم در بازهٔ $[\frac{k}{n}, \frac{k+۱}{n})$ نیز درست است.

اکنون بنابر استقرا، حکم به‌ازای هر مقدار مثبت x درست است. می‌توان به روشی مشابه، درستی حکم را به‌ازای مقادیر منفی x نیز ثابت کرد (کافی است $x - \frac{۱}{n}$ را به‌جای x قرار دهید).

مثال بعدی مثال روشنی است از روش «ساختن» $P(k+۱)$ براساس $P(k)$.

۲ـ۱ـ۵ اگر $a > ۰$ و $b > ۰$، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم $(n-۱)a^n + b^n \geqslant na^{n-۱}b$ و در آن تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a = b$.

حل. به‌ازای $n = ۱$ حکم درست است. فرض‌کنید که به‌ازای عدد صحیح k حکم درست باشد. در این‌صورت داریم $(k-۱)a^k + b^k \geqslant ka^{k-۱}b$. برای ساختن $P(k+۱)$ و به‌دست آوردن طرف چپ نامساوی باید

الف) دو طرف را در a ضرب کنیم: $(k-۱)a^{k+۱} + b^k a \geqslant ka^k b$

ب) به دو طرف $a^{k+۱}$ را اضافه کنیم: $ka^{k+۱} + b^k a \geqslant ka^k b + a^{k+۱}$

ج) از دو طرف $b^k a$ را کم کنیم: $ka^{k+۱} \geqslant ka^k b + a^{k+۱} - b^k a$

د) به دو طرف $b^{k+۱}$ را اضافه کنیم: $ka^{k+۱} + b^{k+۱} \geqslant ka^k b + a^{k+۱} - b^k a + b^{k+۱}$

فرض بر آن است که این نامساوی وقتی و فقط وقتی به تساوی تبدیل می‌شود که $a = b$. تنها باقی می‌ماند که نشان دهیم $ka^k b + a^{k+۱} - b^k a + b^{k+۱} \geqslant (k+۱)a^k b$ و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a = b$. برای این کار به قهقرا عمل می‌کنیم:

$$ka^k b + a^{k+۱} - b^k a + b^{k+۱} \geqslant (k+۱)a^k b$$

$$-a^k b + a^{k+۱} - b^k a + b^{k+۱} \geqslant ۰$$

$$a^k(a-b) + b^k(b-a) \geqslant ۰$$

$$(a^k - b^k)(a-b) \geqslant ۰$$

و نامساوی آخر درست است (زیرا $a - b$ و $a^k - b^k$ هم علامت‌اند) و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a = b$. درنتیجه حکم به استقرا ثابت می‌شود. (تذکر: این حکم حالت خاصی است از نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی. بخش ۷-۲ را ببینید.)

مسائل

۲ـ۱ـ۶ الف) با استفاده از استقرا ثابت کنید $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

ب) با استفاده از استقرا ثابت کنید $2!4!\ldots(2n)! \geqslant ((n+1)!)^n$.

۲ـ۱ـ۷ با رسم تعداد متناهی خط راست، صفحه اقلیدسی را به ناحیه‌هایی تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید که می‌توان با دو رنگ آبی و قرمز، این ناحیه‌ها را طوری رنگ کرد که هیچ دو ناحیهٔ مجاوری همرنگ نباشند.

۲ـ۱ـ۸ ثابت کنید که معادله $x^2 + y^2 = z^n$، به‌ازای همه مقادیر $n = 1, 2, 3, \ldots$، در مجموعه اعداد صحیح مثبت جوابی چون (x, y, z) دارد. (با تفکیک مسأله به دو حالت nهای زوج و nهای فرد، برهان زیبایی به‌دست می‌آید. برای برهانی از این مسأله بدون استفاده از استقرا، ۳-۵-۱ را ببینید.)

۲ـ۱ـ۹ در یک مسابقه، n بازیکن بازی می‌کنند به‌طوری‌که هر بازیکنی دقیقاً یک‌بار با هر یک از بازیکنان دیگر بازی می‌کند. هر بازی به برد یا باخت یک طرف منجر می‌شود. نشان دهید که می‌توان بازیکنان را به شکل $P_1, P_2, \ldots, P_n$، طوری شماره‌گذاری کرد که P_1 بر P_2، P_2 بر P_3، ...، و P_{n-1} بر P_n چیره شده باشد.

۲ـ۱ـ۱۰ اگر در یک دستهٔ n نفری، هر کس دست‌کم با نیمی از افراد آن دسته آشنا باشد، آنگاه این n نفر می‌توانند در یک دایره طوری بنشینند که در دوطرف هر کس دو نفر از آشنایانش نشسته باشند.

۲ـ۱ـ۱۱ حاصل گامهای زیر، برهان دیگری برای قضیهٔ دوجمله‌ای است. می‌دانیم که می‌توان $(a+x)^n$ را به شکل یک چندجمله‌ای از درجهٔ n نوشت. بنابر این اعداد ثابت $A_0, A_1, \ldots, A_n$ موجودند به‌طوری‌که

$$(a+x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n$$

الف) به کمک استقرا معادله‌ای بنویسید که از k بار $(k = 1, 2, \ldots, n)$ مشتق‌گیری از دو طرف این تساوی نتیجه می‌شود.

ب) به ازای هر $k = 0, 1, \ldots, n$، با قرار دادن $x = 0$ در معادلهٔ kام، مقدار A_k را به دست آورید.

۲ـ۱ـ۱۲ فرض کنید که $f : R \to R$ تابعی باشد که به‌ازای هر x داشته باشیم $f(2x - f(x)) = x$، و r عددی حقیقی و ثابت باشد.

الف) ثابت کنید اگر $f(x) = x + r$، آنگاه به‌ازای همهٔ مقادیر صحیح مثبت n داریم

$$f(x - nr) = (x - nr) + r$$

ب) ثابت کنید اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد (یعنی $f(x) = f(y)$ نتیجه دهد $x = y$)، آنگاه ویژگی (الف) به ازای همهٔ مقادیر صحیح n درست است.

مثالهای اضافی. ۱-۱-۲، ۱-۱-۸، ۳-۲-۸، ۶-۵-۱۳، ۷-۱-۴.

۲ـ۲ استقرا: شروع از $P(k+1)$

در این بخش به آن دسته از استدلالهای استقرایی می‌پردازیم که در آنها کار را با حملهٔ مستقیم به $P(k+1)$ آغاز و سپس هرجا که لازم باشد از فرض درستی $P(k)$ استفاده می‌کنیم. از لحاظ نظری همهٔ استدلالهای این بخش را به روش بخش قبل می‌توان بیان کرد و به‌عکس. با وجود این در عمل غالباً استدلال براساس یکی از

این دو روش مناسبتر از روش دیگر است.

۲ـ۲ـ۱ ثابت کنید که به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$، عدد $\frac{n^۵}{۵} + \frac{n^۴}{۲} + \frac{n^۳}{۳} - \frac{n}{۳۰}$ صحیح است.

حل. به روشنی حکم به‌ازای $n = ۰$ درست است. فرض‌کنید که به‌ازای $n = k$، حکم درست باشد. باید ثابت کنیم

$$\frac{(k+۱)^۵}{۵} + \frac{(k+۱)^۴}{۲} + \frac{(k+۱)^۳}{۳} - \frac{(k+۱)}{۳۰}$$

عددی صحیح است. صورت کسرها را بسط می‌دهیم

$$\frac{k^۵ + ۵k^۴ + ۱۰k^۳ + ۱۰k^۲ + ۵k + ۱}{۵} + \frac{k^۴ + ۴k^۳ + ۶k^۲ + ۴k + ۱}{۲}$$
$$+ \frac{k^۳ + ۳k^۲ + ۳k + ۱}{۳} - \frac{k+۱}{۳۰}$$

و (به‌منظور استفاده از $P(k)$) دسته‌بندی می‌کنیم

$$\left[\frac{k^۵}{۵} + \frac{k^۴}{۲} + \frac{k^۳}{۳} - \frac{k}{۳۰}\right] + \left[(k^۴ + ۲k^۳ + ۲k^۲ + k) + (۲k^۳ + ۳k^۲ + ۲k) + (k^۲ + k)\right]$$

بنابر فرض استقرا، اولین دستهٔ بالا، عددی صحیح است، دومی نیز که مجموعی از اعداد صحیح می‌باشد، صحیح است. درنتیجه حکم به استقرا ثابت می‌شود. (توجه کنید که در اینجا، شروع از $P(k)$ و رسیدن به $P(k+۱)$ چقدر دشوار است.)

۲ـ۲ـ۲ فرض‌کنید $a, b, p_۱, p_۲, \ldots, p_n$ اعداد حقیقی باشند و $a \neq b$. همچنین تعریف می‌کنیم

$$f(x) = (p_۱ - x)(p_۲ - x)(p_۳ - x)\ldots(p_n - x)$$

نشان دهید

$$\det \begin{bmatrix} p_۱ & a & a & a & \ldots & a & a \\ b & p_۲ & a & a & \ldots & a & a \\ b & b & p_۳ & a & \ldots & a & a \\ b & b & b & p_۴ & \ldots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \ldots & p_{n-۱} & a \\ b & b & b & b & \ldots & b & p_n \end{bmatrix} = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

حل. این مسأله را نیز می‌توان مانند بسیاری از مسائل مربوط به دترمینان، به روش استقرای ریاضی حل کرد. به‌ازای $n = ۱$ داریم $f(x) = p_۱ - x$ و $\det(p_۱) = p_۱$ و

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = \frac{b(p_۱ - a) - a(p_۱ - b)}{b-a} = p_۱$$

و لذا حکم برقرار است.

فرض‌کنید که حکم به‌ازای $k-۱$ $(k > ۱)$ درست باشد و قضیه را برای k عدد حقیقی $p_۱, \ldots, p_k$ درنظر می‌گیریم (استدلال را با عمل بر $P(k)$ آغاز می‌کنیم و به‌منظور تکمیل گام استقرا، می‌کوشیم که از فرض

درستی $P(k-۱)$ کمک بگیریم). می‌خواهیم مقدار

$$\det\begin{bmatrix} p_{۱} & a & a & a & \dots & a & a \\ b & p_{۲} & a & a & \dots & a & a \\ b & b & p_{۳} & a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & p_{k-۱} & a \\ b & b & b & b & \dots & b & p_{k} \end{bmatrix}$$

را به‌دست آوریم. ستون دوم را از ستون اول کم می‌کنیم (این کار مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد)

$$\det\begin{bmatrix} p_{۱}-a & a & a & a & \dots & a & a \\ b-p_{۲} & p_{۲} & a & a & \dots & a & a \\ ۰ & b & p_{۳} & a & \dots & a & a \\ ۰ & b & b & p_{۴} & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۰ & b & b & b & \dots & p_{k-۱} & a \\ ۰ & b & b & b & \dots & b & a \end{bmatrix}$$

و سپس دترمینان را نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم تا به‌دست آید

$$(p_{۱}-a)\det\begin{bmatrix} p_{۲} & a & \dots & a & a \\ b & p_{۳} & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & p_{k-۱} & a \\ b & b & \dots & b & p_{k} \end{bmatrix} - (b-p_{۲})\det\begin{bmatrix} a & a & \dots & a & a \\ b & p_{۳} & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & p_{k-۱} & a \\ b & b & \dots & b & p_{k} \end{bmatrix}$$

دو دترمینان بالا (که به ماتریسهای $(k-۱)$ در $(k-۱)$ مربوط‌اند) به‌صورتی هستند که از فرض $P(k-۱)$ استقرا می‌توان استفاده کرد. برای این کار لازم است به معرفی چند نماد بپردازیم. برای دترمینان اول قرار می‌دهیم $F(x)=(p_{۲}-x)(p_{۳}-x)\dots(p_{k}-x)$ و برای دومی $G(x)=(a-x)(p_{۳}-x)\dots(p_{k}-x)$.

در این‌صورت آخرین عبارت بالا، بنابر فرض استقرا، برابر است با

$$(p_{۱}-a)\left[\frac{bF(a)-aF(b)}{b-a}\right]-(b-p_{۲})\left[\frac{bG(a)-aG(b)}{b-a}\right]$$

ولی $G(a)=۰$ و $(p_{۱}-a)F(a)=f(a)$، در نتیجه داریم

$$\frac{bf(a)-a(p_{۱}-a)(p_{۲}-b)\dots(p_{k}-b)-a(a-b)(p_{۲}-b)\dots(p_{k}-b)}{b-a}=$$

$$\frac{bf(a)-a(p_{۲}-b)\dots(p_{k}-b)[(p_{۱}-a)+(a-b)]}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

و حکم به استقرا ثابت می‌شود.

مسائل

۲ـ۲ـ۳ برهانی از گام استقرا برای ۱-۱-۳ ارائه دهید.

۲ـ۲ـ۴ ثابت کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر x در بازه $\circ \leqslant x \leqslant \pi$،

$$|\sin nx| \leqslant n \sin x$$

که در آن n عددی صحیح و نامنفی است.

۲ـ۲ـ۵ مجموعهٔ اعداد گویا را به Q نشان می‌دهیم. همهٔ توابع f از Q به Q را بیابید که در دو شرط زیر صدق کنند:

الف) $f(۱) = ۲$،

ب) به‌ازای جمیع مقادیر x و y در Q، $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + ۱$.

۲ـ۲ـ۶ اگر $a, b, c \geqslant ۱$، آنگاه ثابت کنید $۴(abc + ۱) \geqslant (۱ + a)(۱ + b)(۱ + c)$.
(راهنمایی: حکم کلیتر $۲^{n-۱}(a_۱a_۲\ldots a_n + ۱) \geqslant (۱ + a_۱)(۱ + a_۲)\ldots(۱ + a_n)$ را ثابت کنید.)

۲ـ۲ـ۷ مجموعه‌ای مرکب از ۵۱ عدد بین ۱ و ۱۰۰ درنظر می‌گیریم (که خود ۱ و ۱۰۰ هم می‌توانند در این مجموعه باشند). نشان دهید که دست‌کم یکی از عضوهای این مجموعه باید عضو دیگری از آن را بشمارد. (راهنمایی: به‌طور کلی ثابت کنید که همین ویژگی دربارهٔ مجموعه‌ای از $n + ۱$ عدد صحیح که از میان اعداد ۱ تا $۲n$ انتخاب شده‌اند (و ۱ و $۲n$ نیز می‌توانند در این مجموعه باشند) برقرار است. این حکم بدون استفاده از استقرا، در ۲-۶-۱ ثابت شده است.

۲ـ۲ـ۸ اشکالی را که در برهان قضیهٔ زیر وجود دارد پیدا کنید:

یک ماتریس n در n از اعداد صحیح نامنفی دارای این ویژگی است که به‌ازای هر درایهٔ صفر آن، مجموع درایه‌های سطر و ستونی که شامل آن درایه هستند، دست‌کم n است. نشان دهید که مجموع همهٔ درایه‌های ماتریس مزبور دست‌کم $\frac{n^۲}{۲}$ است.

برهان(؟): به‌ازای $n = ۱$، حکم درست است. فرض‌کنید که حکم به‌ازای $n = k - ۱$ درست باشد و ماتریسی k در k را درنظر بگیرید. روشن است که اگر درایهٔ صفری موجود نباشد، حکم درست است. هرگاه $a_{ij} = \circ$، آنگاه بنابر فرض، مجموع سطر i و ستون j دست‌کم k و مجموع درایه‌های ماتریس $(k - ۱)$ در $(k - ۱)$ای که از حذف سطر i و ستون j به‌دست می‌آید (بنابر فرض استقرا) دست‌کم $\frac{(k-۱)^۲}{۲}$ است. لذا نتیجه می‌شود که مجموع درایه‌های ماتریس k در k ی اولیه دست‌کم

$$\frac{(k-۱)^۲}{۲} + k = \frac{(k^۲ - ۲k + ۱)}{۲} + k = \frac{(k^۲ + ۱)}{۲} > \frac{k^۲}{۲}$$

است و حکم به استقرا ثابت می‌شود.

مثالهای اضافی. ۱-۱-۱۱، ۱-۱۲-۲، ۳-۱-۱۱، ۴-۲-۲۱، ۴-۳-۵، ۴-۳-۲۴، ۶-۵-۱۲، ۶-۶-۱، ۷-۱-۶، ۷-۱-۱۳، ۷-۲-۵، ۷-۳-۵.

۲ـ۳ استقرای قوی

فرض‌کنید a عددی صحیح و به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant a$، $P(n)$ گزاره‌ای دربارهٔ n باشد. شکل قوی استقرای ریاضی بیان می‌کند که

اگر

الف) $P(a)$ درست باشد، و

ب) به‌ازای هر $k \geqslant a$، درستی $P(a)$، $P(a+۱)$، ...، $P(k)$، درستی $P(k+۱)$ را ایجاب کند،

آنگاه به‌ازای همهٔ مقادیر صحیح $n \geqslant a$، $P(n)$ درست است.

استقرای قوی با اصل استقرایی که پیش از این بیان شد، متفاوت است زیرا فرض قویتری را در گام (ب) درنظر گرفته‌ایم، یعنی برای اثبات درستی $P(k+۱)$، به‌جای آنکه تنها درستی $P(k)$ را فرض بگیریم، فرض کرده‌ایم که $P(a)$، $P(a+۱)$، ...، $P(k)$ نیز درست‌اند. در حقیقت این دو شکل استقرا معادل‌اند، ولی در عمل در بسیاری از مسائل کار با استقرای قوی ساده‌تر است.

۲ـ۳ـ۱ (قضیهٔ پیک) ثابت کنید که مساحت یک چندضلعی مشبکه‌ای ساده (یک چندضلعی که رأسهای آن نقاط مشبکه‌ای باشند و اضلاع آن یکدیگر را قطع نکنند) برابر است با $I + \frac{۱}{۲}B - ۱$ که در آن I و B به‌ترتیب عبارت‌اند از نقاط مشبکه‌ای درونی و مرزی آن چندضلعی.

حل. استقرا را روی تعداد ضلعهای چندضلعی به‌کار می‌بریم. برهان حکم برای مثلث، در مسأله ۱-۷-۳ آمده است. حال چندضلعی مشبکه‌ای سادهٔ P را با k ضلع درنظر می‌گیریم که $k > ۳$. ابتدا نشان می‌دهیم که هر چندضلعی از این نوع، قطری داخلی دارد. این حکم در چندضلعیهای محدب (یعنی چندضلعیهایی که هر یک از زاویه‌های داخلی آنها کمتر از ۱۸۰° است) بدیهی است. لذا فرض‌کنید که یکی از زاویه‌های داخلی، مثلاً زاویهٔ به رأس V، از ۱۸۰° بیشتر باشد. در این‌صورت نیمخطی که از رأس V آغاز شده و داخل چندضلعی را جاروب می‌کند باید به رأس دیگری برخورد کند (زیرا در غیر این‌صورت، این چندضلعی، سطحی نامحدود را در برمی‌گیرد). این خود قطری داخلی چون D را مشخص می‌کند که V یک سر آن است.

فرض کنید که چندضلعی P، I نقطهٔ داخلی و B نقطهٔ مرزی داشته باشد. با رسم قطر داخلی D، P به دو چندضلعی مشبکه‌ای ساده به‌نامهای $P_۱$ و $P_۲$ تقسیم می‌شود که به‌ترتیب $I_۱$ و $I_۲$ نقطهٔ داخلی و $B_۱$ و $B_۲$ نقطهٔ مرزی دارند. فرض‌کنید که روی D، به‌جز دوسر آن، x نقطهٔ دیگر از شبکه وجود داشته باشد. در این‌صورت $I = I_۱ + I_۲ + x$ و $B = B_۱ + B_۲ - ۲ - ۲x$.

حال فرض می‌کنیم که مساحتهای P، $P_۱$ و $P_۲$ به‌ترتیب A، $A_۱$ و $A_۲$ باشند. در این‌صورت

$$
\begin{aligned}
A &= A_۱ + A_۲ \\
&= (I_۱ + \tfrac{۱}{۲}B_۱ - ۱) + (I_۲ + \tfrac{۱}{۲}B_۲ - ۱) \\
&= (I_۱ + I_۲) + \tfrac{۱}{۲}(B_۱ + B_۲) - ۲ \\
&= (I_۱ + I_۲ + x) + \tfrac{۱}{۲}(B_۱ + B_۲ - ۲x) - ۲ \\
&= I + \tfrac{۱}{۲}(B + ۲) - ۲ \\
&= I + \tfrac{۱}{۲}B - ۱
\end{aligned}
$$

و حکم به استقرا ثابت می‌شود.

توجه کنید که در این مثال، دشوارترین بخش برهان، گام نخُست استقراست (که در ۱-۷-۳ ثابت شد). به‌نظر می‌رسد که گام استقرایی (یعنی گام (ب)) از نظر مفهوم بسیار ساده است.

مسائل

۲ـ۳ـ۲ الف) ثابت کنید که می‌توان هر عدد صحیح مثبت بزرگتر از یک را به شکل حاصلضربی از اعداد اول نوشت.

ب) اصل برتران (که در گذشته به‌صورت یک اصل پذیرفته می‌شد ولی امروزه قضیه‌ای است مشهور) بیان می‌کند که به‌ازای هر $x > 1$، عدد اولی بین x و $2x$ وجود دارد. با استفاده از این واقعیت نشان دهید که می‌توان هر عدد صحیح مثبت را به‌صورت مجموعی از اعداد اول متمایز نوشت. (برای اثبات، «یک» را عدد اول بگیرید.)

۲ـ۳ـ۳ الف) نشان دهید که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به‌شکل مجموعی از اعداد فیبوناتچی متمایز نوشت.

ب) $k \gg m$ را به معنی $k \geqslant m + 2$ بگیرید. نشان دهید که هر عدد صحیح مثبت n، نمایشی به‌شکل $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$ دارد که در آن F_{k_i}ها اعداد فیبوناتچی هستند و $k_1 \gg k_2 \gg \ldots \gg k_r \gg 0$.

ج) نشان دهید که نمایش بیان شده در (ب) منحصر به‌فرد است.

مثالهای اضافی. ۳-۱-۱، ۳-۱-۲، ۳-۱-۱۸، ۳-۵-۵، ۶-۲-۳.

۲ـ۴ استقرا و تعمیم

گاهی (مثلاً در بخش ۱-۱۲) ملاحظه کرده‌ایم که کلّیت بخشیدن به یک مسأله، موجب سهولت در حل آن می‌شود. این مطلب دربارهٔ مسائل مربوط به استقرا نیز درست است. مثلاً ممکن است در مواردی گزاره‌های اولیهٔ $P(1)$، $P(2)$، $P(3)$، ... شامل اطلاعات کافی برای اثبات گام استقرایی (یعنی گام (ب)) نباشند. در این‌صورت طبیعی به‌نظر می‌رسد که با فرمولبندی مجدد گزاره‌ها به شکلی قویتر و کلیتر مانند $Q(1)$، $Q(2)$، $Q(3)$، ... (به شرط آنکه به‌ازای هر n، $Q(n)$ گزارهٔ $P(n)$ را نتیجه دهد)، باز به‌دنبال برهانی براساس استقرا بگردیم.

۲ـ۴ـ۱ اگر $A_1 + \cdots + A_n = \pi$ و به‌ازای $i = 1, \ldots, n$، $0 < A_i \leqslant \pi$، آنگاه

$$\sin A_1 + \cdots + \sin A_n \leqslant n \sin \frac{\pi}{n}$$

حل. فرض‌کنید $P(k)$، یعنی حکم به‌ازای k درست باشد. برای اثبات گام استقرا، فرض‌می‌کنیم $A_1 + \cdots + A_k + A_{k+1} = \pi$ که در آن به‌ازای $i = 1, \ldots, k+1$، $0 < A_i \leqslant \pi$. در این حالت روش استفاده از $P(k)$ روشن نیست. ممکن است با قرار دادن A_k و A_{k+1} در یک دسته، بنویسیم $A_1 + \cdots + A_{k-1} + (A_k + A_{k+1}) = \pi$ و سپس با استفاده از فرض استقرا نتیجه بگیریم

$$\sin A_1 + \cdots + \sin A_{k-1} + \sin(A_k + A_{k+1}) \leqslant k \sin \frac{\pi}{k}$$

ولی به‌هیچ وجه روشن نیست که از نامساوی فوق، $P(k+1)$ یعنی

$$\sin A_1 + \sin A_2 + \cdots + \sin A_k + \sin A_{k+1} \leqslant (k+1)\sin\frac{\pi}{k+1}$$

به‌دست می‌آید یا خیر.

ظاهراً شرط تساوی مجموع A_iها با عدد π بسیار دست و پاگیر است. بیایید در عوض، گزارهٔ $Q(n)$ را به شکل زیر درنظر بگیریم:

اگر به‌ازای $i = 1, \ldots, n$، $0 < A_i \leqslant \pi$، آنگاه

$$\sin A_1 + \sin A_2 + \cdots + \sin A_n \leqslant n\sin\left(\frac{A_1 + \cdots + A_n}{n}\right)$$

(توجه کنید که $P(n)$ نتیجه‌ای است از $Q(n)$.) درستی $Q(1)$ بدیهی است. فرض‌کنید $Q(k)$ درست باشد و به‌ازای $i = 1, \ldots, k+1$، $0 < A_i \leqslant \pi$. در این‌صورت

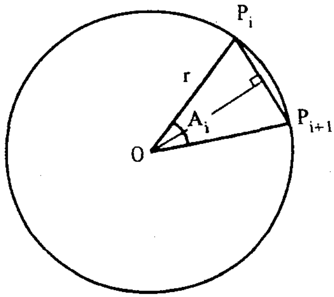
$$\begin{aligned}
&\sin A_1 + \ldots + \sin A_k + \sin A_{k+1}\\
&\qquad \leqslant k\sin\left(\frac{A_1 + \cdots + A_k}{k}\right) + \sin A_{k+1}\\
&\qquad = (k+1)\left[\frac{k}{k+1}\sin\left(\frac{A_1 + \cdots + A_k}{k}\right) + \frac{1}{k+1}\sin A_{k+1}\right]\\
&\qquad \leqslant (k+1)\left[\sin\left(\frac{k}{k+1}\left(\frac{A_1 + \cdots + A_k}{k}\right) + \frac{1}{k+1}A_{k+1}\right)\right]\\
&\qquad = (k+1)\sin\left(\frac{A_1 + \cdots + A_{k+1}}{k+1}\right)
\end{aligned}$$

(نامساوی ماقبل آخر، نتیجهٔ حکم ۱-۲-۱۲(ب) است.) اکنون حکم به استقرا ثابت می‌شود.

حال می‌توانیم حدس ۱-۶-۲(هـ) را ثابت کنیم، یعنی ثابت کنیم که بین چندضلعیهای محاط در دایره، چندضلعی منتظم بیشترین مساحت را داراست. برای این‌کار، فرض‌کنیم: به‌ازای $n \geqslant 3$، $P_1, P_2, \ldots, P_n$ رأسهای متوالی یک چندضلعی محاط (در دایره‌ای به شعاع r) باشند. فرض‌کنید O مرکز دایره و به‌ازای $i = 1, \ldots, n$، T_i مساحت مثلث P_iOP_{i+1} باشد (قرار می‌دهیم $P_{n+1} = P_1$) و $A_i = \angle P_iOP_{i+1}$ (شکل ۲-۲). در این‌صورت

$$\begin{aligned}
T_i &= 2\left[\frac{1}{2}\left(r\cos\frac{1}{2}A_i\right)\left(r\sin\frac{1}{2}A_i\right)\right]\\
&= r^2\cos\frac{1}{2}A_i\sin\frac{1}{2}A_i\\
&= \frac{1}{2}r^2\sin A_i
\end{aligned}$$

هر چندضلعی که بیشترین مساحت را دارد، می‌بایست به‌ازای هر i، در شرط $0 < A_i < \pi$ صدق کند.



شکل۲-۲

درنتیجه حکم مسألهٔ قبل نشان می‌دهد که

$$\text{مساحت چندضلعی} = \sum_{i=۱}^{n} T_i$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۲} r^۲ \sin A_i = \frac{۱}{۲} r^۲ \sum_{i=۱}^{n} \sin A_i$$

$$\leqslant \frac{n}{۲} r^۲ \sin \left[\frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} A_i \right]$$

$$= n \left[\frac{۱}{۲} r^۲ \sin(\frac{۲\pi}{n}) \right]$$

طرف راست تساوی آخر، مساحت یک nـضلعی منتظم است و این برهان را کامل می‌کند.

۲ـ۴ـ۲ فرض‌کنید که به‌ازای $x > ۱$، $f(x) = (x^۲ - ۱)^{\frac{۱}{۲}}$. ثابت کنید که به‌ازای nهای فرد، $f^{(n)}(x) > ۰$ و به‌ازای n های زوج، $f^{(n)}(x) < ۰$.

حل. ممکن است انتظار داشته باشیم که بتوانیم $f^{(k+۱)}(x)$ را بر حسب $f^{(k)}(x)$ بیان کنیم، ولی نگاهی کوتاه به اولین مشتقهای f، ما را نومید می‌سازد:

$$f'(x) = \frac{x}{(x^۲ - ۱)^{\frac{۱}{۲}}} \quad , \quad f''(x) = -\frac{۱}{(x^۲ - ۱)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$f'''(x) = \frac{۳x}{(x^۲ - ۱)^{\frac{۵}{۲}}} \quad , \quad f^{(\mathrm{iv})}(x) = -\frac{۱۲x^۲ + ۱}{(x^۲ - ۱)^{\frac{۷}{۲}}}$$

$$f^{(\mathrm{v})}(x) = \frac{۶۰x^۳ + ۳۱x}{(x^۲ - ۱)^{\frac{۹}{۲}}} \quad , \quad f^{(\mathrm{vi})}(x) = -\frac{۵۲۲x^۴ + ۲۶۶x^۲ + ۳۱}{(x^۲ - ۱)^{\frac{۱۱}{۲}}}$$

به‌جای این‌کار، فرمولبندی جدید زیر را درنظر می‌گیریم: اگر $f(x) = (x^۲ - ۱)^{\frac{۱}{۲}}$ و $x > ۱$، آنگاه

$$f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{(x^۲ - ۱)^{\frac{۲n-۱}{۲}}}$$

که در آن $g_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-۲$ است و

$$g_n(x) = \begin{cases} \text{تابعی فرد است که همه ضرایب آن نامنفی‌اند} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ \text{تابعی زوج است که همه ضرایب آن نامثبت‌اند} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

می‌توان این گزاره را به کمک استقرا ثابت کرد (که ما از جزئیات پیچیده آن صرف‌نظر می‌کنیم) و این، حکم اصلی را نتیجه می‌دهد.

۲ـ۴ـ۳ فرض‌کنید که F_i، iاُمین جملهٔ دنبالهٔ فیبوناتچی باشد. ثابت کنید $F_{۲n+۱} = F_{n+۱}^۲ + F_n^۲$.

حل. حکم به‌ازای $n = ۱$ درست است، لذا فرض‌کنید که به‌ازای $n = k$ نیز درست باشد. در این‌صورت

$$\begin{aligned} F^۲_{k+۲} + F^۲_{k+۱} &= (F_{k+۱} + F_k)^۲ + F_{k+۱}^۲ \\ &= F_{k+۱}^۲ + ۲F_{k+۱}F_k + F_k^۲ + F_{k+۱}^۲ \\ &= (F_{k+۱}^۲ + F_k^۲) + (۲F_{k+۱}F_k + F_{k+۱}^۲) \\ &= F_{۲k+۱} + (۲F_{k+۱}F_k + F_{k+۱}^۲) \end{aligned}$$

که در مرحلهٔ آخر از فرض استقرا استفاده شده است.

اگر بتوانیم نشان دهیم که $۲F_{k+۱}F_k + F_{k+۱}^۲ = F_{۲k+۲}$، حکم ثابت است زیرا با استفاده از این تساوی می‌توانیم استدلال را ادامه دهیم و نتیجه بگیریم $F_{۲k+۱} + (۲F_{k+۱}F_k + F_{k+۱}^۲) = F_{۲k+۱} + F_{۲k+۲} = F_{۲k+۳}$ و این گام استقرایی را کامل می‌کند. لذا کافی است ثابت کنیم $۲F_{k+۱}F_k + F_{k+۱}^۲ = F_{۲k+۲}$. برای این‌کار باز هم از استقرا استفاده می‌کنیم. حکم به‌ازای $n = ۱$ درست است. با استفاده از فرض درستی آن به‌ازای $n = k$، داریم

$$\begin{aligned} ۲F_{k+۲}F_{k+۱} + F_{k+۲}^۲ &= ۲(F_{k+۱} + F_k)F_{k+۱} + F_{k+۲}^۲ \\ &= ۲F_{k+۱}^۲ + ۲F_{k+۱}F_k + F_{k+۲}^۲ \\ &= (۲F_{k+۱}F_k + F_{k+۱}^۲) + (F_{k+۱}^۲ + F_{k+۲}^۲) \\ &= F_{۲k+۲} + (F_{k+۱}^۲ + F_{k+۲}^۲) \end{aligned}$$

دوباره به مسأله قبل بازگشتیم: آیا $F_{k+۲}^۲ + F_{k+۱}^۲ = F_{۲k+۳}$؟ درصورت درست بودن این تساوی، $F_{۲k+۲} + (F_{k+۱}^۲ + F_{k+۲}^۲) = F_{۲k+۲} + F_{۲k+۳} = F_{۲k+۴}$ و استقرا کامل می‌شود. لذا مسأله‌ها وابسته به یکدیگرند: درستی اولی وابسته به درستی دومی و درستی دومی وابسته به درستی اولی است.

به روش زیر می‌توانیم هر دو مسأله را ثابت و مشکل را حل کنیم. دو گزارهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$P(n) : F_{n+۱}^۲ + F_n^۲ = F_{۲n+۱}$$

$$Q(n) : ۲F_{n+۱}F_n + F_{n+۱}^۲ = F_{۲n+۲}$$

$P(۱)$ و $Q(۱)$ هر دو درست‌اند. استدلالهایی که در بالا انجام شد، نشان می‌دهند که $P(k+۱)$ نتیجه‌ای است از $P(k)$ و $Q(k)$، و نیز $Q(k+۱)$ نتیجه‌ای است از $P(k+۱)$ و $Q(k)$. درنتیجه $P(k+۱)$ و $Q(k+۱)$ از $P(k)$ و $Q(k)$ نتیجه می‌شوند و برهان کامل است.

۲ـ۴ـ۴ فرض‌کنید $f(x)=a_{۱}\sin x+a_{۲}\sin ۲x+\cdots+a_{n}\sin nx$، که در آن $a_{۱},\dots,a_{n}$ اعداد حقیقی و n عددی صحیح و مثبت است. اگر به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، $|f(x)|\leqslant|\sin x|$، ثابت کنید $|a_{۱}+۲a_{۲}+\cdots+na_{n}|\leqslant ۱$.

حل. فرض‌کنید که بخواهیم از استقرا روی تعداد جمله‌های $f(x)$ استفاده کنیم. وقتی $n=۱$، آنگاه $f(x)=a_{۱}\sin x$ و چون $|f(x)|\leqslant|\sin x|$، نتیجه می‌گیریم $|a_{۱}|=|a_{۱}\sin(\frac{\pi}{۲})|=|f(\frac{\pi}{۲})|\leqslant|\sin(\frac{\pi}{۲})|=۱$.

فرض کنید که حکم به‌ازای k درست باشد. به‌ازای اعداد حقیقی $a_{۱},a_{۲},\dots,a_{k+۱}$ تابع

$$f(x)=a_{۱}\sin x+a_{۲}\sin ۲x+\cdots+a_{k}\sin kx+a_{k+۱}\sin(k+۱)x$$

را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، $|f(x)|\leqslant|\sin x|$. با استفاده از تساوی $\sin(k+۱)x=\sin kx\cos x+\sin x\cos kx$ می‌نویسیم

$$\begin{aligned}f(x)=&(a_{۱}+a_{k+۱}\cos kx)\sin x+a_{۲}\sin ۲x+\dots\\&+a_{k-۱}\sin(k-۱)x+(a_{k}+a_{k+۱}\cos x)\sin kx\end{aligned}$$

به این‌ترتیب $f(x)$ را به شکل مجموع k جمله، طوری بازنویسی کردیم که بتوانیم کم و بیش از فرض استقرا استفاده کنیم. اما این مشکل وجود دارد که ضریبهای سینوسها در این عبارت ثابت نیستند بلکه شامل توابعی از x هستند. توجه به این نکته، راهنمایی است به اینکه مسألهٔ کلیتر زیر را درنظر بگیریم.

فرض‌کنید که $a_{۱}(x),\dots,a_{n}(x)$ توابع مشتق‌پذیری از x باشند و

$$f(x)=a_{۱}(x)\sin x+a_{۲}(x)\sin ۲x+\cdots+a_{n}(x)\sin nx$$

اگر به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، $|f(x)|\leqslant|\sin x|$، ثابت کنید

$$|a_{۱}(۰)+۲a_{۲}(۰)+\cdots+na_{n}(۰)|\leqslant ۱$$

در صورتی‌که بتوانیم این گزاره را ثابت کنیم، در حقیقت مسألهٔ اصلی نیز حل شده است، زیرا اگر به‌ازای هر x و $i=۱,۲,\dots,n$، قرار دهیم $a_{i}(x)=a_{i}$ که a_{i}ها اعدادی ثابت‌اند، حکم مسأله اصلی نتیجه می‌شود.

بار دیگر از استقرا استفاده می‌کنیم. داریم $|a_{۱}(x)\sin x|\leqslant|\sin x|$. با نزدیک شدن x به ۰، داریم $\sin x\neq ۰$، لذا به‌ازای این مقادیر x، $|a_{۱}(x)|\leqslant ۱$. چون $a_{۱}(x)$ در $x=۰$ پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که $|a_{۱}(۰)|\leqslant ۱$. بدین‌ترتیب درستی حکم به‌ازای $n=۱$ ثابت می‌شود.

حال فرض‌می‌کنیم که حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد و تابع

$$f(x)=a_{۱}(x)\sin x+a_{۲}(x)\sin ۲x+\cdots+a_{k+۱}(x)\sin(k+۱)x$$

را درنظر می‌گیریم که در آن $|f(x)|\leqslant|\sin x|$ و همه $a_{i}(x)$ها مشتق‌پذیرند. مانند قبل این تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}f(x)=&[a_{۱}(x)+a_{k+۱}(x)\cos kx]\sin x+a_{۲}(x)\sin ۲x+\dots\\&+a_{k-۱}(x)\sin(k-۱)x+[a_{k}(x)+a_{k+۱}(x)\cos x]\sin kx\end{aligned}$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از فرض استقرا نتیجه بگیریم

$$\left|[a_1(0) + a_{k+1}(0)] + 2a_2(0) + \cdots + (k-1)a_{k-1}(0) + k[a_k(0) + a_{k+1}(0)]\right| \leqslant 1$$

و این معادل است با

$$|a_1(0) + 2a_2(0) + \cdots + ka_k(0) + (k+1)a_{k+1}(0)| \leqslant 1$$

و این همان نتیجه‌ای است که می‌خواستیم به‌دست آوریم. (در ۶-۳-۲، برهانی از این حکم بدون استفاده از استقرا آمده است.)

مسائل

۲ـ۴ـ۵ فرض‌کنید S، به‌ازای $n \geqslant 3$، یک مربع مشبکه‌ایِ n در n باشد. ثابت کنید که می‌توان خط شکسته‌ای متشکل از $2n - 2$ پاره‌خط رسم کرد به‌طوری‌که از همه n^2 نقطهٔ مشبکه‌ای واقع بر S عبور کند.

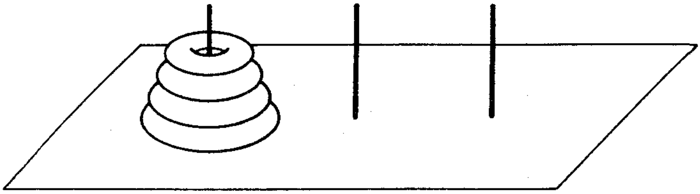
۲ـ۴ـ۶ فرض‌کنید $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ و $f_{n+1}(x) = xf'_n(x)$. ثابت کنید که به‌ازای $0 < x < 1$، $f_{n+1}(x) > 0$.

۲ـ۵ رابطهٔ بازگشتی

در ارائهٔ راه دوم مسألهٔ ۱-۱-۱، تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی را با A_n نشان دادیم و ثابت کردیم که $A_{n+1} = 2A_n$ و $A_0 = 1$. این مثالی از یک رابطهٔ بازگشتی است. اگرچه (برخلاف روش استقرا) دستور صریحی برای A_n ارائه نداده‌ایم، ولی با وجود این، این رابطهٔ بازگشتی، «چرخه» یا الگوریتمی را برای محاسبه A_{n+1} در اختیار ما قرار می‌دهد. دراین بخش آن دسته از مسائلی را بررسی می‌کنیم که می‌توانند به مسائلی هم‌ارز و با پارامترهایی به تعداد کمتر تبدیل شوند. بدین‌صورت با استدلالی بازگشتی، مقادیر پارامترهای موجود را به‌حدی کاهش می‌دهیم که مسأله نهایی قابل حل شود.

۲ـ۵ـ۱ (مسألهٔ برج هانوی) فرض‌کنید که از درون n حلقه، که قطرهای دایره‌های بیرونی آنها متفاوت است، یک میلهٔ قائم عبور می‌کند به‌طوری‌که هر حلقه از حلقهٔ بالایی خود بزرگتر است و از روی هم قرار گرفتن آنها شکلی شبیه به مخروط تشکیل می‌شود (شکل ۲-۳). دو میلهٔ قائم دیگر نیز به فاصلهٔ کافی از یکدیگر قرار دارند. می‌خواهیم همهٔ حلقه‌ها را به میلهٔ دوم منتقل کنیم و مخروطی مانند مخروط اولی تشکیل دهیم، با این شرط که در هر حرکت تنها یکی از حلقه‌ها را جابه‌جا کنیم. در طی مراحل انتقال، حق نداریم حلقه‌ای بزرگتر را روی حلقه‌ای کوچکتر بگذاریم (به‌همین دلیل باید از میله سوم استفاده شود.) کمترین تعداد حرکتهای لازم برای انتقال کامل حلقه‌ها، چندتاست؟

حل. فرض‌کنید که M_n کمترین تعداد حرکتهای لازم برای انتقال کامل یک دسته nتایی از حلقه‌ها باشد. روشن است که $M_1 = 1$. لذا فرض می‌کنیم $n > 1$. برای انتقال بزرگترین حلقه به پایین میله دوم، ابتدا لازم است که $n - 1$ حلقهٔ بالای آن را به میلهٔ سوم منتقل کنیم. برای این‌کار (با توجه به نماد بالا)، دست‌کم M_{n-1} حرکت لازم است. سپس با یک حرکت، بزرگترین حلقه به میلهٔ دوم منتقل می‌شود و به‌دنبال آن با انجام M_{n-1} حرکت



شکل۲-۳

دیگر، $n-1$ حلقهٔ باقیمانده به میلهٔ دوم انتقال می‌یابند. درنتیجه

$$M_n = 2M_{n-1} + 1 \,,\; M_1 = 1$$

به‌کمک این رابطهٔ بازگشتی و نیز استقرایی ساده، می‌توان نشان داد

$$M_n = 2^n - 1$$

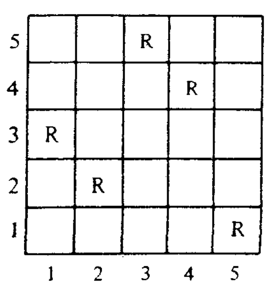
$$(M_{n+1} = 2M_n + 1 = 2[2^n - 1] + 1 = 2^{n+1} - 1)$$

فرض‌کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ جایگشتی از اعداد $1, 2, \ldots, n$ باشد. به روش زیر، می‌توانیم تعبیری هندسی از این جایگشت را به‌دست آوریم. در یک صفحهٔ شطرنجی n در n، به‌ازای هر i، قلعه‌ای را در ستون iام (از چپ) و سطر a_iام (از پایین) قرار می‌دهیم. به‌عنوان مثال شکل ۲-۴، جایگشت ۳، ۲، ۵، ۴، ۱ را نشان می‌دهد. بدین‌صورت می‌بینیم که هر جایگشت روی $1, 2, \ldots, n$، متناظر است با قرار دادن n قلعه غیرمهاجم در یک صفحهٔ شطرنج n در n. به‌کمک این تناظر، تصوری هندسی از جایگشتها به‌دست می‌آوریم و می‌توانیم از عبارات و نمایش قلعه‌های غیرمهاجم روی یک صفحهٔ شطرنجی استفاده کنیم.

۲ـ۵ـ۲ فرض کنید به Q_n طریق مختلف بتوانیم n قلعهٔ غیر مهاجم را روی یک صفحهٔ شطرنجی n در n طوری قرار دهیم که نسبت به قطری که گوشهٔ سمت چپ پایین را به گوشهٔ سمت راست بالا متصل می‌کند، متقارن باشند. نشان دهید

$$Q_n = Q_{n-1} + (n-1)Q_{n-2}$$

حل. قلعه‌ای که در ستون اول قرار می‌گیرد، ممکن است مربع گوشه‌ای سمت چپ پایین صفحه شطرنجی را اشغال کند و یا اشغال نکند. درصورت اشغال این مربع، Q_{n-1} طریق مختلف برای قرار دادن $n-1$ قلعهٔ



شکل۲-۴

باقیمانده وجود دارد. در غیر این‌صورت این قلعه می‌تواند هریک از $n-1$ مربع دیگر ستون اول را اشغال کند. وقتی این قلعه در جای خود قرار گیرد، وضع استقرار قرینهٔ این قلعه نسبت به قطر مفروض در سطر اول به‌شکلی منحصر به‌فرد مشخص می‌شود. سپس می‌توان $n-2$ قلعهٔ باقیمانده را به Q_{n-2} طریق در جای خود قرار داد. با جمع‌بندی این نتایج، حکم ثابت می‌شود.

۲ـ۵ـ۳ سکه‌ای را n بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه در بین پرتابها دوبار متوالی پشت بیاید، چیست؟

حل. فرض‌کنیم P_n احتمال آن باشد که در n پرتاب، هیچگاه دو پشت متوالی ظاهر نشود. به روشنی $P_1 = 1$، $P_2 = \frac{3}{4}$. اگر $n > 2$، دو حالت رخ می‌دهد.

اگر اولین پرتاب رو بیاید، آنگاه (با توجه به نماد بالا) احتمال اینکه در $n-1$ پرتاب بعدی دو پشت متوالی ظاهر نشود، P_{n-1} است. چنانچه اولین پرتاب پشت بیاید، آنگاه لازم است پرتاب دوم رو باشد تا دو پشت متوالی نداشته باشیم و در این‌صورت، احتمال اینکه در $n-2$ پرتاب باقیمانده دو پشت متوالی رخ ندهد، P_{n-2} است. درنتیجه به‌ازای $n > 2$ داریم

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2}$$

با ضرب دو طرف این تساوی در 2^n، شکل ساده‌تری به‌دست می‌آید:

$$2^n P_n = 2^{n-1}P_{n-1} + 2^{n-2}P_{n-2}$$

اگر به‌ازای هر n قرار دهیم $S_n = 2^n P_n$، آنگاه

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

این رابطه همان رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ فیبوناتچی است (توجه داشته باشید که $S_n = F_{n+2}$). درنتیجه احتمال موردنظر برابر است با $Q_n = 1 - P_n = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$.

در مثال بعدی، دستور بازگشتی صریحی به‌دست نمی‌آید، با این حال، مثال مزبور نمونه روشنی است از تفکر به روش «عملیات وارونه» که ویژگی مشخصهٔ مفهوم بازگشت است.

۲ـ۵ـ۴ ثابت‌کنید که می‌توان هر عدد گویا را به‌صورت مجموعی از جمله‌های متمایز و به تعدادی متناهی از سری همساز نوشت.

حل. فرض کنید که $\frac{m}{n}$ عددی گویا باشد. در این‌صورت

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$$

که مجموعی از جمله‌های سری همساز است و در آن $m-1$ تکرار وجود دارد. به کمک اتحاد $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ جمله‌های تکراری را به شکل بازگشتی بسط می‌دهیم تا وقتی که همهٔ جمله‌هایی که به‌دست می‌آیند متمایز باشند.

مسائل

۲ـ۵ـ۵ فرض‌کنید n خط در صفحهٔ اقلیدسی رسم شده‌اند به‌طوری‌که هیچ سه‌تای آنها همرس و هیچ دوتای آنها موازی نیستند. تعداد ناحیه‌های حاصل از رسم این خطوط را به P_n نشان می‌دهیم. نتیجه بگیرید که $P_{n+1} = P_n + (n+1)$.

۲ـ۵ـ۶ الف) فرض‌کنید E_n دترمینان ماتریس n در nی باشد که درایه‌های زیر قطر اصلی آن (قطری که از گوشهٔ چپ بالا به گوشهٔ راست پایین رسم می‌شود) -1 و درایه‌های روی قطر اصلی و بالای آن ۱ هستند. نشان دهید $E_1 = 1$ و به‌ازای $n > 1$، $E_n = 2E_{n-1}$.

ب) فرض‌کنید D_n دترمینان ماتریس n در nی باشد که درایهٔ (i,j)ام آن (درایه‌ای که در سطر iام و ستون jام قرار دارد) مساوی است با قدر مطلق تفاضل i و j. نشان دهید $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

ج) فرض‌کنید F_n دترمینان ماتریس n در nی باشد که روی قطر اصلی آن a، روی قطر بالایی آن (قطر بالای قطر اصلی که $n-1$ درایه دارد) b، روی قطر پایینی آن (قطر پایین قطر اصلی که $n-1$ درایه دارد) c و در بقیه جاها صفر است. نشان دهید که به‌ازای $n > 2$، $F_n = aF_{n-1} - bcF_{n-2}$. وقتی که $a = b = 1$ و $c = -1$ چه روی می‌دهد؟

د) A_n، دترمینان ماتریس n در nی است که درایهٔ (i,j)ام آن $a^{|i-j|}$ است. مقدار A_n را حساب کنید. (برای این منظور، رابطه‌ای بازگشتی میان A_n و A_{n-1} بنویسید.)

۲ـ۵ـ۷ الف) فرض‌کنید $a_1, \ldots, a_n$ اعدادی حقیقی و مثبت باشند و $A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. نشان دهید $A_n \geqslant A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \times a_n^{\frac{1}{n}}$، و تساوی وقتی برقرار می‌شود که $A_{n-1} = a_n$. (راهنمایی: نامساوی ۲-۱-۵ را به‌کار ببرید.)

ب) نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی. با استفاده از (الف) نشان دهید

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqslant (a_1 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

که در آن، تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

۲ـ۵ـ۸ دو بازیکن پینگ‌ـپونگ به نامهای A و B، قرار می‌گذارند که چند بازی انجام دهند. هر دو بازیکن در این بازی به یک اندازه مهارت دارند. با وجود این، فرض می‌کنیم که احتمال برنده شدن اولین زنندهٔ سرویس در هر بازی P باشد (ممکن است A در یک بازی یا B در بازی دیگری زنندهٔ سرویس باشد). فرض‌کنید که در اولین بازی، سرویس اول در اختیار A و در بازیهای دیگر در اختیار نفر بازنده باشد. فرض‌کنید P_n احتمال برنده شدن بازیکن A در بازی nام باشد. نشان دهید $P_{n+1} = P_n(1-P) + (1-P_n)P$.

۲ـ۵ـ۹ دانش‌آموزی سکهٔ سالمی را پرتاب می‌کند و به‌ازای هر پشت، یک امتیاز و به‌ازای هر رو دو امتیاز می‌گیرد. ثابت کنید احتمال آنکه این دانش‌آموز طی n پرتاب، دقیقاً n امتیاز کسب کند، برابر است با $\frac{1}{3}\left[2 + (-\frac{1}{2})^n\right]$. (راهنمایی: این احتمال را P_n بگیرید و P_n را برحسب P_{n-1}، یا برحسب P_{n-1} و P_{n-2} بیان کنید. به کمک رابطهٔ بازگشتی به‌دست آمده، برهانی استقرایی ارائه دهید.)

۲ـ۵ـ۱۰ (مسأله ژوزفوس) اعداد ۱ ,۲ ,… ,n را متوالیاً دور یک دایره (مثلاً در جهت عقربه‌های ساعت) می‌چینیم. حال عدد ۲ را حذف و سپس یک در میان، این‌کار را بین اعداد باقیمانده تکرار می‌کنیم تا تنها یک عدد باقی بماند. (مثلاً به‌ازای $n = ۵$، اعداد حذف شده به‌ترتیب عبارت‌اند از ۲، ۴، ۱، ۵ و فقط عدد ۳ باقی می‌ماند.) عددی را که باقی می‌ماند به $f(n)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید

$$f(۲n) = ۲f(n) - ۱$$
$$f(۲n + ۱) = ۲f(n) + ۱$$

(این مسأله را در ۳-۴-۵ ادامه خواهیم داد).

۲ـ۵ـ۱۱ الف) فرض‌کنید بتوانیم به R_n طریق مختلف n قلعهٔ غیرمهاجم را در یک صفحهٔ شطرنج n در n قرار دهیم به طوری که با دوران ۹۰° حول مرکز، یکی به‌جای دیگری قرار گیرد. نشان دهید

$$R_{۴n} = (۴n - ۲)R_{۴n-۴}$$
$$R_{۴n+۱} = R_{۴n}$$
$$R_{۴n+۲} = ۰ = R_{۴n+۳}$$

ب) فرض‌کنید که بتوانیم به S_n طریق مختلف، n قلعهٔ غیرمهاجم را در یک صفحهٔ شطرنج n در n به گونه‌ای قرار دهیم که نسبت به مرکز صفحه، متقارن باشند. نشان دهید

$$S_{۲n} = ۲nS_{۲n-۲}$$
$$S_{۲n+۱} = S_{۲n}$$

ج) فرض کنید که بتوانیم به T_n طریق مختلف، n قلعهٔ غیرمهاجم را در یک صفحهٔ شطرنج n در n قرار دهیم به طوری که نسبت به هر دو قطر، متقارن باشند. نشان دهید

$$T_۲ = ۲$$
$$T_{۲n+۱} = T_{۲n}$$
$$T_{۲n} = ۲T_{۲n-۲} + (۲n - ۲)T_{۲n-۴}$$

۲ـ۵ـ۱۲ $(n + ۲)$ ضلعی منتظمی را در یک دایره محاط کرده‌ایم. فرض‌کنید که بتوان به T_n طریق مختلف رأسهای آن را دوبه دو به‌هم وصل کرد به طوری‌که پاره‌خطهای واصل، یکدیگر را قطع نکنند. اگر قرار دهیم $T_۰ = ۱$، آنگاه نشان دهید

$$T_n = T_۰T_{n-۱} + T_۱T_{n-۲} + T_۲T_{n-۳} + \cdots + T_{n-۱}T_۰$$

(این مسأله را در ۵-۴-۱۰ ادامه می‌دهیم).

۲ـ۵ـ۱۳ فرض‌کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ جایگشتی از مجموعهٔ $S_n = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد. عضو i از مجموعه S_n را نقطهٔ ثابت این جایگشت نامیم هرگاه $a_i = i$.

الف) پریش S_n، جایگشتی است که نقطهٔ ثابتی ندارد. فرض‌کنید g_n، تعداد پریشهای S_n باشد. نشان دهید که

$$g_۱ = ۰ \quad , \quad g_۲ = ۱$$

و به‌ازای $n > ۲$،

$$g_n = (n-۱)(g_{n-۱} + g_{n-۲})$$

(راهنمایی: هر پریش، اولین عضو S_n را با عضو دیگری از آن تعویض می‌کند یا تعویض نمی‌کند.)

ب) فرض‌کنید f_n، تعداد جایگشتهای S_n باشد که دقیقاً یک نقطهٔ ثابت دارند. نشان دهید $|f_n - g_n| = ۱$.

۲ـ۵ـ۱۴ در یک مهمانی شام، n میهمان کلاههای خود را به خدمتکار می‌سپارند و هنگام خروج به تصادف آنها را تحویل می‌گیرند. احتمال آنکه هیچ‌یک از آنها کلاه خودش را دریافت نکند چیست؟ (راهنمایی: این احتمال را p_n بگیرید. با توجه به g_n در مسألهٔ ۲-۵-۱۳، داریم $p_n = \frac{g_n}{n!}$. فرض‌کنید $C_n = p_n - p_{n-۱}$. با استفاده از رابطهٔ بازگشتی مسألهٔ ۲-۵-۱۳ (الف)، نشان دهید $C_۲ = \frac{۱}{۲}$، $C_n = -\frac{C_{n-۱}}{n}$. با استفاده از این تساوی نشان دهید $p_n = \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{(-۱)^n}{n!}$. بنابراین به‌ازای nهای بزرگ، $p_n \approx \frac{۱}{e}$.)

۲ـ۵ـ۱۵ الف) فرض‌کنید $I_n = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^n x\, dx$. رابطه‌ای بازگشتی برای I_n بیابید.

ب) نشان دهید

$$I_{۲n} = \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots \times (۲n-۱)}{۲ \times ۴ \times \ldots \times ۲n} \cdot \frac{\pi}{۲}$$

ج) نشان دهید

$$I_{۲n+۱} = \frac{۲ \times ۴ \times ۶ \times \ldots \times (۲n-۲)}{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots \times (۲n-۱)}$$

مثالهای اضافی. ۱-۱-۱ (راه حل ۲)، ۴-۳-۹، ۵-۳-۵، ۵-۳-۱۴، ۵-۳-۱۵، ۵-۴-۸،۵-۴-۹، ۵-۴-۲۴، ۵-۴-۲۵، ۵-۴-۲۶ . «استدلالهای مبتنی بر تکرار» از جمله مباحثی هستند که ارتباط تنگاتنگی با استقرا و رابطهٔ بازگشتی دارند. مثالهایی روشنگر در این‌باره عبارت‌اند از: ۴-۴-۴، ۴-۴-۱۷، برهان قضیهٔ مقدار میانی در بخش ۶-۱، ۶-۱-۵، ۶-۱-۶، ۶-۳-۶، ۶-۸-۱۰ و راهیابی بخش ۷-۲ برای نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی.

۲ـ۶ اصل حجره‌ها[۱]

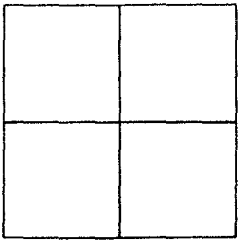
هرگاه گردایهٔ به‌اندازهٔ کافی بزرگی از اشیاء را به چند رده که تعدادشان به‌اندازهٔ کافی کم باشد، تقسیم کنیم، آنگاه یکی از رده‌ها، کمترین تعداد از این اشیاء را شامل می‌شود. این موضوع با گزارهٔ زیر که خودبه خود بدیهی است به شکل دقیقتری بیان می‌شود.

اصل حجره‌ها. اگر $kn + ۱$ شی ($k \geqslant ۱$) را بین n جعبه توزیع کنیم، آنگاه یکی از جعبه‌ها دست‌کم شامل $k + ۱$ شی می‌شود.

این اصل، حتی به‌ازای $k = ۱$، ابزار قدرتمندی در اثبات قضایای وجودی است. با وجود این، به‌کارگیری بجا و به‌موقع این اصل، به تجربه نیاز دارد.

۲ـ۶ـ۱ مجموعه‌ای $n + ۱$ عضوی از اعداد صحیح مثبت و نابیشتر از $۲n$ را درنظر بگیرید. ثابت کنید دست‌کم یک عضو این مجموعه، عضو دیگری از آن را می‌شمارد.

۱ـ لانه کبوتری



شکل۲-۵

حل. این همان مسألهٔ ۲-۲-۷ است که آن را با استقرا روی n ثابت کردیم. با این حال این حکم در حقیقت به‌ازای هر n مفروض، مسأله‌ای وجودی است و همان‌طور که خواهیم دید به‌کمک اصل حجره‌ها به زیبایی ثابت می‌شود.

فرض‌کنید $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ عددهای مفروضی باشند. به‌ازای هر i می‌نویسیم $x_i = 2^{n_i} y_i$، که در آن n_i عددی صحیح و نامنفی و y_i فرد است. فرض‌کنیم $T = \{y_i \; : i = 1, 2, \ldots, n+1\}$. در این‌صورت T گردایه‌ای از $n+1$ عدد فرد کمتر از $2n$ است. از آنجا که تنها n عدد فرد کمتر از $2n$ وجود دارد، اصل حجره‌ها ایجاب می‌کند که دو عضو T باهم مساوی باشند، مثلاً $y_i = y_j$ که $i < j$. درنتیجه

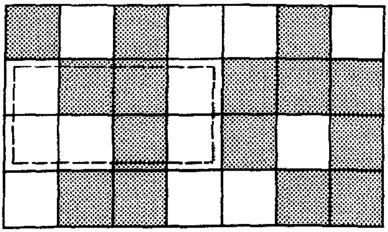
$$x_i = 2^{n_i} y_i \qquad , \qquad x_j = 2^{n_j} y_i$$

اگر $n_i \leqslant n_j$، آنگاه x_i، x_j را می‌شمارد و اگر $n_i > n_j$، آنگاه x_j، x_i را عاد می‌کند و این برهان را تمام می‌کند.

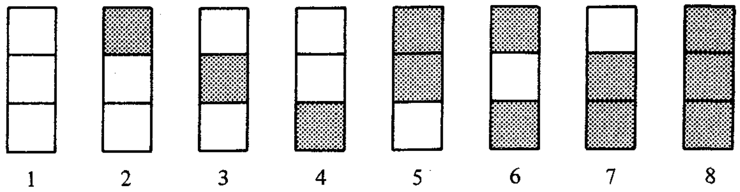
۲ـ۶ـ۲ فرض‌کنید پنج نقطهٔ دلخواه P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 درون مربع S به ضلع ۱ انتخاب شده‌اند. فاصلهٔ دو نقطهٔ P_i و P_j را به d_{ij} نشان می‌دهیم. ثابت کنید دست‌کم یکی از فاصله‌های d_{ij} از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کمتر است.

حل. مطابق شکل ۲-۵، S را به چهار مربع همنهشت تقسیم می‌کنیم. بنابر اصل حجره‌ها، دو تا از نقاط مفروض، در یکی از این مربعها قرار می‌گیرند (اگر نقطه‌ای روی مرز دو مربع قرار گیرد، آن نقطه را متعلق به هر دو مربع تلقی می‌کنیم) و فاصلهٔ این دو نقطه از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کمتر است.

۲ـ۶ـ۳ مطابق شکل ۲-۶، هر یک از مربعهای یک صفحهٔ شطرنج ۴ در ۷ را با دو رنگ سیاه یا سفید رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید که در هر چنین رنگ‌آمیزی، همان‌طور که در شکل ۲-۶ می‌بینیم، مستطیلی (متشکل از خطوط افقی و قائم این صفحه) می‌توان یافت که مربعهای واقع در چهارگوشهٔ آن همرنگ باشند.



شکل۲-۶



شکل۲-۷

حل. چنین مستطیلی را می‌توان در یک صفحهٔ شطرنج ۳ در ۷ نیز پیدا کرد. ترکیب رنگها در ستونهای مستطیل ۳ در ۷، باید به یکی از صورتهایی باشد که در شکل ۲-۷ می‌بینید.

فرض‌کنید که یکی از ستونهای مستطیل از نوع ۱ باشد. در این‌صورت اگر یکی از شش ستون باقیمانده از نوع ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد، حکم ثابت می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم که ستونهای باقیمانده از نوع ۵، ۶، ۷ یا ۸ باشند. در این صورت بنابه اصل حجره‌ها، دست‌کم باید دو ستون از شش ستون باقیمانده از یک نوع باشد و این حکم را ثابت می‌کند.

می‌توان همین استدلال را در حالتی که یکی از ستونها از نوع ۸ باشد، به‌کار برد.

حال فرض‌کنیم هیچ ستونی از نوع ۱ یا ۸نباشد. در این‌صورت هفت ستون و فقط شش نوع رنگ‌آمیزی داریم. لذا بنابه اصل حجره‌ها، دو ستون از یک نوع داریم و حکم ثابت می‌شود.

۲ـ۶ـ۴ ثابت کنید اعداد صحیحی چون a، b و c وجود دارند که همه صفر نیستند و قدرمطلق هر یک از آنها کمتر از یک میلیون است و داریم

$$|a+b\sqrt{۲}+c\sqrt{۳}|<۱۰^{-۱۱}$$

حل. S را مجموعهٔ متشکل از $۱۰^{۱۸}$ عدد حقیقی به شکل $r+s\sqrt{۲}+t\sqrt{۳}$ می‌گیریم که در آن r، s و t در مجموعه $\{۰,۱,۲,\ldots,۱۰^{۶}-۱\}$ تغییر می‌کنند و قرار می‌دهیم $d=(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})۱۰^{۶}$. در این‌صورت هر عضو x از S در بازهٔ $۰\leqslant x<d$ قرار می‌گیرد. این بازه را به $۱۰^{۱۸}-۱$ زیربازهٔ مساوی، هر یک به طول $e=d/(۱۰^{۱۸}-۱)$ تقسیم می‌کنیم. بنابر اصل حجره‌ها، دو تا از $۱۰^{۱۸}$ عدد مجموعهٔ S، باید در یکی از این حجره‌ها قرار بگیرند. با تفریق این دو عدد، عددی به شکل $a+b\sqrt{۲}+c\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید که در آن اعداد a، b و c، همان اعداد موردنظر مسأله‌اند، زیرا $e<\frac{۱۰^{۷}}{۱۰^{۱۸}}=۱۰^{-۱۱}$.

۲ـ۶ـ۵ مجموعهٔ ده‌عضوی دلخواهی متشکل از اعداد طبیعی بین ۱ و ۹۹ را (که اعداد ۱ و ۹۹ نیز می‌توانند جزء آنها باشند و کلیه اعداد در مبنای ده نوشته شده‌اند) درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که می‌توان دو زیر مجموعهٔ ناتهی و مجزا از این مجموعه پیدا کرد به‌طوری‌که مجموع اعضای یکی با مجموع اعضای دیگری مساوی باشد.

حل. به‌کمک مجموعهٔ ده‌عضوی انتخاب شده، می‌توانیم $۲^{۱۰}-۱=۱۰۲۳$ زیرمجموعهٔ ناتهی (مختلف) بسازیم. مجموع اعضای هر یک از این زیرمجموعه‌ها کمتر از ۱۰۰۰ است زیرا $۹۰+۹۱+\cdots+۹۹<۱۰۰۰$. لذا بنابه اصل حجره‌ها، دست‌کم دو زیرمجموعه چون A و B وجود دارند که مجموع اعضای آنها یکی است. با کنار گذاشتن اعضای مشترک آنها، دو مجموعه از هم جدای $X=A-A\cap B$ و $Y=B-A\cap B$ به‌دست می‌آیند که مجموع اعضای مساوی دارند. (هیچ‌یک از دو مجموعهٔ X و Y تهی نیستند چون اگر تهی بودند، نتیجه می‌شد $A\subset B$ یا $B\subset A$ و این غیرممکن است زیرا مجموع اعضای A و B با هم برابرند.)

مسائل

۲ـ۶ـ۶ فرض‌کنید A مجموعه‌ای متشکل از ۲۰ عدد صحیح متمایز باشد که از میان جمله‌های تصاعد حسابی $۱,۴,۷,\ldots,۱۰۰$ انتخاب شده‌اند. ثابت کنید دو عضو متمایز از A وجود دارند که مجموع آنها ۱۰۴ است.

۲ـ۶ـ۷ الف) فرض‌کنید S ناحیه‌ای مربع شکل (در صفحه) به ضلع ۲ سانتیمتر باشد. نشان دهید که بین هر نُه نقطهٔ دلخواه مربع S، سه نقطه می‌توان یافت به قسمی که رأسهای مثلثی را تشکیل دهند که مساحتش از $\frac{۱}{۲}$ سانتیمتر مربع بیشتر نباشد.

ب) نوزده تیر به یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع ۱ متر برخورد می‌کنند. نشان دهید دست‌کم دو تیر به فاصله‌ای نابیشتر از $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ متر به این صفحه برخورد می‌کنند.

۲ـ۶ـ۸ نشان دهید که اگر n نفر در یک مهمانی شرکت داشته باشند، آنگاه دو نفر آنها، تعداد آشنایان برابری (در میان حاضرین) دارند.

۲ـ۶ـ۹ پانزده صندلی را دور میزی به شکل دایره ردیف شده و جای مهمانان را با گذاشتن کارتهایی روی میز و مقابل هر صندلی مشخص کرده‌اند. پس از آنکه مهمانان بدون توجه به اسامی کارتها، دور میز نشستند، معلوم شد که هیچ‌کسی در مقابل کارت خودش ننشسته است. ثابت کنید که می‌توان میز را چرخاند به‌طوری که دست‌کم دو نفر درست در مقابل کارت خود نشسته باشند.

۲ـ۶ـ۱۰ X را عدد حقیقی دلخواهی بگیرید. نشان دهید که می‌توان بین اعداد $X, ۲X, \ldots, (n-۱)X$ عددی پیدا کرد که اختلاف آن با یک عدد صحیح، حداکثر $\frac{۱}{n}$ باشد.

۲ـ۶ـ۱۱ الف) ثابت کنید که همواره می‌توان در یک گروه شش نفری، سه نفر پیدا کرد که با یکدیگر دو به دو آشنا یا دوبه دو ناآشنا باشند. (راهنمایی: افراد را با رأسهای یک شش‌ضلعی منتظم نمایش می‌دهیم. چنانچه دو نفر از این افراد، یکدیگر را بشناسند، آنگاه دو رأس مربوط به آنها را با پاره‌خطی قرمز رنگ و در غیر این‌صورت دو رأس مزبور را با پاره‌خط آبی رنگی به هم متصل می‌کنیم. رأسی چون A را درنظر بگیرید. دست‌کم سه پاره‌خط همرنگ وجود دارند که از رأس A آغاز می‌شوند. دو حالت باید بررسی شود.)

ب) هفده نفر، هر یک با دیگری به‌وسیلهٔ نامه مکاتبه می‌کنند. در نامه‌ها تنها از سه موضوع گفتگو می‌شود. هر دو نفر از این عده تنها دربارهٔ یکی از این سه موضوع مکاتبه می‌کنند. ثابت کنید دست‌کم سه نفر هستند که دربارهٔ یک موضوع با هم مکاتبه می‌کنند.

۲ـ۶ـ۱۲ ثابت کنید که مجموعه‌ای هفت عضوی از اعداد صحیح مثبت نابیشتر از ۲۴ وجود ندارد به طوری که مجموع اعضای همهٔ زیر مجموعه‌های آن متمایز باشند.

مثالهای اضافی. ۱-۱۰-۱، ۳-۲-۱، ۳-۲-۵، ۳-۲-۱۹، ۳-۲-۲۰، ۳-۳-۲۴، ۴-۴-۱۰.

۳

حساب

در این فصل به بررسی روشهایی می‌پردازیم که در حل مسائل حساب اهمیت دارند. شاید اساسیترین تکنیک مورد استفاده در این‌گونه موارد مبتنی بر قضیهٔ اساسی حساب باشد. این قضیه بیان می‌کند که هر عدد صحیح را می‌توان به شکلی منحصر به‌فرد به‌صورت حاصلضربی از اعداد اول نوشت. زمینهٔ نظری لازم برای اثبات این قضیهٔ کلیدی، به بحثی از مفهوم بخش‌پذیری نیاز دارد. از این‌رو این فصل را با بررسی مسائلی دربارهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک آغاز می‌کنیم. برای درک بهتر این مفاهیم، دانستن الگوریتم تقسیم و الگوریتم اقلیدسی اهمیت دارد.

در بخش دوم، تکنیک حساب همنهشتی را معرفی خواهیم کرد (که خود تعمیمی از مفهوم زوجیت است) و طی آن روشی را می‌یابیم که در حل بسیاری از مسائل مربوط به روابط میان اعداد صحیح، توانا و مؤثر است. در دو بخش آخر، بار دیگر اهمیت نمادگذاری در حل مسائل را یادآوری و به بررسی مسائلی دربارهٔ نمایش اعداد می‌پردازیم، که عبارت‌اند از: نماد مکانی برای اعداد صحیح و نمایشهای دکارتی، قطبی و نمایی اعداد مختلط.

۳ـ۱ بزرگترین مقسوم علیه مشترک

دو عدد صحیح a و b را درنظر می‌گیریم. گوییم a عدد b را می‌شمارد و می‌نویسیم $a|b$، هرگاه عدد صحیحی چون q موجود باشد به‌طوری‌که $b = qa$. بر پایهٔ این تعریف، می‌توان حکم ارزشمند زیر را ثابت کرد: هرگاه n دوجمله از عبارت $a = b + c$ را بشمارد، آنگاه هر سه جملهٔ آن را می‌شمارد. (تذکر: در این فصل، همه متغیرها اعداد صحیح‌اند مگر خلاف آن گفته شود.)

اگر $a_۱, \ldots, a_n$ اعداد صحیح باشند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها را به $\gcd(a_۱, \ldots, a_n)$ و کوچکترین مضرب مشترک آنها را به $\operatorname{lcm}(a_۱, \ldots, a_n)$ نشان می‌دهیم.

۳ـ۱ـ۱ همهٔ fهایی را بیابید که در سه شرط

(الف) $f(x, x) = x$

ب) $f(x,y)=f(y,x)$
ج) $f(x,y)=f(x,x+y)$
صدق می‌کنند، با این فرض که همه متغیرها و مقادیر f اعداد صحیح مثبت باشند.

حل. با نگاهی به چند حالت خاص، حدس می‌زنیم که $f(x,y)=\gcd(x,y)$. این مطلب را به استقرا روی مجموع $x+y$ ثابت می‌کنیم.

کوچکترین مقدار $x+y$ عدد ۲ است و این وقتی روی می‌دهد که $x=y=۱$. بنابر (الف)، $f(۱,۱)=۱$، همچنین $\gcd(۱,۱)=۱$ و لذا در این حالت فرض ما ثابت می‌شود.

فرض کنید x و y اعدادی صحیح و مثبت باشند به‌طوری‌که $x+y=k>۲$ و ادعای ما به‌ازای همهٔ مجموعهای کوچکتر ثابت شده باشد. اگر فرض کنیم $x<y$، با توجه به (الف) و (ب)، خللی به کلیّت مسأله وارد نمی‌شود. بنابر (ج)، $f(x,y)=f(x,x+(y-x))=f(x,y-x)$. ولی بنابر فرض استقرا، $f(x,y-x)=\gcd(x,y-x)$. اگر بتوانیم نشان دهیم که $\gcd(x,y-x)=\gcd(x,y)$، حکم ثابت می‌شود.

اگر $c|x$ و $c|y$، آنگاه $c|x$ و $c|y-x$. درنتیجه $\gcd(x,y)\leqslant\gcd(x,y-x)$. به‌طور مشابه‌اگر $c|x$ و $c|y-x$، آنگاه $c|x$ و $c|y$ و بنابراین $\gcd(x,y-x)\leqslant\gcd(x,y)$. اگر این دو نامساوی را همزمان در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود که $\gcd(x,y-x)=\gcd(x,y)$ و برهان کامل می‌شود.

نتیجهٔ زیر شالودهٔ نظریه اعداد است.

الگوریتم تقسیم. اگر a و b دو عدد صحیح دلخواه باشند و $b>۰$، آنگاه دو عدد صحیح و منحصر به‌فرد q و r موجودند به‌طوری که

$$a=qb+r\quad,\quad ۰\leqslant r<b$$

می‌توان با استفادهٔ مکرر از الگوریتم تقسیم، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح را به‌دست آورد. برای آنکه ببینیم چگونه این کار صورت می‌گیرد، فرض‌کنید $b_۱$ و $b_۲$ دو عدد صحیح مثبت باشند و $b_۱>b_۲$. بنابر الگوریتم تقسیم، دو عدد صحیح q و $b_۳$ موجودند به‌طوری که

$$b_۱=qb_۲+b_۳\quad,\quad ۰\leqslant b_۳<b_۲$$

از این تساوی می‌توان به‌آسانی مشاهده کرد که $\gcd(b_۱,b_۲)=\gcd(b_۲,b_۳)$.

اگر $b_۳=۰$، آنگاه $b_۲=\gcd(b_۱,b_۲)$. اگر $b_۳>۰$، می‌توان با قرار دادن $b_۲$ و $b_۳$ به‌جای $b_۱$ و $b_۲$ این روند را ادامه داد و عددی صحیح چون $b_۴$ یافت به‌طوری که $\gcd(b_۲,b_۳)=\gcd(b_۳,b_۴)$ و $b_۳>b_۴\geqslant۰$.

با ادامهٔ این‌کار، دنباله‌ای نزولی چون

$$b_۱>b_۲>b_۳>\dots$$

از اعداد صحیح نامنفی تولید می‌شود که به‌ازای $i=۱,۲,۳,\dots$،

$$\gcd(b_۱,b_۲)=\gcd(b_۲,b_۳)=\dots=\gcd(b_i,b_{i+۱})$$

از آنجا که این دنباله نمی‌تواند به‌طور نامتناهی نزول کند، اولین nای را می‌توان یافت که $b_{n+۱}=۰$. دراین حالت $b_n=\gcd(b_n,b_{n+۱})=\gcd(b_۱,b_۲)$.

این روند برای یافتن $\gcd(b_۱,b_۲)$، الگوریتم اقلیدسی نامیده می‌شود.

پیش از ارائهٔ مثالی از این الگوریتم، به بیان و اثبات نتیجهٔ اصلی این بخش می‌پردازیم.

۳ـ۱ـ۲ دو عدد صحیح مثبت a و b را درنظر می‌گیریم. عددهای صحیح s و t موجودند به‌طوری که

$$sa + tb = \gcd(a, b)$$

حل. با استقرا روی تعداد گامهای لازم برای یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b، به روش الگوریتم اقلیدسی این حکم را ثابت می‌کنیم (برهان دیگری از این حکم، به اختصار در ۳-۱-۹ خواهد آمد).

فرض‌کنید $a > b$. چنانچه تنها یک گام لازم باشد، عددی چون q هست که $a = bq$ و در این حالت $b = \gcd(a, b)$. به‌علاوه در این حالت $\gcd(a, b) = b = a + (۱ - q)b$. بنابر این قرار می‌دهیم $s = ۱$ و $t = ۱ - q$ و حکم ثابت می‌شود.

فرض کنید حکم به‌ازای همهٔ اعداد صحیح و مثبتی که کمتر از k گام لازم دارند، ثابت شده باشد و a و b را اعداد صحیح و مثبتی بگیرید که به k گام نیاز دارند و $k > ۱$. بنابر الگوریتم تقسیم، اعداد صحیح r و q موجودند به‌طوری که

$$a = qb + r \quad ، \quad ۰ < r < b$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک b و r را می‌توان به‌کمک الگوریتم اقلیدسی در $k - ۱$ گام یافت، پس بنابر فرض استقرا، اعداد صحیح c و d موجودند به‌طوری که

$$cb + dr = \gcd(b, r)$$

از دو تساوی آخر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\gcd(a, b) &= \gcd(b, r)\\ &= cb + dr\\ &= cb + d(a - qb)\\ &= da + (c - dq)b\end{aligned}$$

و با قرار دادن $s = d$ و $t = c - dq$ حکم ثابت می‌شود.

می‌توان به‌کمک یک مثال، مراحل برهان بالا را روشن کرد.

۳ـ۱ـ۳ اعداد صحیح x و y را طوری بیابید که

$$۷۵۴x + ۲۲۱y = \gcd(۷۵۴, ۲۲۱)$$

حل. ابتدا گامهای الگوریتم اقلیدسی را برای یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۷۵۴ و ۲۲۱ به‌کار می‌بریم. خواهیم داشت

$$۷۵۴ = ۳ \times ۲۲۱ + ۹۱$$

$$۲۲۱ = ۲ \times ۹۱ + ۳۹$$

$$۹۱ = ۲ \times ۳۹ + ۱۳$$

$$۳۹ = ۳ \times ۱۳$$

این مطلب نشان می‌دهد که $۱۳ = \gcd(۷۵۴, ۲۲۱)$.

برای یافتن اعداد صحیح x و y موردنظر، گامهای الگوریتم اقلیدسی را از آخر به اول طی می‌کنیم (این در واقع اساس برهان استقرایی فوق است):

$$\begin{aligned} ۱۳ &= ۹۱ - ۲ \times ۳۹ \\ &= ۹۱ - ۲(۲۲۱ - ۲ \times ۹۱) \\ &= ۵ \times ۹۱ - ۲ \times ۲۲۱ \\ &= ۵(۷۵۴ - ۳ \times ۲۲۱) - ۲ \times ۲۲۱ \\ &= ۵ \times ۷۵۴ - ۱۷ \times ۲۲۱ \end{aligned}$$

پس یک جواب مسأله $x = ۵$ و $y = -۱۷$ است.

نتیجه زیر غالباً سودمند است.

۳ـ۱ـ۴ معادلهٔ $ax + by = c$ که در آن a و b و c اعداد صحیح‌اند، دارای جواب صحیحی چون x و y است اگر و فقط اگر $\gcd(a, b)$ عدد c را بشمارد. به‌علاوه اگر $(x_۰, y_۰)$ جواب صحیحی از معادله باشد، آنگاه به‌ازای هر مقدار صحیح k، مقادیر

$$\begin{aligned} x' &= x_۰ + bk/d \\ y' &= y_۰ - ak/d \end{aligned} \quad , \ d = \gcd(a, b)$$

نیز جوابی از معادله است و کلیه جوابهای صحیح به این شکل هستند.

حل. برای اثبات قسمت اول مسأله، ملاحظه می‌کنیم که $\gcd(a, b)$ باید c را بشمارد زیرا $ax + by$ رامی‌شمارد. درنتیجه شرط لازم برای وجود جواب آن است که $\gcd(a, b)|c$. از طرف دیگر اگر c مضربی از $\gcd(a, b)$ باشد، مثلاً $c = \gcd(a, b) \times q$، می‌توانیم جواب صحیحی از معادله را به روش زیر بیابیم. می‌دانیم که اعداد صحیحی چون s و t هستند به‌طوری‌که $\gcd(a, b) = sa + tb$. قرار می‌دهیم $x = sq$ و $y = tq$. در این‌صورت

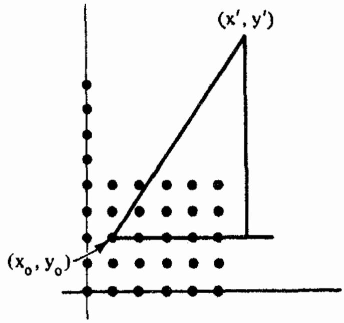
$$ax + by = asq + btq = (as + bt) \times q = \gcd(a, b) \times q = c$$

هرگاه $(x_۰, y_۰)$ یک جواب معادله باشد، با محاسبه‌ای سرراست می‌توان دید که (x', y') فوق هم جوابی از معادله را به‌دست می‌دهد. با ارائه برهان هندسی زیر، نشان می‌دهیم که همه جوابها به این شکل هستند (شکل ۳-۱).

توجه کنید که مسألهٔ یافتن عددهای صحیحی که جواب معادلهٔ $ax + by = c$ باشند، معادل است با مسألهٔ یافتن نقاط مشبکه‌ای که روی خط راست $ax + by = c$ قرار دارند. فرض‌کنید $(x_۰, y_۰)$ یک نقطهٔ مشبکه‌ای باشد که بر خط $ax + by = c$ واقع است، یعنی $ax_۰ + by_۰ = c$.

هرگاه $b = ۰$، آنگاه می‌توان به‌سادگی حکم را ثابت کرد. پس فرض می‌کنیم $b \neq ۰$. اگر (x', y')نقطهٔ مشبکه‌ای دیگری در صفحه باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه (x', y') بر خط $ax + by = c$ قرار گیرد آن است که

$$\frac{y' - y_۰}{x' - x_۰} = -\frac{a}{b} = -\frac{a/d}{b/d} \qquad , \qquad d = \gcd(a, b)$$



شکل۳-۱

از آنجا که a/d و b/d نسبت به هم اولند، این تساوی فقط و فقط وقتی برقرار می‌شود که عدد صحیحی چون k موجود باشد به‌طوری که

$$y' - y_{\circ} = -(a/d)k$$
$$x' - x_{\circ} = (b/d)k$$

از اینجا نتیجه می‌شود که همهٔ جوابهایی از $ax + by = c$ که عدد صحیح باشند از تساویهای

$$x' = x_{\circ} + bk/d$$
$$y' = y_{\circ} - ak/d$$

به‌دست می‌آیند که در آن k عددی صحیح است و $d = \gcd(a, b)$.

۳ـ۱ـ۵ ثابت کنید که کسر $\frac{۲۱n + ۴}{۱۴n + ۳}$ به‌ازای هر عدد طبیعی n تحویل‌ناپذیر است.

حل. باید ثابت کنیم که به‌ازای هر n، اعداد $۱۴n + ۳$ و $۲۱n + ۴$ نسبت به هم اول‌اند. هرگاه بتوانیم نشان دهیم که اعداد صحیحی چون s و t وجود دارند به‌طوری که

$$s(۲۱n + ۴) + t(۱۴n + ۳) = ۱$$

و یا به‌طور معادل

$$۷n(۳s + ۲t) + (۴s + ۳t) = ۱$$

آنگاه با توجه به بحث بالا، حکم ثابت می‌شود.

در صورتی‌که بتوان اعداد صحیحی چون s و t یافت که در معادلات

$$۳s + ۲t = ۰$$
$$۴s + ۳t = ۱$$

صدق کنند، معادلهٔ بالا به‌ازای هر n برقرار می‌شود. به‌سادگی دیده می‌شود که $s = -۲$ و $t = ۳$ در این معادلات صدق می‌کنند و این برهان را کامل می‌کند.

۳ـ۱ـ۶ اندازهٔ زاویهٔ مفروضی $۱۸۰^{\circ}/n$ است که n عددی صحیح و مثبت است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست. ثابت کنید که این زاویه را می‌توان به‌کمک ابزارهای اقلیدسی (یعنی خط‌کش نامدرج و پرگار) به سه قسمت

مساوی تقسیم کرد.

حل. اگرچه انتظار نداریم که این مسأله ارتباطی با اعداد داشته باشد، ولی شرط اینکه n بر ۳ بخش‌پذیر نیست از چه نظر اهمیت دارد؟ این شرط به معنی آن است که ۳ و n نسبت به هم اول‌اند، لذا اعداد صحیح s و t موجودند به‌طوری که

$$ns + ۳t = ۱$$

می‌خواهیم زاویه‌ای به‌صورت $۶۰^\circ/n$ بسازیم. اگر دو طرف معادلهٔ بالا را در $۶۰^\circ/n$ ضرب کنیم، به دست می‌آوریم

$$۶۰^\circ s + (۱۸۰^\circ/n)t = ۶۰^\circ/n$$

حال توجه می‌کنیم که طرف چپ این معادله طرزساختن زاویهٔ $۶۰^\circ/n$ را نشان می‌دهد. دلیل این مطلب آن است که چون زاویهٔ ۶۰° ساختنی است و زاویهٔ $۱۸۰^\circ/n$ داده شده است، با یافتن اعداد صحیح s و t، می‌توانیم زاویهٔ $۶۰^\circ s + (۱۸۰^\circ/n)t$ را بسازیم.

مسائل

۳ـ۱ـ۷ اگر $\gcd(a,b) = ۱$، ثابت کنید

الف) $\gcd(a-b, a+b) \leqslant ۲$

ب) $\gcd(a-b, a+b, ab) = ۱$

ج) $\gcd(a^۲ - ab + b^۲, a+b) \leqslant ۳$

۳ـ۱ـ۸ مجموع جبری هر چند کسر تحویل ناپذیری که مخرجهای آنها نسبت به هم اول باشند، نمی‌تواند عددی صحیح باشد. به عبارت دیگر اگر به ازای $i = ۱, \dots, n$، $\gcd(a_i, b_i) = ۱$، و به‌ازای $i \neq j$، $\gcd(b_i, b_j) = ۱$، آنگاه

$$\frac{a_۱}{b_۱} + \frac{a_۲}{b_۲} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}$$

عددی صحیح نیست.

۳ـ۱ـ۹ فرض‌کنید S مجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد به‌طوری‌که

یک) اگر x و y در S باشند، تفاضل آنها، یعنی $x - y$ نیز در S باشد، و

دو) اگر x در S باشد، همهٔ مضربهای x نیز در S باشند.

الف) ثابت کنید عدد صحیحی چون d در S وجود دارد که اعضای S همگی مضربهای d هستند. (راهنمایی: کوچکترین عدد صحیح مثبت موجود در S را درنظر بگیرید.)

ب) نشان دهید که می‌توان قسمت (الف) را در مجموعهٔ $\{ma + nb |$ اعداد صحیح مثبت‌اند $n, m\}$ به‌کار برد و عدد dی حاصل، همان $\gcd(a,b)$ است.

۳ـ۱ـ۱۰ الف) ثابت کنید هر دو عدد متوالی از اعداد فیبوناتچی F_n و $F_{n+۱}$ که $n > ۲$، نسبت به هم اول‌اند.

ب) هرگاه $T_۱ = ۲$ و به‌ازای $n > ۰$، $T_{n+۱} = T_n^۲ - T_n + ۱$، آنگاه وقتی $n \neq m$، T_n و T_m نسبت به هم اول‌اند.

۳ـ۱ـ۱۱ ثابت کنید به‌ازای اعداد صحیح و مثبت $a_1, \ldots, a_n$، اعداد صحیحی چون $k_1, \ldots, k_n$ موجودند به‌طوری که

$$\gcd(a_1, \ldots, a_n) = k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n$$

۳ـ۱ـ۱۲ ثابت کنید اگر $ad - bc = 1$، آنگاه کسر $(a+b)/(c+d)$ تحویل ناپذیر است.

۳ـ۱ـ۱۳ ثابت کنید $\gcd(a_1, \ldots, a_m) \times \gcd(b_1, \ldots, b_n) = \gcd(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_m b_n)$ که در آن پرانتز سمت راست شامل تمام حاصلضربهای به شکل $a_i b_j$ است که $i = 1, \ldots, m$ و $j = 1, \ldots, n$.

۳ـ۱ـ۱۴ هنگامی که آقای اسمیت چکی به مبلغ x دلار و y سنت را نقد کرد، در مقابل y دلار و x سنت دریافت کرد و سپس متوجه شد که دو سنت بیش از دوبرابر مقدار واقعی پول گرفته است. مبلغ چک چقدر بوده است؟

۳ـ۱ـ۱۵ کوچکترین مقدار صحیح و مثبت a را بیابید به‌طوری که معادلهٔ $1001x + 770y = 1000000 + a$ دارای جواب باشد و سپس نشان دهید که معادلهٔ حاصل دارای ۱۰۰ جواب صحیح مثبت است.

۳ـ۱ـ۱۶ مردی با دو ظرف ۹ لیتری و ۱۶ لیتری به کنار رودخانه‌ای می‌رود. او چگونه می‌تواند ۱ لیتر آب در ظرف ۱۶ لیتری بریزد؟ (راهنمایی: اعداد صحیح s و t را طوری بیابید که $9s + 16t = 1$.)

۳ـ۱ـ۱۷ بیش از یک عدد صحیح بزرگتر از ۱ می‌توان یافت که باقیماندهٔ تقسیم آن بر عدد صحیح k، $2 \leqslant k \leqslant 11$، مساوی ۱ باشد. اختلاف بین کوچکترین دو عدد صحیحی که این ویژگی را دارند، چقدر است؟

۳ـ۱ـ۱۸ b را عددی صحیح و بزرگتر از یک فرض می‌کنیم. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی N، عدد صحیح نامنفی منحصر به‌فردی چون n و اعداد صحیح یکتای a_i، $0 \leqslant a_i < b$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ وجود دارد به‌طوری که $a_n \neq 0$ و $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$. (حکم مسأله بی‌درنگ به‌ازای $N < b$ نتیجه می‌شود. لذا فرض‌کنید $N \geqslant b$ و از استقرا استفاده کنید.)

مثالهای اضافی. ۳-۲-۴، ۳-۲-۲۱، ۳-۳-۱۱، ۳-۳-۱۹، ۳-۳-۲۸، ۴-۱-۹، ۴-۲-۱، ۴-۲-۲، ۴-۲-۴، فرع (ج) از قضیهٔ لاگرانژ در بخش ۴-۴، ۴-۴-۵، ۴-۴-۶، ۴-۴-۸.

۳ـ۲ حساب پیمانه‌ای

زوجیت یک عدد صحیح حاکی از وضعیت نسبی آن عدد نسبت به عدد ۲ است. به‌ویژه بسته به آنکه باقیماندهٔ تقسیم یک عدد بر ۲، صفر یا یک باشد، آن عدد به‌ترتیب زوج یا فود نامیده می‌شود. با چنین دسته‌بندی از زوجیت، تعمیم این ایده به‌صورت زیر طبیعی به‌نظر می‌رسد.

به‌ازای عدد صحیح $n \geqslant 2$، مجموعهٔ اعداد صحیح را برحسب باقیماندهٔ تقسیم آنها بر n، به n ردهٔ «همنهشتی» تقسیم می‌کنیم، یعنی اگر باقیمانده‌های تقسیم دو عدد صحیح بر n مساوی باشند، آن دو را در یک ردهٔ همنهشتی قرار می‌دهیم. برای مثال به‌ازای $n = 4$، مجموعه اعداد صحیح به چهار مجموعه تقسیم می‌شود که هر یک براساس یکی از چهار باقیماندهٔ ۰، ۱، ۲، ۳ شناسایی می‌شوند. به‌ازای عدد دلخواه $n \geqslant 2$، n ردهٔ همنهشتی خواهیم داشت که با $0, 1, 2, \ldots, n-1$ شماره‌گذاری می‌شوند.

گوییم دو عدد صحیح x و y به پیمانهٔ n همنهشت‌اند و می‌نویسیم (به پیمانهٔ n) $x \equiv y$ یا $x \overset{n}{\equiv} y$

هرگاه باقیمانده‌های تقسیم آنها بر n مساوی باشند (یا به‌طور معادل، اگر $x-y$ بر n بخش پذیر باشد که در عمل به‌نظر ساده‌تر می‌آید.)

به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که

الف) $x \overset{n}{\equiv} x$

ب) $y \overset{n}{\equiv} x$ ایجاب می‌کند که $x \overset{n}{\equiv} y$، و

ج) [$y \overset{n}{\equiv} x$ و $z \overset{n}{\equiv} y$] ایجاب می‌کند که $x \overset{n}{\equiv} z$.

این ویژگیها نشان می‌دهند که همنهشتی مشخصاتی مشابه با تساوی دارد و غالباً همنهشتی را همانند نوعی تساوی درنظر می‌گیریم (در واقع گاهی $x \overset{n}{\equiv} y$ را می‌خوانیم «x مساوی است با y به پیمانهٔ n».)

۳ـ۲ـ۱ ثابت کنید در هر مجموعهٔ ۵۵ عضوی که از بین اعداد مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, ۱۰۰\}$ انتخاب شود، دو عدد وجود دارند که اختلاف آنها برابر با ۹ است.

حل. ۹ ردهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۹ وجود دارد که عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸. بنابراصل (تعمیم‌یافتهٔ حجره‌ها، از بین ۵۵ عدد انتخاب شده، ۷ عدد آنها در یک ردهٔ همنهشتی قرار می‌گیرند (درصورتی‌که هر ردهٔ همنهشتی دارای شش تا از این اعداد یا کمتر از آن باشد، آنگاه حداکثر ۵۴ تا از ۵۵ عدد انتخاب شده در رده‌های همنهشتی قرار می‌گیرند). فرض‌کنید این اعداد $a_۱, \ldots, a_۷$ باشند و به‌علاوه طوری شماره‌گذاری شده باشند که $a_۱ < a_۲ < a_۳ < \cdots < a_۷$. از آنجا که $a_{i+۱} \overset{۹}{\equiv} a_i$، لذا $a_{i+۱} - a_i \in \{۹, ۱۸, \ldots\}$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای iای، $a_{i+۱} - a_i = ۹$. اگر چنین نباشد، به‌ازای هر i، $a_{i+۱} - a_i \geqslant ۱۸$ و این به‌معنی آن است که $a_۷ - a_۱ \geqslant ۶ \times ۱۸ = ۱۰۸$. ولی این غیرممکن است زیرا $a_۷ - a_۱ < ۱۰۰$. درنتیجه (بین اعداد $a_۱, \ldots, a_۷$) دو عضو یافت می‌شوند که اختلافشان ۹ است.

قدرت واقعی همنهشتی ناشی از ویژگی زیر است که به‌سادگی ثابت می‌شود.

حساب پیمانه‌ای. اگر $x \overset{n}{\equiv} y$ و $u \overset{n}{\equiv} v$، آنگاه

$$x + u \equiv y + v (\text{به پیمانهٔ } n)$$

و

$$x \cdot u \equiv y \cdot v (\text{به پیمانهٔ } n)$$

این نتیجه ما را مجاز می‌سازد که عملیات حساب را تنها با کار روی «باقیمانده‌ها» به پیمانهٔ n انجام دهیم. برای مثال چون

$$۱۷ \equiv ۵ (\text{به پیمانهٔ } ۱۲) \quad \text{و} \quad ۴۰ \equiv ۴ (\text{به پیمانهٔ } ۱۲)$$

می‌دانیم که

$$۱۷ + ۴۰ \equiv ۵ + ۴ = ۹ (\text{به پیمانهٔ } ۱۲)$$

و

$$۱۷ \times ۴۰ \equiv ۵ \times ۴ \equiv ۸ (\text{به پیمانهٔ } ۱۲)$$

فرض‌کنید n عددی صحیح و مثبت باشد، $n > ۱$ و $Z_n = \{۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱\}$. توجه کنید که اگر

x و y عضو Z_n باشند، اعضای منحصر به‌فردی چون r، s و t در Z_n یافت می‌شوند به طوری که

$$x - y \equiv r(\text{به پیمانهٔ } n)$$
$$x + y \equiv s(\text{به پیمانهٔ } n)$$
$$x \cdot y \equiv t(\text{به پیمانهٔ } n)$$

مجموعهٔ Z_n، همراه با عملگرهای تفریق، جمع و ضرب بالا، مجموعه اعداد صحیح به پیمانهٔ n نامیده می‌شود. در این دستگاه، محاسبات به‌صورت معمول انجام می‌شوند، با این تفاوت که همواره نتیجه به عددی معادل در Z_n (به پیمانهٔ n) ساده می‌شود.

۳ـ۲ـ۲ فرض‌کنید $N = ۲۲ \times ۳۱ + ۱۱ \times ۱۷ + ۱۳ \times ۱۹$. الف) زوجیت N را معین کنید؛ ب) رقم یکان N را تعیین کنید؛ ج) باقیمانده تقسیم N بر ۷ را تعیین کنید. (در واقع هدف این سؤال آن است که جواب را بدون محاسبهٔ N به‌دست آورید.)

حل. در قسمت (الف) چون ۲۲ زوج است، لذا ۳۱×۲۲ نیز زوج می‌شود. پس ۱۷×۱۱ و ۱۹×۱۳ فردند، درنتیجه مجموع به شکل فرد+فرد+زوج است که عددی است زوج. توجه کنید که این استدلال معادل است با محاسبهٔ زیر به پیمانهٔ ۲:

$$۲۲ \times ۳۱ + ۱۱ \times ۱۷ + ۱۳ \times ۱۹ \equiv ۰ \times ۱ + ۱ \times ۱ + ۱ \times ۱ \equiv ۱ + ۱ \equiv ۰(\text{به پیمانهٔ ۲})$$

در قسمت (ب) می‌بایست مسیر رقم یکان را دنبال کنیم: رقم یکان ۳۱×۲۲ برابر با ۲، رقم یکان ۱۷×۱۱ برابر با ۷ و رقم یکان ۱۹×۱۳ برابر با ۷ است. لذا رقم یکان N مساوی با رقم یکان عدد $۲ + ۷ + ۷$ یعنی عدد ۶ است. در اینجا نیز این تحلیل معادل است با محاسبه N به پیمانهٔ ۱۰:

$$۲۲ \times ۳۱ + ۱۱ \times ۱۷ + ۱۳ \times ۱۹ \equiv ۲ \times ۱ + ۱ \times ۷ + ۳ \times ۹(\text{به پیمانهٔ ۱۰})$$
$$\equiv ۲ + ۷ + ۷ \equiv ۶(\text{به پیمانهٔ ۱۰})$$

اگرچه می‌توان قسمتهای (الف) و (ب) را بدون اطلاع از حساب پیمانه‌ای حل کرد، ولی چندان روشن نیست که در قسمت (ج) چه باید کرد؟ نکته این است که (ج) نیز با استفاده از یک تعمیم طبیعی راه حلهای قسمتهای (الف) و (ب) که متکی بر همنهشتی هستند، حل می‌شود. محاسبات را به پیمانهٔ ۷ انجام می‌دهیم:

$$۲۲ \times ۳۱ + ۱۱ \times ۱۷ + ۱۳ \times ۱۹ \equiv ۱ \times ۳ + ۳ \times ۴ + (-۱) \times ۵(\text{به پیمانهٔ ۷})$$
$$\equiv ۳ + ۵ - ۵ \equiv ۳(\text{به پیمانهٔ ۷})$$

پس N، ۳ واحد بیش از یکی از مضربهای ۷ است. (برای امتحان این مطلب ملاحظه می‌کنیم که: $N = ۱۱۱۶ = ۱۵۹ \times ۷ + ۳$.)

۳ـ۲ـ۳ دو رقم آخر عدد $۳^{۱۲۳۴}$ چیست؟

حل. محاسبات را به پیمانهٔ ۱۰۰ انجام می‌دهیم. به روشهای مختلفی می‌توان عدد $۳^{۱۲۳۴}$ را ساخت. برای مثال، $۳^۲ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۹$، $۳^۴ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۸۱$، $۳^۸ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۸۱ \times ۸۱ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۶۱$، $۳^{۱۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۶۱ \times ۹ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۴۹$، $۳^{۲۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۴۹ \times ۴۹ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱$. از آنجا که $۱۲۳۴ = ۲۰ \times ۶۱ + ۱۴$ داریم $۳^{۱۲۳۴} = (۳^{۲۰})^{۶۱}(۳)^{۱۴} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۳^{۱۴} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۳^۴۳^{۱۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۸۱ \times ۴۹ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۶۹$. ملاحظه می‌کنیم که دو رقم آخر برابر با ۶۹ است.

۳ـ۲ـ۴ نشان دهید که سه رقم آخر یکی از مضربهای مثبت ۲۱ مساوی با ۲۴۱ است.

حل. باید ثابت کنیم که عدد صحیح مثبتی چون n موجود است به طوری که $21n \overset{1000}{\equiv} 241$. چون ۲۱ و ۱۰۰۰ نسبت به هم اول‌اند، اعداد صحیحی چون s و t موجودند به‌طوری‌که $21s + 1000t = 1$. دو طرف این تساوی را در ۲۴۱ ضرب و نتیجه را به شکل زیر مرتب می‌کنیم $21(241s) - 241 = -241 \times 1000t$. این تساوی با نماد همنهشتی به‌صورت زیر درمی‌آید $21 \times 241s \overset{1000}{\equiv} 241$. هرگاه s مثبت باشد، حکم ثابت است زیرا قرار می‌دهیم $n = 241s$. اگر n مثبت نباشد، قرار می‌دهیم $n = 241s + 1000k$ که در آن k عدد صحیح به‌اندازه کافی بزرگی است که n را مثبت می‌کند (می‌توانیم با انتخاب مناسب، k را طوری اختیار کنیم که n عددی بین ۰ و ۱۰۰۰ باشد). درنتیجه خواهیم داشت

$$21n = 21(241s + 1000k) \equiv 21 \times 241s \equiv 241 \quad (\text{به پیمانهٔ } 1000)$$

۳ـ۲ـ۵ ثابت کنید که در هر مجموعه n عضوی از اعداد صحیح، زیر مجموعه‌ای یافت می‌شود که مجموع اعضای آن بر n بخش پذیر است.

حل. فرض‌کنید $x_1, \ldots, x_n$ اعداد صحیح باشند و

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ y_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{aligned}$$

اگر به‌ازای iای، $y_i \overset{n}{\equiv} 0$ حکم ثابت است، لذا فرض‌کنید چنین نباشد. دراین‌صورت n عدد صحیح $y_1, \ldots, y_n$ و $n-1$ ردهٔ همنهشتی به پیمانهٔ n داریم (یعنی $1, 2, \ldots, n-1$). درنتیجه بنابر اصل حجره‌ها، دو تا از y_iها به پیمانهٔ n همنهشت‌اند. فرض‌کنیم $y_i \overset{n}{\equiv} y_j$ که $i < j$. در این‌صورت $x_{i+1} + \cdots + x_j \overset{n}{\equiv} y_j - y_i \overset{n}{\equiv} 0$ و برهان کامل است.

در مثال قبل از این واقعیت استفاده کردیم که n عدد a را می‌شمارد اگر و تنها اگر $a \overset{n}{\equiv} 0$. با استفاده از این تناظر می‌توان مسائل مربوط به بخش‌پذیری را مستقیماً به زبان حساب پیمانه‌ای بیان کرد.

۳ـ۲ـ۶ ثابت کنید که اگر هر دو عدد $2n + 1$ و $3n + 1$ مربع کامل باشند، آنگاه n بر ۴۰ بخش پذیر است.

حل. کافی است نشان دهیم که n بر هر دو عدد ۵ و ۸ بخش‌پذیر است. این خود معادل است با $n \overset{5}{\equiv} 0$ و $n \overset{8}{\equiv} 0$.

پیمانهٔ ۵ را درنظر می‌گیریم. جدول زیر نشان می‌دهد که مربع یک عدد صحیح، با یکی از اعداد ۰، ۱ یا ۱− به پیمانهٔ ۵ همنهشت است:

x (به پیمانهٔ ۵)	۰	۱	۲	۳	۴
x^2 (به پیمانهٔ ۵)	۰	۱	۱−	۱−	۱

درنتیجه اعداد $2n + 1$ و $3n + 1$ به پیمانهٔ ۵ با یکی از عددهای ۰، ۱، ۱− همنهشت‌اند. باید نُه حالت را

بررسی کنیم: $۲n+۱$ به پیمانهٔ ۵ می‌تواند یکی از اعداد ۰، ۱، ۱− و $۳n+۱$ نیز ۰، ۱ یا ۱− باشد. همان‌طور که خواهیم دید، با کمی تفکر می‌توان تعداد حالتها را به دو حالت کاهش داد. فرض‌کنید که $۲n+۱ \overset{۵}{\equiv} a$ و $۳n+۱ \overset{۵}{\equiv} b$ و $a, b \in \{۰, ۱, -۱\}$.

حالت ۱. $a \neq b$. در این حالت با جمع دو تساوی آخر به‌دست می‌آوریم $a+b \overset{۵}{\equiv} ۲$. با توجه به انتخاب ما از مقادیر a و b، تساوی فوق نمی‌تواند برقرار شود.

حالت ۲. $a = b$. در این حالت تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم $n \overset{۵}{\equiv} b-a$، در این حالت n بر ۵ بخش‌پذیر است (که این خود بخشی است از آنچه که باید ثابت شود).

حال پیمانهٔ ۸ را درنظر می‌گیریم. جدول زیر نشان می‌دهد که در این حالت مربع یک عدد صحیح با یکی از اعداد ۰، ۱ یا ۴ به پیمانهٔ ۸ همنهشت است:

x (به پیمانهٔ ۸)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$x^۲$ (به پیمانهٔ ۸)	۰	۱	۴	۱	۰	۱	۴	۱

بار دیگر بسته به مقادیر $۲n+۱$ و $۳n+۱$ به پیمانهٔ ۸، نُه حالت پیش می‌آید. در این حالت نیز همانند پیمانهٔ ۵، این نُه حالت به دو حالت کاهش می‌یابد و استدلال در هر دوی این حالتها مشابه است. لذا نتیجه می‌گیریم که ۸ عدد n را می‌شمارد و برهان کامل است.

در حساب همنهشتی عملهای جمع، تفریق و ضرب رفتاری مشابه با حساب معمولی دارند (با این تفاوت که همه چیز نسبت به پیمانه‌ای که محاسبه را در آن انجام می‌دهیم، ساده می‌شود). دربارهٔ تقسیم چه می‌توان گفت؟

گوییم a عدد b را به پیمانهٔ n می‌شمارد اگر عدد صحیحی چون c وجود داشته باشد که $a \cdot c \overset{n}{\equiv} b$. اگر عدد صحیحی چون c باشد به طوری که $a \cdot c \overset{n}{\equiv} ۱$، آنگاه c وارون (ضربی) a نامیده می‌شود وگاهی به $a^{-۱}$ نشان داده می‌شود. توجه کنید که اگر a وارون داشته باشد، آنگاه به‌سادگی می‌توان دو طرف معادلهٔ $ax \overset{n}{\equiv} b$ را در $a^{-۱}$ ضرب کرد و x را به‌دست آورد که حاصل می‌شود $x \overset{n}{\equiv} a^{-۱}b$.

یک نکتهٔ نظری مهم آن است که عدد صحیح a در حساب پیمانه‌ای به پیمانهٔ n وارون ضربی دارد اگر و فقط اگر a و n نسبت به هم اول باشند (۳-۲-۲۱ را ببینید).

به‌عنوان حالت خاصی از حکم بند قبل، حالتی را که در آن پیمانهٔ n عدد اولی چون p است، درنظر می‌گیریم. در این حالت، هر یک از اعداد $۱, ۲, \ldots, p-۱$ نسبت به p اول‌اند و درنتیجه وارون ضربی دارند. در واقع می‌توان اعداد $Z_p = \{۰, ۱, ۲, \ldots, p-۱\}$ را جمع، تفریق، ضرب و (بر اعداد ناصفر) تقسیم کرد. در حقیقت این مجموعه تشکیل یک میدان می‌دهد (بخش ۴-۴ را ببینید.)

۳-۲-۷ ثابت کنید که عبارتهای $۲x+۳y, ۹x+۵y$ به ازای مجموعهٔ یکسانی از مقادیر صحیح x و y بر ۱۷ بخش پذیرند.

حل. کافی است نشان دهیم که $۹x+۵y \overset{۱۷}{\equiv} ۰$ اگر و فقط اگر $۲x+۳y \overset{۱۷}{\equiv} ۰$. طرح برهان آن است که با ضرب یک عدد ثابت و مناسب در دوطرف همنهشتی سمت چپ، آن را به همنهشتی سمت راست تبدیل کنیم. بنابراین از خود می‌پرسیم که: آیا عدد صحیحی چون c وجود دارد به طوری که $c(۲x+۳y) \overset{۱۷}{\equiv} ۹x+۵y$؟

لازمهٔ وجود چنین عدد صحیحی آن است که $۹ \overset{۱۷}{\equiv} ۲c$. از آنجا که ۲ نسبت به ۱۷ اول است، لذا وارون ضربی دارد. درنتیجه $۹ = ۲^{-۱}$ و لذا $۱۳ \overset{۱۷}{\equiv} ۸۱ = ۹ \times ۹ = c$. بنابراین $۲x + ۳y \overset{۱۷}{\equiv} ۰$ ایجاب می‌کند که

$$۱۳(۲x + ۳y) \equiv ۰ \ (\text{به پیمانهٔ } ۱۷)$$

$$۲۶x + ۳۹y \equiv ۰ \ (\text{به پیمانهٔ } ۱۷)$$

$$۹x + ۵y \equiv ۰ \ (\text{به پیمانهٔ } ۱۷)$$

به‌عکس، با ضرب کردن دو طرف همنهشتی $۹x + ۵y \overset{۱۷}{\equiv} ۰$ در ۴، به همنهشتی $۲x + ۳y \overset{۱۷}{\equiv} ۰$ می‌رسیم.

در مثال بعد، نتیجه‌ای را ثابت می‌کنیم که نه تنها از نقطه نظر مفهومی قابل توجه است، بلکه در سراسر ریاضیات کاربردهای فراوانی دارد.

۳ـ۲ـ۸ (قضیهٔ باقیماندهٔ چینی) اگر m و n اعداد صحیح بزرگتر از یک و نسبت به هم اول باشند و a و b اعداد صحیح دلخواهی باشند، آنگاه عدد صحیحی چون x وجود دارد به‌طوری‌که

$$x \equiv a \ (m \text{ به پیمانهٔ})$$

$$x \equiv b \ (n \text{ به پیمانهٔ})$$

به‌طور کلی، اگر $m_۱, m_۲, \ldots, m_k$ اعدادی صحیح و بزرگتر از یک باشند که (دوبه دو) نسبت به هم اول‌اند، و $a_۱, a_۲, \ldots, a_k$ اعداد صحیح دلخواهی باشند، عدد صحیحی چون x وجود دارد به‌طوری‌که

$$x \equiv a_i (m_i \text{ به پیمانهٔ}) \ , \ i = ۱, ۲, \ldots, k$$

حل. عدد n عدد $a, a + m, a + ۲m, \ldots, a + (n - ۱)m$ را درنظر بگیرید. هر یک از این اعداد با a به پیمانهٔ m همنهشت‌اند. به‌علاوه هیچ دوتای آنها به پیمانهٔ n همنهشت نیستند. زیرا اگر به‌ازای $۰ \leqslant i < j < n$، $a + im \overset{n}{\equiv} a + jm$، آنگاه $(i - j)m \overset{n}{\equiv} ۰$. ولی m و n نسبت به هم اول‌اند، لذا همنهشتی اخیر تنها وقتی برقرار است که n عدد $i - j$ را بشمارد. ولی باتوجه به محدودیتهای انتخاب i و j، عدد $i - j$ نمی‌تواند مضربی از n باشد. درنتیجه $i = j$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که هر یک از اعداد $a, a + m, \ldots, a + (n - ۱)m$ به‌ترتیبی با یکی از اعداد $۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱$ به پیمانهٔ n همنهشت‌اند. بنابر این به‌ازای iای، $a + mi \overset{n}{\equiv} b$. با قرار دادن $x = a + mi$، برهان قسمت اول به پایان می‌رسد.

گزاره کلیتر رانیز می‌توان به‌کمک استقرا روی k، به روشی مشابه ثابت کرد. (قرار می‌دهیم $c = m_۱ \ldots m_{k-۱}$، و اعداد $a, a + c, a + ۲c, \ldots, a + (m_k - ۱)c$ را درنظر می‌گیریم که در آن بنابر فرض استقرا، a را طوری انتخاب کرده‌ایم که به‌ازای $i = ۱, \ldots, k - ۱$، $a \overset{m_i}{\equiv} a_i$. در این‌صورت به‌ازای $i = ۱, \ldots, k - ۱$ داریم $a + ic \overset{m_i}{\equiv} a_i$ و هیچ‌کدام از این اعداد به پیمانهٔ m_k همنهشت نیستند و الی آخر.)

۳ـ۲ـ۹ آیا می‌توان ۱۰۰۰۰۰۰ عدد صحیح متوالی را طوری یافت که در هر یک از آنها، یک عامل اول تکرار شده باشد؟

حل. فرض‌کنیم $p_۱, p_۲, \ldots, p_{۱۰۰۰۰۰۰}$، ۱۰۰۰۰۰۰ عدد اول متمایز باشند. در این‌صورت اگر $i \neq j$، آنگاه $p_i^۲$ و

p_j^2 نسبت به هم اول‌اند، لذا بنابر قضیهٔ باقیماندهٔ چینی، عددی صحیح چون x وجود دارد به‌طوری‌که

$$x \equiv -k \ (\text{به پیمانهٔ } p_k^2) \qquad , \qquad k = 1, 2, \ldots, 10^6$$

درنتیجه $x+k$ بر p_k^2 بخش پذیر است (یعنی $x+k$ دارای یک عامل اول تکراری است) و پاسخ سؤال مثبت است زیرا کافی است که اعداد صحیح متوالی $x+1, x+2, x+3, \ldots, x+1000000$ را درنظر بگیریم.

۳ـ۲ـ۱۰ نقطهٔ مشبکه‌ای $(x,y) \in Z^2$ را مرئی گوییم هرگاه $\gcd(x,y) = 1$. حکم زیر را ثابت یا رد کنید: به‌ازای عدد داده شدهٔ n، نقطهٔ مشبکه‌ای (a,b) یافت می‌شود به‌طوری که فاصله‌اش از هر نقطهٔ مرئی کوچکتر یا مساوی با n است.

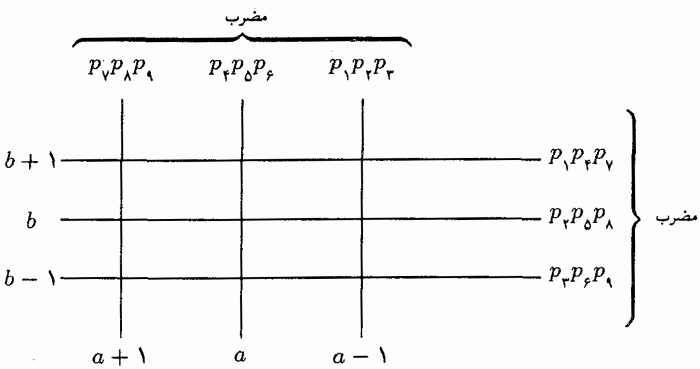
حل. ابتدا به حالتی بسیار خاص توجه می‌کنیم. الگوی حالت کلی مسأله، تعمیم ساده‌ای از این حالت است که بسیار بدیهی خواهد بود. کار خود را با انتخاب نُه عدد اول متمایز $p_1, p_2, \ldots, p_9$ آغاز می‌کنیم. به‌دنبال نقطهٔ مشبکه‌ای (a,b) می‌گردیم که

$$\begin{aligned} a-1 &\equiv 0 \ (\text{به پیمانهٔ } p_1p_2p_3) \\ a &\equiv 0 \ (\text{به پیمانهٔ } p_4p_5p_6) \\ a+1 &\equiv 0 \ (\text{به پیمانهٔ } p_7p_8p_9) \end{aligned} \tag{1}$$

و

$$\begin{aligned} b+1 &\equiv 0 \ (\text{به پیمانهٔ } p_1p_4p_7) \\ b &\equiv 0 \ (\text{به پیمانهٔ } p_2p_5p_8) \\ b-1 &\equiv 0 \ (\text{به پیمانهٔ } p_3p_6p_9) \end{aligned} \tag{2}$$

از نظر هندسی (a,b) نقطه‌ای است که با نمودار زیر مشخص می‌شود:



از آنجا که $p_1p_2p_3$ و $p_4p_5p_6$ و $p_7p_8p_9$ نسبت به هم اول‌اند، بنابر قضیهٔ باقیمانده چینی عدد صحیحی چون a وجود دارد که در تساویهای (۱) صدق می‌کند. به‌طور مشابه چون $p_1p_4p_7$، $p_2p_5p_8$ و $p_3p_6p_9$ نسبت به هم اول‌اند، عددی چون b وجود دارد که در (۲) صدق می‌کند. از روش انتخاب a و b به روشنی دیده می‌شود که هشت نقطهٔ مشبکه‌ای که نزدیکترین نقاط مشبکه‌ای به نقطه (a,b) هستند، مرئی نیستند. برای مثال نقطهٔ

$(a, b+1)$ که به‌ازای برخی k_1 و k_2 به‌صورت $(k_1 p_2 p_5 p_6, k_2 p_1 p_4 p_7)$ است را درنظر می‌گیریم. از آنجا ک p_4 عامل مشترک مختصات نقطه است، این نقطه مرئی نیست. می‌توان استدلال مشابهی را دربارهٔ نزدیکتر هفت نقطهٔ باقیمانده نیز به‌کار برد.

می‌توان به روشی کاملاً مشابه حالت کلی مسأله را نیز ثابت کرد و این‌کار را به مسأله ۳-۲-۲۶ وا می‌کنیم.

مسائل

۳ـ۲ـ۱۱ ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ ۵۵ عضوی از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ باید شامل اعدادی باشد که اختلاف آنها برابر ۱۰، ۱۲ و ۱۳ باشد ولی لازم نیست که دو عدد با اختلاف ۱۱ داشته باشد.

۳ـ۲ـ۱۲ عنصرهای یک دترمینان اعداد صحیح دلخواه‌اند. احتمال آن را به‌دست آورید که حاصل دترمینان، عددی فرد باشد. (راهنمایی: از پیمانهٔ ۲ استفاده کنید.)

۳ـ۲ـ۱۳ الف) تعیین کنید که ماتریس زیر وارون‌پذیر است یا وارون‌ناپذیر:

$$\begin{bmatrix} 54401 & 57668 & 15982 & 103790 \\ 33223 & 26563 & 23165 & 71489 \\ 36799 & 37189 & 16596 & 46152 \\ 21689 & 55538 & 79922 & 51237 \end{bmatrix}$$

(راهنمایی: ماتریس A وارون‌پذیر است هرگاه $\det A \neq 0$. زوجیت دترمینان ماتریس را بررسی کنید، به عبارت دیگر دترمینان را به پیمانهٔ ۲ محاسبه کنید.)

ب) تعیین کنید که ماتریس زیر وارون‌پذیر است یا وارون‌ناپذیر:

$$\begin{bmatrix} 64809 & 91185 & 42391 & 44350 \\ 61372 & 26563 & 23165 & 71489 \\ 82561 & 39189 & 16596 & 46152 \\ 39177 & 55538 & 79922 & 51237 \end{bmatrix}$$

۳ـ۲ـ۱۴ الف) نشان دهید که عدد $1 + 2^{2x+1}$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) حکم مقابل را ثابت یا رد کنید: اگر $x \stackrel{n}{\equiv} y$ آنگاه $2^x \stackrel{n}{\equiv} 2^y$.

ج) نشان دهید که $1 + 2^{3x+1} + 4^{3x+1}$ بر ۷ بخش پذیر است.

د) ثابت کنید که اگر $n > 0$، آنگاه $n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n$ بر ۱۲ بخش پذیر است.

هـ) ثابت کنید که $(2903)^n - (803)^n - (464)^n + (261)^n$ بر ۱۸۹۷ بخش پذیر است.

۳ـ۲ـ۱۵ الف) ثابت کنید که هیچ عدد اولی که سه واحد بیش از یکی از مضربهای چهار باشد وجود ندارد که به‌صورت مجموع دو مربع نوشته شود. (راهنمایی: به پیمانهٔ ۴ محاسبه کنید.)

ب) ثابت کنید که دنبالهٔ زیر، شامل هیچ مربعی نیست (عددها در پایهٔ ۱۰ نوشته شده‌اند):

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

ج) ثابت کنید که تفاضل مربعهای دو عدد فرد دقیقاً بر ۸ بخش پذیر است.

د) ثابت کنید که $۳^{۷۰} + ۲^{۷۰}$ بر ۱۳ بخش پذیر است.

ه) ثابت کنید که مجموع مربعهای دو عدد فرد نمی‌تواند مربع باشد.

و) همه جوابهای صحیح معادله $a^۲ + b^۲ + c^۲ = a^۲b^۲$ را تعیین کنید (راهنمایی: به پیمانهٔ ۴ بررسی کنید.)

۳ـ۲ـ۱۶ الف) اگر معادلهٔ $x^۳ + y^۳ = z^۳$ دارای جوابهای صحیح x و y و z باشد، نشان دهید یکی از این سه عدد مضربی از ۷ است.

ب) اگر n عدد صحیح مثبتی بزرگتر از یک باشد به‌طوری‌که $n^۲ + ۲^n$ اول باشد، نشان دهید که $n \overset{۶}{\equiv} ۳$.

ج) فرض‌کنید x عددی صحیح باشد که یک واحد کمتر از یکی از مضربهای ۲۴ است. ثابت کنید که اگر a و b اعداد صحیح مثبتی باشند به طوری که $ab = x$، آنگاه $a + b$ مضربی از ۲۴ است.

د) ثابت کنید که اگر $n^۲ + m$ و $n^۲ - m$ مربعهای کامل باشند، آنگاه m بر ۲۴ بخش پذیر است.

۳ـ۲ـ۱۷ فرض‌کنید S مجموعه‌ای از اعداد اول باشد به‌طوری که شرط $a, b \in S$ ایجاب کند $ab + ۴ \in S$ (a و b لزوماً متمایز نیستند). ثابت کنید که S باید تهی باشد. (راهنمایی: یکی از روشهای حل، محاسبه به پیمانهٔ ۷ است.)

۳ـ۲ـ۱۸ ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند به طوری که $x^۲ + ۳xy - ۲y^۲ = ۱۲۲$. (راهنمایی: معادلهٔ درجه دوم را برحسب x حل کنید و سپس مبیّن آن را به پیمانهٔ ۱۷ بررسی کنید. آیا مبیّن می‌تواند مربع کامل باشد؟)

۳ـ۲ـ۱۹ نشان دهید که به‌ازای هر عدد صحیح n، عددی صحیح (در پایهٔ ۱۰) وجود دارد که تنها از ارقام ۰ و ۱ تشکیل شده و بر n بخش پذیر باشد.

۳ـ۲ـ۲۰ نشان دهید که اگر n یکی از اعداد فیبوناتچی را بشمارد، آنگاه تعداد نامتناهی از اعداد فیبوناتچی را خواهد شمرد.

۳ـ۲ـ۲۱ فرض کنید که a و n اعداد صحیح باشند و $n > ۱$. ثابت کنید که معادلهٔ $ax \overset{n}{\equiv} ۱$ دارای جواب است اگر و فقط اگر a و n نسبت به هم اول باشند.

۳ـ۲ـ۲۲ فرض‌کنید a، b، c و d اعداد صحیح ثابت باشند و d بر ۵ بخش پذیر نباشد. فرض‌کنید m عدد صحیحی باشد به‌طوری که $am^۳ + bm^۲ + cm + d$ بر ۵ بخش پذیر است. ثابت کنید عدد صحیحی چون n وجود دارد به‌طوری‌که $dn^۳ + cn^۲ + bn + a$ نیز بر ۵ بخش پذیر است.

۳ـ۲ـ۲۳ ثابت کنید که عدد صحیح مثبتی به‌جای n نمی‌توان قرار داد به‌طوری که دو کسر $(۲۱n - ۳)/۴$ و $(۱۵n + ۲)/۴$ دو عدد صحیح باشند.

۳ـ۲ـ۲۴ الف) آیا n عدد صحیح متوالی وجود دارد به‌طوری که jاُمین آنها، $n \geqslant j \geqslant ۱$، عاملی داشته باشد که هیچ یک از اعضای دیگر دنباله را نشمارد؟

ب) آیا n عدد صحیح متوالی وجود دارد که jـ اُمین آنها، $n \geqslant j \geqslant ۱$، دارای دست‌کم j عامل باشد

که هیچ‌یک از اعضای دیگر دنباله را نشمارند؟

۳ـ۲ـ۲۵ فرض‌کنید $m_\circ, m_۱, \ldots, m_r$ اعداد صحیح مثبتی باشند که دوبه دو نسبت به هم اول‌اند. نشان دهید که $r+۱$ عدد صحیح $s, s+۱, \ldots, s+r$ وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای $i = \circ, ۱, \ldots, r$، عدد m_i عدد $s+i$ را می‌شمارد.

۳ـ۲ـ۲۶ برهان ۳-۲-۱۰ را کامل کنید.

مثالهای اضافی. ۳-۳-۱۱، ۳-۴-۳، ۳-۴-۹، ۴-۱-۳، ۴-۲-۴، ۴-۲-۱۴، ۴-۳-۴، ۴-۳-۵، ۴-۴-۶، ۴-۴-۷، ۴-۴-۸، ۴-۴-۹، ۴-۴-۱۹، ۴-۴-۲۰، ۴-۴-۲۱، ۴-۴-۲۲، ۴-۴-۲۳، ۴-۴-۲۴، ۴-۴-۲۹، ۴-۴-۳۰، ۴-۴-۳۱ .

۳ـ۳ تجزیهٔ یکتا

یکی از سودمندترین و کارآمدترین نتایجی که در قلب نظریهٔ اعداد جای دارد آن است که هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را می‌توان به شکلی یکتا (تا حد ترتیب عاملها) به حاصلضرب اعداد اول تجزیه کرد. به بیان دقیقتر، هر عدد طبیعی n را می‌توان به یک و فقط یک طریق به شکل $n = p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} \ldots p_k^{a_k}$ نمایش داد که در آن $p_۱, p_۲, \ldots, p_k$ اعداد اول متمایز و $a_۱, a_۲, \ldots, a_k$، اعداد صحیح و مثبت‌اند. در اینجا به ارائهٔ چند نتیجهٔ بسیار سودمند می‌پردازیم که به سادگی قابل اثبات‌اند.

۳ـ۳ـ۱ همهٔ شمارنده‌های $n = p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} \ldots p_k^{a_k}$ به شکل

$$m = p_۱^{b_۱} p_۲^{b_۲} \ldots p_k^{b_k} \qquad , \circ \leqslant b_i \leqslant a_i \quad , \quad i = ۱, \ldots, k$$

هستند و هر عددی به این شکل نیز یک شمارندهٔ n است. از اینجا نتیجه می‌شود که n دقیقاً دارای $(a_۱ + ۱)(a_۲ + ۱) \ldots (a_k + ۱)$ شمارندهٔ متمایز است.

۳ـ۳ـ۲ عدد صحیح $n = p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} \ldots p_k^{a_k}$ مربع کامل است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i، a_i زوج باشد، و مکعب کامل است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i، a_i مضربی از سه باشد و الی آخر.

۳ـ۳ـ۳ فرض‌کنید $a, b, \ldots, g$ تعدادی متناهی از اعداد صحیح مثبت باشند. همچنین فرض‌کنید که تجزیه‌های یکتای آنها به‌صورت

$$a = p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} \ldots p_k^{a_k}, \qquad b = p_۱^{b_۱} p_۲^{b_۲} \ldots p_k^{b_k}, \ldots, \qquad g = p_۱^{g_۱} p_۲^{g_۲} \ldots p_k^{g_k}$$

باشند که $a_۱, \ldots, a_k, b_۱, \ldots, b_k, \ldots, g_۱, \ldots, g_k$ اعداد صحیح نامنفی‌اند (که برخی نیز ممکن است صفر باشند). در این‌صورت

$$\gcd(a, b, \ldots, g) = p_۱^{m_۱} p_۲^{m_۲} \ldots p_k^{m_k}$$

و

$$\operatorname{lcm}(a, b, \ldots, g) = p_۱^{M_۱} p_۲^{M_۲} \ldots p_k^{M_k}$$

که در آن به‌ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $m_i = \min\{a_i, b_i, \ldots, g_i\}$ و $M_i = \max\{a_i, b_i, \ldots, g_i\}$. از اینجا به‌سادگی نتیجه می‌شود که

$$\gcd(a, b) \cdot \operatorname{lcm}(a, b) = ab$$

۳ـ۳ـ۴ با استفاده از تجزیهٔ یکتا نشان دهید که $\sqrt{۲}$ گنگ است.

حل. فرض‌کنید اعداد صحیح r و s وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\sqrt{۲} = r/s$. در این‌صورت $r^۲ = ۲s^۲$. ولی این تساوی (بنابر تجزیهٔ یکتا) نمی‌تواند برقرار باشد زیرا توان عدد اول ۲ در طرف چپ فرد است ولی توان ۲ در طرف راست زوج است (عدد ۲ به تعداد زوجی (احتمالاً صفر بار) در $s^۲$ و $r^۲$ ظاهر می‌شود.) این تناقض گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را ایجاب می‌کند.

۳ـ۳ـ۵ کوچکترین عدد صحیح مثبت n را بیابید به‌طوری که $n/۲$ مربع کامل، $n/۳$ مکعب کامل و $n/۵$ توان پنجم کامل باشد.

حل. از آنجاکه n بر ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر است، می‌توانیم فرض‌کنیم که $n = ۲^a۳^b۵^c$. درنتیجه $n/۲ = ۲^{a-۱}۳^b۵^c$، $n/۳ = ۲^a۳^{b-۱}۵^c$، $n/۵ = ۲^a۳^b۵^{c-۱}$. شرایط مسأله ایجاب می‌کنند که $a - ۱$ بایستی زوج و a مضربی از دو عدد ۳ و ۵ باشد. کوچکترین عدد a با چنین ویژگیهایی $a = ۱۵$ است. به‌طور مشابه کوچکترین مقدارهای b و c، $b = ۱۰$، $c = ۶$ است. لذا $n = ۲^{۱۵}۳^{۱۰}۵^۶$ کوچکترین عدد صحیح مثبت با ویژگیهای مفروض است.

۳ـ۳ـ۶ ثابت کنید که یک و فقط یک عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که $۲^۸ + ۲^{۱۱} + ۲^n$ مربع کامل باشد.

حل. فرض‌کنید $m^۲ = ۲^۸ + ۲^{۱۱} + ۲^n$. درنتیجه

$$\begin{aligned} ۲^n &= m^۲ - ۲^۸ - ۲^{۱۱} \\ &= m^۲ - ۲^۸(۱ + ۲^۳) \\ &= m^۲ - (۳ \times ۲^۴)^۲ \\ &= (m - ۴۸)(m + ۴۸) \end{aligned}$$

بنابر تجزیهٔ یکتا، اعداد صحیح نامنفی s و t موجودند به‌طوری‌که

$$m - ۴۸ = ۲^s \quad , \; m + ۴۸ = ۲^t \quad , \; s + t = n$$

پس $m = ۲^s + ۴۸$، $m = ۲^t - ۴۸$ و درنتیجه

$$\begin{aligned} ۲^s + ۴۸ &= ۲^t - ۴۸ \\ ۲^t - ۲^s &= ۹۶ \\ ۲^s(۲^{t-s} - ۱) &= ۲^۵ \times ۳ \end{aligned}$$

چون $۲^{t-s} - ۱$ فرد است، تجزیهٔ یکتا ایجاب می‌کند که $۲^{t-s} - ۱ = ۳$. از اینجا نتیجه می‌شود که $s = ۵$، $t = ۷$، $n = ۱۲$.

۳ـ۳ـ۷ فرض‌کنید n عددی صحیح و مثبت باشد. در بین جفتهای مرتب (x, y) از اعداد صحیح مثبت، چند جواب برای معادلهٔ $\dfrac{xy}{x+y} = n$ وجود دارد؟

حل. معادله را به شکل

$$xy = n(x+y)$$

$$xy - nx - ny = ۰$$

$$(x-n)(y-n) = n^۲$$

می‌نویسیم. چون به‌دنبال جوابهای صحیح و مثبت هستیم، باید داشته باشیم $x > n$ و $y > n$ (حالت $۰ < x < n$ و $۰ < y < n$ ایجاب می‌کند که $(x-n)(y-n) < n^۲$).

فرض‌کنید تجزیهٔ یکتای n به‌صورت $p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} \dots p_k^{a_k}$ باشد. پس $n^۲ = p_۱^{۲a_۱} p_۲^{۲a_۲} \dots p_k^{۲a_k}$. هر شمارندهٔ $n^۲$ یکی از جوابها را مشخص می‌کند، پس تعداد چنین جوابهایی برابر با $(۲a_۱ + ۱)(۲a_۲ + ۱)\dots(۲a_k + ۱)$ است.

۳ـ۳ـ۸ فرض‌کنید r و s اعداد صحیح مثبت باشند. دستوری برای محاسبه تعداد چهارتاییهای مرتب (a, b, c, d) از اعداد صحیح مثبت بیابید به‌طوری‌که

$$۳^r \times ۷^s = \operatorname{lcm}(a,b,c) = \operatorname{lcm}(a,b,d) = \operatorname{lcm}(a,c,d) = \operatorname{lcm}(b,c,d)$$

حل. با توجه به نتیجه مسألهٔ ۳-۳-۳، هر یک از اعداد a، b، c و d باید به شکل $۳^m ۷^n$ باشند که m در $\{۰, ۱, \dots, r\}$ و n در $\{۰, ۱, \dots, s\}$ است. همچنین باید دست‌کم برای دوتا از چهار عدد مفروض، m مساوی r و دست‌کم برای دوتا از چهار عدد مفروض، n مساوی s باشد. می‌توان mها را به $\binom{۴}{۲} r^۲$ راه قابل قبول طوری انتخاب کرد که دقیقاً دوتا از mها مساوی r باشند، همینطور $\binom{۴}{۳} r$ راه قابل قبول وجود دارد که در آنها دقیقاً سه تا از mها مساوی r و $\binom{۴}{۴}$ راه قابل قبول وجود دارد که در آن همهٔ mها مساوی r باشند. باجمع کردن اینها نتیجه می‌شود که

$$\binom{۴}{۴} + \binom{۴}{۳} r + \binom{۴}{۲} r^۲$$

راه برای انتخاب mهای قابل قبول وجود دارد. به‌طور مشابه به تعداد

$$\binom{۴}{۴} + \binom{۴}{۳} s + \binom{۴}{۲} s^۲$$

مقدار n قابل قبول وجود دارد. درنتیجه تعداد خواسته شده برابر است با $(۱ + ۴r + ۶r^۲)(۱ + ۴s + ۶s^۲)$.

۳ـ۳ـ۹ به‌ازای اعداد صحیح و مثبت x، y و z، ثابت کنید

$$(x,y)(x,z)(y,z)[x,y,z]^۲ = [x,y][x,z][y,z](x,y,z)^۲$$

که $(a, \dots, g)$ و $[a, \dots, g]$ به‌ترتیب نشان دهندهٔ $\gcd(a, \dots, g)$ و $\operatorname{lcm}(a, \dots, g)$ هستند.

حل. بنابر تجزیهٔ یکتا، کافی است نشان دهیم که به‌ازای هر عدد اول p، توان p در (تجزیه‌اش به عددهای اول) طرف چپ تساوی، مساوی توان p در طرف راست آن است. لذا فرض‌کنید $x = p^a r$، $y = p^b s$ و $z = p^c t$، که r، s و t اعداد صحیح و نسبت به p اول‌اند. می‌توانیم (به‌دلیل تقارن مسأله و درصورت لزوم با نامگذاری مجدد) فرض‌کنیم که $a \leqslant b \leqslant c$. در این‌صورت توان p در تجزیهٔ یکتای $[x,y,z]^۲$ مساوی با $۲c$ و در (x,y)، (x,z) و (y,z) به‌ترتیب مساوی با a، a و b است. درنتیجه توان p در طرف چپ مساوی است با $۲a + b + ۲c$.

به روشی مشابه ثابت می‌شود که توان p در طرف راست $b + c + c + ۲a = ۲a + b + ۲c$ است. پس با توجه به نکات قبلی، برهان کامل است.

۳ـ۳ـ۱۰ نشان دهید که $۱۰۰۰!$ با ۲۴۹ صفر به پایان می‌رسد.

حل. می‌نویسیم $۱۰۰۰! = ۲^a۵^br$ که r عددی صحیح و نسبت به ۱۰ اول است. به‌وضوح $a \geqslant b$ و تعداد صفرهای موجود در پایان $۱۰۰۰!$ مساوی b است. پس باید b را بیابیم.

اعداد صحیح دنبالهٔ $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, \ldots, ۱۰۰۰$ به‌صورت پنج درمیان بر ۵ بخش پذیرند، لذا به تعداد $[\![۱۰۰۰/۵]\!] = ۲۰۰$ مضرب ۵ در این دنباله وجود دارد. اعداد صحیح این دنباله به‌صورت ۲۵ درمیان بر ۲۵ بخش پذیرند، هر یک از این اعداد، عامل جدیدی را اضافه می‌کند و تعدادشان مساوی است با $[\![۱۰۰۰/۲۵]\!] = ۴۰$. اعداد صحیح دنباله به‌صورت ۱۲۵ درمیان بر ۱۲۵ بخش پذیرند و هر یک از این اعداد، عامل جدیدی را اضافه می‌کند و تعدادشان مساوی است با $[\![۱۰۰۰/۱۲۵]\!] = ۸$. هر یک از اعداد صحیح به‌صورت ۶۲۵ درمیان یک عامل جدید اضافه می‌کنند و تعدادشان مساوی است با $[\![۱۰۰۰/۶۲۵]\!] = ۱$. پس $b = [\![۱۰۰۰/۵]\!] + [\![۱۰۰۰/۲۵]\!] + [\![۱۰۰۰/۱۲۵]\!] + [\![۱۰۰۰/۶۲۵]\!] = ۲۰۰ + ۴۰ + ۸ + ۱ = ۲۴۹$.

می‌توان دقیقاً به روشی مشابه نشان داد که بیشترین توان p در $n!$ توسط مجموع (متناهی) زیر به‌دست می‌آید

$$[\![n/p]\!] + [\![n/p^۲]\!] + [\![n/p^۳]\!] + \ldots$$

۳ـ۳ـ۱۱ ثابت کنید که تعداد اعداد اول به شکل $۶n - ۱$ نامتناهی است.

حل. ابتدا توجه کنید که اگر p یک عدد اول بزرگتر از ۳ باشد، آنگاه $p \overset{۶}{\equiv} ۱$ یا $p \overset{۶}{\equiv} -۱$. [برای مثال اگر $p \overset{۶}{\equiv} ۲$، آنگاه به‌ازای kای، $p = ۶k + ۲$ که این ایجاب می‌کند p زوج باشد و این تناقض است. می‌توان استدلال مشابهی را دربارهٔ $p \overset{۶}{\equiv} ۳$ و $p \overset{۶}{\equiv} ۴$ به‌کار برد].

حال فرض‌کنید که تنها تعدادی متناهی عدد اول به شکل $۶n - ۱$ وجود دارد. عدد $N = p! - ۱$ را درنظر بگیرید که در آن P بزرگترین عدد اول به شکل $۶n - ۱$ است. N را به‌صورت حاصلضربی از اعداد اول بنویسید، مثلاً

$$N = p! - ۱ = p_۱p_۲\ldots p_m \qquad (۱)$$

توجه کنید که هر یک از اعداد اول p_k از p بزرگتر است. زیرا اگر $p_k \leqslant p$، آنگاه تساوی (۱) نشان می‌دهد که p_k عدد ۱ را عاد می‌کند که این غیرممکن است. از آنجا که p بزرگترین عدد اول همنهشت با ۱− به پیمانهٔ ۶ است، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر k، $p_k \overset{۶}{\equiv} ۱$.

اکنون اگر تساوی (۱) را به پیمانهٔ ۶ درنظر بگیریم درمی‌یابیم که $p! - ۱ \overset{۶}{\equiv} ۱$، یا به‌طور معادل $p! \overset{۶}{\equiv} ۲$، ولی این به وضوح غیرممکن است زیرا $p! \overset{۶}{\equiv} ۰$. درنتیجه باید تعداد اعداد اول به شکل $۶n - ۱$، نامتناهی باشد.

مسائل

۳ـ۳ـ۱۲ در یک کالج که در آن تعداد دانشجویانی که ثبت‌نام کرده‌اند کمتر از ۵۰۰۰ تاست، یک‌سوم دانشجویان در سال اول، دوهفتم آنها در سال دوم، یک‌پنجم آنها در سال سوم و بقیه در سال چهارم تحصیل می‌کنند. دانشکدهٔ تاریخ یک درس عمومی ارائه کرده است که در آن یک‌چهلم همه دانشجویان سال اول، یک‌شانزدهم

همهٔ دانشجویان سال دوم و یک‌نهم دانشجویان سال سوم ثبت‌نام کرده‌اند در حالی‌که یک‌سوم باقیماندهٔ کلاس تاریخ را دانشجویان سال چهارم تشکیل می‌دهند. چند دانشجو در کلاس تاریخ وجود دارد؟

۳ـ۳ـ۱۳ کوچکترین عددی را بیابید که ۲۸ مقسوم‌علیه داشته باشد.

۳ـ۳ـ۱۴ اعداد صحیح و متمایز a، b، c و d داده شده‌اند به‌طوری‌که معادله

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-۴=۰$$

ریشهٔ صحیحی چون r دارد. نشان دهید که $۴r=a+b+c+d$.

۳ـ۳ـ۱۵ الف) ثابت کنید $\sqrt[۳]{۷۲}$ گنگ است.

ب) ثابت کنید به‌جز ۰، ۰، ۰، هیچ مجموعه‌ای از اعداد صحیح چون m، n، p وجود ندارد به‌طوری که

$$m+n\sqrt{۲}+p\sqrt{۳}=۰$$

۳ـ۳ـ۱۶ هرگاه اعداد صحیح و مثبت a، b، c و d داده شده باشند به‌طوری‌که $a^۳=b^۲$، $c^۳=d^۲$، $c-a=۲۵$، مقادیر a، b، c و d را تعیین کنید.

۳ـ۳ـ۱۷ ثابت کنید که اگر به‌ازای اعداد صحیح مثبت a، b، c، اعداد ab، ac، bc مکعب کامل باشند، آنگاه a، b و c نیز باید مکعب کامل باشند.

۳ـ۳ـ۱۸ در یک رخت‌کن، n کمد وجود دارد که از ۱ تا n شماره‌گذاری شده و همگی بسته‌اند. n خدمتکار $P_۱, P_۲, \ldots, P_n$ به‌ترتیب در طول اتاق صف کشیده‌اند. هر خدمتکار P_k وضعیت آن عده (و فقط آن عده) از کمدهایی را تغییر می‌دهد که شمارهٔ آنها بر k بخش پذیر باشند یعنی: اگر چنین کمدی باز باشد، P_k آن را می‌بندد و اگر بسته باشد، P_k آن را باز می‌کند. بعد از عبور همهٔ n خدمتکار از اتاق، کدام‌یک از کمدها باز هستند؟ اگر هر خدمتکار مثل قبل عمل کند ولی به‌ترتیب دیگری صف کشیده باشند، چه وضعیتی پیش می‌آید؟

۳ـ۳ـ۱۹ از هندسهٔ محور اعداد به روشنی دیده می‌شود که در بین هر n عدد صحیح متوالی، یکی بر n بخش‌پذیر است. همان‌گونه که در مسائل زیر مشاهده می‌شود از این واقعیت اغلب می‌توان استفاده کرد.

الف) ثابت کنید که اگر یکی از دو عدد $۲^n-۱$ و $۲^n+۱$ اول باشد و $n>۲$، دیگری عددی مرکب است.

ب) بزرگترین عدد Nی که به‌ازای هر عدد صحیح n، عبارت $n^۵-۵n^۳+۴n$ بر N بخش پذیر باشد، چیست؟

ج) ثابت کنید که هر عدد صحیح مثبت، مضربی دارد که نمایش اعشاری آن شامل ده رقم است.

۳ـ۳ـ۲۰ فرض‌کنید که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، $H_n=۱+۱/۲+\cdots+۱/n$. نشان دهید که به‌ازای $n>۱$، H_n عدد صحیح نیست. (راهنمایی: فرض‌کنید H_n عدد صحیح باشد. دو طرف تساوی را در $\operatorname{lcm}(۱,۲,\ldots,n)$ ضرب کنید و نشان دهید که طرف چپ تساوی حاصل زوج و طرف راست آن فرد می‌شود.)

۳ـ۳ـ۲۱ اگر $\gcd(a,b)=۱$، نشان دهید که

الف) $\gcd((a+b)^m,(a-b)^m)\leqslant ۲^m$، و

ب) $\gcd(a^m+b^m, a^m-b^m) \leqslant ۲$.

۳ـ۳ـ۲۲ فرض‌کنید که به‌ازای اعداد صحیح مثبت $a,\ldots,g$، $(a,\ldots,g)$ و $[a,\ldots,g]$ به‌ترتیب نشان دهندهٔ $\gcd(a,\ldots,g)$ و $\mathrm{lcm}(a,\ldots,g)$ باشند. ثابت کنید

الف) $xyz=(xy,xz,yz)[x,y,z]$،

ب) $(x[y,z])=[(x,y),(x,z)]$،

ج) $[x,(y,z)]=([x,y],[x,z])$.

د) $([x,y],[x,z],[y,z])=[(x,y),(x,z),(y,z)]$.

ه) $[x,y,z](x,y)(x,z)(y,z)=xyz(x,y,z)$.

و) $(x,y)=(x+y,[x,y])$.

۳ـ۳ـ۲۳ فرض‌کنید m بر عددهای ۱, ۲, …, n بخش پذیر باشد. نشان دهید که اعداد $۱+m(۱+i)$ به ازای $i=۰,۱,۲,\ldots,n$ دوبه دو نسبت به هم اول‌اند.

۳ـ۳ـ۲۴ در تجزیهٔ $r+۱$ عدد صحیح مثبت $(r\geqslant ۱)$ به عوامل اول، روی هم r عدد اول به‌دست آمده است. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از این اعداد وجود دارد که حاصل‌ضرب آنها مربع کامل است.

۳ـ۳ـ۲۵ الف) همهٔ اعداد گویای مثبتی را تعیین کنید که $x^y=y^x$.

ب) همه اعداد گویای مثبتی را تعیین کنید که $x^{x+y}=(x+y)^y$.

۳ـ۳ـ۲۶ فرض کنید $a^۲+b^۲=c^۲$ که a، b و c اعداد صحیح‌اند. فرض‌کنید

$$\gcd(a,b)=\gcd(a,c)=\gcd(b,c)=۱$$

ثابت کنید اعداد صحیح u و v موجودند به‌طوری که $c-b=۲u^۲$، $c+b=۲v^۲$ و $\gcd(u,v)=۱$. نتیجه بگیرید که $a=۲uv$، $b=v^۲-u^۲$ و $c=u^۲+v^۲$. (راهنمایی: با آزمایش به پیمانهٔ ۴، نتیجه می‌شود که a و b هر دو فرد و نیز هردو زوج نیستند. پس می‌توانید بدون کاسته شدن از کلیت، a را زوج و b را فرد بگیرید.)

به‌عکس نشان دهید که اگر u و v داده شده باشند، آنگاه سه عدد a، b و c که به‌وسیلهٔ دستورهای فوق داده می‌شوند در تساوی $a^۲+b^۲=c^۲$ صدق می‌کنند.

۳ـ۳ـ۲۷ همهٔ مجموعه‌های شامل سه مربع کامل را بیابید به‌طوری که تشکیل تصاعد حسابی بدهند. (راهنمایی: فرض‌کنید $a<b<c$ و $b^۲-a^۲=c^۲-b^۲$ یا به‌طور معادل $a^۲+c^۲=۲b^۲$. حال قرار دهید $s=(c+a)/۲$ و $t=(c-a)/۲$ و نشان دهید که $s^۲+t^۲=b^۲$. حال نتیجهٔ ۳-۳-۲۶ را به‌کار ببرید.)

۳ـ۳ـ۲۸ الف) فرض‌کنید که تعداد اعداد اول به شکل $۶n-۱$ متناهی باشند و آنها را $p_۱,\ldots,p_k$ بنامید. با درنظر گرفتن $N=(p_۱\ldots p_k)^۲-۱$ به تناقض برسید.

ب) ثابت کنید که اعداد اول به شکل $۴n-۱$ نامتناهی هستند.

مثالهای اضافی. ۱-۱۰-۹، ۱-۱۰-۱۰، ۲-۶-۱، ۳-۱-۴، ۳-۴-۸، ۴-۱-۳، ۴-۲-۳، ۴-۲-۱۶ (ب)، ۴-۴-۹، ۵-۲-۱، ۵-۲-۴، ۵-۲-۶، ۵-۲-۹، ۵-۲-۱۴، ۵-۲-۱۵، ۵-۲-۱۶، ۵-۲-۱۷.

۳ـ۴ دستگاههای عددنویسی مکانی

فرض می‌کنیم که خواننده با دستگاه مکانی اعداد حقیقی آشناست. یعنی اگر b عدد صحیحی بزرگتر از یک باشد (که آن را مبنا می‌نامیم)، هر عدد حقیقی x را می‌توان (به‌صورت منحصر به‌فردی) به شکل مکانی

$$x = A_n A_{n-۱} \ldots A_۱ A_۰ / a_۱ a_۲ a_۳ \ldots$$

بیان کرد که در آن $A_۰, \ldots, A_n, a_۱, a_۲, \ldots$ (که ارقام نامیده می‌شوند) اعداد صحیح‌اند، $۰ \leqslant A_i < b$، $۰ \leqslant a_j < b$ و هیچ عدد صحیحی چون m وجود ندارد که به‌ازای هر $k > m$، $a_k = b - ۱$. این نمایش را معمولاً به‌صورت مجموع سری $A_n b^n + A_{n-۱} b^{n-۱} + \cdots + A_۱ b + A_۰ + a_۱ b^{-۱} + a_۲ b^{-۲} + \ldots$ نشان می‌دهند.

۳ـ۴ـ۱ فرض‌کنید C ردهٔ اعداد صحیح و مثبتی باشد که در نوشتن آنها به مبنای ۳ به رقم ۲ نیاز نیست. نشان دهید که هیچ سه عدد صحیحی در C نمی‌توان یافت که یک تصاعد حسابی تشکیل دهند.

حل. فرض کنیم d تفاضل مشترک تصاعد حسابی دلخواهی، مرکب از سه عدد صحیح مثبت باشد و هنگامی‌که d را در مبنای ۳ می‌نویسیم، اولین رقم غیرصفر آن از سمت راست در مکان kاُم باشد. حال فرض کنیم a عدد صحیح و مثبت دلخواهی باشد و آن را در مبنای ۳ بنویسیم. جدول زیر رقم kاُم هر یک از عددهای a، $a+d$ و $a+۲d$ را براساس رقمهای kاُم a و d به‌دست می‌دهد:

آنگاه رقم kام	اگر رقم kام d برابر باشد با ۱ و رقم kام a برابر باشد با ۰	۱	۲	اگر رقم kام d برابر باشد با ۲ و رقم kام a برابر باشد با ۰	۱	۲
a	۰	۱	۲	۰	۱	۲
$a+d$	۱	۲	۰	۲	۰	۱
$a+۲d$	۲	۰	۱	۱	۲	۰

در هر حالت، ۲ رقم kاُم یکی از عددهای a، $a+d$ و $a+۲d$ است و این می‌رساند که عدد متناظر با آن در C نیست.

۳ـ۴ـ۲ آیا معادلهٔ $[\![x]\!] + [\![۲x]\!] + [\![۴x]\!] + [\![۸x]\!] + [\![۱۶x]\!] + [\![۳۲x]\!] = ۱۲۳۴۵$ جواب دارد؟

حل. فرض‌کنید که x چنین عددی باشد. به‌آسانی می‌توان نشان داد که $۱۹۵ < x < ۱۹۶$.
(زیرا $۱۹۶ \times ۶۳ = ۱۲۳۴۸ > ۱۲۳۴۵ > ۱۲۲۸۵ = ۱۹۵ \times ۶۳$). حال جزء کسری x را در مبنای ۲ می‌نویسیم (که در آن $a, b, c, \ldots$ یکی از دو عدد ۰ یا ۱ هستند):

$$x = ۱۹۵ + ۰/abcdef\ldots,$$

$$۲x = ۲ \times ۱۹۵ + a/bcdef\ldots,$$

$$۴x = ۴ \times ۱۹۵ + ab/cdef\ldots,$$

$$۸x = ۸ \times ۱۹۵ + abc/def\ldots,$$

$$۱۶x = ۱۶ \times ۱۹۵ + abcd/ef\ldots,$$

$$۳۲x = ۳۲ \times ۱۹۵ + abcde/f\ldots\cdot$$

در این‌صورت می‌بینیم که

$$[\![x]\!] = ۱۹۵$$
$$[\![۲x]\!] = ۲ \times ۱۹۵ + a$$
$$[\![۴x]\!] = ۴ \times ۱۹۵ + ۲a + b$$
$$[\![۸x]\!] = ۸ \times ۱۹۵ + ۴a + ۲b + c$$
$$[\![۱۶x]\!] = ۱۶ \times ۱۹۵ + ۸a + ۴b + ۲c + d$$
$$[\![۳۲x]\!] = ۳۲ \times ۱۹۵ + ۱۶a + ۸b + ۴c + ۲d + e$$

با جمع دو طرف این تساویها در می‌یابیم که

$$[\![x]\!] + [\![۲x]\!] + [\![۴x]\!] + [\![۸x]\!] + [\![۱۶x]\!] + [\![۳۲x]\!] = ۶۳ \times ۱۹۵ + ۳۱a + ۱۵b + ۷c + ۳d + e$$

لذا مسأله تبدیل می‌شود به یافتن عددهای a، b، c، d، e به‌طوری که هر یک ۰ یا ۱ هستند و $۳۱a + ۱۵b + ۷c + ۳d + e = ۶۰$. ولی با توجه به محدودیتهای مقدارهای a، b، c، d و e این تساوی نمی‌تواند برقرار شود زیرا $۳۱a + ۱۵b + ۷c + ۳d + e \leqslant ۳۱ + ۱۵ + ۷ + ۳ + ۱ = ۵۷ < ۶۰$. بنابر این چنین xای وجود ندارد.

هنگامی‌که یک عدد صحیح در دستگاه دهدهی (به مبنای ۱۰) نوشته می‌شود، به‌سادگی می‌توان بخش‌پذیری آن را بر ۲ یا ۵ تشخیص داد. آزمونهایی برای تشخیص بخش پذیری اعداد وجود دارند که به‌کارگیری آنها ساده است. به‌عنوان مثال: عدد صحیح N بر ۴ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر عدد دورقمی سمت راست آن بر ۴ بخش پذیر باشد. برای تحقیق این ادعا N را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$$N = (a_n ۱۰^n + \cdots + a_۲ ۱۰^۲) + (a_۱ ۱۰ + a_۰)$$

و توجه می‌کنیم که $a_n ۱۰^n + \cdots + a_۲ ۱۰^۲$ همواره بر ۴ بخش پذیر است. درنتیجه $۴|N$ اگر و فقط اگر $۴|(a_۱ ۱۰ + a_۰)$.

آزمون بخش‌پذیری بر ۹ یکی از سودمندترین و جالبترین آزمونها است. این آزمون بیان می‌کند یک عدد صحیح فقط و فقط وقتی بر ۹ بخش پذیر است که مجموع رقمهای آن (در دستگاه دهدهی) بر ۹ بخش‌پذیر باشد. برای دیدن این مطلب، توجه کنید که $۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱$ و درنتیجه بنابر ویژگیهای حساب همنهشتی، $۱۰^۲ \overset{۹}{\equiv} ۱$، $۱۰^۳ \overset{۹}{\equiv} ۱$ و الی آخر. نتیجه می‌گیریم که

$$N = a_n ۱۰^n + \cdots + a_۱ ۱۰ + a_۰ \equiv a_n + \cdots + a_۱ + a_۰ \quad (\text{به پیمانهٔ ۹})$$

با برهانی مشابه می‌توان نشان داد که یک عدد صحیح بر ۳ بخش پذیر است اگر و فقط اگر مجموع رقمهایش بر ۳ بخش پذیر باشد. به‌عنوان کاربردی از این آزمون، فرض‌کنید که بپرسیم: به‌ازای کدام رقم x، عدد $۴۳۲۴x۹۸۷۶۵۲۲۳$ بر ۳ بخش پذیر است؟ کافی است رقمها را به پیمانهٔ ۳ با هم جمع کنیم و x را طوری انتخاب کنیم که مجموع حاصل به پیمانهٔ ۳ همنهشت با صفر باشد. در این حالت مجموع رقمها به پیمانهٔ ۳ مساوی با $x + ۱$ است، پس این عدد بر ۳ بخش پذیر است اگر و فقط اگر $x = ۲, ۵, ۸$.

۳ـ۴ـ۳ هنگامی‌که $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ در دستگاه دهدهی نوشته شود، مجموع رقمهایش مساوی A است. فرض‌کنید

B مجموع رقمهای A باشد. مجموع رقمهای B را بیابید. (A و B در دستگاه دهدهی نوشته شده‌اند.)

حل. فرض‌کنید $N = ۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$. در این‌صورت $N < (۱۰^۵)^{۴۴۴۴} = ۱۰^{۲۲۲۲۰}$ که به این معنی است که وقتی N در دستگاه دهدهی نوشته شود کمتر از ۲۲۲۲۰ رقم دارد. از آنجا که هریک از رقمهای N باید کوچکتر از ۹ یا مساوی با ۹ باشند، اطمینان داریم که $A < ۲۲۲۲۰ \times ۹ = ۱۹۹۹۸۰$.

به روشی مشابه می‌بینیم که A حداکثر ۶ رقم دارد، لذا مجموع رقمهای A باید از ۵۴($= ۹ \times ۶$) کمتر باشد، یعنی $B < ۵۴$.

از میان اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۵۴، عددی که بیشترین مجموع رقمها را دارد ۴۹ است که این مجموع مساوی ۱۳ است. فرض‌کنیم C مجموع رقمهای B باشد، هم‌اکنون دیدیم که $C \leqslant ۱۳$.

باتوجه به استدلالی که قبل از مسأله آمده است، می‌دانیم که $N \overset{۹}{\equiv} A \overset{۹}{\equiv} B \overset{۹}{\equiv} C$. لذا به‌کمک ردهٔ همنهشتی N، ردهٔ همنهشتی C را محاسبه می‌کنیم. ابتدا داریم $۴۴۴۴ = ۹ \times ۴۹۳ + ۷$ و درنتیجه $۴۴۴۴ \overset{۹}{\equiv} ۷$. همچنین $۷^۳ \overset{۹}{\equiv} ۱$. از آنجا که $۴۴۴۴ = ۳ \times ۱۴۸۱ + ۱$، داریم

$$\begin{aligned} ۴۴۴۴^{۴۴۴۴} &\equiv ۷^{۴۴۴۴} (\text{به پیمانهٔ ۹}) \\ &\equiv ۷^{۳\times ۱۴۸۱} \times ۷ (\text{به پیمانهٔ ۹}) \\ &\equiv ۷ (\text{به پیمانهٔ ۹}) \end{aligned}$$

درنتیجه $C \overset{۹}{\equiv} ۷$ و $C \leqslant ۱۳$. تنها عددی که هر دو شرط را به‌طور همزمان برقرار می‌کند $C = ۷$ است و درنتیجه مسأله حل می‌شود.

۳ـ۴ـ۴ یک سه‌تایی(مرتب) $(x_۱, x_۲, x_۳)$ از اعداد گنگ مثبت به‌طوری که $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱$ متوازن نامیده می‌شود هرگاه برای هر x_i، $x_i < ۱/۲$. اگر یک سه تایی متوازن نباشد، مثلاً اگر $x_j > ۱/۲$، می‌توان «عمل متوازن کنندهٔ» زیر را انجام داد:

$$B(x_۱, x_۲, x_۳) = (x'_۱, x'_۲, x'_۳)$$

که در آن، اگر $i \neq j$، $x'_i = ۲x_i$ و $x'_j = ۲x_j - ۱$. اگر سه‌تایی جدید متوازن نباشد، عمل متوازن کننده را روی آن انجام می‌دهیم. آیا با تکرار این روند، در طی انجام تعدادی متناهی عمل متوازن کننده، همواره یک سه‌تایی متوازن به‌دست می‌آید؟

حل. به روشی که در ابتدای این بخش گفته شد، $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ را درمبنای ۲ می‌نویسیم، مثلاً

$$\begin{aligned} x_۱ &= ۰/a_۱a_۲a_۳\ldots, \\ x_۲ &= ۰/b_۱b_۲b_۳\ldots, \\ x_۳ &= ۰/c_۱c_۲c_۳\ldots, \end{aligned}$$

که در آن a_i، b_i و c_iها همگی ۰ یا ۱ هستند.

وقتی می‌گوییم $x_i < ۱/۲$ یعنی اینکه $a_۱$، $b_۱$ و $c_۱$ همگی صفرند. توجه کنید که کار عمل متوازن کننده انتقال ممیز «اعشاری» به‌اندازه یک رقم به‌سمت راست و سپس حذف قسمت صحیح عدد حاصل است.

بنابراین به‌عنوان مثال اگر x_1، x_2 و x_3 متوازن نباشند، نمایش x'_1، x'_2 و x'_3 (در مبنای ۲) به‌صورت زیر است.

$$x'_1 = 0/a_2a_3a_4\ldots,$$
$$x'_2 = 0/b_2b_3b_4\ldots,$$
$$x'_3 = 0/c_2c_3c_4\ldots,$$

مثالهای زیادی وجود دارند که نشان می‌دهند که روند فوق لزوماً به یک سه‌تایی متوازن نمی‌انجامد. برای مثال (به‌کمک نماد قبلی)، x_1، x_2 و x_3 را به‌صورت

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ مربع کامل باشد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ مساوی یک مربع کامل به‌علاوه یک باشد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a_i + b_i = 0 \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

یعنی به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$x_1 = 0/1001000010000000100\ldots$$
$$x_2 = 0/0100100001000000010\ldots$$
$$x_3 = 0/0010011100111111001\ldots$$

همهٔ اعداد x_1، x_2 و x_3 گنگ هستند (زیرا اعداد گویا اعدادی هستند که نمایش «اعشاری» آنها متناوب است)، و نیز مجموعشان مساوی با ۱ است (زیرا $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$). به‌کارگیری مکرر عمل متوازن کننده هیچگاه x_1، x_2 و x_3 را به یک سه‌تایی متوازن تبدیل نمی‌کند (زیرا در هرصورت یکی از a_iها، b_iها یا c_iها مساوی ۱ است).

۳ـ۴ـ۵ (ادامهٔ ۲-۵-۱۰) فرض‌کنید f تابعی روی مجموعهٔ اعداد صحیح باشد که در شرایط

$$f(2k) = 2f(k) - 1,$$
$$f(2k+1) = 2f(k) + 1$$

صدق می‌کند. فرض‌کنید a عدد صحیح دلخواهی باشد که نمایش آن در مبنای ۲ به‌صورت زیر است

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \quad (= a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2 + a_0)$$

نشان دهید که

$$f(a) = b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + b_1 2 + b_0,$$

که در آن

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a_i = 1 \\ -1 & \text{اگر } a_i = 0 \end{cases}$$

(در واقع ایدهٔ مسأله آن است که در مجموع حاصل از بسط a در مبنای ۲، به‌جای هر صفری ۱− بگذاریم، برای مثال به‌ازای ۱۰ = n، $f(1010_2) = 1\bar{1}1\bar{1}_2 = 8 - 4 + 2 - 1 = 5$ (که $\bar{1}$ همان ۱− است)).

حل. از استقرا روی تعداد رقمهای نمایش a درمبنای ۲ استفاده می‌کنیم.

حکم برای $a = 1$ درست است، لذا فرض می‌کنیم که وقتی a کمتر از $k+1$ رقم دارد نیز حکم برقرار باشد. حال عدد صحیح a با $k+1$ رقم (در مبنای ۲) را درنظر می‌گیریم، مثلاً $a = a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$. اگر $a_0 = 0$، آنگاه $a = 2(a_k a_{k-1} \ldots a_1)$ و

$$f(a) = 2f(a_k \ldots a_1) - 1 = 2[b_k 2^{k-1} + \cdots + b_2 2 + b_1] - 1 = b_k 2^k + \cdots + b_2 2^2 + b_1 2 + b_0$$

و حکم برقرار است. اگر $a_0 = 1$، آنگاه $a = 2(a_k a_{k-1} \ldots a_1) + 1$ و

$$f(a) = 2f(a_k \ldots a_1) + 1 = 2(b_k 2^{k-1} + \cdots + b_1) + 1 = b_k 2^k + \cdots + b_1 2 + b_0$$

و بار دیگر حکم برقرار است.

این کاربرد زیبایی از نمایش اعداد است. توجه کنید که محاسبه آن تا چه حد ساده است:

$$f(25) = f(11001_2) = 11\bar{1}\bar{1}1_2 = 16 + 8 - 4 - 2 + 1 = 19$$

در مثال بعدی به‌کمک یک نمایش عددی خاص به بررسی و درک مجموعه‌ای از اعداد حقیقی می‌پردازیم که در آنالیز پیشرفته از اهمیت زیادی برخوردار است.

۳ـ۴ـ۶ فرض‌کنید K زیرمجموعه‌ای از $[0, 1]$ باشد که از همهٔ اعدادی تشکیل شده که در بسط سه‌تایی آنها در مبنای سه یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ داریم ۲ یا ۰ = a_n. این مجموعه، مجموعهٔ کانتور نام دارد. نشان دهید که K متمم اجتماع بازه‌های باز و از هم جدای I_n، $n = 1, 2, 3, \ldots$، است که مجموع طولهای آنها مساوی با ۱ است.

حل. ابتدا توجه می‌کنیم که هیچ‌یک از اعداد بازهٔ $I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ در K نیستند. دلیل آن است که نمایش اعداد این بازه در مبنای سه به شکل $(0/1a_2a_3a_4\ldots)_3$است.

به‌طور مشابه هیچ‌یک از اعداد بازهٔ $I_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ در K نیستند زیرا بسط این اعداد در مبنای سه به شکل $(0/01a_3a_4a_5\ldots)_3$ است.

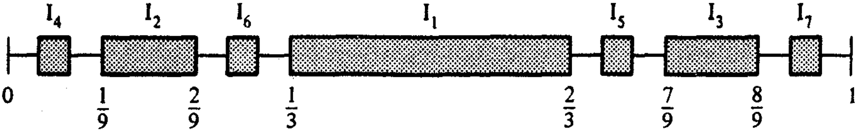
همچنین نمایش دهدهی اعداد بازهٔ $I_3 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ در مبنای سه به شکل $(0/21a_3a_4a_5\ldots)_3$ است، لذا این اعداد در K نیستند. به‌طور مشابه دیده می‌شود که هیچ‌یک از بازه‌های $I_4 = (\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$، $I_5 = (\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$، $I_6 = (\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$، $I_7 = (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ عضوی از K را دربرندارند.

به‌وضوح می‌توان این روند را به شکلی قانونمند انجام داد. شکل ۳-۲ و جدول ۳-۱ به دقیقتر شدن این فکر کمک می‌کنند.

به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n، برای یافتن I_n(یعنی X_n و Y_n)، n را در مبنای ۲ می‌نویسیم:

$$n = (a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1)_2$$

(یعنی $n = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{k-1}a_k$، ۱ یا ۰ = a_i، $a_k \neq 0$). فرض می‌کنیم که به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, k$،



شکل۳-۲

$b_i = ۲a_i$ و قرار می‌دهیم $I_n = (X_n, Y_n)$ که در آن

$$X_n = \frac{b_۱}{۳} + \frac{b_۲}{۳^۲} + \cdots + \frac{b_{k-۱}}{۳^{k-۱}} + \frac{۱}{۳^k} = (۰/b_۱ b_۲ \ldots b_{k-۱}۱)_۳$$

$$Y_n = \frac{b_۱}{۳} + \frac{b_۲}{۳^۲} + \cdots + \frac{b_{k-۱}}{۳^{k-۱}} + \frac{۲}{۳^k} = (۰/b_۱ b_۲ \ldots b_{k-۱}۲)_۳$$

به‌سادگی مشاهده می‌شود که به‌ازای هر n، X_n و Y_n عضوهای K هستند (توجه کنید که $X_n = b_۱/۳ + b_۲/۳^۲ + \cdots + (b_{k-۱})/(۳^{k-۱}) + \sum_{i=۱}^{\infty}(۲/۳^{k+i})$ و هیچ عضوی از I_n در K نیست (رقم kاُم هر عضوی از $I_n = (X_n, Y_n)$ مساوی با ۱ است). از این حقایق نتیجه می‌شود که I_nها مجزا هستند.

همچنین طول I_n مساوی با $\frac{۱}{۳^k}$ است که $k = [\![\log_۲ n]\!] + ۱$. در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} I_n = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۳^{[\![\log_۲ n]\!]+۱}} = \sum_{m=۰}^{\infty}\left[\sum_{n=۲^m}^{۲^{m+۱}-۱}\left(\frac{۱}{۳^{[\![\log_۲ n]\!]+۱}}\right)\right]$$

$$= \sum_{m=۰}^{\infty} ۲^m \left(\frac{۱}{۳^{m+۱}}\right) = \frac{۱}{۳}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^m = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۱-\frac{۲}{۳}}\right) = ۱$$

جدول ۳-۱ $I_n = (X_n, Y_n)$

I_n (شکل کسری)	Y_n (در مبنای ۳)	X_n (در مبنای ۳)	n (در مبنای ۲)	n (در مبنای ۱۰)
$\left(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right)$	۰/۲	۰/۱	۱	۱
$\left(\frac{۱}{۹}, \frac{۲}{۹}\right)$	۰/۰۲	۰/۰۱	۱۰	۲
$\left(\frac{۷}{۹}, \frac{۸}{۹}\right)$	۰/۲۲	۰/۲۱	۱۱	۳
$\left(\frac{۱}{۲۷}, \frac{۲}{۲۷}\right)$	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۱۰۰	۴
$\left(\frac{۱۹}{۲۷}, \frac{۲۰}{۲۷}\right)$	۰/۲۰۲	۰/۲۰۱	۱۰۱	۵
$\left(\frac{۷}{۲۷}, \frac{۸}{۲۷}\right)$	۰/۰۲۲	۰/۰۲۱	۱۱۰	۶
$\left(\frac{۲۵}{۲۷}, \frac{۲۶}{۲۷}\right)$	۰/۲۲۲	۰/۲۲۱	۱۱۱	۷
$\left(\frac{۱}{۸۱}, \frac{۲}{۸۱}\right)$	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۱	۱۰۰۰	۸
$\left(\frac{۵۵}{۸۱}, \frac{۵۶}{۸۱}\right)$	۰/۲۰۰۲	۰/۲۰۰۱	۱۰۰۱	۹

از روشی که در ساختن I_nها به‌کار بردیم به روشنی دیده می‌شود که K نتیجه حذف بازه‌های I_n از $[۰,۱]$ است. پس حکم ثابت می‌شود.

مسائل

۳ـ۴ـ۷ ثابت کنید هیچ عدد صحیحی وجود ندارد که وقتی رقم ابتدای آن را به انتهایش ببریم، دو برابر شود.

۳ـ۴ـ۸ کوچکترین عدد طبیعی n را بیابید که ویژگیهای زیر را داشته باشد:

(یک) آخرین رقم نمایش دهدهی آن ۶ باشد، و

(دو) هرگاه رقم ۶ آخری را پاک کنیم و در جلوی رقمهای باقیمانده قرار دهیم، عدد حاصل چهار برابر عدد اصلی باشد.

۳ـ۴ـ۹ الف) جوابهای صحیح و مثبت x و y را از معادله زیر بیابید:

$$(۳۶۰ + ۳x)^۲ = ۴۹۲y۰۴$$

ب) یک آزمون بخش‌پذیری برای تعیین قابلیت تقسیم یک عدد بر ۱۱ ابداع کنید (راهنمایی: $۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} -۱$).

ج) اگر عدد $۶۲ab۴۲۷$ مضربی از ۹۹ باشد، a و b را بیابید.

د) احتمال آن را بیابید که اگر رقمهای ۰، ۱، ۲، ... ، ۹ به‌صورت تصادفی در جاهای خالی ۷۶-۳-۹-۳-۲۰۳-۸-۵-۹۳۶-۲-۸-۳۸۳-۵ قرار بگیرند، عدد حاصل بر ۳۹۶ بخش‌پذیر باشد.

۳ـ۴ـ۱۰ اگر یک ترازوی دوکفه‌ای و مجموعه‌ای از وزنه‌های ۱، ۳، $۳^۲$، $۳^۳$، $۳^۴$، ... کیلویی در اختیار داشته باشیم، نشان‌دهید که در این صورت هر مقداری را که وزنش برحسب کیلو عددی صحیح‌باشد می‌توان وزن‌کرد. (وزنه‌ها رامی‌توان در هر دو کفه قرار داد) (راهنمایی: نشان دهید که می‌توان هر عدد صحیح مثبت را به‌صورت مجموع و تفاضلی از توانهای ۳ نمایش داد.)

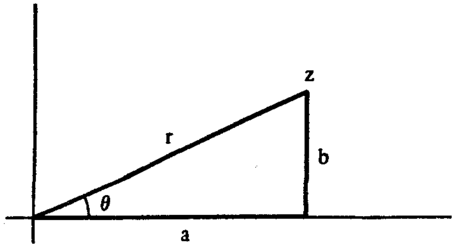
۳ـ۴ـ۱۱ الف) آیا عدد ...۰٫۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴ که از نوشتن متوالی همهٔ اعداد صحیح به‌دست می‌آید، نمایش عددی گویاست؟

ب) آیا عدد ...۰٫۰۱۱۰۱۰۱۰۰۰۱۰۱۰۰، که در آن وقتی n اول باشد، $a_n = ۱$ و در غیر این صورت $a_n = ۰$، نمایش عددی گویاست؟

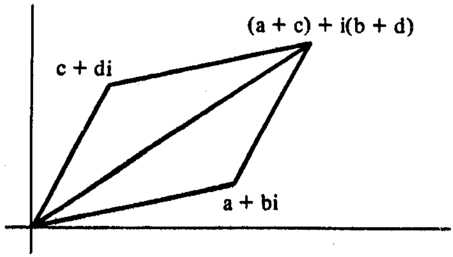
۳ـ۴ـ۱۲ فرض کنید $S = a_۰a_۱a_۲\cdots$ که در آن $a_n = ۰$ هرگاه در بسط n در مبنای ۲ تعداد ۱ها زوج و $a_n = ۱$ هرگاه تعداد ۱ها فرد باشد. به این ترتیب $S = ۰۱۱۰۱۰۰۱۱۰۰\cdots$. عدد $T = b_۱b_۲b_۳\cdots$ را با این مشخصات در نظر بگیرید که در آن b_i برابر باشد با تعداد ۱های واقع بین iاُمین و $(i+۱)$اُمین محل ظاهرشدن ۰ در S. در نتیجه $T = ۲۱۰۲۰۱۲\cdots$. ثابت کنید T تنها شامل سه نماد ۰، ۱و ۲ است.

۳ـ۴ـ۱۳ نشان دهید که تناظری یک به یک بین نقاط $[۰,۱]$ و نقاط $(۰,۱)$ وجود دارد. توصیف صریحی از این تناظر ارائه کنید.

مثالهای اضافی. ۱-۱-۱ (حل ۵)، ۴-۴-۸، ۵-۲-۵، ۶-۱-۱، ۶-۱-۴، ۶-۱-۸، ۶-۲-۱۳، ۷-۶-۶.



شکل۳-۳



شکل۳-۴

۳ـ۵ حساب اعداد مختلط

بخاطر آورید که می‌توان عدد مختلط z را به صورتهای مختلفی نوشت:

$z = a + bi$: شکل دکارتی

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$: شکل قطبی

$z = re^{i\theta}$: شکل نمایی

که در آن a، b، r و θ مطابق شکل ۳-۳ با یکدیگر ارتباط دارند و $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. زاویه θ آرگومان z است (که به‌صورت مضربی از 2π تعیین می‌شود)، و r قدرمطلق z نام دارد، این دو را به‌ترتیب به $\arg z$ و $|z|$ نشان می‌دهند. اعداد a و b به ترتیب جزء حقیقی و جزء انگاری z نامیده شده و به $\mathrm{Re}(z)$ و $\mathrm{Im}(z)$ نشان داده می‌شوند.

اگر $z = a + bi$ و $w = c + di$، آنگاه عدد $z + w = (a + c) + (b + d)i$ از نظر هندسی متناظر است با متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاورش z و w هستند (شکل ۳-۴ را ببینید).

اگر $z = re^{i\theta}$ و $w = se^{i\varphi}$، آنگاه $zw = rse^{i(\theta+\varphi)}$. توجه کنید که $|zw| = rs = |z||w|$ و $\arg zw = \theta + \varphi = \arg z + \arg w$، یعنی در عمل ضرب، قدرمطلقها درهم ضرب و آرگومانها با هم جمع می‌شوند.

۳ـ۵ـ۱ اگر a، b و n اعداد صحیح و مثبت باشند، ثابت کنید اعداد صحیح x و y موجودند که

$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

حل. فرض کنید $z = a + bi$. در این صورت $(a^2 + b^2)^n = (|z|^2)^n = |z|^{2n} = (|z|^n)^2$. ولی (از آنجا که a و b اعداد صحیح‌اند) به ازای عددهای صحیحی چون x و y، $z^n = x + iy$، لذا $x^2 + y^2 = |x + iy|^2 = (|z^n|)^2$

و اثبات کامل است.

۳ـ۵ـ۲ فرض کنید $n \geqslant 3$ عددی صحیح و α، β و γ عددهای مختلطی باشند که $\alpha^n = \beta^n = \gamma^n = 1$ و $\alpha + \beta + \gamma = 0$. نشان دهید که n مضربی از ۳ است.

حل. بدون کاسته‌شدن از کلیت، فرض می‌کنیم که $\alpha = 1$ (اگر چنین نباشد دو طرف $\alpha + \beta + \gamma = 0$ را بر α تقسیم کرده، به‌دست می‌آوریم $1 + \beta/\alpha + \gamma/\alpha = 0$ و سپس قرار می‌دهیم $\alpha_1 = 1$، $\beta_1 = \beta/\alpha$ و $\gamma_1 = \gamma/\alpha$). فرض می‌کنیم که $0 \leqslant \arg\beta < \arg\gamma < 2\pi$.

حال (چون $\beta^n = \gamma^n = 1$) قدرمطلق β و γ هرکدام مساوی با ۱ است و لذا روی دایرهٔ واحد (به مرکز $(0,0)$ و شعاع ۱) قرار دارند. از معادلهٔ $\beta + \gamma = -1$ با مساوی قرار دادن جزءهای انگاری می‌بینیم که $\mathrm{Im}(\beta + \gamma) = \mathrm{Im}(\beta) + \mathrm{Im}(\gamma) = 0$ یا به‌طور معادل $\mathrm{Im}(\beta) = -\mathrm{Im}(\gamma)$ (شکل ۳-۵). با مساوی قرار دادن جزءهای حقیقی نتیجه می‌شود $\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma) = -1$. از آنجا که قبلاً ثابت کردیم $|\beta| = |\gamma| = 1$، باید داشته باشیم $\mathrm{Re}(\beta) = \mathrm{Re}(\gamma) = -\frac{1}{2}$ و بنابراین $\beta = e^{2\pi i/3}$ و $\gamma = e^{4\pi i/3}$. اینکه $\beta^n = 1$ ایجاب می‌کند که $e^{2\pi i n/3} = 1$ و این تنها وقتی ممکن است که n مضربی از ۳ باشد.

نتیجهٔ بسیار سودمند زیر را می‌توان به استقرا ثابت کرد.

قضیهٔ دوموآور. به ازای هر عدد صحیح n،

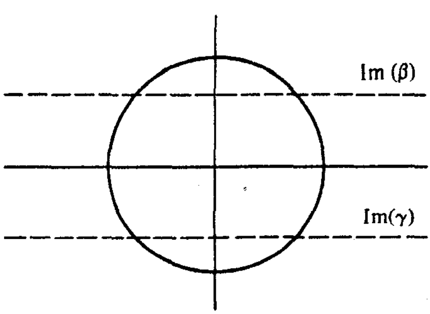
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(به شکل نماد توانی داریم، $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.)

۳ـ۵ـ۳ $\cos 5\theta$ را برحسب $\cos\theta$ بیان کنید.

حل. یک روش کارآمد آن است که $\cos 5\theta$ را به عنوان جزء حقیقی $e^{5i\theta}$ در نظر بگیریم، سپس می‌توانیم قضیهٔ دوموآور را به‌کار ببریم:

$$\begin{aligned}\cos 5\theta + i\sin 5\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\ &= \cos^5\theta + 5\cos^4\theta(i\sin\theta) + 10\cos^3\theta(i^2\sin^2\theta) \\ &\quad + 10\cos^2\theta(i^3\sin^3\theta) + 5\cos\theta(i^4\sin^4\theta) + i^5\sin^5\theta\end{aligned}$$



شکل ۳-۵

$$=(\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta)$$
$$+ i(\sin^5\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + 5\sin\theta\cos^4\theta)$$

با مساوی قرار دادن جزء حقیقی و انگاری به‌دست می‌آوریم

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$
$$\sin 5\theta = \sin^5\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + 5\sin\theta\cos^4\theta$$

برای $\cos 5\theta$ داریم

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2$$
$$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

۳-۵-۴ ثابتهای a_0، a_1، ... ، a_6 را بیابید به‌طوری که

$$\cos^6\theta = a_6\cos 6\theta + a_5\cos 5\theta + \cdots + a_1\cos\theta + a_0$$

حل. این مسأله را نیز می‌توان همانند مسأله قبل به کمک رابطهٔ موجود بین توابع مثلثاتی (به ویژه سینوس و کسینوس) و متغیرهای مختلط به زیبایی حل کرد. در اینجا $\cos\theta$ را به‌صورت $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ می‌نویسیم و با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای به‌دست می‌آوریم

$$\cos^6\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^6$$
$$= \frac{1}{2^6}\left[(e^{i\theta})^6 + 6(e^{i\theta})^5(e^{-i\theta}) + 15(e^{i\theta})^4(e^{-i\theta})^2\right.$$
$$\left.+ 20\,(e^{i\theta})^3(e^{-i\theta})^3 + 15(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^4 + 6(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^5 + (e^{-i\theta})^6\right]$$
$$= \frac{1}{2^6}\left[(e^{6i\theta}+e^{-6i\theta}) + 6(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}) + 15(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}) + 20\right]$$
$$= \frac{1}{2^6}[2\cos 6\theta + 2\times 6\cos 4\theta + 2\times 15\cos 2\theta + 20]$$
$$= \frac{1}{32}[\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10].$$

۳-۵-۵ فرض کنید $G_n = x^n\sin nA + y^n\sin nB + z^n\sin nC$ که در آن x، y و z، A، B، C اعداد حقیقی و $A+B+C$ مضرب صحیحی از π است. ثابت کنید اگر $G_1 = G_2 = 0$، آنگاه به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $G_n = 0$.

حل. در اینجا (مانند مسأله ۳-۵-۳) حیلهٔ رایج آن است که G_n را به صورت جزء انگاری عبارت

$$H_n = x^n e^{inA} + y^n e^{inB} + z^n e^{inC}$$

در نظر بگیریم. فرض کنید که به ازای $n = 0, 1, \cdots, k$، H_n حقیقی باشد و H_{k+1} را در نظر بگیرید. داریم

$$H_1 H_k = H_{k+1} + H$$

که در آن

$$\begin{aligned}
H &= xe^{iA}y^ke^{ikB} + xe^{iA}z^ke^{ikC} + ye^{iB}x^ke^{ikA} + ye^{iB}z^ke^{ikC} + ze^{iC}x^ke^{ikA} + ze^{iC}y^ke^{ikB}\\
&= xye^{i(A+B)}[y^{k-1}e^{i(k-1)B} + x^{k-1}e^{i(k-1)A}] + xze^{i(A+C)}[z^{k-1}e^{i(k-1)C} + x^{k-1}e^{i(k-1)A}]\\
&\quad + yze^{i(B+C)}[y^{k-1}e^{i(k-1)B} + z^{k-1}e^{i(k-1)C}]\\
&= xye^{i(A+B)}[H_{k-1} - z^{k-1}e^{i(k-1)C}] + xze^{i(A+C)}[H_{k-1} - y^{k-1}e^{i(k-1)B}]\\
&\quad + yze^{i(B+C)}[H_{k-1} - x^{k-1}e^{i(k-1)A}]\\
&= H_{k-1}[xye^{i(A+B)} + xze^{i(A+C)} + yze^{i(B+C)}] - xyze^{i(A+B+C)}H_{k-2}\\
&= H_{k-1}K - xyze^{i(A+B+C)}H_{k-2},
\end{aligned}$$

که $K = xye^{i(A+B)} + xze^{i(A+C)} + yze^{i(B+C)}$.

ملاحظه می‌کنیم که $H_2 = H_1^2 + 2K$ و چون H_1 و H_2 حقیقی‌اند، بنابرفرض K باید حقیقی باشد. همچنین بنابر فرض استقرا H_{k-1} و H_{k-2} حقیقی‌اند. چون $A+B+C$ مضربی از π است، $e^{i(A+B+C)}$ نیز حقیقی است. با در نظر گرفتن مطالب فوق، از پاراگراف قبل نتیجه می‌شود که H حقیقی است. حال چون بنابر فرض استقرا H_k حقیقی است و چون $H_{k+1} = H_1H_k - H$، نتیجه می‌شود که H_{k+1} نیز حقیقی است. لذا حکم مسأله به استقرا ثابت می‌شود.

مسائل

۳ـ۵ـ۶ الف) با توجه به اینکه $۳^۲ + ۲^۲ = ۱۳$ و $۷^۲ + ۵^۲ = ۷۴$، عدد $۹۶۲ = ۷۴ \times ۱۳$ را به شکل مجموع دو مربع بنویسید. (راهنمایی: فرض کنید $z = ۲ + ۳i$ و $w = ۵ + ۷i$ و از $|zw|^۲ = |z|^۲|w|^۲$ استفاده کنید.)

ب) نشان دهید که $۴\arctan\frac{۱}{۵} - \arctan\frac{۱}{۲۳۹} = \frac{۱}{۴}\pi$. (راهنمایی: $(۵-i)^۴(۱+i)$ را درنظر بگیرید.)

۳ـ۵ـ۷ فرض کنید A عددی مختلط و m عددی صحیح و مثبت باشد به‌طوری‌که $A^m = ۱$ و $(A+۱)^m = ۱$. ثابت کنید که n بر ۶ بخشپذیر است و $A^۳ = ۱$.

۳ـ۵ـ۸ نشان دهید که

$$\binom{n}{۱} - \binom{n}{۳} + \binom{n}{۵} - \binom{n}{۷} + \cdots = ۲^{n/۲}\cos\frac{n\pi}{۴}$$

و

$$\binom{n}{۰} - \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴} - \binom{n}{۶} + \cdots = ۲^{n/۲}\sin\frac{n\pi}{۴}$$

(راهنمایی: $(۱+i)^n$ را در نظر بگیرید.)

۳ـ۵ـ۹ با در نظر گرفتن قدرمطلقها و آرگومانهای ممکن

الف) همهٔ مقادیر $\sqrt[۳]{-i}$ را بیابید،

ب) همهٔ مقادیر $(۳ - ۴i)^{-۳/۸}$ که کمترین فاصله را تا محور انگاری دارند، بیابید.

۳ـ۵ـ۱۰ الف) ثابت کنید که اگر $z = e^{i\theta}$، آنگاه $z - z^{-۱} = ۲i\sin\theta$ و $z^n - z^{-n} = ۲i\sin n\theta$.

ب) به کمک قسمت (الف)، $\sin^{2n}\theta$ را به صورت مجموعی از سینوسها بنویسید که زاویه‌های آنها مضربهایی از θ باشند.

۳ـ۵ـ۱۱ نشان دهید که

$$\tan n\theta = \frac{\binom{n}{1}\tan\theta - \binom{n}{3}\tan^3\theta + \cdots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2}\tan^2\theta + \cdots}$$

۳ـ۵ـ۱۲ الف) ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{\cos k\theta}{\cos^k\theta} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ (-1)^{1+n/2}\tan^n\theta & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

(راهنمایی: عبارت $i\tan\theta = -1 + \dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta}$ را در نظر بگیرید.)

ب) ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\cos^k\theta\cos k\theta = \begin{cases} (-1)^{(n+1)/2}\sin^n\theta\sin n\theta & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ (-1)^{1+n/2}\sin^n\theta\cos n\theta & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

(راهنمایی: عبارت $-1 + \cos\theta[\cos\theta + i\sin\theta] = i\sin\theta[\cos\theta + i\sin\theta]$ را در نظر بگیرید.)

۳ـ۵ـ۱۳ ثابت کنید که

$$\frac{\cos n\theta}{\cos^n\theta} = 1 - \binom{n}{2}\tan^2\theta + \binom{n}{4}\tan^4\theta - \cdots$$

۳ـ۵ـ۱۴ نشان دهید که اگر $e^{i\theta}$ در معادلهٔ $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ صدق کند که در آن a_iها حقیقی‌اند، آنگاه $a_{n-1}\sin\theta + a_{n-2}\sin 2\theta + \cdots + a_1\sin(n-1)\theta + a_0\sin n\theta = 0$.

مثالهای اضافی. ۱-۳-۲، ۴-۲-۱۰، ۴-۲-۱۱، ۴-۲-۱۳، ۴-۲-۱۵، ۴-۲-۱۷، ۴-۲-۲۰، ۴-۲-۲۲، ۴-۳-۱۸، ۵-۲-۲، ۵-۲-۳، ۵-۲-۱۱، ۵-۳-۴، ۵-۳-۱۰، ۵-۴-۱۱، ۵-۴-۲۸، ۵-۴-۲۹، همچنین بخش ۸-۴ (اعداد مختلط در هندسه) را ببینید.

۴

جبر

جبر یکی از قدیمی‌ترین شاخه‌های ریاضیات و هنوز هم یکی از فعالترین زمینه‌های تحقیق ریاضی است. این مبحث هنوز مملو از ایده‌های تازه است و هیچ نشانه‌ای از کنار رفتن یا عدم باروری این علم به چشم نمی‌خورد.

در جبر دبیرستانی می‌آموزیم که چگونه دستورها و معادلات را به شکلهای معادل ساده‌تری تبدیل کنیم تا بهتر درک و روشنتر بیان شوند. بخش عمدهٔ مسائل این کتاب گواه بر سودمند بودن این موضوع اساسی است. یکی از مهمترین کارهایی که در جبر انجام می‌شود به تجزیهٔ عبارتهای جبری مربوط است. در اولین بخش، به مسائلی می‌پردازیم که حل آنها نیاز به دانستن چند دستور مقدماتی تجزیه دارد.

دو بخش میانی به مسائل جبر کلاسیک، یعنی بررسی چند جمله‌ایها، اختصاص یافته‌اند. درگذشته بیشتر این مطالب به شاخه‌ای از جبر مربوط می‌شدند که نظریهٔ معادلات نام داشت. امروزه مقدمات این مبحث در سراسر برنامهٔ درسی دبیرستانی و کالج پراکنده شده است. در این بخشها، ایده‌هایی از این موضوع را گردآوری می‌کنیم که اساس آگاهیهای لازم را برای حل مسأله تشکیل می‌دهند.

در بخش پایانی به معرفی عناوینی می‌پردازیم که وقتی صحبت از جبر به میان می‌آید ریاضیدانان حرفه‌ای بدان متوجه می‌شوند. در اینجا بر دستگاهها و روشهای تفکر صوری تأکید می‌شود. این مبحث، دنیای تازه‌ای از مفاهیم است که از تعمیم روشها و ایده‌های کلاسیک پدید آمده است. در بخش مزبور به معرفی گروهها، حلقه‌ها و میدانها می‌پردازیم که بنیادی‌ترین ساختارهای این مبحث را تشکیل می‌دهند.

۴ـ۱ اتحادهای جبری

در این بخش به بررسی کاربردهای برخی از مهمترین دستورهای تجزیه، از جمله دستورهای زیر، می‌پردازیم:

$$a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)$$

$$a^۲ + ۲ab + b^۲ = (a+b)^۲$$

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc = (a+b+c)^۲$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-۱} + a^{n-۲}b + \cdots + ab^{n-۲} + b^{n-۱})$$

اگر n عددی صحیح و فرد باشد می‌توانیم در تساوی آخر، با قرار دادن $-b$ به جای b، دستور تجزیهٔ مجموع دو توان nام کامل را به دست آوریم:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

که n فرد است.

۴ـ۱ـ۱ نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح n، $n^4 - 20n^2 + 4$ عددی مرکب است.

حل. برای حل مسأله سعی خواهیم کرد که عبارت را تجزیه کنیم. هرگاه بنویسیم

$$n^4 - 20n^2 + 4 = (n^4 - 20n^2 + 100) - 96 = (n^2 - 10)^2 - 96$$

با بن‌بست روبه‌رو می‌شویم زیرا ۹۶ مربع کامل نیست. ولی اگر به شکل زیر استدلال کنیم به نتیجه می‌رسیم:

$$n^4 - 20n^2 + 4 = (n^4 - 4n^2 + 4) - 16n^2 = (n^2 - 2)^2 - (4n)^2 = (n^2 - 2 - 4n)(n^2 - 2 + 4n)$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که هیچ‌کدام از این عوامل مساوی با ± 1 نیستند، حکم ثابت می‌شود.

فرض کنیم $n^2 - 2 - 4n = 1$، یا به طور معادل $n^2 - 4n - 3 = 0$. از فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود که $n = 2 \pm \sqrt{7}$ و این عدد صحیح نیست. بنابراین اگر n عدد صحیح باشد، $n^2 - 2 - 4n$ مساوی با یک نیست. می‌توان استدلال مشابهی را در سه حالت دیگر به کار برد.

۴ـ۱ـ۲ همهٔ جوابهای حقیقی x، y، z و w دستگاه زیر را بیابید

$$\begin{cases} x + y + z = w \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{w} \end{cases}$$

حل. حدسهای اولیه باعث می‌شوند تنها به جوابهایی بیندیشیم که یکی از عددهای x، y و z مساوی با w و دوتای دیگر قرینهٔ یکدیگر باشند (برای مثال، $x = w$ و $y = -z$). روشن است که اینها جواب هستند، ولی چگونه می‌توان ثابت کرد که جوابهای دیگری وجود ندارند؟

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود
$$\frac{yz + xz + xy}{xyz} = \frac{1}{w}$$
و این به همراه معادلهٔ اول نتیجه می‌دهد
$$(x + y + z)(yz + xz + xy) = xyz$$
که پس از بسط به صورت $x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 2xyz = 0$ در می‌آید که این به نوبه خود به صورت زیر تجزیه می‌شود

$$(x + y)(x + z)(y + z) = 0.$$

که همان حدس اولیهٔ ماست (یعنی یکی از عاملهای $x + y$، $x + z$، $y + z$ مساوی صفر است، مثلاً $y = -z$ و در نتیجه $x = x + y + z = w$).

۴ـ۱ـ۳ الف) همهٔ جفتهای (m, n) از اعداد صحیح مثبت را بیابید که $|3^m - 2^n| = 1$.

ب) همهٔ جفتهای (m, n) از اعداد صحیح بزرگتر از ۱ را بیابید که $|p^m - q^n| = 1$ و p و q اعداد اول باشند.

حل. الف) اگر m را برابر ۱ یا ۲ بگیریم، به سرعت جوابهای $(m,n) = (۱,۱),(۱,۲),(۲,۳)$ را می‌یابیم. ثابت می‌کنیم که جوابهای دیگری وجود ندارند.

فرض کنید (m,n) جوابی از $|۳^m - ۲^n| = ۱$ باشد که $m > ۲$ (و لذا $n > ۳$). در این صورت $۳^m - ۲^n = ۱$ یا $۳^m - ۲^n = -۱$.

حالت ۱. فرض کنید $۳^m - ۲^n = -۱$ و $n > ۳$. در این صورت $۳^m \overset{۸}{\equiv} -۱$. ولی این همنهشتی نمی‌تواند برقرار باشد زیرا اگر m زوج باشد، $۳^m \overset{۸}{\equiv} ۱$ و اگر m فرد باشد، $۳^m \overset{۸}{\equiv} ۳$ ($۳ \overset{۸}{\equiv} ۳$، $۳^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱$، $۳^۳ \overset{۸}{\equiv} ۳$، $۳^۴ \overset{۸}{\equiv} ۱$، $\ldots$).

حالت ۲. فرض کنید $۳^m - ۲^n = ۱$ و $n > ۳$. در این صورت $۳^m \overset{۸}{\equiv} ۱$ و لذا m زوج است، مثلاً $m = ۲k$، $k > ۱$. در نتیجه $(۳^k + ۱)(۳^k - ۱) = ۳^{۲k} - ۱ = ۲^n$. بنا بر تجزیهٔ یکتا باید $۳^k + ۱ = ۲^r$ و $r > ۳$ که این هم با توجه به حالت ۱، روی نمی‌دهد. این برهان قسمت (الف) را تمام می‌کند.

ب) بلافاصله می‌توان دید که p و q هر دو فرد نیستند زیرا در این صورت $p^m - q^n$ زوج خواهد بود. لذا فرض کنید که $q = ۲$. با استفاده از اتحادهای جبری این بخش نشان می‌دهیم که تنها جواب همان جواب قسمت (الف) یعنی $|۳^۲ - ۲^۳| = ۱$ است.

فرض کنید که m و n بزرگتر از ۱ باشند و $|p^m - ۲^n| = ۱$. در این صورت m و n هر دو نمی‌توانند زوج باشند زیرا اگر $m = ۲r$ و $n = ۲s$، آنگاه

$$۱ = |p^m - ۲^n| = |p^{۲r} - ۲^{۲s}| = |p^r - ۲^s||p^r + ۲^s|$$

و این غیر ممکن است (زیرا $p^r + ۲^s > ۱$).

فرض کنید که m فرد باشد. در این صورت

$$۲^n = p^m \pm ۱ = (p \pm ۱)(p^{m-۱} \mp p^{m-۲} + \cdots - p + ۱)$$

و این غیر ممکن است زیرا آخرین عامل طرف راست تساوی بالا عددی فرد و بزرگتر از ۱ است. بنابراین باید m زوج و n فرد باشد.

فرض کنید $m = ۲^r k$ که در آن k عددی فرد است و فرض کنید $k > ۱$. در این صورت

$$۲^n = p^m \pm ۱ = (p^{۲^r})^k \pm ۱ = (p^{۲^r} \pm ۱)\left((p^{۲^r})^{k-۱} \pm \cdots - (p^{۲^r}) + ۱\right)$$

و بار دیگر عامل طرف راست عددی فرد است که تناقض است.

در نتیجه به ازای عدد صحیح و مثبت r و عدد فرد n، $m = ۲^r$ و تساوی به صورت $|p^{۲^r} - ۲^n| = ۱$ در می‌آید. بنابراین $p^{۲^r} - ۲^n = ۱$ یا $p^{۲^r} - ۲^n = -۱$.

حالت ۱. اگر $p^{۲^r} - ۲^n = -۱$، آنگاه

$$p^{۲^r} = ۲^n - ۱ = (۲ - ۱)(۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + \cdots + ۲ + ۱) \equiv ۳ \quad (\text{به پیمانهٔ } ۴)$$

و این غیر ممکن است زیرا به ازای هر عدد صحیح و فرد x، $x^۲ \overset{۴}{\equiv} ۱$.

حالت ۲. اگر $p^{۲^r} - ۲^n = ۱$، آنگاه $۲^n = p^{۲^r} - ۱ = (p^{۲^{r-۱}} + ۱)(p^{۲^{r-۱}} - ۱)$. تنها راهی که هر دو عدد $p^{۲^{r-۱}} - ۱$ و $p^{۲^{r-۱}} + ۱$ می‌توانند توانی از ۲ باشند آن است که $p^{۲^{r-۱}} - ۱ = ۲$ و $p^{۲^{r-۱}} + ۱ = ۴$. با جمع این دو تساوی نتیجه می‌گیریم که $p^{۲^{r-۱}} = ۳$ و این ایجاب می‌کند که $p = ۳$، $r = ۱$، $m = ۲$، $n = ۳$.
این برهان را کامل می‌کند.

۴ـ۱ـ۴ ثابت کنید که در دنبالهٔ نامتناهی ...,۱۰۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱ ,۱۰۰۰۱۰۰۰۱ ,۱۰۰۰۱ از اعداد صحیح، هیچ عدد اولی وجود ندارد.

حل. می‌توان جمله‌های دنباله را به صورت زیر نوشت

$$۱ + ۱۰^{۴}, ۱ + ۱۰^{۴} + ۱۰^{۸}, \dots, ۱ + ۱۰^{۴} + \dots + ۱۰^{۴n}, \dots$$

به طور کلیتر به ازای هر عدد صحیح و دلخواه x، $x > ۱$، دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$۱ + x^{۴}, ۱ + x^{۴} + x^{۸}, \dots, ۱ + x^{۴} + \dots + x^{۴n}, \dots$$

اگر n فرد باشد، مثلاً $n = ۲m + ۱$، آنگاه

$$\begin{aligned} ۱ + x^{۴} + x^{۸} + \dots + x^{۴(۲m+۱)} &= (۱ + x^{۴}) + x^{۸}(۱ + x^{۴}) + \dots + x^{۸m}(۱ + x^{۴}) \\ &= (۱ + x^{۴})(۱ + x^{۸} + \dots + x^{۸m}) \end{aligned}$$

لذا اگر $m > ۰$، این عدد مرکب است. به ازای $m = ۰$ و $x = ۱۰$ نیز عددی مرکب به دست می‌آید زیرا $۱۰۰۰۱ = ۷۳ \times ۱۳۷$.

فرض کنید که n زوج باشد، مثلاً $n = ۲m$. در این صورت

$$\begin{aligned} ۱ + x^{۴} + \dots + x^{۴(۲m)} &= \frac{۱ - (x^{۴})^{۲m+۱}}{۱ - x^{۴}} \\ &= \left(\frac{۱ - (x^{۲m+۱})^{۲}}{۱ - x^{۲}}\right)\left(\frac{۱ + (x^{۲m+۱})^{۲}}{۱ + x^{۲}}\right) \\ &= \left(۱ + x^{۲} + \dots + (x^{۲})^{۲m}\right) \times \left(۱ - x^{۲} + \dots + (x^{۲})^{۲m}\right) \end{aligned}$$

این تجزیه نشان می‌دهد که عدد مزبور مرکب است.

مسائل

۴ـ۱ـ۵ الف) اگر a و b دو عدد صحیح متوالی باشند، نشان دهید که $a^{۲} + b^{۲} + (ab)^{۲}$ مربع کامل است.

ب) اگر $۲a$ میانگین همساز b و c باشد (یعنی $۲a = \frac{۲}{۱/b + ۱/c}$)، نشان دهید که مجموع مربعهای سه عدد a، b و c مربع یک عدد گویاست.

ج) اگر اختلاف عدد N با دو مربع متوالی که N در بین آنها قرار دارد به ترتیب مساوی با x و y باشد، ثابت کنید که $N - xy$ مربع کامل است.

۴ـ۱ـ۶ ثابت کنید که بی‌نهایت عدد طبیعی a با ویژگی زیر وجود دارد: به ازای هیچ عدد طبیعی n، $n^{۴} + a$ اول نیست.

۴ـ۱ـ۷ با فرض اینکه عدد صحیح n مساوی با مجموع دو عدد مثلثی باشد، یعنی

$$n = \frac{a^{۲} + a}{۲} + \frac{b^{۲} + b}{۲}$$

عدد $۴n + ۱$ را به شکل مجموع دو مربع بنویسید، $۴n + ۱ = x^{۲} + y^{۲}$، و نشان دهید که چگونه می‌توان x و y را بر حسب a و b بیان کرد.

به عکس نشان دهید که اگر $۴n + ۱ = x^۲ + y^۲$، آنگاه n به شکل مجموع دو عدد مثلثی است.

۴ـ۱ـ۸ فرض کنید که N عددی باشد که نمایش آن در دستگاه دهدهی از ۹۱ رقم یک تشکیل شده باشد:

$$N = \underbrace{۱۱۱\ldots۱}_{۹۱}$$

ثابت کنید که N عددی مرکب است.

۴ـ۱ـ۹ ثابت کنید که هر دو عدد از دنبالهٔ زیر نسبت به هم اول‌اند:

$$۲+۱, ۲^۲+۱, ۲^۴+۱, ۲^۸+۱, \ldots, ۲^{۲^n}+۱, \ldots$$

نشان دهید که حکم بالا ثابت می‌کند که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

۴ـ۱ـ۱۰ همهٔ سه‌تاییهای (x, y, z) از اعداد صحیح را بیابید که در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ = (x + y + z)^۳$$

مثالهای اضافی. ۱-۸-۴، ۱-۱۲-۷، ۳-۳-۶، ۴-۲-۵، ۵-۲-۱۵، ۵-۳-۷، ۷-۱-۱۱. همچنین بخش ۵-۲(سریهای هندسی) را ببینید.

۴ـ۲ تجزیهٔ یکتای چند جمله‌ایها

یک چندجمله‌ای از درجهٔ n از متغیر x (که n عددی صحیح و نامنفی است)، عبارتی است به شکل

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

که $a_۰$، $a_۱$، ...، a_n ثابت‌اند (و ضرایب نامیده می‌شوند) و $a_n \neq ۰$. یک چندجمله‌ای که همهٔ ضرایبش صفر باشند، چندجمله‌ای صفر نامیده می‌شود و هیچ درجه‌ای به آن نسبت نمی‌دهیم. ضریب a_n، ضریب پیشرو نامیده می‌شود و اگر مساوی با ۱ باشد، چندجمله‌ای را چندجمله‌ای تکین گوییم. دو چندجمله‌ای را (متحداً) مساوی گوییم هر گاه ضرایب آنها جمله به جمله مساوی باشند، یعنی در دو چندجمله‌ای، توانهای مساوی متغیر، ضریبهای مساوی داشته باشند.

اگر ضرایب چندجمله‌ای $P(x)$ عددهای صحیح باشند، گوییم $P(x)$ یک چندجمله‌ای روی اعداد صحیح است. به طور مشابه اگر ضرایب اعداد گویا باشند، گوییم چند جمله‌ای روی اعداد گویاست و الی‌آخر.

از بسیاری جنبه‌ها چند جمله‌ایها شبیه به اعداد صحیح‌اند. می‌توان آنها را جمع، تفریق و ضرب کرد. با وجود این، درست مانند اعداد صحیح، هنگامی که یک چند جمله‌ای را بر چندجمله‌ای دیگری تقسیم می‌کنیم، نتیجه یک چندجمله‌ای خارج قسمت و علاوه بر آن یک چندجمله‌ای باقیمانده است (در آینده توضیح بیشتری در این باره خواهیم داد). چندجمله‌ای F (دقیقاً) چندجمله‌ای G را می‌شمارد هر گاه یک چندجمله‌ای مانند Q وجود داشته باشد به طوری که $G = QF$ (یعنی G مضربی از F است). چندجمله‌ای H یک بزرگترین مقسوم علیه مشترک چند جمله‌ایهای F و G است اگر و فقط اگر (۱) H چندجمله‌ای F و G را بشمارد، (۲) اگر K چند جمله‌ای دیگری باشد که F و G را بشمارد، آنگاه K، H را نیز بشمارد. می‌توان نشان داد که Hصرف‌نظر از یک مضرب ثابت، منحصر به فرد است. همانند اعداد صحیح، در اینجا نیز یک الگوریتم تقسیم وجود دارد.

الگوریتم تقسیم چندجمله‌ایها. اگر $F(x)$ و $G(x)$ چندجمله‌ایهای روی میدان K باشند (برای مثال، K می‌تواند میدان اعداد گویا، اعداد حقیقی، اعداد مختلط یا اعداد صحیح به پیمانهٔ p باشد که p اول است)، آنگاه چند جمله‌ایهای منحصر به فرد $Q(x)$ و $R(x)$ روی K موجودند به طوری که

$$F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$$

که در آن $R(x) \equiv ۰$ یا $\deg R(x) < \deg G(x)$ (deg نشان دهندهٔ درجه است). به علاوه، اگر K یک دامنهٔ صحیح باشد (مانند اعداد صحیح)، به شرط آنکه $G(x)$ چندجمله‌ای تکین باشد، همین نتیجه برقرار است.

به عنوان مثالی از الگوریتم تقسیم چندجمله‌ایها، فرض کنید $F(x) = ۳x^۵ + ۲x^۲ - ۵$ و $G(x) = ۲x^۳ + ۶x + ۳$. در این صورت

$$\begin{array}{llll|l} ۳x^۵ & & +۲x^۲ & -۵ & ۲x^۳+۶x+۱ \\ \cline{5-5} ۳x^۵ & +۹x^۳ & +\frac{۳}{۲}x^۲ & & \frac{۳}{۲}x^۲ - \frac{۹}{۲} \\ \cline{1-4} & -۹x^۳ & +\frac{۱}{۲}x^۲ & -۵ & \\ & -۹x^۳ & -۲۷x & -\frac{۹}{۲} & \\ \cline{2-4} & & \frac{۱}{۲}x^۲+۲۷x & -\frac{۱}{۲} & \end{array}$$

در این حالت $Q(x) = \frac{۳}{۲}x^۲ - \frac{۹}{۲}$ و $R(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ + ۲۷x - \frac{۱}{۲}$. (به کمک این مثال به روشنی دیده می‌شود که الگوریتم تنها وقتی کاراست که ضرایب، همگی از یک میدان باشند. با وجود این واضح است که وقتی مقسوم‌علیه تکین باشد، دامنهٔ صحیح کافی است).

مشابه اعداد صحیح، می‌توان الگوریتم تقسیم را برای یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو چندجمله‌ای به‌کار برد. به‌علاوه همانند اعداد صحیح، اگر F و G دو چندجمله‌ای (روی یک میدان K) باشند، چند جمله‌ایهای S و T (روی K) موجودند به‌طوری که

$$\gcd(F, G) = SF + TG$$

که در آن $\gcd(F,G)$ نشان دهندهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک F و G است.

۴ـ۲ـ۱ یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ بیابید به طوری که $P(x)$ بر $x^۲ + ۱$ و $P(x) + ۱$ بر $x^۳ + x^۲ + ۱$ بخش‌پذیر باشد.

حل. با توجه به شرایط مسأله، چند جمله‌ایهای $S(x)$ و $T(x)$ موجودند به طوری که

$$P(x) = (x^۲ + ۱)S(x)$$

$$P(x) + ۱ = (x^۳ + x^۲ + ۱)T(x)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $(x^۲ + ۱)S(x) = (x^۳ + x^۲ + ۱)T(x) - ۱$ یا به طور معادل

$$(x^۳ + x^۲ + ۱)T(x) - (x^۲ + ۱)S(x) = ۱$$

با توجه به نکاتی که پیش از مثال بیان شد، $x^۳ + x^۲ + ۱$ و $x^۲ + ۱$ «نسبت به هم اول‌اند» و می‌توانیم به کمک

الگوریتم اقلیدسی در چند جمله‌ایها، $S(x)$ و $T(x)$ را بیابیم. در نتیجه داریم

$$(x^۳+x^۲+۱) =(x+۱)(x^۲+۱)+(-x)$$
$$x^۲+۱ =-x(-x)+۱$$

و با «عمل قهقرایی» به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}۱ &=(x^۲+۱)+x(-x)\\ &=(x^۲+۱)+x\left[(x^۳+x^۲+۱)-(x+۱)(x^۲+۱)\right]\\ &=(x^۲+۱)\,[۱-x(x+۱)]+x[x^۳+x^۲+۱]\\ &=(x^۳+x^۲+۱)x-(x^۲+۱)(x^۲+x-۱)\end{aligned}$$

از اینجا در می‌یابیم که می‌توانیم قرار دهیم $S(x)=x^۲+x-۱$ و $T(x)=x$. در نتیجه

$$P(x)=(x^۲+۱)(x^۲+x-۱)$$

۴ـ۲ـ۲ ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n، کسر $\dfrac{n^۳+۲n}{n^۴+۳n^۲+۱}$ تحویل‌ناپذیر است.

حل. داریم

$$\begin{aligned}n^۴+۳n^۲+۱ &=n(n^۳+۲n)+(n^۲+۱)\\ n^۳+۲n &=n(n^۲+۱)+n\\ n^۲+۱ &=n(n)+۱\\ n &=n(۱)\end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $\gcd(n^۴+۳n^۲+۱, n^۳+۲n)$ برابر است با ۱ و برهان کامل می‌شود.

فرض کنید که $F(x)$ یک چندجمله‌ای روی یک دامنهٔ صحیح D باشد و معادلهٔ چند جمله‌ای $F(x)=۰$ را در نظر بگیرید. اگر عضو a از D به قسمی باشد که $F(a)=۰$، a را یک ریشهٔ $F(x)$ یا یک صفر $F(x)$ گوییم. قضیهٔ باارزش زیر کاربرد ساده‌ای از الگوریتم تقسیم است.

قضیهٔ عاملها. اگر $F(x)$ یک چندجمله‌ای روی یک دامنهٔ صحیح D باشد، عضو a از D یک ریشهٔ $F(x)=۰$ است اگر و فقط اگر $x-a$ عاملی از $F(x)$ باشد.

با به کارگیری مکرر قضیهٔ عاملها می‌توانیم ثابت کنیم که عددی منحصر به فرد و نامنفی چون m و چندجمله‌ای منحصر به فرد $G(x)$ روی D وجود دارند به طوری که

$$F(x)=(x-a)^m G(x)$$

و $G(a)\neq ۰$. در این صورت گوییم a صفری از مرتبهٔ m است.

دو مثال بعدی چگونگی استفاده از قضیهٔ عاملها را نشان می‌دهند.

۳ـ۲ـ۴ با فرض اینکه درچندجمله‌ای $F(x)=x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$ ضرایب $a_۰, a_۱, \ldots, a_{n-۱}$ اعداد صحیح باشند و همچنین با فرض وجود چهار عدد صحیح a، b، c و d به طوری که

$F(a)=F(b)=F(c)=F(d)=5$، نشان دهید که هیچ عدد صحیح k وجود ندارد که $F(k)=8$.

حل. فرض کنید $G(x)=F(x)-5$. بنابر قضیهٔ عاملها، $x-a$، $x-b$، $x-c$، $x-d$ عاملهای $G(x)$ هستند و می‌توانیم بنویسیم

$$G(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)H(x)$$

که در آن $H(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است. اگر k عدد صحیحی باشد که $F(k)=8$، آنگاه $G(k)=F(k)-5=8-5=3$ و یا به طور معادل

$$(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)H(k)=3$$

طرف چپ حاصلضربی از پنج عدد صحیح است و همهٔ اعداد صحیح $k-a$، $k-b$، $k-c$ و $k-d$ باید متمایز باشند زیرا a، b، c، d متمایزند. اما این غیر ممکن است زیرا حداکثر یکی از عددهای $k-a$، $k-b$، $k-c$، $k-d$ می‌تواند ± 3 باشد و لذا سه‌تای دیگر باید ± 1 باشند. در نتیجه چنین kای را نمی‌توان یافت.

۴ـ۲ـ۴ ثابت کنید که اگر $F(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و عددی صحیح چون k وجود داشته باشد به طوری که هیچ‌یک از عددهای $F(1)$، $F(2)$، $\ldots$ ، $F(k)$ بر k بخش‌پذیر نباشند، آنگاه $F(x)$ صفر صحیحی ندارد.

حل. به طور معادل ثابت می‌کنیم که اگر $F(x)$ صفر صحیحی مانند r داشته باشد، آنگاه به ازای هر عدد صحیح و مثبت k، دست‌کم یکی از عددهای $F(1)$، $F(2)$، $\ldots$ ، $F(k)$ بر k بخش‌پذیر است. لذا فرض کنید $F(r)=0$. بنابر قضیهٔ عاملها می‌توانیم بنویسیم

$$F(x)=(x-r)G(x)$$

که $G(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است. از الگوریتم تقسیم در اعداد صحیح نتیجه می‌شود که اعداد صحیح q و s موجودند که $r=kq+s$ و $0<s\leqslant k$ (به نامساویهای مربوط به s توجه کنید). با قرار دادن $s=r-kq$ در تساوی بالا، به دست می‌آوریم

$$F(s)=(s-r)G(s)=-qkG(s)$$

این تساوی نشان می‌دهد که $F(s)$ بر k بخش‌پذیر است (زیرا $G(s)$ عددی صحیح است) و این برهان را کامل می‌کند.

رهیافت ساده‌تری از این مسأله با استفاده از حساب همنهشتی به این صورت است که اگر $a\overset{k}{\equiv}b$، آنگاه $F(a)\overset{k}{\equiv}F(b)$. حکم مسأله را می‌توان به طور مستقیم از این حقیقت نتیجه گرفت که به ازای هر عدد صحیح a، $F(a)$ همنهشت با یکی از عددهای $F(1)$، $\ldots$ ، $F(k)$ به پیمانهٔ k است و بنابر فرض مسأله، هیچ‌یک از این عددها بر k بخش‌پذیر نیستند.

قضیهٔ تجزیهٔ یکتا در اعداد صحیح بیان می‌کند که هر عدد صحیح را می‌توان به شکل منحصر به فردی به صورت حاصلضربی از اعداد اول نوشت. قضیهٔ مشابهی در چند جمله‌ایها وجود دارد: می‌توان هر چندجمله‌ای روی یک میدان را به شکل منحصر به فردی به صورت حاصلضربی از چند جمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر (یعنی عاملهای اول) نوشت. در صورتی که چند جمله‌ایها روی میدان اعداد مختلط باشند، عاملهای تحویل‌ناپذیر، چند جمله‌ایهای درجهٔ اول (خطی) هستند. در صورتی که میدان مفروض میدان اعداد حقیقی

باشد، چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر، چند جمله‌ایهای خطی و چند جمله‌ایهای درجه دوم با مبیّن منفی هستند (یعنی آنهایی که به شکل $ax^۲ + bx + c$ باشند و $b^۲ - ۴ac < ۰$).

یکی از راههای مفید برای نمایش چند جمله‌ایها، همانند اعداد صحیح، تجزیهٔ یکتاست. می‌توان این مطلب را در دو مثال زیر به روشنی ملاحظه کرد.

۴ـ۲ـ۵ ثابت کنید که هر چندجمله‌ای روی اعداد مختلط، مضربی ناصفر و به شکل چند جمله‌ای دارد به طوری که همهٔ نماهایش بر ۱,۰۰۰,۰۰۰ بخش‌پذیرند.

حل. فرض کنید که نمایش حاصل از تجزیهٔ یکتای چندجمله‌ای مفروض به شکل

$$P(x) = A(x - s_۱)^{m_۱}(x - s_۲)^{m_۲} \dots (x - s_k)^{m_k}$$

باشد که A عددی ثابت و $s_۱, \dots, s_k$، ریشه‌های $P(x)$، به ترتیب با چند گانگیهای $m_۱, \dots, m_k$ باشند. به ازای هر عدد صحیح و مثبت a (مثلاً $a = ۱,۰۰۰,۰۰۰$)، $(x^a - s_i^a)/(x - s_i)$ یک چندجمله‌ای روی اعداد مختلط است (بخش ۴-۱ را ببینید). قرار می‌دهیم

$$Q(x) = x^a \left(\frac{x^a - s_۱^a}{x - s_۱}\right)^{m_۱} \dots \left(\frac{x^a - s_k^a}{x - s_k}\right)^{m_k}$$

در این صورت، $Q(x)$ یک چندجمله‌ای روی اعداد مختلط است و

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) =& A(x - s_۱)^{m_۱} \dots (x - s_k)^{m_k} \times \left(x^a \left(\frac{(x^a - s_۱^a)^{m_۱}}{(x - s_۱)^{m_۱}}\right) \dots \left(\frac{(x^a - s_k^a)^{m_k}}{(x - s_k)^{m_k}}\right)\right) \\ =& Ax^a(x^a - s_۱^a)^{m_۱} \dots (x^a - s_k^a)^{m_k} \end{aligned}$$

یک چندجمله‌ای است که همهٔ نماهایش بر a بخش‌پذیرند.

۴ـ۲ـ۶ فرض کنید f یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد. نشان دهید که همهٔ صفرهای f حقیقی‌اند اگر و فقط اگر $f^۲$ را نتوان به شکل مجموع دو مربع به صورت $f^۲ = g^۲ + h^۲$ نوشت که در آن g و h چند جمله‌ایهایی با ضرایب حقیقی‌اند و $\deg g \neq \deg h$.

حل. فرض کنید $f^۲ = g^۲ + h^۲$ که در آن f و g چند جمله‌ایهایی با ضرایب حقیقی‌اند و $\deg g \neq \deg h$، و فرض کنید که همهٔ صفرهای f حقیقی باشند. f را به شکل تجزیه شده می‌نویسیم:

$$f(x) = A(x - a_۱)^{m_۱} \dots (x - a_k)^{m_k}$$

که در آن A عددی حقیقی و ناصفر است.

از تساوی

$$A^۲(x - a_۱)^{۲m_۱} \dots (x - a_k)^{۲m_k} = (g(x))^۲ + (h(x))^۲$$

نتیجه می‌شود که به ازای هر $i = ۱, ۲, \dots, k$، $(h(a_i))^۲ + (g(a_i))^۲ = ۰$. از آنجا که عددهای $g(a_i)$ و $h(a_i)$، هر دو حقیقی‌اند، باید داشته باشیم $g(a_i) = ۰$ و $h(a_i) = ۰$. در واقع نتیجه می‌شود که چندگانگی این صفرها دست کم m_i است. لذا قضیهٔ عاملها ایجاب می‌کند که چندجمله‌ایهای $g_۱(x)$ و $h_۱(x)$ موجود باشند به طوری که $g(x) = f(x)g_۱(x)$ و $h(x) = f(x)h_۱(x)$. از اینجا نتیجه می‌شود که $(g_۱(x))^۲ + (h_۱(x))^۲ = ۱$

ولی این تساوی ناممکن است زیرا $\deg g_1 \neq \deg h_1$ (یعنی هر دو چند جمله‌ای g_1 و h_1 ثابت نیستند). این تناقض ایجاب می‌کند که f صفری غیر حقیقی داشته باشد.

حال فرض کنید که همهٔ صفرهای f حقیقی نباشند و f را به شکل تجزیه شدهٔ زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = A(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_r)^{m_r}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\dots(x^2+b_sx+c_s)^{n_s}$$

که در آن A عددی حقیقی، m_1، ...، m_r اعداد صحیح نامنفی، s عددی صحیح و مثبت و n_1، ...، n_s اعداد صحیح مثبت، a_i، b_j، c_j اعدادی حقیقی و به ازای $j = 1, \dots, s$، $b_j^2 - 4c_j \leqslant 0$. داریم

$$\begin{aligned} x^2 + b_jx + c_j &= \left(x^2 + b_jx + \frac{1}{4}b_j^2\right) + (c_j - \frac{1}{4}b_j^2) \\ &= \left(x + \frac{1}{2}b_j\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{4c_j - b_j^2}\right)^2 \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد که هر عامل درجهٔ دوم f، مجموع دو مربع است. به جای هر عامل درجهٔ دوم در تجزیهٔ یکتای f^2، نمایش آن عامل را به صورت مجموع دو مربع بنویسید. در نتیجه یک تساوی به شکل زیر به دست می‌آید

$$f^2(x) = A^2(x-a_1)^{2m_1}\dots(x-a_r)^{2m_r} \times \left(g_1^2(x)+h_1^2(x)\right)^{2n_1}\dots\left(g_s^2(x)+h_s^2(x)\right)^{2n_s}$$

که در آن g_1، ...، g_s، h_1، ...، h_s چند جمله‌ای‌اند، $\deg g_i = 1$ و $\deg h_i = 0$.

اکنون حکم، با استفادهٔ مکرر از این حقیقت نتیجه می‌شود که حاصلضرب مجموع دو مربع دیگر را می‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت:

$$(f^2+g^2)(h^2+k^2) = (fh-gk)^2 + (fk+gh)^2$$

همچنین اگر در این اتحاد، $\deg f > \deg g$ و $\deg h > \deg k$ آنگاه $\deg(fh-gk) > \deg(fk+gh)$.

لذا ملاحظه می‌کنید که چند جمله‌ایهای $g(x)$ و $h(x)$ با ضرایب حقیقی موجودند به‌طوری‌که $\deg g(x) \neq \deg h(x)$ و $f^2 = g^2 + h^2$.

مسائل

۴ـ۲ـ۷ چند جمله‌ایهای $F(x)$ و $G(x)$ را طوری بیابید که

$$(x^8-1)F(x) + (x^5-1)G(x) = x - 1$$

۴ـ۲ـ۸ بزرگترین مقسوم علیه مشترک $x^n - 1$ و $x^m - 1$ چیست؟

۴ـ۲ـ۹ فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد که باقیماندهٔ تقسیم آن بر $x - a$ برابر با A و باقیماندهٔ تقسیم آن بر $x - b$ برابر با B باشد و $a \neq b$. باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ را بر $(x-a)(x-b)$ بیابید.

۴ـ۲ـ۱۰ نشان دهید که $x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$ که در آن a، b، c و d اعداد صحیح و مثبت‌اند، بر $x^3 + x^2 + x + 1$ بخش‌پذیر است. (راهنمایی: $(x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2+1)(x+1)$).

۴ـ۲ـ۱۱ نشان دهید که هر چندجمله‌ای $(\cos\theta + x\sin\theta)^n - \cos n\theta - x\sin n\theta$ بر $x^2 + 1$ بخش‌پذیر است.

۴ـ۲ـ۱۲ به ازای کدام n، چندجمله‌ای $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}$ بر چندجمله‌ای $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ بخش‌پذیر است؟

۴ـ۲ـ۱۳ یک عدد حقیقی، جبری نامیده می‌شود هرگاه صفر یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد.
الف) نشان دهید که $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ جبری است.

ب) نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $\cos(\pi/2n)$ جبری است. (راهنمایی: با استفاده از قضیهٔ دوموآور، $\cos nx$ را به شکل یک چندجمله‌ای بر حسب $\cos x$ بنویسید).

۴ـ۲ـ۱۴ اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای تکین با ضرایب صحیح و k عددی صحیح باشد، آیا عدد صحیحی چون m وجود دارد به طوری که $P(m)$ دست‌کم k مقسوم‌علیه اول متمایز داشته باشد؟ (راهنمایی: ابتدا به کمک استقرا ثابت کنید که k عدد اول $q_1,\ldots,q_k$ و k عدد صحیح $n_1,\ldots,n_k$ موجودند به طوری که به ازای $i=1,\ldots,k$ عدد q_i عدد $p(n_i)$ را می‌شمارد. سپس ثابت کنید که عدد اول q، $P(n)$ را می‌شمارد اگر و فقط اگر به ازای هر عدد صحیح s، q عدد $P(n+sq)$ را بشمارد. از این نتایج و کاربردی از قضیهٔ باقیماندهٔ چینی، معلوم می‌شود که پاسخ این پرسش مثبت است.)

۴ـ۲ـ۱۵ الف) x^8+x^4+1 را (یک) روی اعداد گویا، (دو) روی اعداد حقیقی و (سه) روی اعداد مختلط به عاملهای تحویل‌ناپذیر تجزیه کنید.
ب) x^n-1 را روی اعداد مختلط تجزیه کنید.

ج) $x^4-2x^3+6x^2+22x+13$ را، با فرض اینکه $2+3i$ یک صفر آن است، روی اعداد مختلط تجزیه کنید.

۴ـ۲ـ۱۶ در اینجا به بیان دو نتیجه می‌پردازیم که در تجزیهٔ چند جمله‌ایهای با ضرایب صحیح به عوامل تحویل‌ناپذیر مفیدند.

قضیهٔ ریشهٔ گویا. اگر $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و اگر عدد گویای r/s (که r و s اعداد صحیح و نسبت به هم اول‌اند) ریشه‌ای از $P(x)=0$ باشد، آنگاه r عدد a_0 و s عدد a_n را می‌شمارد.

لم گاوس. فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. اگر بتوان $P(x)$ را به حاصلضرب دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا تجزیه کرد، آنگاه می‌توان $P(x)$ را به حاصلضرب دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح تجزیه کرد.

الف) فرض کنید $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ n با ضرایب صحیح باشد. ثابت کنید که اگر a_0، a_n و $f(1)$ فرد باشند، آنگاه معادلهٔ $f(x)=0$ ریشهٔ گویا ندارد.
ب) به ازای کدام مقدار صحیح a، x^2-x+a چندجمله‌ای $x^{13}+x+90$ را می‌شمارد؟

۴ـ۲ـ۱۷ الف) فرض کنید که $f(x)$ یک چندجمله‌ای روی اعداد حقیقی و $g(x)$ مقسوم‌علیهی از $f(x)$ و $f'(x)$ باشد که تحویل‌ناپذیر یا خالی از مربع است. نشان دهید که چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(g(x))^2$ بخش‌پذیر است. (به کمک این حکم می‌توان وجود ریشه‌های چندگانهٔ $f(x)$ را بررسی کرد.)

ب) با استفاده از حکم قسمت (الف)، چندجمله‌ای $x^6+x^4+3x^2+2x+2$ را روی اعداد مختلط

به حاصلضربی از عوامل تحویل‌ناپذیر تجزیه کنید.

۴ـ۲ـ۱۸ همهٔ جفتهای (m,n) از اعداد صحیح را بیابید که $1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$ بر $1+x+x^2+\cdots+x^m$ بخش‌پذیر باشد.

۴ـ۲ـ۱۹ الف) فرض کنید $F(x)$ یک چندجمله‌ای روی اعداد حقیقی باشد. ثابت کنید که a یک صفر با چندگانگی m است اگر و فقط اگر $F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(m)}(a)=0$ و $F^{(m+1)}(a)\neq 0$.

ب) مقدار $x=1$ در معادلهٔ $f(x)=x^n-nx+n-1=0$، $n>1$، صدق می‌کند. این ریشه چندگانه است؟

۴ـ۲ـ۲۰ نشان دهید که اگر $n>1$، آنگاه $(x+1)^n-x^n-1=0$ ریشه‌ای چندگانه دارد اگر و فقط اگر $n-1$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

۴ـ۲ـ۲۱ فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد و به ازای هر x، $P(x)\geqslant 0$. ثابت کنید که می‌توان $P(x)$ را به شکل $(Q_1(x))^2+(Q_2(x))^2+\cdots+(Q_n(x))^2$ نوشت که در آن $Q_1(x)$، $Q_2(x)$، ...، $Q_n(x)$ چندجمله‌ایهایی با ضرایب حقیقی‌اند.

۴ـ۲ـ۲۲ الف) قرار دهید $\omega=\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$. نشان دهید که

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})$$

ب) با قرار دادن $x=1$ و محاسبهٔ قدرمطلق دو طرف، نشان دهید که

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

مثالهای اضافی. ۱-۱۲-۲، ۱-۱۲-۵، ۶-۵-۱۳، ۶-۹-۳.

۴ـ۳ قضیهٔ اتحاد

فرض کنید P یک چندجمله‌ای ناصفر از درجهٔ n روی دامنهٔ صحیح D باشد. اگر a یک ریشهٔ معادلهٔ $P(x)=0$ باشد، بنابر قضیهٔ عاملها، یک چندجمله‌ای $Q(x)$ از درجهٔ $n-1$ وجود دارد که $P(x)=(x-a)Q(x)$. با استفاده از این حکم، می‌توان به کمک استقرایی ساده نشان داد که P حداکثر n صفر دارد.

نتیجه‌ای که در بالا گرفتیم فرعی بسیار مهم دارد. فرض کنید F و G دو چندجمله‌ای روی دامنهٔ D باشند که درجهٔ هر یک کوچکتر یا مساوی با n است و به ازای $n+1$ مقدار مختلف، F و G با هم مساوی‌اند. در این صورت $F-G$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ کوچکتر از $n+1$ و دارای $n+1$ صفر است. اگر $F-G$ چندجمله‌ای صفر نباشد، با توجه به استدلال بند قبل به تناقض می‌رسیم. در نتیجه $F-G$ چندجمله‌ای صفر است و لذا F و G (ضریب به ضریب) با هم مساویند. (برهان دیگری را در ۶-۵-۱۰ ببینید).

قضیهٔ اتحاد. فرض کنید دو چندجمله‌ای بر حسب x روی یک دامنهٔ صحیح نامتناهی، هر یک از درجه‌ای نابزرگتر از n باشند. اگر این دو چندجمله‌ای به ازای بیش از n مقدار x با هم مساوی باشند، آنگاه این دو چندجمله‌ای با هم متحدند.

۴ـ۳ـ۱ همهٔ چندجمله‌ایهای $P(x)$ را تعیین کنید به‌طوری که $P(x^2+1)=(P(x))^2+1$ و $P(0)=0$.

حل. کار را با آزمودن چند حالت خاص آغاز می‌کنیم:

$$P(۱) = P(۰^۲ + ۱) = (P(۰))^۲ + ۱ = ۱$$
$$P(۲) = P(۱^۲ + ۱) = (P(۱))^۲ + ۱ = ۱ + ۱ = ۲$$
$$P(۵) = P(۲^۲ + ۱) = (P(۲))^۲ + ۱ = ۴ + ۱ = ۵$$
$$P(۲۶) = P(۵^۲ + ۱) = (P(۵))^۲ + ۱ = ۵^۲ + ۱ = ۲۶$$

به طور کلی، تعریف می‌کنیم $x_۰ = ۰$ و به ازای $n > ۰$، $x_n = x_{n-۱}^۲ + ۱$. در این صورت می‌توان به کمک استقرایی ساده نشان داد که $P(x_n) = x_n$. در نتیجه چندجمله‌ای $P(x)$ و چندجمله‌ای x به ازای تعدادی نامتناهی از اعداد صحیح با هم مساوی‌اند، لذا بنا بر قضیهٔ اتحاد، $P(x) \equiv x$. به عبارت دیگر، تنها چندجمله‌ای با این ویژگی، $P(x) = x$ است.

۴ـ۳ـ۲ اگر m و n اعداد صحیح مثبت باشند و $۱ \leqslant k \leqslant n$، ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{k} \binom{m}{k-r}\binom{n}{r} = \binom{m+n}{k}$$

حل. این اتحاد را با استدلالی شمارشی در فصل ۱، ثابت کردیم (۱-۳-۴ را ببینید). در اینجا برهانی بر اساس قضیهٔ اتحاد ارائه می‌کنیم. تکنیک برهان استاندارد است: چندجمله‌ایهای $(۱+x)^m(۱+x)^n$ و $(۱+x)^{m+n}$ به ازای همهٔ مقادیر x با هم مساوی‌اند. در نتیجه بنابر قضیهٔ اتحاد، ضریبهای آنها نیز با هم مساویند، یعنی به ازای هر k، ضریب x^k در $(۱+x)^m(۱+x)^n$ با ضرایب x^k در $(۱+x)^{m+n}$ مساوی است. لذا نتیجه می‌شود که

$$\sum_{r=۰}^{k} \binom{m}{k-r}\binom{n}{r} = \binom{m+n}{k}$$

۴ـ۳ـ۳ نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح n، اتحاد $(x+y)^n = \sum\limits_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ به ازای x و yهای صحیح، اتحاد $(x+y)^n = \sum\limits_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ را به ازای x و yهای حقیقی نتیجه می‌دهد.

حل. فرض کنید که عدد دلخواه $y_۰$ صحیح، مثبت و ثابت باشد و فرض کنید

$$P(x) = (x + y_۰)^n \qquad Q(x) = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^k y_۰^{n-k}$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ایهایی بر حسب x هستند و به ازای هر مقدار صحیح و مثبت x، با هم مساوی‌اند.

حال فرض کنید $x_۰$ عددی حقیقی و ثابت باشد و $T(y) = \sum\limits_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x_۰^k y^{n-k}$ و $S(y) = (x_۰ + y)^n$، $S(y)$ و $T(y)$ چندجمله‌ایهایی بر حسب y هستند و از آنجا که به ازای هر عدد صحیح مثبت y با هم مساوی‌اند، نتیجه می‌شود که به ازای هر عدد حقیقی y، $S(y) \equiv T(y)$. این برهان را کامل می‌کند.

(در واقع می‌توان اتحاد $(x+y)^n = \sum\limits_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$، به ازای اعداد صحیح و مثبت x و y را به

زیبایی به روش زیر ثابت کرد. فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$، A مجموعه‌ای با x عضو و B مجموعه‌ای مجزا از A و با y عضو باشد. حال تعداد توابع موجود از S به $A \bigcup B$ را به دو روش مختلف می‌شماریم. به کمک این روش و راه حل قبلی، برهان دیگری از قضیهٔ دوجمله‌ای به دست می‌آید.)

۴ـ۳ـ۴ آیا $x^۵ - x^۲ + ۱$ روی مجموعهٔ اعداد گویا تحویل‌ناپذیر است؟

حل. بنابر قضیهٔ ریشهٔ گویا (۴-۲-۱۶ را ببینید)، تنها صفرهای گویای ممکن عبارت‌اند از ۱± و هیچ‌یک از این دو، صفر این چندجمله‌ای نیستند. در نتیجه اگر این چندجمله‌ای تحویل‌پذیر باشد، باید حاصلضربی از یک چندجمله‌ای درجه دوم و یک چندجمله‌ای درجهٔ سوم باشد. لذا فرض کنید

$$x^۵ - x^۲ + ۱ = (x^۲ + ax + b)(x^۳ + cx^۲ + dx + e)$$

بنابر لم‌گاوس (۴-۲-۱۶ را ببینید) می‌توانیم فرض کنیم که a، b، c، d و e عددهای صحیح‌اند. از آنجا که این چندجمله‌ایها به ازای تمام مقادیر x با هم مساوی‌اند، ضریبهای آنها نیز با هم مساوی‌اند، لذا با مساوی قرار دادن ضریبها، معادله‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$a + c = ۰$$

$$b + ac + d = ۰$$

$$bc + ad + e = -۱$$

$$bd + ae = ۰$$

$$be = ۱$$

اثبات اینکه این معادله‌ها نمی‌توانند به طور همزمان برقرار شوند، کار مشکلی نیست. برای مثال معادلهٔ آخر نشان می‌دهد که b و e هر دو فردند. درنتیجه از معادلهٔ چهارم نتیجه می‌شود که a و d زوجیتهای یکسان دارند. همین‌طور معادلهٔ اول نشان می‌دهد که a و c زوجیتهای یکسان دارند. لذا زوجیتهای a، c و d یکسان‌اند. ولی در این صورت $ac + d$ زوج است و در نتیجه معادلهٔ دوم نمی‌تواند برقرار شود (زیرا b فرد است). بنابراین $x^۵ - x^۲ + ۱$ روی مجموعهٔ عددهای صحیح یا گویا تحویل‌پذیر نیست.

راه دیگری برای حل این مسأله بر اساس استدلال زیر است. اگر f، g و h چند جمله‌ایهایی روی عددهای صحیح باشند و $f = gh$، آنگاه $\bar{f} \overset{n}{\equiv} \bar{g}\bar{h}$ که در آن $\bar{f}$، $\bar{g}$ و $\bar{h}$ به ترتیب چندجمله‌ایهایی هستند که از ساده کردن ضریبهای f، g و h به پیمانهٔ n به دست آمده‌اند. اگر f روی عددهای صحیح تحویل‌پذیر باشد،آنگاه $\bar{f}$ روی عددهای صحیح به پیمانهٔ n تحویل‌پذیر است. در موقعیت مسألهٔ فعلی، چندجمله‌ای $x^۵ - x^۲ + ۱$ به چندجمله‌ای (به پیمانهٔ ۲) $x^۵ + x^۲ + ۱$ تبدیل می‌شود. تنها چندجمله‌ای درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر روی $Z_۲ = \{۰, ۱\}$، چندجمله‌ای $x^۲ + x + ۱$ است (چندجمله‌ایهای دیگر و تجزیهٔ آنها به پیمانهٔ ۲، عبارت‌اند از $x^۲ = x \cdot x$، $x^۲ + ۱ = (x + ۱)^۲$ و $x^۲ + x = x(x + ۱)$). ولی $x^۲ + x + ۱$ چندجمله‌ای $x^۵ + x^۲ + ۱$ را در $Z_۲$ نمی‌شمارد (زیرا (به پیمانهٔ ۲) $x^۵ + x^۲ + ۱ = (x^۳ + x^۲)(x^۲ + x + ۱) + (x + ۱)$) و در نتیجه $x^۵ + x^۲ + ۱$ روی $Z_۲$ تحویل‌ناپذیر است. از اینجا نتیجه می‌شود که $x^۵ - x^۲ + ۱$ روی عددهای صحیح و عددهای گویا تحویل‌ناپذیر است.

در بحث قبل از این واقعیت استفاده کردیم که می‌توان به روش معمول، چندجمله‌ایهای روی Z_n را جمع،

تفریق و ضرب کرد، با این تفاوت که اعمال حسابی انجام شده (روی ضریبها) در Z_n (یعنی به پیمانهٔ n) هستند. اگر n عددی اول باشد، مثلاً $n = p$، آنگاه Z_p میدان است و لذا همهٔ نتیجه‌های مربوط به چندجمله‌ایها روی یک میدان (مانند قضیهٔ عاملها و قضیهٔ اتحاد)، در اینجا نیز برقرارند. اگر n اول نباشد، این مطلب درست نیست. برای مثال، چندجمله‌ای $۲x^۳ - ۲x$ به عنوان یک چندجمله‌ای روی $Z_۴$، چهار صفر متمایز یعنی ۰، ۱، ۲، ۳، دارد، حال آنکه اگر محاسبات در یک میدان انجام می‌شد، می‌بایست حداکثر سه صفر داشته باشد.

فرض کنید p عددی اول باشد و قضیهٔ دو جمله‌ای به پیمانهٔ p را در نظر بگیرید

$$(۱ + x)^p \equiv \sum_{k=۰}^{n} \binom{p}{k} x^k \ (\text{به پیمانهٔ } p)$$

که در آن هر دو طرف به عنوان چند جمله‌ایهایی روی Z_p در نظر گرفته شده‌اند. به ازای $۱ \leqslant k \leqslant p - ۱$ داریم $\binom{p}{k} \overset{p}{\equiv} ۰$، زیرا هیچ‌یک از عاملهای موجود در $k!(p-k)!$، عامل p در $p!$ را نمی‌شمارند. لذا به عنوان چندجمله‌ایهایی روی Z_p داریم

$$(۱ + x)^p \equiv ۱ + x^p \ (\text{به پیمانهٔ } p)$$

به‌طور کلی، به ازای هر عدد صحیح و مثبت n،

$$(۱ + x)^{p^n} \equiv ۱ + x^{p^n} \ (\text{به پیمانهٔ } p)$$

استدلال ما بر اساس استقراست. حکم به ازای $n = ۱$ درست است و فرض می‌کنیم که به ازای k نیز درست باشد. داریم

$$\begin{aligned}(۱ + x)^{p^{k+۱}} &\equiv \underbrace{(۱ + x)^{p^k}(۱ + x)^{p^k}\dots(۱ + x)^{p^k}}_{p \text{ بار}} \ (\text{به پیمانهٔ } p)\\ &\equiv (۱ + x^{p^k})(۱ + x^{p^k})\dots(۱ + x^{p^k}) (\text{به پیمانهٔ } p)\\ &\equiv (۱ + x^{p^k})^p (\text{به پیمانهٔ } p)\\ &\equiv ۱ + (x^{p^k})^p (\text{به پیمانهٔ } p)\\ &\equiv (۱ + x^{p^{k+۱}}) (\text{به پیمانهٔ } p)\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن ضریبهای x^i در دو طرف، در می‌یابیم که

$$\binom{p^n}{i} \equiv ۰ \, (\text{به پیمانهٔ } p) \quad , \quad ۱ \leqslant i < p^n$$

۴-۳-۵ ثابت کنید که در هر بسط دو جمله‌ای متناهی، تعداد ضریبهای فرد توانی از ۲ است.

حل. با آزمایش چند حالت خاص (۱-۱-۹ را ببینید)، حدس می‌زنیم که تعداد ضریبهای فرد در $(۱ + x)^n$ برابر با ۲^k است که در آن k تعداد رقمهای ناصفری است که در نمایش عدد n در مبنای دو وجود دارد.

با بررسی یک مثال روشن می‌شود که برهان در حالت کلی چگونه صورت می‌گیرد. حالت $n = ۱۳$ را

در نظر بگیرید. در مبنای دو، $۱ + ۴ + ۸ = ۱۱۰۱_۲ = ۱۳$. بنابراین با استفاده از نتیجهٔ ثابت شدهٔ قبلی داریم

$$(۱+x)^{۱۳} = (۱+x)^{۸+۴+۱} = (۱+x)^۸(۱+x)^۴(۱+x)$$
$$= (۱+x^۸)(۱+x^۴)(۱+x) \quad (\text{به پیمانهٔ } ۲)$$

از اینجا دیده می‌شود که در $(۱+x)^{۱۳}$، هشت ضریب فرد دوجمله‌ای وجود دارد زیرا وقتی که طرف راست تساوی بالا را بسط بدهیم، $(۱+x)(۱+x^۴)$ دارای چهارجمله و $(۱+x^۸)(۱+x^۴+x+x^۵)$ دارای هشت جمله است. (در حالت کلی، اگر $x^n + ۱$ را در یک چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ کوچکتر از n ضرب کنیم، تعداد ضریبهای ناصفر حاصلضرب، دو برابر تعداد متناظر آن در $P(x)$ است.)

معادلهٔ چندجمله‌ای $x^۲ + ax + b = ۰$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که ریشه‌هایش $r_۱$ و $r_۲$ باشند. در این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$x^۲ + ax + b = (x - r_۱)(x - r_۲) = x^۲ - (r_۱ + r_۲)x + r_۱ r_۲$$

از اینجا با استفاده از قضیهٔ اتحاد نتیجه می‌شود که

$$r_۱ + r_۲ = -a$$
$$r_۱ r_۲ = b$$

به طور مشابه اگر معادلهٔ $x^۳ + ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای ریشه‌های $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ باشد، داریم

$$x^۳ + ax^۲ + bx + c = (x - r_۱)(x - r_۲)(x - r_۳)$$
$$= x^۳ - (r_۱ + r_۲ + r_۳)x^۲ + (r_۱r_۲ + r_۱r_۳ + r_۲r_۳)x - r_۱r_۲r_۳$$

در این حالت

$$r_۱ + r_۲ + r_۳ = -a$$
$$r_۱r_۲ + r_۱r_۳ + r_۲r_۳ = b$$
$$r_۱r_۲r_۳ = -c$$

در هر حالت ضریبهای معادلهٔ چندجمله‌ای را بر حسب ریشه‌های آن (تا اندازه‌ای به صورت الگو) بیان کردیم. استدلالی بر اساس استقرا نشان می‌دهد که این حکم در حالت کلی درست است، به ویژه اگر معادلهٔ $x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰ = ۰$ دارای ریشه‌های $r_۱$، $r_۲$، ...، r_n باشد، آنگاه

$$S_۱ = r_۱ + r_۲ + \cdots + r_n = -a_{n-۱}$$
$$S_۲ = r_۱r_۲ + \cdots + r_۱r_n + r_۲r_۳ + \cdots + r_۲r_n + \cdots + r_{n-۱}r_n = a_{n-۲}$$
$$S_۳ = r_۱r_۲r_۳ + r_۱r_۲r_۴ + \cdots + r_۲r_۳r_۴ + \cdots + r_{n-۲}r_{n-۱}r_n = -a_{n-۳}$$
$$\vdots$$
$$S_n = r_۱r_۲\ldots r_n = (-۱)^n a_۰$$

که در آن S_i، مجموع همهٔ حاصلضربهای i تایی ریشه‌هاست.

۴-۳-۶ همهٔ خطهایی را در نظر بگیرید که با نمودار

$$y = ۲x^۴ + ۷x^۳ + ۳x - ۵$$

در چهار نقطهٔ متمایز (x_i, y_i)، $i = ۱, ۲, ۳, ۴$ برخورد می‌کنند. نشان دهید که $\frac{x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴}{۴}$ مستقل از خط مفروض است و مقدار آن را بیابید.

حل. فرض کنید $y = mx + b$ منحنی را در چهار نقطهٔ متمایز (x_i, y_i)، $i = ۱, ۲, ۳, ۴$، قطع کند. در این صورت $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ ریشه‌های معادلهٔ

$$mx + b = ۲x^۴ + ۷x^۳ + ۳x - ۵$$

یا به طور معادل، ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۴ + \frac{۷}{۲}x^۳ + (\frac{۳ - m}{۲})x + (\frac{-۵ - b}{۲}) = ۰$$

هستند. که از تذکرات قبلی نتیجه می‌شود که $(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴)/۴ = (\frac{-۷}{۲})/۴ = \frac{-۷}{۸}$، و این مستقل از m و b است.

۴ـ۳ـ۷ فرض کنید P نقطه‌ای روی نمودار $f(x) = ax^۳ + bx$ باشد و فرض کنید که مماس در P، بار دیگر منحنی $y = f(x)$ را در نقطهٔ Q قطع کند. فرض کنید $x_۰$ طول نقطهٔ P باشد. ثابت کنید که طول نقطهٔ Q، $-۲x_۰$ است.

حل. راه حل سرراست مسأله آن است که معادلهٔ مماس بر منحنی $y = f(x)$ را در نقطهٔ P بنویسیم، مثلاً $y = T(x)$، و سپس برای یافتن Q، دستگاه معادله‌های دو مجهولی $y = T(x)$ و $y = f(x)$ را حل کنیم.

راه دیگر آن است که به شکل زیر استدلال کنیم. می‌دانیم که حل دستگاه $y = T(x)$ و $y = f(x)$، در واقع همان یافتن ریشه‌های $f(x) - T(x) = ۰$ است. حال $x_۰$ ریشهٔ مضاعف این معادله (یعنی ریشه با چندگانگی ۲) است زیرا $T(x)$ در $x_۰$ بر $y = f(x)$ مماس است. آنچه که به دنبالش هستیم، سومین ریشه است که آن را به $x_۱$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که مجموع ریشه‌ها یعنی $x_۱ + ۲x_۰$ مساوی با ضریب جملهٔ $x^۲$ است. ولی ضریب جملهٔ $x^۲$ برابر با ۰ است، لذا نتیجه می‌شود که $x_۱ = -۲x_۰$.

۴ـ۳ـ۸ فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a + d)x + (ad - bc) = ۰$ باشند. نشان دهید که $x_۱^۳$ و $x_۲^۳$ ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند

$$y^۲ - (a^۳ + d^۳ + ۳abc + ۳bcd)y + (ad - bc)^۳ = ۰$$

حل. می‌دانیم که

$$x_۱ + x_۲ = a + d$$
$$x_۱ x_۲ = ad - bc$$

از آنجا که $(x_۱ + x_۲)^۳ = x_۱^۳ + ۳x_۱^۲x_۲ + ۳x_۱x_۲^۲ + x_۲^۳$، داریم

$$\begin{aligned} x_۱^۳ + x_۲^۳ &= (x_۱ + x_۲)^۳ - ۳x_۱^۲x_۲ - ۳x_۱x_۲^۲ = (a + d)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱ + x_۲) \\ &= (a + d)^۳ - ۳(ad - bc)(a + d) = (a + d)[a^۲ + ۲ad + d^۲ - ۳ad + ۳bc] \\ &= (a + d)(a^۲ - ad + d^۲ + ۳bc) = a^۳ + d^۳ + ۳abc + ۳bcd \end{aligned}$$

به‌علاوه $x_۱^۳x_۲^۳ = (ad - bc)^۳$ و برهان کامل است.

۴ـ۳ـ۹ فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی باشند به طوری که $a+b+c=0$. ثابت کنید

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)$$

حل. در اینجا برهانی بسیار زیرکانه بر اساس ایده‌های این بخش ارائه می‌کنیم. فرض کنید $A=ab+ac+bc$ و $B=abc$. در این صورت a، b و c ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند

$$x^3+Ax-B=0$$

به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، قرار می‌دهیم $T_n=a^n+b^n+c^n$. در این صورت

$$\begin{aligned}T_0 &=3\\ T_1 &=0\\ T_2 &=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=-2A\end{aligned}$$

به ازای $n\geqslant 0$، $T_{n+3}=-AT_{n+1}+BT_n$ (a، b و c را در معادلهٔ $x^{n+3}=-Ax^{n+1}+Bx^n$ قرار دهید و جمع کنید) و این نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}T_3 &=-AT_1+BT_0=3B\\ T_4 &=-AT_2+BT_1=2A^2\\ T_5 &=-AT_3+BT_2=-5AB\end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود

$$\frac{T_5}{5}=-AB=\frac{T_3}{3}\times\frac{T_2}{2}$$

۴ـ۳ـ۱۰ نشان دهید که ریشه‌های معادلهٔ چندجمله‌ای با ضریبهای حقیقی

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_3x^3+x^2+x+1=0$$

همگی حقیقی نیستند.

حل. فرض کنید r_1، r_2، $\ldots$ ، r_n ریشه‌های $P(x)=0$ باشند. هیچ‌یک از ریشه‌های r_1، $\ldots$ ، r_n صفر نیست. با تقسیم دو طرف $P(x)=0$ بر x^n و قرار دادن $y=1/x$، به دست می‌آوریم

$$Q(y)\equiv y^n+y^{n-1}+y^{n-2}+a_3y^{n-3}+\cdots+a_{n-1}y+a_n=0$$

توجه کنید که r یک ریشهٔ $P(x)=0$ است اگر و فقط اگر $1/r$ یک ریشهٔ $Q(y)=0$ باشد. لذا ریشه‌های $Q(y)=0$ عبارت‌اند از s_1، s_2، $\ldots$ ، s_n که در آن به ازای $i=1,\ldots,n$، $s_i=1/r_i$. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=-1$$

$$\sum_{i<j}s_is_j=1$$

و بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} s_i s_j = 1 - 2 = -1$$

این تساوی نشان می‌دهد که همهٔ s_iها حقیقی نیستند و به طور معادل، همهٔ r_iها حقیقی نیستند.

مسائل

۴ـ۳ـ۱۱ فرض کنید k عددی صحیح و مثبت باشد. همهٔ چندجمله‌ایهای

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

را بیابید که در آن a_iها حقیقی‌اند و در تساوی $P(P(x)) = [P(x)]^k$ صدق می‌کنند.

۴ـ۳ـ۱۲ الف) ثابت کنید که نمی‌توان $\log x$ را به شکل $f(x)/g(x)$ بیان کرد که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ایهایی با ضریبهای حقیقی باشند.

ب) ثابت کنید که نمی‌توان e^x را به شکل $f(x)/g(x)$ بیان کرد که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ایهایی با ضریبهای حقیقی باشند.

۴ـ۳ـ۱۳ نشان دهید که

$$\begin{aligned}(1+x)^n - x(1+x)^n + x^2(1+x)^n - + \cdots + (-1)^k x^k (1+x)^n \\ = (1+x)^{n-1}\left(1 - (-x)^{k+1}\right)\end{aligned}$$

و با استفاده از این اتحاد ثابت کنید که

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} + \ldots \pm \binom{n}{0}$$

۴ـ۳ـ۱۴ الف) از دو طرف اتحاد $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ مشتق بگیرید. با مقایسهٔ ضریبهای x^{k-1} در دو طرف اتحاد حاصل، نشان دهید

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف)، نشان دهید

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{n}$$

۴ـ۳ـ۱۵ به ازای عدد صحیح و مثبت n، فرض کنید $x^{(n)} = x(x-1)\ldots(x-n+1)$ و $x^{(0)} = 1$. ثابت کنید که به ازای همهٔ عددهای حقیقی x و y

$$(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)}$$

(راهنمایی: می‌توان این کار را به کمک استقرا انجام داد، ولی برهانی مانند ۴-۳-۳ را در نظر بگیرید که ابتدا حکم

را به ازای همهٔ عددهای صحیح و مثبت x و y ثابت می‌کند. برای این کار، به دو راه مختلف، تعداد تابعهای یک به یک موجود از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ در $A \bigcup B$ را بشمارید که در آن A مجموعه‌ای با x عضو و B مجموعه‌ای مجزا از A و با y عضو است. با استفاده از قضیهٔ اتحاد، حکم را برای همهٔ اعداد حقیقی ثابت کنید.)

۴ـ۳ـ۱۶ آیا چندجمله‌ای $x^۴ + ۳x^۳ + ۳x^۲ - ۵$ روی مجموعهٔ عددهای صحیح تحویل‌پذیر است؟

۴ـ۳ـ۱۷ فرض کنید p عددی اول باشد. نشان دهید که

الف) $\binom{p-۱}{k} \overset{p}{\equiv} (-۱)^k$، $۰ \leqslant k \leqslant p-۱$،

ب) $\binom{p+۱}{k} \overset{p}{\equiv} ۰$، $۲ \leqslant k \leqslant p-۱$،

ج) $\binom{pa}{pb} \overset{p}{\equiv} \binom{a}{b}$، $a \geqslant b \geqslant ۰$،

د) $\binom{۲p}{p} \overset{p}{\equiv} ۲$.

۴ـ۳ـ۱۸ فرض کنید $\omega = \cos(۲\pi/n) + i\sin(۲\pi/n)$.

الف) نشان دهید که ۱، ω، $\omega^۲$، ...، $\omega^{n-۱}$، n ریشهٔ معادلهٔ $x^n - ۱ = ۰$ هستند.

ب) نشان دهید که $n = (۱-\omega)(۱-\omega^۲)\ldots(۱-\omega^{n-۱})$.

ج) نشان دهید که $\omega + \cdots + \omega^{n-۱} = -۱$.

۴ـ۳ـ۱۹ الف) دو ریشه از معادلهٔ $x^۳ - ۳x^۲ + ۴ = ۰$ متساوی‌اند. معادله را حل کنید.

ب) ریشه‌های معادلهٔ $x^۳ - ۹x^۲ + ۲۳x - ۱۵ = ۰$ یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. معادله را حل کنید.

۴ـ۳ـ۲۰ فرض کنید که r، s و t ریشه‌های معادلهٔ $x^۳ + ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند.

الف) با فرض $c \neq ۰$، مقدار $۱/r^۲ + ۱/s^۲ + ۱/t^۲$ را به دست آورید.

ب) یک معادلهٔ چندجمله‌ای بیابید به طوری که ریشه‌هایش $r^۲$، $s^۲$ و $t^۲$ باشند.

۴ـ۳ـ۲۱ هرگاه عددهای x، y، z طوری‌داده شده باشند که

$$x + y + z = ۳$$
$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۵$$
$$x^۳ + y^۳ + z^۳ = ۷$$

مقدار $x^۴ + y^۴ + z^۴$ را بیابید. (راهنمایی: از استدلالی مشابه با آنچه که در ۴-۳-۹ به کار رفت، استفاده کنید.)

این بخش را با سه مسأله به پایان می‌بریم، مسائلی که توجه ما را به برخی نتایج اضافی دربارهٔ چندجمله‌ایها جلب می‌کنند و این نتایج، در حل بعضی مسائل بسیار مفیدند.

۴ـ۳ـ۲۲ (قضیه). اگر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n عددهای متمایز و $y_۱$، ...، y_n عددهایی دلخواه باشند که همه صفر نیستند، آنگاه چندجمله‌ای منحصر به فرد $f(x)$ از درجهٔ نابیشتر از $n-۱$، با این ویژگی موجود است که $f(x_۱) = y_۱$، $f(x_۲) = y_۲$، ...، $f(x_n) = y_n$.

نکات عمدهٔ برهان :

الف) فرض کنید $g(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. نشان دهید که

$$\frac{g(x)}{(x-x_1)g'(x_1)} \left(= \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \right)$$

یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ با صفرهای x_2، ... ، x_n است و به ازای $x=x_1$، مساوی با ۱ است.

ب) دستور درونیابی لاگرانژ. نشان دهید که

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-x_1)g'(x_1)}y_1 + \frac{g(x)}{(x-x_2)g'(x_2)}y_2 + \dots + \frac{g(x)}{(x-x_n)g'(x_n)}y_n$$

در نقاط x_1، ... ، x_n، به ترتیب مقدارهای y_1، ... ، y_n را می‌گیرد.

ج) کاربرد. فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد که باقیماندهٔ تقسیم آن بر $x-1$، $x-2$ و $x-3$ به ترتیب مساوی ۳، ۵ و ۲ باشد. باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x-2)(x-3)$ را بیابید.(راهنمایی: بنویسید $P(x) = Q(x)(x-1)(x-2)(x-3) + R(x)$ که در آن $R(x)$ از درجهٔ کوچکتر از ۳ است. با توجه به اینکه $R(1) = 3$، $R(2) = 5$، $R(3) = 2$، به کمک دستور درونیابی لاگرانژ، $R(x)$ را بیابید.)

۴ـ۳ـ۲۳ (کسرهای جزئی). الف) نشان دهید که اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از n باشد، آنگاه می‌توان کسر $\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}$ را که در آن x_1، x_2، ... ، x_n عددهایی متمایزند، به شکل مجموع n کسر جزئی

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

نمایش داد که در آن A_1، ... ، A_n عددهای ثابت (مستقل از x) هستند. (راهنمایی: از دستور درونیابی لاگرانژ استفاده کنید: دو طرف را بر $g(x)$ تقسیم کنید والی آخر.)

ب) کاربرد. فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای تکین از درجهٔ n با صفرهای متمایز x_1، x_2، ... ، x_n باشد. فرض کنید $g(x)$ چندجمله‌ای تکین دلخواهی از درجهٔ $n-1$ باشد. نشان دهید که

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{g(x_j)}{f'(x_j)} = 1$$

(راهنمایی: $g(x)/f(x)$ را به شکل مجموعی از کسرهای جزئی بنویسید.)

۴ـ۳ـ۲۴ یک دنبالهٔ $u_0, u_1, u_2, \dots$ از اعداد، یک دنباله از مرتبهٔ k ام نامیده می‌شود هرگاه یک چندجمله‌ای از درجهٔ k مانند

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

وجود داشته باشد به طوری که به ازای $i = 0, 1, 2, \dots$، $u_i = P(i)$.

دنبالهٔ تفاضلی اول دنبالهٔ $u_0, u_1, u_2, \dots$، عبارت است از دنبالهٔ $u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots$ که به صورت

$$u_n^{(1)} = u_{n+1} - u_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

تعریف می‌شود.

الف) ثابت کنید که اگر $u_{\circ}, u_{۱}, u_{۲}, \ldots$ دنباله‌ای از مرتبهٔ k باشد، آنگاه دنبالهٔ تفاضلی اول آن، دنباله‌ای از مرتبهٔ $k-۱$ است. دنبالهٔ تفاضلی دوم $u_{\circ}, u_{۱}, u_{۲}, \ldots$ را به صورت دنبالهٔ تفاضلی اولِ دنبالهٔ تفاضلی اول تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر دنبالهٔ $u_{\circ}^{(۲)}, u_{۱}^{(۲)}, u_{۲}^{(۲)}, \ldots$ را به صورت

$$\begin{aligned} u_n^{(۲)} &= u_{n+۱}^{(۱)} - u_n^{(۱)} \\ &= u_{n+۲} - ۲u_{n+۱} + u_n \quad , \quad n = \circ, ۱, ۲, \ldots \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که $u_{\circ}^{(۲)}, u_{۱}^{(۲)}, u_{۲}^{(۲)}, \ldots$ دنباله‌ای از مرتبهٔ $k-۲$ است. به طور مشابه، دنبالهٔ تفاضل سوم، دنبالهٔ تفاضل چهارم و غیره را تعریف می‌کنیم. به‌کارگیری مکرر قسمت (الف) نشان می‌دهد که اگر $u_{\circ}, u_{۱}, u_{۲}, \ldots$ دنباله‌ای از مرتبهٔ k باشد، دنبالهٔ تفاضلی $(k+۱)$ام آن دنبالهٔ صفر است. قصد ما آن است که عکس این حکم را ثابت کنیم: اگر دنباله‌های تفاضلی متوالی دنبالهٔ دلخواه $u_{\circ}, u_{۱}, u_{۲}, \ldots$ نهایتاً متحد با صفر شود، آنگاه جمله‌های دنبالهٔ اصلی، مقدارهای متوالی یک عبارت چندجمله‌ای است. به عبارت دیگر چندجمله‌ای $P(x)$ وجود دارد به طوری که به ازای $n = \circ, ۱, ۲, \ldots$، $u_n = P(n)$.

ب) به کمک استقرا ثابت کنید

$$u_n = \binom{n}{\circ} u_{\circ} + \binom{n}{۱} u_{\circ}^{(۱)} + \binom{n}{۲} u_{\circ}^{(۲)} + \cdots + \binom{n}{n} u_{\circ}^{(n)}$$

ج) فرض کنید که دنبالهٔ اصلی به وسیلهٔ تابع $F(x)$ مشخص شود. به عبارت دیگر فرض کنید که به ازای $n = \circ, ۱, ۲, \ldots$، $F(n) = u_n$. به ازای $k = \circ, ۱, ۲, ۳, \ldots$، قرار دهید $\Delta^k F(\circ) = u_{\circ}^{(k)}$ و به ازای عدد حقیقی x و عدد صحیح و مثبت i، $x^{(i)} = x(x-۱)(x-۲)\ldots(x-i+۱)$. نشان دهید که می‌توان حکم قسمت (ب) را به شکل

$$F(n) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{\Delta^k F(\circ)}{k!} n^{(k)}$$

نوشت. به شباهت این دستور با بسط تیلور تابع $F(x)$

$$F(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{F^{(k)}(\circ)}{k!} x^{(k)}$$

توجه کنید.

د) ثابت کنید که اگر دنبالهٔ تفاضلی $(k+۱)$ام متحد با صفر باشد، آنگاه دنبالهٔ اصلی به وسیله دستور

$$P(n) = \sum_{i=\circ}^{k} \frac{\Delta^i F(\circ)}{i!} n^{(i)}$$

به‌دست می‌آید.

ه) به کمک حکم قسمت (د)، شکل فشرده‌ای برای مجموع سری $۱^۴ + ۲^۴ + \cdots + n^۴$ بیابید (راهنمایی: توجه کنید که دنبالهٔ تفاضلی اول به وسیلهٔ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ به دست می‌آید و بنابراین، مجموع آنها یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۵ است.)

مثالهای اضافی. ۴-۴-۳۰، ۴-۴-۳۱، ۷-۲-۱۰، ۸-۲-۲، ۸-۲-۳، ۸-۲-۱۰، ۸-۴-۱۱.

۴ـ۴ جبر مجرد

گروه عبارت است از یک مجموعهٔ G با یک عمل دوتایی $*$ روی G به طوری که:

الف) خاصیت شرکت‌پذیری. به ازای همهٔ عضوهای a، b، c در G،

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

ب) همانی. عضو منحصر به فرد e در G موجود است (که همانی G نامیده می‌شود) به طوری که به ازای هر عضو a در G،

$$a*e = e*a = a$$

ج) وارون. به ازای هر عضو a در G، عضو منحصر به فرد $a^{-۱}$ در G موجود است (که وارون a نامیده می‌شود) به طوری که

$$a^{-۱}*a = e = a*a^{-۱}$$

گاهی هنگام کار با گروهها، عمل $*$ را به عنوان «ضرب» در نظر می‌گیریم. در این حالت غالباً در نوشتن حاصلضربها، از $*$ صرف‌نظر می‌کنیم. در نتیجه به جای $a*b$ می‌نویسیم ab و به جای $a*(b*c)$ می‌نویسیم $a(bc)$ یا abc و به همین قیاس برای موارد دیگر. همچنین وقتی که $*$ را به شکل ضرب تصور می‌کنیم، برخی اوقات عضو همانی را با «۱» نمایش می‌دهیم. علاوه بر این از نماد توان برای ساده کردن عبارتها استفاده می‌کنیم، مثلاً $aaaa = a^۴$ و غیره. می‌توان به سادگی نشان داد که قانونهای معمول در توانها، در یک گروه برقرارند، یعنی

$$a^n a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a^n)^m = a^{nm}$$

که در آن m و n عددهای صحیح‌اند.

لازم نیست عمل گروه جابه‌جایی باشد، یعنی ممکن است تساوی $ab = ba$ به ازای هر $a, b \in G$ برقرار نباشد. مثال چنین گروهی، مجموعهٔ ماتریسهای نامنفرد n در n روی مجموعهٔ عددهای حقیقی است. در هر گروه G داریم

$$(ab)^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱} \quad , \quad a, b \in G$$

این اتحادی اساسی است و می‌توان آن را به روش زیر ثابت کرد. ملاحظه کنید که

$$(ab)(b^{-۱}a^{-۱}) = a\left(b(b^{-۱}a^{-۱})\right) = a\left((bb^{-۱})a^{-۱}\right) = a(ea^{-۱}) = aa^{-۱} = e$$

و

$$(b^{-۱}a^{-۱})(ab) = b^{-۱}\left(a^{-۱}(ab)\right) = b^{-۱}((a^{-۱}a)b) = b^{-۱}(eb) = b^{-۱}b = e$$

در نتیجه $b^{-۱}a^{-۱}$ وارونی برای ab است. ولی وارون ab منحصر به فرد است و به $(ab)^{-۱}$ نشان داده می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که $(ab)^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱}$.

اگر گروه G جابجایی باشد (یعنی اگر به ازای هر $a, b \in G$، $ab = ba$)، می‌توان به سادگی نشان داد که $(ab)^n = a^n b^n$ که در آن $a, b \in G$ و n عددی است صحیح.

۱ـ۴ـ۴ فرض کنید که G یک مجموعه و $*$ یک عمل دوتایی روی G باشد به‌طوری که

الف) خاصیت شرکت‌پذیری. به ازای هر $a, b, c \in G$، $a*(b*c) = (a*b)*c$؛

ب) همانی راست. عضو e در G وجود دارد که به ازای هر عضو a در G، $a*e = a$؛ و

ج) وارون راست. به ازای هر عضو a در G عضو $a^{-۱}$ در G وجود دارد به‌طوری که $a*a^{-۱} = e$.

ثابت کنید که G یک گروه است.

حل. نشان می‌دهیم که همانی راست e، یک همانی چپ و وارون راست a^{-1} نیز یک وارون چپ برای a است. سپس نشان خواهیم داد که e و a^{-1} منحصر به فردند.

ملاحظه کنید که a^{-1} عضوی از G است و در نتیجه بنابر (ب)، عضوی چون $(a^{-1})^{-1}$ در G موجود است که $e = (a^{-1}) * (a^{-1})^{-1}$. اکنون با محاسبه داریم

$$\begin{aligned} a^{-1}a =&(a^{-1}a)e = (a^{-1}a)\left(a^{-1}(a^{-1})^{-1}\right)\\ =&a^{-1}\left[a\left(a^{-1}(a^{-1})^{-1}\right)\right]\\ =&a^{-1}\left[(aa^{-1})(a^{-1})^{-1}\right]\\ =&a^{-1}\left[e(a^{-1})^{-1}\right] = (a^{-1}e)(a^{-1})^{-1}\\ =&a^{-1}(a^{-1})^{-1}\\ =&e \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که a^{-1} یک وارون (وارون چپ و وارون راست) است.

همچنین، $ea = (aa^{-1})a = a(a^{-1}a) = ae = a$ و بنابراین e یک عضو همانی برای G است (یعنی برای هر a، $ea = ae = a$).

فرض کنید e' نیز عضوی همانی برای G باشد. در این صورت $e = e * e'$ (زیرا e' یک همانی G است) و $e' = e * e'$ (زیرا e یک همانی G است). این نشان می‌دهد که عضو همانی G منحصر به فرد است.

فرض کنید $(a^{-1})'$ نیز وارونی برای a باشد. در این صورت

$$(a^{-1})' = (a^{-1})'e = (a^{-1})'(aa^{-1}) = \left[(a^{-1})'a\right]a^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}$$

این نشان می‌دهد که وارون a منحصر به فرد است. از اینجا نتیجه می‌شود که G یک گروه است.

۴ـ۴ـ۲ فرض کنید که G یک گروه باشد.

الف) ویژگی حذف. نشان دهید که به ازای هر a، b و c در G،

$ab = ac$ ایجاب می‌کند $b = c$

$ba = ca$ ایجاب می‌کند $b = c$

ب) فرض کنید a عضو G باشد و دنبالهٔ $1, a, a^2, a^3, \ldots$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که یا همهٔ اعضای دنباله متفاوت‌اند و یا کوچکترین عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری که $a^n = 1$ و 1، a، ...، a^{n-1} متمایزند. در حالت دوم، n را مرتبهٔ a می‌نامیم و به $\mathrm{ord}(a)$ نشان می‌دهیم و در حالت اول گوییم a مرتبهٔ نامتناهی دارد.

حل. الف) با ضرب دو طرف از چپ (و از راست) در a^{-1}، بلافاصله ثابت می‌شود.

ب) فرض کنید که همهٔ عضوهای دنباله متفاوت نباشند و فرض کنید n، کوچکترین عدد صحیحی باشد به طوری که a^n تکرار یکی از عضوهای قبلی دنباله است. در این صورت $a^n = 1$، زیرا اگر $a^n = a^i$، $0 < i < n$، آنگاه بنابر ویژگی حذف، $a^{n-1} = a^{i-1}$ و این با انتخاب n در تناقض است.

۴ـ۴ـ۳ فرض کنید a و b دو عضو یک گروه باشند به طوری که $aba = ba^2b$، $a^3 = e$ و به ازای عدد صحیح

و مثبتی مانند n، $b^{2n-1}=e$. ثابت کنید $b=e$.

حل. توجه کنید که اگر $ab=ba$، آنگاه $aba=ba^2b$ همان $a^2b=a^2b^2$ است و ویژگی حذف ایجاب می‌کند که $b=e$. اگر چه ممکن است گروه مورد نظر جابه‌جایی نباشد، ولی ثابت می‌کنیم که این مجموعهٔ به‌خصوص از تساویهای بر حسب a و b، ایجاب می‌کنند که $ab=ba$.

توجه کنید که $ab=ba$ همان $ab^{2n}=b^{2n}a$ است، زیرا بنابر فرض $b=b^{2n}$. برای نشان دادن $ab^{2n}=b^{2n}a$، کافی است نشان دهیم که $ab^2=b^2a$ زیرا با به‌کارگیری مکرر $ab^2=b^2a$، حاصل می‌شود

$$ab^{2n}=a(b^2)^n=(b^2)^na=b^{2n}a$$

بنابراین با توجه به محاسبهٔ زیر، برهان کامل می‌شود

$$\begin{aligned}ab^2 &=(aba)(a^{-1}b)=(ba^2b)(a^{-1}b)=(ba^2)(ba^{-1}b)=(ba^2)(ba^2b)=(ba^2)(aba)=ba^3ba\\ &=b^2a\end{aligned}$$

(زیرا $a^3=e$).

فرض کنید G یک گروه باشد. گوییم H زیرگروهی از G است هرگاه H زیر مجموعه‌ای از G باشد که (تحت عمل G)، خود یک گروه باشد. مرتبهٔ H عبارت است از تعداد عضوهای H و آن را به $\operatorname{ord}(H)$ نشان می‌دهیم.

ردهٔ مهمی از زیرگروهها به شرح زیرند. فرض کنید $a\in G$ و

$$<a>=\{a^n: \text{عددی صحیح است } n\}$$

می‌توان به سادگی بررسی کرد که $<a>$ زیرگروهی از G است. این زیرگروه، زیرگروه دوری تولید شده به وسیله a نامیده می‌شود. توجه کنید که $\operatorname{ord}(a)=\operatorname{ord}(<a>)$.

قضیهٔ زیر یکی از مهمترین نتایج در نظریهٔ گروههای متناهی است.

قضیهٔ لاگرانژ. اگر H زیرگروهی از گروه متناهی G باشد، آنگاه مرتبهٔ H مرتبهٔ G را می‌شمارد.

در اینجا به بیان سه فرع مهم این قضیه می‌پردازیم.

الف) اگر G گروهی از مرتبهٔ n باشد و $a\in G$، آنگاه $a^n=1$.

ب) اگر G گروهی از مرتبهٔ p باشد که p عددی اول است، آنگاه G یک گروه دوری است (یعنی به ازای برخی $a\in G$، $G=<a>$).

ج) اگر G یک گروه باشد و $a^n=1$، آنگاه مرتبهٔ a، n را می‌شمارد.

برهان قضیهٔ لاگرانژ را به عنوان یک مسأله باقی می‌گذاریم (۴-۴-۱۸ را ببینید)، با وجود این فهم برهان فرعها آموزنده است.

برهان (الف): فرض کنید $a\in G$ و $m=\operatorname{ord}(a)$. بنابر قضیهٔ لاگرانژ، m عدد n را می‌شمارد، لذا فرض کنید که به ازای برخی عدد صحیح q، $n=mq$. در نتیجه $a^n=a^{mq}=(a^m)^q=1^q=1$.

برهان (ب): فرض کنید a عضوی از G باشد که همانی نیست. در این صورت $<a>$ زیرگروهی از G است که بیش از یک عضو دارد (یعنی ۱ و a). بنابر قضیهٔ لاگرانژ، مرتبهٔ $<a>$، p را می‌شمارد ولی از آنجا که p اول است، $<a>$ باید از مرتبهٔ p باشد، یعنی $G=<a>$.

برهان (ج): فرض کنید $m = \text{ord}(a)$. بنابر الگوریتم تقسیم، عددهای صحیح q و r موجودند به طوری که $n = mq + r$، $0 \leqslant r < m$. در نتیجه $1 = a^n = a^{qm+r} = (a^m)^q a^r = a^r$. از آنجا که 1، a، ...، a^{m-1} متمایزند، باید داشته باشیم $r = 0$ و از اینجا نتیجه می‌شود که m، n را می‌شمارد (این نمونه‌ای از کاربرد الگوریتم تقسیم در عددهای صحیح است).

۴ـ۴ـ۴ اگر در گروه G به ازای برخی $a, b \in G$ داشته باشیم $a^5 = 1$ و $aba^{-1} = b^2$، $\text{ord}(b)$ را بیابید.

حل. چون $a^5 = 1$، لذا مرتبهٔ a مساوی با ۱ یا مساوی با ۵ است. اگر $\text{ord}(a) = 1$، آنگاه $a = 1$ و نتیجه می‌شود که $b = b^2$ یا $b = 1$ و در نتیجه $\text{ord}(b) = 1$.

فرض کنید $\text{ord}(a) = 5$. داریم $(aba^{-1})(aba^{-1}) = (b^2)^2$ یا به طور معادل $ab^2a^{-1} = b^4$. با قرار دادن aba^{-1} به جای b^2 در طرف چپ این معادله حاصل می‌شود $a^2ba^{-2} = b^4$. با مربع کردن این تساوی بدست می‌آوریم $(a^2ba^{-2})(a^2ba^{-2}) = (b^4)^2$ یا به طور معادل $a^2b^2a^{-2} = b^8$. بار دیگر با قرار دادن aba^{-1} به جای b^2 در طرف چپ، به دست می‌آوریم $a^3ba^{-3} = b^8$. مربع کردن این تساوی نتیجه می‌دهد $a^3b^2a^{-3} = b^{16}$ و با جایگذاری به‌دست می‌آید $a^4ba^{-4} = b^{16}$. یک بار دیگر داریم $a^4b^2a^{-4} = b^{32}$ یا به طور معادل $a^5ba^{-5} = b^{32}$. ولی $a^5 = a^{-5} = 1$ پس $b = b^{32}$ و پس از حذف به‌دست می‌آوریم $b^{31} = 1$. از آنجا که ۳۱ عددی اول است، مرتبهٔ b مساوی است با ۱ (هرگاه b همانی باشد) یا مساوی است با ۳۱.

۴ـ۴ـ۵ اگر G گروهی متناهی و m عددی صحیح و مثبت و نسبت به مرتبهٔ G اول باشد، آنگاه به ازای هر a در G، عضو منحصر به فرد b در G وجود دارد به طوری که $b^m = a$.

حل. فرض کنید $T : G \to G$ به وسیلهٔ $T(x) = x^m$ تعریف شود. قصد ما آن است که نشان دهیم T تابعی یک به یک است. لذا فرض کنید که به ازای دو عضو x و y از G، $T(x) = T(y)$. در نتیجه $x^m = y^m$. فرض کنید $\text{ord}(G) = n$. از آنجا که n و m نسبت به هم اول‌اند، عددهای صحیح s و t وجود دارند به طوری که $sn + tm = 1$. در نتیجه

$$x = x^{sn+tm} = (x^n)^s(x^m)^t = (x^m)^t \,(\text{چون } x^n = 1) = (y^m)^t \,(\text{چون } x^m = y^m)$$
$$= (y^n)^s(y^m)^t \,(\text{چون } y^n = 1) = y^{sn+tm} = y$$

بنابراین T تابعی یک به یک است و چون G یک مجموعهٔ متناهی است، T تابعی به روی G نیز هست که می‌رساند به ازای $a \in G$، عضو منحصر به فرد b در G وجود دارد به‌طوری که $T(b) = a$ (به طور معادل، $b^m = a$).

اولین فرع قضیهٔ لاگرانژ بیان می‌کند که به ازای هر عضوی از گروه متناهی G، $a^{\text{ord}(G)} = 1$. هرگاه این حکم را دربارهٔ گروههایی خاص به کار ببریم، نتایج جالب و مهمی به دست می‌آیند. برای مثال، فرض کنید V_n مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت کوچکتر از n باشد که نسبت به n اول‌اند. عضوهای V_n، تحت ضرب به پیمانهٔ n، یک گروه تشکیل می‌دهند. فرض کنید $\varphi(n) = \text{ord}(V_n)$. (تابع φ، تابع φی اویلر نامیده می‌شود). در این صورت قضیهٔ لاگرانژ حکم زیر را ایجاب می‌کند.

قضیهٔ اویلر. اگر a عددی صحیح و نسبت به n اول باشد، آنگاه $a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} 1$

وقتی که n عددی اول است، مثلاً $n = p$، داریم $\varphi(p) = p - 1$. در نتیجه وقتی که a مضربی از p

نباشد، $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$. اگر دو طرف را در a ضرب کنیم، به دست می‌آوریم $a^p \overset{p}{\equiv} a$. این همنهشتی حتی در صورتی که a مضرب p باشد نیز برقرار است و لذا نتیجه زیر حاصل می‌شود.

قضیهٔ کوچک فرما. اگر a عددی صحیح و p اول باشد، آنگاه $a^p \overset{p}{\equiv} a$.

۴ـ۴ـ۶ ثابت کنید که اگر p اول باشد، هر مقسوم‌علیه اول $2^p - 1$ بزرگتر از p است. (از این حکم نتیجه می‌شود که تعداد عددهای اول نامتناهی است.)

حل. حکم به ازای $p = 2$ درست است، لذا فرض کنید که p فرد باشد. فرض کنید q عددی اول باشد که $2^p - 1$ را می‌شمارد. در نتیجه q فرد است و $2^p \overset{q}{\equiv} 1$. بنا بر قضیهٔ کوچک فرما، $2^{q-1} \overset{q}{\equiv} 1$. اگر $q = p$، داریم $1 \overset{p}{\equiv} 2^p = 2^q \equiv 2 \times 2^{q-1} \equiv 2 \times 1 = 2$ که تناقض است. اگر $q < p$، آنگاه $q - 1$ و p نسبت به هم اول‌اند، لذا عددهای صحیح s و t وجود دارند به طوری که $sp + t(q-1) = 1$. از اینجا نتیجه می‌شود که $1 \overset{q}{\equiv} (2^p)^s(2^{q-1})^t = 2^{sp+t(q-1)} = 2$ که تناقض است. لذا q باید بزرگتر از p باشد.

۴ـ۴ـ۷ نشان دهید که اگر n عددی صحیح و بزرگتر از ۱ باشد، آنگاه n، $2^n - 1$ را نمی‌شمارد.

حل. فرض کنید که n، $2^n - 1$ را بشمارد، یعنی $2^n \overset{n}{\equiv} 1$. به روشنی دیده می‌شود که n عددی فرد است زیرا $2^n - 1$ فرد است. فرض کنید p یک مقسوم‌علیه اول n باشد. آنگاه $2^n \overset{p}{\equiv} 1$. حال ۲ را به عنوان عضوی از گروه V_p در نظر بگیرید. می‌دانیم که $2^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$ (زیرا $\gcd(2,n) = 1$ و می‌توان قضیهٔ کوچک فرما را به‌کار برد). بنابر فرع سوم قضیهٔ لاگرانژ، $p - 1$، n را می‌شمارد. تا اینجا تناقضی وجود ندارد. اما فرض کنید که p به عنوان کوچکترین عدد اولی انتخاب شود که n را می‌شمارد. در این صورت همهٔ نتایج قبلی برقرارند، ولی اکنون این حقیقت که $\operatorname{ord}(2)$ عدد n و $\operatorname{ord}(2)$ عدد $p - 1$ را می‌شمارد، با انتخاب p در تناقض است. بنابراین هیچگاه n، $2^n - 1$ را نمی‌شمارد.

۴ـ۴ـ۸ نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، می‌توان توانی از ۲ را یافت به طوری که (در نمایش اعشاری آن) رشته‌ای با بیش از n صفر متوالی وجود داشته باشد.

حل. به ازای هر عدد صحیح و مثبت s، عدد صحیح و مثبت t وجود دارد به طوری که $2^t \overset{5^s}{\equiv} 1$ (برای مثال، قرار دهید $(t = \varphi(5^s))$. فرض کنید $s = 2n$. عددهای صحیح و مثبت q و r وجود دارند به طوری که $2^r - 1 = q \times 5^{2n}$. دو طرف را در 2^{2n} ضرب می‌کنیم و آن را به شکل

$$2^{r+2n} = 2^{2n} + q \times 10^{2n}$$

بازنویسی می‌کنیم و توجه می‌کنیم که در نمایش اعشاری این عدد، دست‌کم n صفر متوالی وجود دارد زیرا $2^{2n} < 10^n$.

۴ـ۴ـ۹ عددهای صحیح و مثبت a و b را در نظر می‌گیریم. نشان‌دهید که عدد صحیح و مثبت c را چنان می‌توان یافت که بی‌نهایت عدد به صورت $an + b$ (n عددی صحیح و مثبت) وجود داشته باشند که مقسوم‌علیه‌های اولشان از c بیشتر نباشند.

حل. به ازای $a = 1$ حکم به روشنی برقرار است، لذا فرض کنید $a > 1$. ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که $\gcd(a,b) = 1$. ثابت می‌کنیم که تعدادی نامتناهی از جمله‌های دنبالهٔ حسابی $an + b$، در بین جمله‌های

دنبالهٔ $(a+b)^k$، $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$ وجود دارند.

از آنجا که b نسبت به a اول است از قضیهٔ اویلر نتیجه می‌شود که $b^{\varphi(a)} \overset{a}{\equiv} ۱$. در نتیجه به ازای هر عدد صحیح و مثبت s،

$$(a+b)^{s\varphi(a)+۱} \equiv b^{s\varphi(a)+۱} \equiv (b^{\varphi(a)})^s b \equiv b (\text{به پیمانهٔ } a)$$

معنی عبارت فوق آن است که به ازای هر عدد صحیح و مثبت s، عددی صحیح چون q_s وجود دارد به‌طوری که

$$(a+b)^{s\varphi(a)+۱} = q_s a + b$$

در نتیجه هر یک از جمله‌های $q_s a + b$، $s = ۱, ۲, ۳, \ldots$، تنها همان عاملهای اولی را دارند که در $a+b$ وجود دارد.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که در آن $\gcd(a,b) = d > ۱$. در نتیجه $\gcd(a/d, b/d) = ۱$ و لذا بنابر استدلال بالا، عددی چون c وجود دارد به طوری که تعدادی نامتناهی از عضوهای دنبالهٔ $(a/d)n + (b/d)$ می‌توان یافت به طوری که هیچ یک از عاملهای اول آنها از c بزرگتر نباشد. از اینجا نتیجه می‌شود که تعدادی نامتناهی از عددهای به شکل $an + b$ می‌توان یافت به طوری که هیچ یک از عاملهای اول آنها از cd بزرگتر نیستند. این برهان را کامل می‌کند.

حلقه مجموعه‌ای چون R به همراه دو عمل دوتایی $+$ و $\cdot$ است به طوری که

الف) R نسبت به عمل $+$ یک گروه جابجایی است،

ب) به ازای هر $a, b, c \in R$، $a(bc) = (ab)c$ (علامت «$\cdot$» را حذف کرده‌ایم)،

ج) به ازای هر $a, b, c \in R$،

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(b+c)a = ba + ca$$

لازم نیست که R نسبت به ضرب عضو همانی داشته باشد و در صورتی که چنین باشد، R را حلقهٔ یکدار می‌نامیم. به همین ترتیب، عمل ضرب در R الزاماً جابه‌جایی نیست و در صورتی که چنین باشد، R یک حلقهٔ جابه‌جایی است.

۴ـ۴ـ۱۰ فرض کنید a و b عضوهای یک حلقهٔ متناهی باشند به طوری که $ab^۲ = b$. ثابت کنید $bab = b$.

حل. روشن است که اگر حلقه جابه‌جایی بود، حکم مسأله فوراً نتیجه می‌شد، ولی باید ثابت کنیم که وقتی R جابجایی نیست نیز حکم برقرار است. همچنین نمی‌توانیم فرض کنیم که حلقه یکدار است.

فرض کنید $b = b^۲$، در این صورت $bab = bab^۲ = b^۲ = b$ و کار تمام است. فرض کنید که به ازای برخی عدد صحیح $m > ۲$، $b = b^m$. در این صورت $bab = bab^m = b(ab^۲)b^{m-۲} = b^۲b^{m-۲} = b^m = b$ و کار تمام است. بنابراین کافی است نشان دهیم که به ازای برخی عدد صحیح $m \geqslant ۲$، $b = b^m$.

فرض کنید که حلقه، n عضو داشته باشد. بنابر اصل حجره‌ها، دست‌کم دو عضو دنبالهٔ $b, b^۲ \ldots, b^n, b^{n+۱}$ با هم مساویند. فرض کنید i کوچکترین عدد صحیحی باشد به طوری که b^i با یکی از توانهای بعدی b در دنبالهٔ بالا مساوی شود، یعنی $b^i = b^{i+j}$، $۱ \leqslant i < i+j \leqslant n+۱$. فرض کنید $i > ۱$. دو طرف تساوی $ab^۲ = b$ را از سمت راست در $b^{i+j-۲}$ ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم $ab^{i+j} = b^{i+j-۱}$. ولی از آنجا که

$b^{i} = b^{i+j}$، داریم $ab^{i} = b^{i+j-1}$. حال دو حالت را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $i = 2$. در نتیجه (بنابر تساوی آخر) داریم $b = ab^{2} = b^{j+1}$ و این با انتخاب i در تناقض است. لذا فرض کنید $i > 2$. در این صورت $b^{i-1} = b \cdot b^{i-2} = (ab^{2}) \cdot b^{i-2} = ab^{i} = ab^{i+j-1}$ که باز هم با انتخاب i در تناقض است. لذا $i = 1$، یعنی به‌ازای برخی j، $b = b^{j}$ بنابر استدلال اول، برهان کامل است.

حوزهٔ درست D عبارت از یک حلقهٔ جابجایی یکدار است که در آن به ازای هر a و b در D، $ab = 0$ ایجاب می‌کند $a = 0$ یا $b = 0$. ویژگی حذف در حوزهٔ درست برقرار است. زیرا فرض کنید $ab = ac$ و $a \neq 0$. در نتیجه $a(b-c) = 0$ و لذا $b - c = 0$ یا به طور معادل، $b = c$. همین‌طور، $ba = ca$، $a \neq 0$ ایجاب می‌کند $b = c$.

میدان یک حلقهٔ جابه‌جایی یکدار است که در آن هر عضو ناصفر وارون ضربی داشته باشد.

۴ـ۴ـ۱۱ نشان دهید که یک حوزهٔ درست متناهی (یعنی یک حوزهٔ درست که تنها تعداد متناهی عضو داشته باشد) یک میدان است.

حل. باید نشان دهیم که هر عضو ناصفر حوزهٔ درست وارون ضربی دارد. فرض کنید $D^{*} = \{a_{1}, \ldots, a_{n}\}$ عضوهای ناصفر حوزهٔ درست باشند و عضو دلخواه $a \in D^{*}$ را در نظر بگیرید. نگاشت $T : D^{*} \to D^{*}$ را با ضابطهٔ $T(a_{i}) = aa_{i}$ تعریف می‌کنیم. اگر $T(a_{i}) = T(a_{j})$ آنگاه $aa_{i} = aa_{j}$ و در نتیجه بنابر ویژگی حذف، $a_{i} = a_{j}$. بنابراین دیده می‌شود که T تابعی یک به یک است. چون D^{*} متناهی است، نگاشت T به روی D^{*} است. ولی یکی از عضوهای D^{*} همانی ضربی است که آن را به ۱ نشان می‌دهیم. پس به ازای برخی $a_{k} \in D^{*}$، $T(a_{k}) = 1$ یعنی $aa_{k} = 1$. این نشان می‌دهد که a وارون ضربی دارد.

مسائل

۴ـ۴ـ۱۲ فرض کنید که G یک مجموعه و $*$ یک عمل دوتایی روی G باشد که شرکت‌پذیر است و به ازای هر a و b در G، $a^{2}b = b = ba^{2}$ (که در آن $*$ را حذف کرده‌ایم). نشان دهید که G یک گروه جابه‌جایی است.

۴ـ۴ـ۱۳ A زیر مجموعه‌ای متناهی از گروه متناهی G است و A بیش از نیمی از عضوهای G را در بر دارد. ثابت کنید که هر عضو G، برابر با حاصلضرب دو عضو A است.

۴ـ۴ـ۱۴ فرض کنید H زیرگروهی با h عضو از گروه G باشد. فرض کنید G عضوی چون a دارد به طوری که به ازای هر x در H، $(xa)^{3} = 1$ که ۱ همانی است. فرض کنید P مجموعهٔ همهٔ حاصلضربهای $x_{1}ax_{2}a \ldots x_{n}a$ در G باشد که در آن n عددی صحیح و مثبت و x_{i}ها در H هستند. نشان دهید که P بیش از $3h^{2}$ عضو ندارد.

۴ـ۴ـ۱۵ اگر به ازای عضوهای a و b از یک گروه G، $a^{-1}ba = b^{-1}$ و $b^{-1}ab = a^{-1}$، ثابت کنید که $a^{4} = b^{4} = 1$.

۴ـ۴ـ۱۶ فرض کنید a و b عضوهای گروه متناهی G باشند.

الف) ثابت کنید $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(a^{-1})$.

ب) ثابت کنید $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(ba)$.

ج) اگر $ba = a^4b^3$، ثابت کنید $\mathrm{ord}(a^4b) = \mathrm{ord}(a^2b^3)$.

۴ـ۴ـ۱۷ فرض کنید a و b عضوهای یک گروه باشند. اگر $b^{-1}ab = a^k$، ثابت کنید که به ازای هر دو عدد صحیح مثبت r و s، $b^{-r}a^sb^r = a^{sk^r}$.

۴ـ۴ـ۱۸ (نکات عمدهٔ برهان قضیهٔ لاگرانژ). فرض کنید G گروهی متناهی و H زیرگروهی با m عضو متمایز باشد، مثلاً $H = \{1, h_2, h_3, \dots, h_m\}$. به ازای هر $a \in G$، فرض کنید $Ha = \{a, h_2a, h_3a, \dots, h_ma\}$.

الف) ثابت کنید Ha، m عضو متمایز دارد.

ب) ثابت کنید $Hh_i = H$.

ج) اگر $b \notin Ha$، ثابت کنیدکه Ha و Hb مجموعه‌های متمایزند.

د) ثابت کنیدکه عضوهای a_1، a_2 ، ... ، a_k در G موجودند به طوری که $G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_k$ و اگر $i \neq j$، $Ha_i \cap Ha_j = \varnothing$.

ه) با استفاده از نتایج بالا، برهانی از قضیهٔ لاگرانژ را به‌دست آورید.

۴ـ۴ـ۱۹ کوچکترین عدد صحیح n را بیابید به طوری که $2^n - 1$ بر ۴۷ بخش‌پذیر باشد.

۴ـ۴ـ۲۰ ثابت کنید که اگر p عددی اول باشد و $p > 3$، آنگاه $ab^p - ba^p$ بر $6p$ بخش‌پذیر است.

۴ـ۴ـ۲۱ فرض کنید که a و b عددهای صحیح و نسبت به هم اول باشند. ثابت کنید که عددهای صحیح m و n وجود دارند به طوری که $a^m + b^n \overset{ab}{\equiv} 1$.

۴ـ۴ـ۲۲ اگر a، b، c و d عددهای صحیح و مثبت باشند، نشان دهید که عدد ۳۰ $a^{4b+d} - a^{4c+d}$ را می‌شمارد.

۴ـ۴ـ۲۳ فرض کنید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $T_n = 2^n + 1$. فرض کنید که φ، تابع φ اویلر باشد و k عددی صحیح و مثبت و $m = n + k\varphi(T_n)$. نشان دهید که T_m بر T_n بخش‌پذیر است.

۴ـ۴ـ۲۴ ثابت کنید که عددی صحیح و مثبت چون k وجود دارد به طوری که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $k2^n + 1$ عددی مرکب است. (راهنمایی: ردهٔ همنهشتی n را به پیمانهٔ ۲۴ در نظر بگیرید و از قضیهٔ باقیماندهٔ چینی استفاده کنید.)

۴ـ۴ـ۲۵ یک حلقهٔ بولی حلقه‌ای است که در آن به ازای هر عضو a از حلقه داشته باشیم $a^2 = a$. عضو a از یک حلقه را پوچتوان گوییم اگر به ازای عددی صحیح و مثبت چون n، $a^n = 0$. ثابت کنید که حلقهٔ R یک حلقهٔ بولی است اگر و فقط اگر R جابه‌جایی باشد، شامل هیچ عضو پوچتوان نباشد و به ازای هر a, b در R، $ab(a+b) = 0$. (راهنمایی: نشان دهید که $a^4 - a^5 = 0$ و $(x^2 - x^3)^2$ را در نظر بگیرید.)

۴ـ۴ـ۲۶ فرض کنید که R یک حلقهٔ یکدار باشد و $a \in R$. فرض کنید که عضو منحصر به فردی چون a' وجود دارد به طوری که $aa' = 1$. ثابت کنید که $a'a = 1$.

۴ـ۴ـ۲۷ فرض کنید R یک حلقهٔ یکدار و a عضو پوچتوانی از R باشد (۴-۴-۲۵ را ببینید). ثابت کنید که $1 - a$ وارون‌پذیر است (یعنی ثابت کنید که عضوی چون b در R وجود دارد به طوری که $(1-a)b = 1 = b(1-a)$).

۴ـ۴ـ۲۸ فرض کنید R یک حلقه باشد و $C = \{x \in R : xy = yx$ ،به ازای هر y در $R\}$. ثابت کنید که اگر به ازای هر $x \in R$، $x^2 - x \in C$، آنگاه R جابجایی است. (راهنمایی: با در نظر گرفتن $x + y$، نشان دهید که $xy + yx \in C$ و سپس نشان دهید که $x^2 \in C$.)

۴ـ۴ـ۲۹ فرض کنید که p عددی اول باشد. فرض کنید J مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای ۲در۲ی $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ باشد که درایه‌های آنها از مجموعهٔ $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ هستند و در شرایط $a + d \overset{p}{\equiv} 1$ و $ad - bc \overset{p}{\equiv} 0$ صدق می‌کنند. تعداد عضوهای J را تعیین کنید.

۴ـ۴ـ۳۰ فرض کنید که p عددی اول باشد و $Z_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Z_p تحت عملهای جمع و ضرب (به پیمانهٔ p)، یک میدان است.

الف) نشان دهید که 0، 1، ... ، $p - 1$، صفرهای چندجمله‌ای $x^p - x$ (به عنوان یک چندجمله‌ای روی Z_p) هستند. نتیجه بگیرید که (به پیمانهٔ p) $x^p - x = x(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1))$.

ب) (قضیهٔ ویلسون). با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که (به پیمانهٔ p)$(p-1)! \equiv -1$.

ج) فرض کنید $|a_{ij}|$ دترمینانی از مرتبهٔ 100 باشد که در آن $a_{ij} = i \times j$. ثابت کنید که قدرمطلق هر یک از $100!$ جملهٔ موجود در بسط این دترمینان، همنهشت با ۱ به پیمانهٔ ۱۰۱ است.

۴ـ۴ـ۳۱ فرض کنید F یک میدان متناهی با m عضو باشد که m عددی فرد است. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر روی F به شکل $x^2 + bx + c$ باشد که $b, c \in F$. به ازای چه تعداد عضو k در F، $p(x) + k$ روی F تحویل‌ناپذیر است؟

مثالهای اضافی. ۱-۱-۵، ۱-۱-۱۲.

۵

مجموعیابی سریها

در این فصل توجه خود را به برخی از اساسیترین دستورهای مجموعیابی معطوف می‌کنیم. فهرست ارائه شده بسیار مختصر است و تنها شامل قضیهٔ دوجمله‌ای، دستورهای سریهای حسابی و هندسی و دستورهایی دربارهٔ سریهای توانی مقدماتی می‌شود، ولی خواهیم دید که چند تکنیک متداول ادغام، مشتقگیری و انتگرالگیری، این دستورها را بسیار سودمند و توانا خواهند ساخت.

۱ـ۵ ضریبهای دوجمله‌ای

در اینجا به چند اتحاد اساسی اشاره می‌کنیم. فرض می‌کنیم که n و k عددهای صحیح‌اند و $n \geqslant k \geqslant ۰$.

نمایش به صورت فاکتوریل:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{۱}$$

شرط تقارن:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{۲}$$

دستور درون‌بری و بیرون‌بری:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-۱}{k-۱} \quad , \quad k \neq ۰ \tag{۳}$$

دستور جمع:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱} \quad , \quad k \neq ۰ \tag{۴}$$

دستور بعدی با استفادهٔ مکرر از دستور جمع به دست می‌آید:

دستور مجموعیابی:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n+۱}{۱} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+۱}{k} \qquad (۵)$$

مجموع حاصلضربها (۴-۳-۲ و ۱-۳-۴ را ببینید):

$$\binom{r}{۰}\binom{s}{n} + \binom{r}{۱}\binom{s}{n-۱} + \cdots + \binom{r}{n}\binom{s}{۰} = \binom{r+s}{n} \qquad (۶)$$

قضیهٔ دوجمله‌ای (۲-۱-۱، ۲-۱-۱۱، ۴-۳-۳ را ببینید):

$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n \qquad (۷)$$

۵-۱-۱ با استفاده از دستور مجموعیابی نشان دهید که

الف) $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

ب) $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

حل. الف) داریم

$$\begin{aligned} ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n &= \binom{۱}{۱} + \binom{۲}{۱} + \binom{۳}{۱} + \cdots + \binom{n}{۱} \\ &= \binom{۱}{۰} + \binom{۲}{۱} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{n}{n-۱} \\ &= \binom{n+۱}{n-۱} = \binom{n+۱}{۲} = \frac{n(n+۱)}{۲} \end{aligned}$$

ب) ابتدا به دنبال عددهای ثابتی چون a و b می‌گردیم به طوری که به ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n$،

$$k^۲ = a\binom{k}{۲} + b\binom{k}{۱} = a\,\frac{k(k-۱)}{۲} + bk$$

هریک از دو طرف تساوی بالا را به صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ برحسب k درنظر بگیرید. اتحاد وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که ضریبهای توانهای مشابه k در دو طرف با هم مساوی باشند، یعنی وقتی و فقط وقتی که

$$\begin{aligned} ۱ &= \frac{a}{۲} \\ ۰ &= -\frac{a}{۲} + b \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $a = ۲$ و $b = ۱$. در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۱^۲+۲^۲+\ldots+n^۲ &= \left[۲\binom{۱}{۲} + \binom{۱}{۱}\right] + \left[۲\binom{۲}{۲} + \binom{۲}{۱}\right] + \cdots + \left[۲\binom{n}{۲} + \binom{n}{۱}\right] \\ &= ۲\left[\binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{n}{۲}\right] + \left[\binom{۱}{۱} + \binom{۲}{۱} + \cdots + \binom{n}{۱}\right] \\ &= ۲\left[\binom{۲}{۰} + \binom{۳}{۱} + \cdots + \binom{n}{n-۲}\right] + \left[\binom{۱}{۰} + \binom{۲}{۱} + \ldots + \binom{n}{n-۱}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ۲\binom{n+۱}{n-۲}+\binom{n+۱}{n-۱} = ۲\binom{n+۱}{۳}+\binom{n+۱}{۲}\\
&= ۲\frac{(n+۱)(n)(n-۱)}{۶}+\frac{(n+۱)n}{۲}\\
&= \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}
\end{aligned}
$$

(در ۵-۳-۱۱، راه حل دیگری برای قسمت (ب) آمده است.)

از آنجا که اغلب با مجموعهای بالا سر و کار داریم، بهتر است آنها را به خاطر داشته باشیم تا بتوانیم به نحوی آنها را به سادگی به یاد بیاوریم. در شکل ۵-۱، راهی برای به خاطر سپردن دستور اول (به ازای $n = ۵$) نشان داده شده است.

همچنین از این نمودار می‌توان به روش زیر، برهانی از حالت کلی را به دست آورد. فرض کنید S، مجموع اولین n عدد صحیح و مثبت باشد. در این صورت

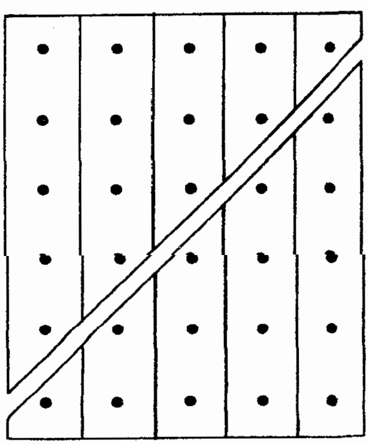
$$S = ۱ + ۲ + \cdots + n$$
$$S = n + (n-۱) + \cdots + ۱$$

با جمع دو طرف به دست می‌آوریم

$$۲S = (n+۱) + (n+۱) + \cdots + (n+۱) = n(n+۱)$$

و در نتیجه خواهیم داشت $S = \frac{n(n+۱)}{۲}$.

یکی از تکنیکهای معمول در محاسبهٔ یک مجموع، تجدید آرایش جمله‌های آن است. به ویژه هنگامی که جمله‌ها به شکل مجموعی دوگانه نمایش داده شده‌اند، اغلب جابه‌جا کردن ترتیب مجموع سودمند است. در مثال بعدی، نمونه‌ای از این روش را خواهید دید.



$$۱+۲+۳+۴+۵ = \frac{۵\times۶}{۲}$$

شکل ۵-۱

۵ـ۱ـ۲ مجموع زیر را به دست آورید:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}$$

حل. جمله‌های این مجموع به وسیله جفتهای مرتب (i,j) اندیس‌گذاری شده‌اند که در آن (i,j) روی عضوهای آرایهٔ مثلثی زیر تغییر می‌کند:

$i \backslash j$	۰	۱	۲	۳	۴	...
۰	*					
۱	*	*				
۲	*	*	*			
۳	*	*	*	*		
۴	*	*	*	*	*	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

در مجموع داده شده، ابتدا عضوها به صورت ستونی با هم جمع می‌شوند. هنگامی که ترتیب مجموعیابی را عوض می‌کنیم تا در نتیجه جمله‌ها به صورت سطری جمع شوند، مجموع به شکل $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}$ یا به طور معادل $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}$ در می‌آید. مجموع اخیر را می‌توان به آسانی به شکل زیر به دست آورد. بنابر قضیهٔ دو جمله‌ای داریم

$$(1+x)^i=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^j$$

وقتی‌که $x=1$، خواهیم داشت $\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}=2^i$ در نتیجه مجموع بالا به شکل $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i$ در می‌آید که بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای مساوی است با $3^n=(2+1)^n$.

۵ـ۱ـ۳ مجموعهای زیر را به دست آورید:

الف) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}$

ب) $1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$

حل. مجموع اولی عبارت است از

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$$

در این‌گونه مجموعیابیها، هدف آن است که با استفاده از دستور درون‌بری و بیرون‌بری، اندیس مجموعیابی را به «درون» ضریب دوجمله‌ای ببریم. از آنجا که داریم $\binom{n}{i}=\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}$ نتیجه می‌شود که $i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1}$ و بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1}=n\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}=n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$$
$$=n\times 2^{n-1}$$

مجموع دوم عبارت است از $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$ ولی داریم $\binom{n+1}{i+1}=\frac{n+1}{i+1}\binom{n}{i}$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} &=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}\\ &=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}\\ &=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}-\binom{n+1}{0}\right]\\ &=\frac{1}{n+1}[2^{n+1}-1]\end{aligned}$$

راه آموزنده دیگری برای به دست آوردن این مجموعها وجود دارد و آن مشتقگیری و انتگرالگیری از دو طرف تساوی $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i=(1+x)^n$ است. برای اثبات قسمت (الف)، با مشتقگیری از دو طرف به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}x^{i-1}=n(1+x)^{n-1}$$

و با قرار دادن $x=1$ خواهیم داشت

$$\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}=n\times 2^{n-1}$$

برای قسمت (ب)، با انتگرالگیری از دو طرف به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{x^{i+1}}{i+1}=\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}+C$$

هنگامی‌که $x=0$، طرف چپ این تساوی مساوی با 0 است و این ایجاب می‌کند که $C=\frac{-1}{(n+1)}$. در نتیجه، وقتی که $x=1$، (مثل قبل) نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{i+1}=\frac{1}{n+1}[2^{n+1}-1]$$

۵ـ۱ـ۴ نشان دهید که

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

حل. طرف چپ تساوی به انتگرال معین یک سری دوجمله‌ای شباهت دارد و از اینجا روش استدلال زیر به ذهن خطور می‌کند:

$$(1-x)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\ldots,$$

$$۱-(۱-x)^n=\binom{n}{۱}x-\binom{n}{۲}x^۲+\binom{n}{۳}x^۳-\dots,$$
$$\frac{۱-(۱-x)^n}{x}=\binom{n}{۱}-\binom{n}{۲}x+\binom{n}{۳}x^۲-\dots,$$

اکنون انتگرال معین دو طرف را از ۰ تا ۱ محاسبه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\int_۰^۱ \frac{۱-(۱-x)^n}{x}dx=\binom{n}{۱}-\frac{۱}{۲}\binom{n}{۲}+\frac{۱}{۳}\binom{n}{۳}-\dots$$

برای تمام کردن حل مسأله، باید نشان دهیم که انتگرال طرف چپ مساوی است با $۱/n+\dots+۱/۳+۱/۲+۱$.
قرار می‌دهیم $y=۱-x$. در این صورت

$$\begin{aligned}\int_۰^۱ \frac{۱-(۱-x)^n}{x}dx&=\int_۰^۱\frac{۱-y^n}{۱-y}dy\\&=\int_۰^۱(۱+y+y^۲+\dots+y^{n-۱})dy=y+\frac{۱}{۲}y^۲+\dots+\frac{۱}{n}y^n\Big]_۰^۱\\&=۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n}\end{aligned}$$

این مسأله را می‌توان بدون استفاده از حسابان و تنها با استفاده از اتحادهای اساسی این بخش حل کرد ولی این کار از نظر تکنیکی دشوارتر است. با وجود این به دلیل آموزنده بودن این روش، آن را به اختصار می‌آوریم.

ابتدا با استفادهٔ مکرر از دستور جمع و دستور درون‌بری و بیرون‌بری، به ازای $۱\leqslant i\leqslant n$، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{i}\binom{n}{i}&=\frac{۱}{i}\left[\binom{n-۱}{i}+\binom{n-۱}{i-۱}\right]=\frac{۱}{i}\binom{n-۱}{i}+\frac{۱}{n}\binom{n}{i}\\&=\frac{۱}{i}\left[\binom{n-۲}{i}+\binom{n-۲}{i-۱}\right]+\frac{۱}{n}\binom{n}{i}\\&=\frac{۱}{i}\binom{n-۲}{i}+\frac{۱}{n-۱}\binom{n-۱}{i}+\frac{۱}{n}\binom{n}{i}\end{aligned}$$

و با ادامهٔ این کار خواهیم داشت

$$\frac{۱}{i}\binom{n}{i}=\frac{۱}{n}\binom{n}{i}+\frac{۱}{n-۱}\binom{n-۱}{i}+\dots+\frac{۱}{i}\binom{i}{i}$$

بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i+۱}\frac{۱}{i}\binom{n}{i}=\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i+۱}\left[\sum_{j=۰}^{n-i}\binom{n-j}{i}\frac{۱}{n-j}\right]$$

و با تغییر ترتیب مجموعیابی به دست می‌آوریم

$$\sum_{j=۰}^{n-۱}\left[\sum_{i=۱}^{n-j}(-۱)^{i+۱}\binom{n-j}{i}\frac{۱}{n-j}\right]$$

قرار می‌دهیم $k = n - j$ و در نتیجه طرف راست مساوی می‌شود با

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

(۵-۱-۹ (الف) را ببینید).

۵ـ۱ـ۵ مجموع زیر را به دست آورید:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\binom{n}{i}$$

حل. این مجموع را می‌توان به وسیلهٔ اتحادهای اساسی این بخش به دست آورد، با وجود این از تکنیک دیگری استفاده می‌کنیم. اگر چه ممکن است این روش در ابتدا مصنوعی و نامأنوس به نظر برسد ولی با این حال، طرز تفکر به کار رفته آنقدر هم که در ابتدا به‌نظر می‌رسد غیر معمول نیست. روش حل آن است که مجموع موردنظر را به شکل زیر با اصطلاحات احتمالاتی تعبیر کنیم.

مجموع را در $1/2^{2n+1}$ ضرب می‌کنیم و حاصل را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

اکنون بازی جورسازی زیر را بین دو بازیکن A و B در نظر بگیرید. بازیکن A، $n+1$ سکه را پرتاب می‌کند و n تا از این سکه‌ها را نگاه می‌دارد به منظور آنکه بیشترین تعداد حالت رو آمدن سکه را در بر داشته باشد. بازیکن B، n سکه را پرتاب می‌کند. بازیکنی که تعداد رو آمدن پرتابهایش ماکسیمم باشد، برنده است و در صورت مساوی‌شدن امتیازات، برد با B خواهد بود.

توجه کنید که مجموع بالا احتمال آن است که A ببرد. حال به روش دیگری این احتمال را حساب می‌کنیم. بازی مورد نظر با بازی زیر معادل است. فرض کنید A و B هر یک n سکه را پرتاب کنند. کسی که بیشترین تعداد رو را داشته باشد، برنده است. اگر هر دو بازیکن به تعداد مساوی رو داشته و همهٔ نتایج رو نباشند، A سکهٔ $(n+1)$ام را پرتاب می‌کند؛ اگر رو بیاید می‌برد و در صورتی که پشت بیاید، می‌بازد. تا اینجا شانس بردن هر دو بازیکن A و B مساوی است.

تنها حالتی باقیمانده که در آن همهٔ پرتابهای A و B رو باشند. در این حالت نتیجهٔ پرتاب آخر A هر چه باشد B می‌برد. بنابراین تعداد حالتهای بردن B، دقیقاً دو تا بیشتر از حالتهای بردن A است. یعنی از مجموع 2^{2n+1} پرتاب، B در دو حالت آخری که شرح دادیم می‌برد و علاوه بر آن در $\frac{1}{2}(2^{2n+1}-2)$ حالت که دقیقاً نیمی از حالتهای دیگر است نیز برنده می‌شود. در نتیجه احتمال این که A ببرد مساوی است با

$$1 - P(\text{ببرد } B) = 1 - \frac{2+\frac{1}{2}(2^{2n+1}-2)}{2^{2n+1}} = \frac{2^{2n+1}-2-2^{2n}+1}{2^{2n+1}} = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n+1}}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع اولی مساوی است با $2^{2n}-1$.

مسائل

۵ـ۱ـ۶ الف) مجموع همهٔ عددهای بین ۰ و ۱۰۰۰ را که مضربهای ۷ یا ۱۱ هستند، به دست آورید.

ب) مجموع همهٔ عددهای بین ۰ و ۱۰۰۰ را که مضربهای ۷، ۱۱ یا ۱۳ هستند، به دست آورید.

۵ـ۱ـ۷ الف) ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح $k > 1$ و هر عدد صحیح و مثبت n، n^k مجموع n عدد فرد متوالی است.

ب) فرض کنید n عددی صحیح و مثبت و m عددی صحیح و دلخواه باشد به طوری که m و n هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. ثابت کنید که حاصلضرب mn مساوی است با مجموع n عدد صحیح متوالی.

۵ـ۱ـ۸ از دستور مجموعیابی (۵) استفاده کنید و مجموعهای الف) $\sum_{k=1}^{n} k^3$ و ب) $\sum_{k=1}^{n} k^4$ را بیابید.

۵ـ۱ـ۹ هر یک از مجموعهای زیر را بیابید:

الف) $1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$

ب) $1\times 2\binom{n}{2}+2\times 3\binom{n}{3}+\cdots+(n-1)n\binom{n}{n}$

ج) $\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n}$

د) $\binom{n}{1}-2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}n^2\binom{n}{n}$

ه) $\binom{n}{0}-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$

و) $\sum_{j\geqslant 1}\left[(-1)^j\binom{n}{j-1}\Big/\sum_{1\leqslant k\leqslant j}k\right]$

۵ـ۱ـ۱۰ الف) احتمال آن که در پرتاب تصادفی n تاس سالم، تعداد فردی شش بیاید چیست؟ (برای محاسبهٔ مجموع، عبارت $\frac{1}{2}[(x+y)^n-(x-y)^n]$ را در نظر بگیرید.)

ب) نشان دهید که اگر n مضرب مثبتی از ۶ باشد، آنگاه

$$\binom{n}{1}-3\binom{n}{3}+3^2\binom{n}{5}-\cdots=0.$$

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\frac{1}{3^2}\binom{n}{5}-\cdots=0$$

۵ـ۱ـ۱۱ اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف)

$$\frac{\binom{n}{1}}{1\times 2}-\frac{\binom{n}{2}}{2\times 3}+\frac{\binom{n}{3}}{3\times 4}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\binom{n}{n}}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}$$

ب)

$$\frac{\binom{n}{0}}{1^2}-\frac{\binom{n}{1}}{2^2}+\frac{\binom{n}{2}}{3^2}-\cdots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{(n+1)^2}=\frac{1}{n+1}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right]$$

۵ـ۱ـ۱۲ نشان دهید که

الف) $\binom{r}{0}\binom{s}{n}+\binom{r}{1}\binom{s}{n+1}+\binom{r}{2}\binom{s}{n+2}+\cdots+\binom{r}{n}\binom{s}{n+n}=\binom{r+s}{s-n}$

ب) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

۵ـ۱ـ۱۳ بااستفاده از اتحادهای این بخش، نشان دهیدکه

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}\right]^2 = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

۵ـ۱ـ۱۴ مجموع زیر را به دست آورید:

$$\sum_{i=n}^{2n-1}\binom{i-1}{n-1}2^{1-i}$$

(راهنمایی: $P(E_i)$ را به ازای $i = n, n+1, \ldots, 2n-1$ حساب کنید. $P(E_i)$ احتمال آن است که در پرتاب سکه‌ای سالم، i پرتاب پیش از به دست آمدن n رو یا n پشت لازم باشد.)

۵ـ۱ـ۱۵ یک دانش‌آموز پس از اتمام محاسبهٔ مجموعیابی مشکلی، با چشمهایی بی‌رمق به عبارت «x_1y_2» که روی کاغذ چرکنویس نوشته شده بود، نگاه کرد. پس از آنکه بی‌هدف شکلهایی روی کاغذ کشید، نوشت:

$$x_1y_2$$

$$x_1y_2y_3x_4 \qquad (1)$$

$$x_1y_2y_3x_4y_5x_6x_7y_8 \qquad (2)$$

$$x_1y_2y_3x_4y_5x_6x_7y_8y_9x_{10}x_{11}y_{12}x_{13}y_{14}y_{15}x_{16} \qquad (3)$$

دانش‌آموز در هر سطر، همان عبارت سطر قبلی را می‌نوشت و به دنبال آن عبارت دیگری می‌نوشت به این ترتیب که در عبارت قبلی به جای هر xی، y و به جای هر yی، x می‌گذاشت اما اندیسها به ترتیب بود .

دانش‌آموز متوجه شد که در خط (۱)، مجموع اندیسهای x با مجموع اندیسهای y مساوی است. در خط (۲) همین تساوی و نیز تساوی مشابهی برای توانهای دوم اندیسهای x و y برقرار است، یعنی $1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$ ، بلافاصله دانش‌آموز با برداشتن گامی استقرایی، حدس زد که در سطر (n)، به ازای $k = 1, 2, \ldots, n$، مجموع توانهای kام اندیسهای x با مجموع توانهای kام اندیسهای y مساوی است. این ادعا را به ازای همهٔ مقادیر $n > 0$ ثابت کنید.

مثالهای اضافی. ۱-۳-۴، ۱-۳-۱۵، ۱-۱۱-۴، ۲-۱-۱، ۲-۱-۲، ۴-۳-۵، ۴-۳-۱۳، ۴-۳-۱۴، ۴-۳-۱۵، ۴-۳-۲۴، ۵-۴-۸، ۶-۸-۳، ۷-۲-۹، ۷-۳-۸. کاربردهای قضیهٔ دوجمله‌ای: ۱-۱-۱ (حل ۴)، ۱-۱-۲، ۱-۳-۸، ۱-۶-۶ (ب) ۱-۱۲-۴، ۳-۵-۸،۳-۵-۱۰، ۳-۵-۱۱، ۳-۵-۱۲ ، ۳-۵-۱۳، ۴-۲-۱۳، ۴-۳-۵، ۴-۴-۹، ۵-۱-۲، ۵-۱-۱۵، ۵-۲-۱۳، ۶-۸-۳،۷-۱-۵ ، ۷-۱-۱۵.

۵ـ۲ سری هندسی

سری هندسی به طور طبیعی، در بسیاری از مسائل ظاهر می‌شود و در نتیجه دانستن مجموع آن ضروری است:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad , \quad x \neq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} x^i = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad , \quad |x| < 1$$

۵ـ۲ـ۱ برای هر عدد صحیح مثبت n، دستوری برای یافتن $\sigma(n)$، یعنی مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد n بیابید.

حل. روشن است که $\sigma(۱) = ۱$. اگر p اول باشد، تنها مقسوم‌علیه‌های آن ۱ و p هستند، در نتیجه $\sigma(p) = p + ۱$.

اگر n توانی از یک عدد اول باشد، مثلاً $n = p^m$، مقسوم‌علیه‌های آن عبارت‌اند از ۱، p، $p^۲$، ... ، p^m، در نتیجه $\sigma(p^m) = ۱ + p + \cdots + p^m = (۱ - p^{m+۱})/(۱ - p)$.

فرض کنید $n = ab$، که در آن a و b عددهای صحیح و نسبت به هم اول‌اند و هر کدامشان بزرگتر از یک هستند. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... ، a_s مقسوم‌علیه‌های a، و $b_۱$، $b_۲$، ... ، b_t مقسوم‌علیه‌های b باشند. در نتیجه مقسوم‌علیه‌های n عبارت‌اند از a_ib_j، $i = ۱, ۲, \ldots, s$، $j = ۱, ۲, \ldots, t$ و مجموع آنها به صورت زیر است:

$$(a_۱b_۱ + \cdots + a_۱b_t) + (a_۲b_۱ + \cdots + a_۲b_t) + \cdots + (a_sb_۱ + \cdots + a_sb_t)$$

یا به طور معادل

$$(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_s)(b_۱ + b_۲ + \cdots + b_t)$$

بنابراین $\sigma(n) = \sigma(a)\sigma(b)$.

اکنون عدد صحیح و مثبت دلخواه n را در نظر بگیرید و فرض کنید که تجزیهٔ یکتای آن به شکل

$$n = p_۱^{e_۱}p_۲^{e_۲}\ldots p_k^{e_k}$$

باشد. بنابر نتیجهٔ قبلی در می‌یابیم که

$$\sigma(n) = \left(\frac{۱ - p_۱^{e_۱+۱}}{۱ - p_۱}\right)\left(\frac{۱ - p_۲^{e_۲+۱}}{۱ - p_۲}\right)\cdots\left(\frac{۱ - p_k^{e_k+۱}}{۱ - p_k}\right)$$

۵ـ۲ـ۲ فرض کنید $n = ۲m$ که در آن m عدد صحیح و فردی بزرگتر از ۱ است. فرض کنید $\theta = e^{۲\pi i/n}$. عبارت $(۱ - \theta)^{-۱}$ را به طور صریح به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب θ با ضرایب صحیح a_i یعنی

$$a_k\theta^k + a_{k-۱}\theta^{k-۱} + \cdots + a_۱\theta + a_۰$$

بیان کنید.

حل. توجه کنید که θ یک ریشهٔ nام واحد است و همچنین $\theta^m = (e^{۲\pi i/۲m})^m = e^{\pi i} = -۱$. بنابراین

$$۱ + \theta + \theta^۲ + \cdots + \theta^{m-۱} = \frac{۱ - \theta^m}{۱ - \theta} = \frac{۲}{۱ - \theta} \qquad (۱)$$

همچنین چون m فرد است، داریم

$$۱ - \theta + \theta^۲ + \cdots + \theta^{m-۱} = \frac{۱ - (-\theta)^m}{۱ - (-\theta)} = ۰ \qquad (۲)$$

حال، با جمع دو تساوی (۱) و (۲) به دست می‌آوریم

$$۲ + ۲\theta^۲ + \cdots + ۲\theta^{m-۱} = \frac{۲}{۱ - \theta}$$

یا به طور معادل

$$\frac{۱}{۱ - \theta} = ۱ + \theta^۲ + \theta^۴ + \cdots + \theta^{m-۱}$$

۵ـ۲ـ۳ مجموع سری متناهی $\cos\theta + \cos ۲\theta + \cdots + \cos n\theta$ را به دست آورید.

حل. سری فوق که مجموعش مورد نظر ماست، جزءِ حقیقی سری هندسی

$$e^{i\theta}+e^{۲i\theta}+e^{۳i\theta}+\cdots+e^{ni\theta}$$

است که مجموع آن مساوی است با

$$\begin{aligned}\frac{e^{i(n+۱)\theta}-۱}{e^{i\theta}-۱}-۱&=\frac{e^{i(n+۱)\theta}-۱-(e^{i\theta}-۱)}{e^{i\theta}-۱}=\frac{e^{i(n+۱)\theta}-e^{i\theta}}{e^{i\theta}-۱}\\&=\frac{e^{i(n+\frac{۱}{۲})\theta}-e^{i(\frac{۱}{۲}\theta)}}{e^{i(\frac{۱}{۲}\theta)}-e^{-i(\frac{۱}{۲}\theta)}}=\frac{۱}{۲i}\left[\frac{e^{i(n+\frac{۱}{۲})\theta}-e^{i(\frac{۱}{۲}\theta)}}{\sin\frac{۱}{۲}\theta}\right]\\&=\frac{۱}{۲i}\frac{۱}{\sin\frac{۱}{۲}\theta}\left[\left(\cos(n+\frac{۱}{۲})\theta-\cos\frac{۱}{۲}\theta\right)+i\left(\sin(n+\frac{۱}{۲})\theta-\sin\frac{۱}{۲}\theta\right)\right]\\&=\frac{۱}{۲\sin\frac{۱}{۲}\theta}\left[\left(\sin(n+\frac{۱}{۲})\theta-\sin\frac{۱}{۲}\theta\right)+i\left(\cos\frac{۱}{۲}\theta-\cos(n+\frac{۱}{۲})\theta\right)\right]\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن جزءهای حقیقی به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\cos\theta+\cos ۲\theta+\cdots+\cos n\theta&=\frac{۱}{۲\sin\frac{۱}{۲}\theta}\left[\sin(n+\frac{۱}{۲})\theta-\sin\frac{۱}{۲}\theta\right]\\&=\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})\theta}{۲\sin\frac{۱}{۲}\theta}-\frac{۱}{۲}\end{aligned}$$

۵ـ۲ـ۴ ثابت کنید که کسر $\frac{۱\times ۳\times ۵\times\ldots\times(۲n-۱)}{۲\times ۴\times ۶\times\ldots\times ۲n}$ وقتی به ساده‌ترین صورت تحویل شود به صورت $a/۲^w$ در می‌آید که در آن a عددی فرد است و $w<۲n$.

حل. می‌توانیم کسر را به شکل

$$\frac{(۲n)!}{۲^{۲n}n!n!}=\frac{۱}{۲^{۲n}}\binom{۲n}{n}$$

بنویسیم. حال می‌دانیم که $\binom{۲n}{n}$ عددی صحیح است، بنابراین تنها مسأله‌ای که باقی می‌ماند آن است که نشان دهیم $w<۲n$. بالاترین توان ۲ در $(۲n)!$ مساوی است با

$$\left[\!\left[\frac{۲n}{۲}\right]\!\right]+\left[\!\left[\frac{۲n}{۴}\right]\!\right]+\left[\!\left[\frac{۲n}{۸}\right]\!\right]+\cdots+\left[\!\left[\frac{۲n}{۲^k}\right]\!\right]+\ldots$$

(۳-۳-۱۰ را ببینید). همچنین این بالاترین توان ۲ در $n!$ برابر است با

$$\left[\!\left[\frac{n}{۲}\right]\!\right]+\left[\!\left[\frac{n}{۴}\right]\!\right]+\left[\!\left[\frac{n}{۸}\right]\!\right]+\cdots+\left[\!\left[\frac{n}{۲^k}\right]\!\right]+\ldots$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$w=۲n+۲\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\!\left[\frac{n}{۲^k}\right]\!\right]-\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\!\left[\frac{۲n}{۲^k}\right]\!\right]$$

ولی

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\!\left[\frac{۲n}{۲^k}\right]\!\right]=\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\!\left[\frac{n}{۲^{k-۱}}\right]\!\right]=\sum_{k=۰}^{\infty}\left[\!\left[\frac{n}{۲^k}\right]\!\right]=n+\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\!\left[\frac{n}{۲^k}\right]\!\right]$$

و در نتیجه

$$w = ۲n + ۲\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\!\left[\frac{n}{۲^k}\right]\!\right] - n - \sum_{k=۱}^{\infty}\left[\!\left[\frac{n}{۲^k}\right]\!\right] = n + \sum_{k=۱}^{\infty}\left[\!\left[\frac{n}{۲^k}\right]\!\right]$$

$$< n + \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^k} = ۲n$$

(به روش دیگر داریم $\binom{۲n}{n} = \frac{۲n}{n}\binom{۲n-۱}{n-۱} = ۲\binom{۲n-۱}{n-۱}$ و در نتیجه $w < ۲n$.)

۵ـ۲ـ۵ حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{[۲^n x]}}{۲^n}$ را به ازای $x \geqslant ۰$ به صورت خلاصه به دست آورید.

حل. x را به شکل

$$x = [\![x]\!] + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_n}{۲^n}$$

می‌نویسیم که در آن a_n مساوی ۰ یا ۱ است و در صورتی که x به شکل $m/۲^n$ باشد(که m عددی فرد است)، به ازای همهٔ مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ k قرار می‌دهیم $a_k = ۰$.

به ازای هر n، $[\![۲^n x]\!]$ زوج است اگر و فقط اگر a_n مساوی ۰ باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که به ازای هر n، $(-۱)^{[۲^n x]} = ۱ - ۲a_n$. در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{[۲^n x]}}{۲^n} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-۲a_n}{۲^n}$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^n} - ۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_n}{۲^n}$$

$$= ۱ - ۲(x - [\![x]\!])$$

۵ـ۲ـ۶ حاصل $|x| > ۱$ ، $\sum_{(p,q)=۱}\frac{۱}{x^{p+q}-۱}$ را به صورت خلاصه به دست آورید که در آن مجموع، روی همهٔ عددهای صحیح و مثبت p و q حساب شده که p و q نسبت به هم اولند.

حل.

$$\sum_{(p,q)=۱}\frac{۱}{x^{p+q}-۱} = \sum_{(p,q)=۱}\frac{۱}{x^{p+q}}\left(\frac{۱}{۱-۱/x^{p+q}}\right)$$

$$= \sum_{(p,q)=۱}\frac{۱}{x^{p+q}}\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{x^{p+q}}\right)^n\right)$$

$$= \sum_{(p,q)=۱}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{x^{n(p+q)}}\right)$$

همین‌طور که p، q و n روی مجموعه اندیس در مجموع مورد نظر تغییر می‌کنند، توانهای $۱/x$ روی همهٔ جفتهای مرتب ممکن (i,j) از عددهای صحیح مثبت تغییر خواهند کرد. از آنجا که سری مطلقاً همگراست (زیرا

$1 < |x|/1$)، می‌توانیم با تجدید آرایش جمله‌های سری، آن را به شکل زیر بنویسیم

$$\sum_{(p,q)=1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n(p+q)}}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{x^{i+j}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{x^i}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{x^j}\right)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{x^i}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{1-1/x}-1\right)^2=\left(\frac{x}{x-1}-1\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2$$

مسائل

۵ـ۲ـ۷ فرض کنید $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ و فرض کنید که $2^p - 1$ عددی اول باشد. نشان دهید که مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های (مثبت) n، به جز خود n، دقیقاً مساوی n است. (هر عدد با این ویژگی یک عدد تام نامیده می‌شود.)

۵ـ۲ـ۸ مجموع سری $1 + 22 + 333 + \cdots + n\underbrace{(11\ldots1)}_{n}$ را به دست آورید.

۵ـ۲ـ۹ $E(n)$ را بزرگترین عدد صحیح kای بگیرید به طوری که 5^k مقسوم‌علیه صحیحی از حاصلضرب $1^1 2^2 3^3 \ldots n^n$ باشد. فرمولی برای $E(5^m)$ به صورت خلاصه بیابید که در آن m عدد صحیح و مثبتی است. هرگاه $m \to \infty$، برای $E(5^m)/5^{2m}$ چه روی می‌دهد؟

۵ـ۲ـ۱۰ دنباله‌ای به صورت $a_1 = 2$، $a_n = 3a_{n-1} + 1$ تعریف شده است. مجموع $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ را بیابید.

۵ـ۲ـ۱۱ درستی دستورهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\sum_{i=1}^{n}\sin(2k-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$

ب) $\sum_{i=1}^{n}\sin^2(2k-1)\theta = -\frac{1}{2}n - \frac{\sin 4n\theta}{4\sin 2\theta}$

۵ـ۲ـ۱۲ الف) هرگاه شخصی سکهٔ سالمی را آن‌قدر پرتاب کند تا برای اولین بار رو بیاید، احتمال آنکه این پیشامد در تعداد زوجی از پرتابها رخ دهد، چیست؟

ب) نوعی بازی به شکل زیر انجام می‌شود: بازیکن یک جفت تاس را می‌اندازد. اگر عددهای ۲، ۳ یا ۱۲ بیاید، بلافاصله باخته است و اگر ۷ یا ۱۱ بیاید، او بلافاصله می‌برد. هرگاه در اولین پرتاب عددی غیر اینها بیاید، این عدد «امتیاز» بازیکن خواهد بود و او باید آنقدر تاس بیاندازد تا «به امتیازش برسد» (یعنی دوباره همان عدد بیاید) که در این حالت برنده است یا آنکه ۷ بیاورد که در این حالت بازنده است. احتمال برد در این بازی را بیابید.

۵ـ۲ـ۱۳ اگر a، b و c ریشه‌های معادلهٔ $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ باشند،

الف) نشان دهید که a، b و c متمایزند.

ب) نشان دهید که

$$\frac{a^{1000}-b^{1000}}{a-b}+\frac{b^{1000}-c^{1000}}{b-c}+\frac{c^{1000}-a^{1000}}{c-a}$$

عددی صحیح است.

۵ـ۲ـ۱۴ الف) ثابت کنید که $\sqrt[n]{n!} \leqslant \prod_{p|n} p^{1/(p-1)}$، که در آن حاصلضرب طرف راست روی عددهای اول مثبت pای است که n را می‌شمارند. (راهنمایی: ابتدا نامساوی

$$\left[\!\left[\frac{n}{p}\right]\!\right]+\left[\!\left[\frac{n}{p^2}\right]\!\right]+\left[\!\left[\frac{n}{p^3}\right]\!\right]+\ldots \leqslant \frac{n}{p-1}$$

را ثابت کنید.)

ب) با استفاده از قسمت (الف)، ثابت کنید که تعداد عددهای اول نامتناهی است. (راهنمایی: ابتدا ثابت کنید $(n!)^2 \geqslant n^n$.)

۵ـ۲ـ۱۵ ثابت کنید که اگر $|x|<1$، $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$.

۵ـ۲ـ۱۶ صورت بسته‌ای برای $\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{2^n}/(1-x^{2^{n+1}})\right)$ وقتی که $|x|<1$، به دست آورید.

۵ـ۲ـ۱۷ الف) فرض کنید p_1، p_2، … ، p_n همهٔ عددهای صحیح کمتر از m باشند و تعریف کنید

$$\lambda(m)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1}$$

نشان دهید که $\lambda(m)=\sum\left(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_n^{a_n}\right)^{-1}$ که در آن مجموع روی همهٔ nتاییهایی از عددهای صحیح و نامنفی $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ حساب می‌شود. (راهنمایی: داریم $\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1}=1+\left(\frac{1}{p_i}\right)+\left(\frac{1}{p_i}\right)^2+\ldots$.)

ب) نشان دهید که $1+1/2+1/3+\cdots+1/m<\lambda(m)$ و نتیجه بگیرید که تعداد عددهای اول نامتناهی است.

مثالهای اضافی. ۱-۱۲-۱، ۴-۱-۴، ۴-۱-۸، ۴-۱-۹، ۴-۲-۵، ۴-۲-۸، ۴-۲-۱۲، ۴-۲-۱۸، ۴-۳-۱۳، ۴-۳-۱۸ (ج)، ۵-۱-۴، ۵-۱-۱۱، ۵-۴-۱، ۵-۴-۷، ۵-۴-۹،۷-۶-۶ .

۵ـ۳ سریهای ادغامی

برخی اوقات می‌توان مقدار سریها و حاصلضربهای نامتناهی را به کمک روش «ادغام» به دست آورد. مثالهای زیر نیازی به توضیح ندارند.

۵ـ۳ـ۱ مجموع سری نامتناهی $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)}$ را به دست آورید.

حل. ترفند حل مسأله آن است که این جمعوند را به مجموع کسرهای جزئی بشکنیم، که در اثر این کار، اکثر

جمله‌های مجموع جزئی حذف می‌شوند. به دنبال عددهایی چون A و B می‌گردیم به طوری که

$$\frac{۱}{(۳i-۲)(۳i+۱)}=\frac{A}{۳i-۲}+\frac{B}{۳i+۱}$$

این نتیجه می‌دهد

$$۱=A(۳i+۱)+B(۳i-۲)$$

و با مساوی قرار دادن ضریبها به دست می‌آوریم

$$۳A+۳B=۰$$

$$A-۲B=۱$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $A=\frac{۱}{۳}$، $B=\frac{-۱}{۳}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{\frac{۱}{۳}}{۳i-۲}-\frac{\frac{۱}{۳}}{۳i+۱}\right]\\&=\frac{۱}{۳}\left[\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۷}\right)+\left(\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۱۰}\right)+\cdots+\left(\frac{۱}{۳n-۲}-\frac{۱}{۳n+۱}\right)\right]\end{aligned}$$

در این مجموع ویژگی «ادغام» وجود دارد، یعنی: جملهٔ دوم هر جفت با جملهٔ اول جفت بعدی حذف می‌شود و بنابراین

$$S_n=\frac{۱}{۳}\left[۱-\frac{۱}{۳n+۱}\right]$$

از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع سری نامتناهی مساوی است با $\frac{۱}{۳}=\lim_{n\to\infty}S_n$.

۵ـ۳ـ۲ مجموع سری نامتناهی

$$\frac{۳}{۱\times۲\times۳}+\frac{۵}{۲\times۳\times۴}+\frac{۷}{۳\times۴\times۵}+\frac{۹}{۴\times۵\times۶}+\ldots$$

را به دست آورید.

حل. باز با استفاده از روش کسرهای جزئی به دنبال عددهایی چون A، B، C می‌گردیم به طوری که

$$\frac{۲n+۱}{n(n+۱)(n+۲)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+۱}+\frac{C}{n+۲}$$

برای این منظور به دست می‌آوریم

$$۲n+۱=A(n+۱)(n+۲)+Bn(n+۲)+Cn(n+۱)$$

با قرار دادن $n=۰$ به دست می‌آید $A=\frac{۱}{۲}$. با قرار دادن $n=-۱$ به دست می‌آید $B=۱$ و با قرار دادن $n=-۲$ به دست می‌آید $C=\frac{-۳}{۲}$. بنابراین nامین مجموع جزئی مساوی است با

$$\begin{aligned}S_n=&\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}+\frac{۱}{۲}-\frac{\frac{۳}{۲}}{۳}\right]+\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{\frac{۳}{۲}}{۴}\right]+\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{\frac{۳}{۲}}{۵}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{n-۲}+\frac{۱}{n-۱}-\frac{\frac{۳}{۲}}{n}\right]\\&+\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{n-۱}+\frac{۱}{n}-\frac{\frac{۳}{۲}}{n+۱}\right]+\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{n}+\frac{۱}{n+۱}-\frac{\frac{۳}{۲}}{n+۲}\right]\end{aligned}$$

در این حالت با استفاده از دسته‌بندی، ویژگی ادغام به وجود می‌آید: آخرین جملهٔ یک سه‌تایی، با مجموع جملهٔ وسطی دسته بعدی و جملهٔ اول دسته سوم بعد از آن، حذف می‌شود:

$$-\frac{\frac{۳}{۲}}{i}+\frac{۱}{i}+\frac{\frac{۱}{۲}}{i}=۰$$

در نتیجه، مجموع حاصل مساوی است با

$$\begin{aligned}S_n&=\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}+\frac{۱}{۲}\right]+\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}\right]+\left[\frac{-\frac{۳}{۲}}{n+۱}\right]+\left[\frac{۱}{n+۱}-\frac{\frac{۳}{۲}}{n+۲}\right]\\&=\frac{۵}{۴}-\frac{\frac{۱}{۲}}{n+۱}-\frac{\frac{۳}{۲}}{n+۲}\end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع سری نامتناهی مساوی است با $\frac{۵}{۴}=\lim_{n\to\infty}S_n$.

۳ـ۳ـ۵ سری نامتناهی $\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{m^۲n+mn^۲+۲mn}$ را به صورت عددی گویا بیان کنید.

حل. فرض کنید S مجموع مورد نظر باشد. در این صورت با حذف توضیحات مربوط به تجزیه به کسرهای جزئی، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{mn(m+n+۲)}\\&=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{m(m+n+۲)}\\&=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\sum_{m=۱}^{\infty}\left[\frac{۱/(n+۲)}{m}-\frac{۱/(n+۲)}{m+n+۲}\right]\\&=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۲)}\left[\left(۱-\frac{۱}{n+۳}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{n+۴}\right)+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n+۵}\right)+\dots\right]\\&=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۲)}\left[۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{n+۲}\right]\\&=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{n}-\frac{\frac{۱}{۲}}{n+۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n+۲}\right)\\&=\frac{۱}{۲}\left[\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\right)+\dots\right]\\&=\frac{۱}{۲}\left[\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)+\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\right)+\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}\right)+\frac{۱}{۵}\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}\right)+\dots\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱۱}{۶}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲۵}{۱۲}+\left(\frac{۱}{۳\times۴}+\frac{۱}{۴\times۵}+\frac{۱}{۵\times۶}+\cdots\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{۱}{۳\times۵}+\frac{۱}{۴\times۶}+\frac{۱}{۵\times۷}+\cdots\right)\right]\\
&=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱۱}{۶}+\frac{۲۵}{۲۴}+\left(\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}\right)+\cdots\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{۱}{۲}\left(\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}\right)+\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}\right)+\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}\right)+\cdots\right)\right]\\
&=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱۱}{۶}+\frac{۲۵}{۲۴}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}\right]\\
&=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۴۴+۲۵+۸+۷}{۲۴}\right]=\frac{۸۴}{۴۸}=\frac{۷}{۴}
\end{aligned}
$$

۴ـ۳ـ۵ مجموع سری $\left(\frac{x}{۳^n}\right)$ $\sum_{n=۱}^{\infty} ۳^{n-۱}\sin^۳$ را به دست آورید.

حل. با استفاده از قضیهٔ دوموآور، داریم

$$
\begin{aligned}
\sin ۳\theta &=\mathrm{Im}\,(e^{۳i\theta})=\mathrm{Im}\,\left((e^{i\theta})^۳\right)=\mathrm{Im}\,[\cos\theta+i\sin\theta]^۳\\
&=\mathrm{Im}\,\left[\cos^۳\theta+۳\cos^۲\theta i\sin\theta+۳\cos\theta\, i^۲\sin^۲\theta+i^۳\sin^۳\theta\right]\\
&=۳\cos^۲\theta\sin\theta-\sin^۳\theta=۳\left[(۱-\sin^۲\theta)\sin\theta\right]-\sin^۳\theta\\
&=۳\sin\theta-۴\sin^۳\theta
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$\sin^۳\theta=\frac{۳}{۴}\sin\theta-\frac{۱}{۴}\sin ۳\theta$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
S_k&=\sum_{n=۱}^{k}۳^{n-۱}\sin^۳\left(\frac{x}{۳^n}\right)=\sum_{n=۱}^{k}۳^{n-۱}\left[\frac{۳}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳^n}\right)-\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳^{n-۱}}\right)\right]\\
&=\left(\frac{۳}{۴}\sin\frac{x}{۳}-\frac{۱}{۴}\sin x\right)+\left(\frac{۳^۲}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳^۲}\right)-\frac{۳}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳}\right)\right)\\
&\quad+\left(\frac{۳^۳}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳^۳}\right)-\frac{۳^۲}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳^۲}\right)\right)+\cdots+\left(\frac{۳^k}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳^k}\right)-\frac{۳^{k-۱}}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳^{k-۱}}\right)\right)\\
&=\frac{۳^k}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳^k}\right)-\frac{۱}{۴}\sin x
\end{aligned}
$$

در نتیجه مجموع سری مساوی است با

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}S_k&=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{۳^k}{۴}\sin\left(\frac{x}{۳^k}\right)-\frac{۱}{۴}\sin x\right]\\
&=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{x}{۴}\frac{\sin(x/۳^k)}{(x/۳^k)}-\frac{۱}{۴}\sin x\right]=\frac{x-\sin x}{۴}
\end{aligned}
$$

روش ادغام به ویژه در حل مسائل مربوط به رابطه‌های بازگشتی مفید است. در اینجا مثالی را ذکر می‌کنیم. مثالهای دیگری در بخش بعدی می‌آیند.

۵ـ۳ـ۵ دنباله‌ای از عددها به ازای $n > ۰$، در معادلهٔ بازگشتی

$$x_۰ = ۰ \qquad , \qquad nx_n = (n-۲)x_{n-۱} + ۱$$

صدق می‌کنند. x_n را به صورت خلاصه به دست آورید.

حل. می‌بینیم که $x_۰ = ۰$، $x_۱ = ۱$، $x_۲ = \frac{۱}{۲}$، $x_۳ = \frac{۱}{۲}$ و در نتیجه به ازای هر $n \geqslant ۲$، $x_n = \frac{۱}{۲}$. ولی یافتن الگویی برای معادله‌های بازگشتی همیشه به این سادگی نیست. از این رو مسأله را به روش آموزندهٔ زیر حل می‌کنیم.

به ازای $n \geqslant ۲$، دو طرف معادلهٔ بازگشتی را در $n - ۱$ ضرب می‌کنیم و به ازای هر n، قرار می‌دهیم $y_n = n(n-۱)x_n$. معادلهٔ بازگشتی بر حسب y_n به شکل زیر می‌شود

$$y_n = y_{n-۱} + (n-۱) \qquad , \qquad y_۱ = ۰$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} y_۲ - y_۱ &= ۱ \\ y_۳ - y_۲ &= ۲ \\ y_۴ - y_۳ &= ۳ \\ &\vdots \\ y_n - y_{n-۱} &= n - ۱ \end{aligned}$$

پس از جمع کردن(به ادغام انجام شده دقت کنید)، به دست می‌آوریم

$$y_n = ۱ + ۲ + \cdots + (n-۱) = \frac{(n-۱)n}{۲}$$

و در نتیجه

$$x_n = \frac{۱}{۲} \qquad , \qquad n \geqslant ۲$$

مسائل

۶ـ۳ـ۵ مجموعهای زیر را به‌دست آورید:

الف) $\frac{۱}{۲!} + \frac{۲}{۳!} + \frac{۳}{۴!} + \cdots + \frac{n-۱}{n!}$

ب) $۱ \times ۱! + ۲ \times ۲! + ۳ \times ۳! + \cdots + n \times n!$

ج) $\frac{۲}{۱ \times ۲ \times ۳} + \frac{۴}{۲ \times ۳ \times ۴} + \frac{۶}{۳ \times ۴ \times ۵} + \cdots + \frac{۲n}{n(n+۱)(n+۲)}$

۷ـ۳ـ۵ حاصلضربهای نامتناهی زیر را حساب کنید:

الف) $\prod_{n=۱}^{\infty}(۱ - ۱/n^۲)$

ب) $\prod_{n=۱}^{\infty}(n^۳ - ۱)/(n^۳ + ۱)$

ج) نشان دهید که می‌توان به کمک اتحاد $P = e^{\log P}$ حاصلضربهای نامتناهی را به یک سری نامتناهی تبدیل کرد. قسمت (الف) را با استفاده از این روش و محاسبهٔ سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - 1/n^2)$ حل کنید.

۵ـ۳ـ۸ ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مثبت m،

$$\frac{m}{(m+1)(2m+1)} < \sum_{r=m+1}^{2m} \frac{1}{r^2} < \frac{m}{(m+1)(2m+1)} + \frac{3m+1}{4m(m+1)(2m+1)}$$

(راهنمایی: توجه کنید که $1/r(r+1) < 1/r^2 < 1/(r+1)(r-1)$.)

۵ـ۳ـ۹ فرض کنید F_1، F_2، ... دنبالهٔ فیبوناتچی باشد. از ویژگی ادغام برای اثبات اتحادهای زیر استفاده کنید:

الف) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ (راهنمایی: $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$).

ب) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

ج) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ (راهنمایی: $F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$).

د) $\sum_{n=2}^{\infty} 1/F_{n-1}F_{n+1} = 1$ (نشان دهید که $1/F_{n-1}F_{n+1} = 1/F_{n-1}F_n - 1/F_n F_{n+1}$).

ه) $\sum_{n=2}^{\infty} F_n/F_{n-1}F_{n+1} = 1$.

۵ـ۳ـ۱۰ مجموع سریهای نامتناهی زیر را به دست آورید:

الف) $\sin^3 x + \frac{1}{3}\sin^3 3x + \frac{1}{3^2}\sin^3 3^2 x + \ldots$،

ب) $\cos^3 x - \frac{1}{3}\cos^3 3x + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2 x + \ldots$.

۵ـ۳ـ۱۱ الف) بااستفاده از اتحاد $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ مجموع اولین n مربع را به دست آورید. (راهنمایی: با فرض این که k در اتحاد بالا، از ۱ تا n تغییر کند، به مجموع طرف چپ و طرف راست تساوی حاصل توجه کنید.)

ب) همانند قسمت (الف)، با استفاده از روش ادغام مجموع n مکعب اولیه را به دست آورید.

ج) مقدار $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^5} \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(5h^4 - 18h^2k^2 - 5k^4)\right]$ را بیابید.

۵ـ۳ـ۱۲ نشان دهید که عکس هر عدد صحیح بزرگتر از ۱ مساوی است با مجموع تعدادی متناهی از جمله‌های متوالی سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1)$.

۵ـ۳ـ۱۳ اگر $m > 1$ عددی صحیح و x حقیقی باشد، تعریف کنید

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m-1} \left[\!\left[\frac{x + im^k}{m^{k+1}} \right]\!\right]$$

نشان دهید که

$$f(x)=\begin{cases}[\![x]\!] & , \quad x \geqslant 0 \text{ اگر } \\ [\![x+1]\!] & , \quad x<0 \text{ اگر }\end{cases}$$

(راهنمایی: ۱-۲-۳ را ببینید.)

۵-۳-۱۴ رابطه‌های بازگشتی زیر را (با استفاده از روشهای این بخش) حل کنید.

الف) $x_0=1$ و به ازای $n>0$، $x_n=2x_{n-1}+1$. (راهنمایی: هر دو طرف را بر 2^n تقسیم کنید.)

ب) $x_0=0$ و به ازای $n>0$، $nx_n=(n+2)x_{n-1}+1$.

ج) $x_0=1$، $x_1=1$، $x_2=2$ و به ازای $n>0$، $x_{n+3}=x_n+3$.

۵-۳-۱۵ نشان دهید که n خط راست که هیچ دوتای آنها موازی نبوده و هیچ سه‌تای آنها در یک نقطه همرس نیستند، صفحه را به $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ ناحیه تقسیم می‌کنند.

۵-۳-۱۶ فرض کنید

$$d_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

نشان دهید که

$$d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

(راهنمایی: سری ادغامی $\sum_{i=1}^{n-1}(d_{i+1}-d_i)$ را در نظر بگیرید.) نتیجه بگیرید که اگر $n\to\infty$، آنگاه $d_n\to\log 2$. (راه اثبات دیگری برای قسمت اول آن است که تفاضل هر عبارت را از مجموع همساز $1+1/2+\cdots+1/(2(n-1))$ در نظر بگیرید. همچنین بخش ۶-۸ را ببینید.)

مثالهای اضافی. ۶-۶-۶، ۷-۱-۸، ۷-۲-۲.

۵-۴ سریهای توانی

سری توانی عبارتی است به شکل

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\ldots$$

که در آن a_0، a_1، a_2، ... عددهای حقیقی‌اند.

هرگاه یک سری توانی داشته باشیم، می‌توانیم تابعی چون $f(x)$ تعریف کنیم که دامنهٔ آن مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی x باشد که سری توانی مورد نظر را به یک سری نامتناهی همگرا تبدیل می‌کنند و مقدار این تابع در هر نقطهٔ c به صورت

$$f(c)=a_0+a_1c+a_2c^2+\cdots+a_nc^n+\ldots$$

تعریف می‌شود، به شرط آنکه طرف راست همگرا باشد.

می‌توان نشان داد که برای هر سری توانی $\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$، دقیقاً یکی از حالتهای زیر برقرار است:

الف) به ازای هر عدد حقیقی x، سری همگراست.

ب) سری تنها به ازای $x=0$ همگراست.

ج) عددی حقیقی چون r وجود دارد که سری به ازای $|x| < r$ همگرا و به ازای $|x| > r$ واگراست.
هرگاه (الف) برقرار باشد، شعاع همگرایی سری را $+\infty$ تعریف می‌کنیم، هرگاه (ب) برقرار باشد آن را ۰ و هرگاه (ج) برقرار باشد، آن را مساوی r تعریف می‌کنیم.

می‌توانیم پرسش زیر را مطرح کنیم: هرگاه تابعی چون f داشته باشیم، آیا می‌توان f را به صورت یک سری توانی نمایش داد؟ یکی از راههای پاسخگویی به این پرسش قضیهٔ تیلور (با باقیمانده) است: هرگاه بتوان روی بازهٔ $[0,a]$ به دفعات دلخواه از f مشتق گرفت، آنگاه

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

که در آن به ازای cای که $0 < c < a$، $R_n(x) = f^{(n+1)}(c)a^{n+1}/(n+1)!$. نکته مهم در اینجا آن است که اگر $R_n(x)$ خوش رفتار باشد، یعنی وقتی که $n \to \infty$، $R_n(x) \to 0$، آنگاه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

به این ترتیب راهی برای یافتن سری توانی برای تابعی چون $f(x)$ در اختیار داریم.

با استفاده از این روش می‌توانیم بسط سری توانی اکثر توابع مقدماتی معمولی را بیابیم. سریهای زیر آنقدر مورد استفاده قرار می‌گیرند، که باید آنها را به خاطر سپرد:

الف) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

ب) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$

ج) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

د) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1$

ه) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad |x| < 1$

و) $|x| < 1$، r حقیقی، $(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots + \binom{r}{n}x^n + \ldots$ که در آن

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{n!}$$

۵ـ۴ـ۱ ثابت کنید که e عددی گنگ است.

حل. فرض کنید $e = h/k$ که در آن h و k عددهای صحیح‌اند. با استفاده از بسط سری توانی e^x و با قرار دادن $x = 1$، به دست می‌آوریم

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \left[\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots\right]$$

دو طرف را در $k!$ ضرب می‌کنیم و حاصل را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$k!\left[\frac{h}{k} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{k!}\right] = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots$$

توجه کنید که طرف راست تساوی عددی مثبت و طرف چپ عددی صحیح است. بنابراین طرف چپ باید

عددی صحیح و مثبت باشد. ولی در طرف راست داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)(k+۳)}+\dots\\
&=\frac{۱}{k+۱}\left[۱+\frac{۱}{k+۲}+\frac{۱}{(k+۲)(k+۳)}+\dots\right]\\
&<\frac{۱}{k+۱}\left[۱+\frac{۱}{k+۱}+\left(\frac{۱}{k+۱}\right)^۲+\dots\right]\\
&=\frac{۱}{k+۱}\left[\frac{۱}{۱-\left(\frac{۱}{k+۱}\right)}\right]=\frac{۱}{k+۱}\left(\frac{k+۱}{k}\right)=\frac{۱}{k}<۱
\end{aligned}$$

در نتیجه طرف راست، عدد صحیح مثبتی نیست و این تناقض است. بنابراین e باید عددی گنگ باشد.

۵ـ۴ـ۲ نشان دهید که نمایش سری توانی برای سری نامتناهی $\sum_{n=۰}^{\infty} x^n(x-۱)^{۲n}/n!$ نمی‌تواند سه ضریب متوالی صفر داشته باشد.

حل. مجموع سری مساوی است با $f(x)=e^{x(x-۱)^۲}$. برای یافتن نمایش سری توانی، لازم است که به ازای $n=۱,۲,۳,\dots$، $f^{(n)}(۰)$ را محاسبه کنیم. داریم

$$f'(x)=e^{x(x-۱)^۲}(۳x^۲-۴x+۱)$$

که به شکل

$$f'(x)=f(x)g(x)$$

است که در آن $g(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ است. از اینجا می‌شود که

$$\begin{aligned}
f''(x)&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\\
f'''(x)&=f''(x)g(x)+۲f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)\\
f^{(\mathrm{iv})}(x)&=f'''(x)g(x)+۳f''(x)g'(x)+۳f'(x)g''(x)
\end{aligned}$$

(توجه کنید که $g'''(x)=۰$). بااستدلال به کمک استقرا، می‌توان نشان داد که به ازای $n=۳,۴,۵,\dots$ و عددهای صحیحی چون a_n و b_n داریم

$$f^{(n+۱)}(x)=f^{(n)}(x)g(x)+a_nf^{(n-۱)}(x)g'(x)+b_nf^{(n-۲)}(x)g''(x)$$

فرض کنید که سه‌جملهٔ متوالی در سری توانی $f(x)$ صفر باشند، مثلاً

$$f^{(n)}(۰)=f^{(n-۱)}(۰)=f^{(n-۲)}(۰)=۰$$

در این صورت معادلهٔ بازگشتی بند بالا ایجاب می‌کند که به ازای هر $k>n$، $f^{(k)}(۰)=۰$ و این به آن معنی است که $f(x)$ یک چندجمله‌ای است که تناقض است. بنابراین، اجباراً نتیجه می‌گیریم که سری توانی $f(x)$ نمی‌تواند سه ضریب متوالی صفر داشته باشد.

۵ـ۴ـ۳ حد $\lim_{x\to\infty}\left[(e/۲)x+x^۲\left[(۱+۱/x)^x-e\right]\right]$ را به دست آورید.

حل. چندجملهٔ اول سری تیلور $(۱+۱/x)^x$ را بر حسب توانهای $۱/x$ به دست می‌آوریم. داریم

$$(۱+\frac{۱}{x})^x = e^{x\log(۱+۱/x)} = \exp\left\{x\left[(۱/x) - \frac{(۱/x)^۲}{۲} + \frac{(۱/x)^۳}{۳} + \dots\right]\right\}$$

$$= \exp\left[۱ - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{x}\right) + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{x}\right)^۲ - \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{x}\right)^۳ + \dots\right]$$

$$= e\cdot e^{-\frac{۱}{۲}(۱/x)} e^{\frac{۱}{۳}(۱/x)^۲} e^{-\frac{۱}{۴}(۱/x)^۳}\dots$$

$$= e\left[۱ - \frac{۱}{۲x} + \frac{۱}{۲!}\left(\frac{۱}{۲x}\right)^۲ - \dots\right]\left[۱ + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{x}\right)^۲ + \frac{۱}{۲!}\left(\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{x}\right)^۲\right)^۲ + \dots\right]\dots$$

$$= e\left[۱ - \frac{۱}{۲x} + \frac{۱۱}{۲۴}\left(\frac{۱}{x}\right)^۲ + \frac{۱}{x}\text{توانهای بالاتر}\right]$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e}{۲}x + x^۲\left[\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^x - e\right]\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{e}{۲}x + x^۲\left[e - \frac{e}{۲x} + \frac{۱۱e}{۲۴}\left(\frac{۱}{x}\right)^۲ + \dots - e\right]\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{۱۱e}{۲۴} + \frac{۱}{x}\text{توانهای بالاتر}\right]$$

$$= \frac{۱۱e}{۲۴}$$

یکی از حقایق بسیار سودمند دربارهٔ سریهای توانی آن است که می‌توان از آنها در درون بازهٔ همگرایی آنها، جمله به جمله مشتقگیری یا انتگرالگیری کرد. مقصود آن است که اگر $\sum a_n x^n$ شعاع همگرایی r داشته باشد و $f(x) = \sum a_n x^n$، آنگاه

$$f'(x) = \sum n a_n x^{n-۱} \quad , \quad \int_۰^x f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+۱}x^{n+۱}$$

و هر دو سری به دست آمده، شعاع همگرایی r دارند.

یکی از نتایج بحث بالا آن است که نمایش سری توانی تابعی مانند f منحصر به فرد است، یعنی اگر $f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$، آنگاه به ازای هر n، $a_n = b_n$. در حقیقت $a_n = b_n = f^{(n)}(۰)/n!$. برای مشاهدهٔ این مطلب، کافی است از دو طرف $f(x) = \sum a_n x^n$ متوالیاً مشتق بگیرید و هر بار، مقدار مشتق حاصل را در $x = ۰$ حساب کنید. برای مثال، $f(۰) = a_۰$، $f'(x) = \sum n a_n x^{n-۱}$، در نتیجه $f'(۰) = a_۱$، $f''(x) = \sum n(n-۱)a_n x^{n-۲}$، و در نتیجه $f''(۰) = ۲!a_۲$ و یا به طور معادل $a_۲ = f''(۰)/۲!$ و الی‌آخر.

۴ـ۴ـ۵ مجموع سری نامتناهی $\frac{۱^۲}{۰!} + \frac{۲^۲}{۱!} + \frac{۳^۲}{۲!} + \frac{۴^۲}{۳!} + \dots$ را به دست آورید.

حل. کار را با سری $e^x = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ آغاز می‌کنیم. دو طرف را در x ضرب می‌کنیم:

$$xe^x = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{n+۱}}{n!}$$

و از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$(۱ + x)e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(n + ۱)x^n}{n!}$$

دوباره دو طرف را در x ضرب می‌کنیم:

$$(x + x^۲)e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(n + ۱)x^{n+۱}}{n!}$$

و با مشتقگیری به دست می‌آوریم:

$$(۱ + ۳x + x^۲)e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(n + ۱)^۲ x^n}{n!}$$

حال قرار می‌دهیم $x = ۱$ و در می‌یابیم که

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(n + ۱)^۲}{n!} = ۵e$$

قضیهٔ زیر غالباً مفید است.

قضیهٔ حد آبل. فرض کنید $r > ۰$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n r^n$ همگرا باشد. در این صورت سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ به ازای $|x| < r$ مطلقاً همگراست و داریم

$$\lim_{x \to r^-} \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n r^n$$

۵ـ۴ـ۵ مجموع سری نامتناهی $\dots + \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۴} - ۱$ را به دست آورید.

حل. می‌دانیم که

$$\frac{۱}{۱ + x^۳} = ۱ - x^۳ + x^۶ - x^۹ + \dots \qquad , \qquad |x| < ۱$$

در نتیجه

$$\int_۰^x \frac{dx}{۱ + x^۳} = x - \frac{x^۴}{۴} + \frac{x^۷}{۷} - \frac{x^{۱۰}}{۱۰} + \dots \qquad , \qquad |x| < ۱$$

حال (با توجه به آزمون سریهای متناوب) سری طرف راست به ازای $x = ۱$ همگرا است و در نتیجه بنابر قضیهٔ حد آبل،

$$۱ - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۱۰} + \dots = \lim_{x \to ۱^-} \int_۰^x \frac{dx}{۱ + x^۳}$$

می‌توان انتگرال را بااستفاده ازکسرهای جزئی حل کرد (که در اینجا جزئیات این کار مورد علاقه ما نیست) و به دست آورد

$$\int_۰^x \frac{dx}{۱ + x^۳} = \frac{۱}{۳}\left[\log \frac{۱ + x}{\sqrt{۱ - x + x^۲}} + \sqrt{۳}\left[\arctan \frac{۲x - ۱}{\sqrt{۳}} - \arctan \frac{-۱}{\sqrt{۳}}\right]\right]$$

در نتیجه مجموع سری مساوی است با $\frac{۱}{۳}\left[\log ۲ + \frac{\pi}{\sqrt{۳}}\right]$.

۵ـ۴ـ۶ فرض کنید $S_n = \sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i+۱}/i$ و $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. نشان دهید که $\sum_{n=۱}^{\infty}(S_n - S) = \log ۲ - \frac{۱}{۲}$.

حل. باید سری دوگانهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+i}}{n+i}$ را محاسبه کنیم. به این منظور، تابع

$$F(x) = \sum_{j=۱}^{\infty}\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{(-x)^{i+j}}{i+j} \quad , \quad |x| < ۱$$

را در نظر بگیرید. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}F'(x) &= \sum_{j=۱}^{\infty}\sum_{i=۱}^{\infty}(-x)^{i+j-۱}(-۱) = \sum_{j=۱}^{\infty}(-۱)(-x)^{j}\sum_{i=۱}^{\infty}(-x)^{i-۱}\\ &= \sum_{j=۱}^{\infty}(-۱)(-x)^{j}\frac{۱}{۱+x} = \frac{x}{۱+x}\sum_{j=۰}^{\infty}(-x)^{j}\\ &= \frac{x}{(۱+x)^{۲}} = \frac{۱}{۱+x} - \frac{۱}{(۱+x)^{۲}}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{۰}^{x} F'(x)dx = \int_{۰}^{x}\frac{dx}{۱+x} - \int_{۰}^{x}\frac{dx}{(۱+x)^{۲}}$$

$$F(x) - F(۰) = \log(۱+x)\Big]_{۰}^{x} + \frac{۱}{(۱+x)}\Big]_{۰}^{x}$$

و در می‌یابیم که

$$F(x) = \log(۱+x) + \frac{۱}{۱+x} - ۱$$

سری $F(x)$ به ازای $x = ۱$ همگراست، در نتیجه بنابر قضیهٔ حد آبل،

$$F(۱) = \log ۲ + \frac{۱}{۲} - ۱ = \log ۲ - \frac{۱}{۲}$$

۵ـ۴ـ۷ هرگاه سری $a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + \ldots$ مفروض باشد که در آن $a_n = (n^۲+۱)۳^n$، نشان دهید که رابطه‌ای به شکل

$$a_n + pa_{n+۱} + qa_{n+۲} + ra_{n+۳} = ۰$$

وجود دارد که در آن p، q و r مستقل از n هستند. این ثابتها را بیابید و مجموع سری را به دست آورید.

حل. با قرار دادن مقدارهای a_n در رابطهٔ بازگشتی، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}&(n^۲+۱)۳^n + p(n^۲+۲n+۲)۳^{n+۱}\\ &\quad + q(n^۲+۴n+۵)۳^{n+۲} + r(n^۲+۶n+۱۰)۳^{n+۳} = ۰\end{aligned}$$

حال دو طرف را بر ۳^n تقسیم می‌کنیم. سپس با مساوی قرار دادن ضریبها، در می‌یابیم که p، q و r باید در

معادله‌های زیر صدق کنند:

$$3p + 9q + 27r = -1$$
$$2p + 12q + 54r = 0$$
$$6p + 45q + 270r = -1$$

این معادله‌ها دارای جواب $p = -1$، $q = \frac{1}{3}$ و $r = -\frac{1}{27}$ هستند.برای حل قسمت دوم، می‌خواهیم مجموع سری $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)3^n x^n$ را به‌دست آوریم. این سری به دو بخش تقسیم می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2(3x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$

فرض کنید $S = \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$. اگر $|x| < \frac{1}{3}$، آنگاه $S = 1/(1-3x)$. در نتیجه از تساوی

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n = \frac{1}{1-3x} \qquad , \qquad |x| < \frac{1}{3}$$

نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(3x)^{n-1} \times 3 = \frac{3}{(1-3x)^2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n(3x)^n = \frac{3x}{(1-3x)^2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2(3x)^{n-1} \times 3 = \frac{d}{dx}\left[\frac{3x}{(1-3x)^2}\right] = \frac{9x+3}{(1-3x)^3}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2(3x)^n = \frac{3x(3x+1)}{(1-3x)^3}$$

با ترکیب این نتایج، به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)(3x)^n = \frac{3x(3x+1)}{(1-3x)^3} + \frac{1}{1-3x} = \frac{18x^2 - 3x + 1}{(1-3x)^3}$$

۸ـ۴ـ۵ حاصل $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-4)^k \binom{n+k}{2k}$ را به طور خلاصه به دست آورید.

حل. می‌توانیم چند جملهٔ اول را محاسبه کنیم:

$$S_0 = 1$$
$$S_1 = \binom{1}{0} - 4\binom{2}{2} = 1 - 4 = -3$$

$$S_۲=\binom{۲}{۰}-۴\binom{۳}{۲}+۱۶\binom{۴}{۴}=۱-۱۲+۱۶=۵$$

$$\begin{aligned}S_۳&=\binom{۳}{۰}-۴\binom{۴}{۲}+۱۶\binom{۵}{۴}-۶۴\binom{۶}{۶}\\&=۱-۲۴+۸۰-۶۴=-۷\end{aligned}$$

با توجه به این الگو، انتظار داریم که $S_n=(-۱)^n(۲n+۱)$.

هرگاه بخواهیم از استقرای ریاضی برای اثبات این حدس استفاده کنیم، به ناچار باید به دنبال رابطه‌ای بازگشتی باشیم. این کار به استدلال زیر می‌انجامد:

$$\begin{aligned}\binom{n+k}{۲k}&=\binom{n+k-۱}{۲k-۱}+\binom{n+k-۱}{۲k}\\&=\left[\binom{n+k-۲}{۲k-۲}+\binom{n+k-۲}{۲k-۱}\right]+\binom{n+k-۱}{۲k}\\&=\binom{n+k-۲}{۲k-۲}+\left[\binom{n+k-۱}{۲k}-\binom{n+k-۲}{۲k}\right]+\binom{n+k-۱}{۲k}\\&=\binom{n+k-۲}{۲k-۲}+۲\binom{n+k-۱}{۲k}-\binom{n+k-۲}{۲k}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=۰}^{n}(-۴)^k\binom{n+k}{۲k}\\&=\sum_{k=۰}^{n}(-۴)^k\binom{n+k-۲}{۲k-۲}+۲\sum_{k=۰}^{n}(-۴)^k\binom{n+k-۱}{۲k}-\sum_{k=۰}^{n}(-۴)^k\binom{n+k-۲}{۲k}\\&=\sum_{k=۰}^{n}(-۴)^k\binom{n+k-۲}{۲k-۲}+۲\sum_{k=۰}^{n-۱}(-۴)^k\binom{n-۱+k}{۲k}-\sum_{k=۰}^{n-۲}(-۴)^k\binom{n-۲+k}{۲k}\\&=-۴\sum_{k=۰}^{n}(-۴)^{k-۱}\binom{n+k-۲}{۲k-۲}+۲S_{n-۱}-S_{n-۲}\\&=-۴\sum_{k=۰}^{n-۱}(-۴)^k\binom{n+k-۱}{۲k}+۲S_{n-۱}-S_{n-۲}\\&=-۴S_{n-۱}+۲S_{n-۱}-S_{n-۲}\\&=-۲S_{n-۱}-S_{n-۲}\end{aligned}$$

با استفاده از این رابطهٔ بازگشتی می‌توانیم ادعای خود یعنی $S_n=(-۱)^n(۲n+۱)$ را به کمک استقرای ریاضی ثابت کنیم.

رابطهٔ بازگشتی

$$S_۰=۱\quad,\quad S_۱=-۳\quad,\quad S_n=-۲S_{n-۱}-S_{n-۲}$$

را در نظر می‌گیریم و برای روشن شدن مطلب، فرض می‌کنیم که با مشاهدهٔ چند حالت اول از این رابطه، نتوانیم

دستور کلی S_n را کشف کنیم. در اینجا یک تکنیک برای کشف این دستور ارائه می‌کنیم. روشی که به کار می‌بریم، استفاده از تابع مولد $F(x)$ به صورت زیر است.

فرض کنید $F(x)$ نام سری توانی‌ای باشد که ضریبهایش $S_۰$، $S_۱$، $S_۲$، ... هستند، یعنی

$$F(x) = S_۰ + S_۱ x + S_۲ x^۲ + \cdots + S_n x^n + \dots$$

در عملیاتی که انجام می‌دهیم، فرض می‌کنیم که این سری در نقطهٔ x به تابع $F(x)$ همگراست. در نتیجه

$$\begin{aligned} ۲xF(x) &= ۲S_۰ x + ۲S_۱ x^۲ + ۲S_۲ x^۳ + \dots + ۲S_{n-۱} x^n + \dots \\ x^۲ F(x) &= \qquad\quad S_۰ x^۲ + \ S_۱ x^۳ + \dots + \ S_{n-۲} x^n + \dots \end{aligned}$$

پس از جمع کردن این دو تساوی و استفاده از این حقیقت که $S_n + ۲S_{n-۱} + S_{n-۲} = ۰$، در می‌یابیم که

$$(۱ + ۲x + x^۲)F(x) = S_۰ + (S_۱ + ۲S_۰)x$$

و یا به طور معادل

$$F(x) = \frac{۱ - x}{(۱ + x)^۲}$$

حال طرف راست این معادله را به صورت یک سری توانی می‌نویسیم. برای این کار، ابتدا از دو طرف تساوی

$$\frac{۱}{۱ + x} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n x^n$$

مشتق می‌گیریم تا به دست آوریم

$$\frac{-۱}{(۱ + x)^۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n n x^{n-۱}$$

سپس دو طرف را در $۱ - x$ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n n(x - ۱)x^{n-۱} \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n n x^n - \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n n x^{n-۱} \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n n x^n + \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n (n + ۱) x^n \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n (۲n + ۱) x^n \end{aligned}$$

در اینجا دوباره می‌بینیم که ضریب x^n برابر است با $S_n = (-۱)^n(۲n + ۱)$.

درست است که در اینجا روش استفاده از تابع مولد به درستی و به صورت گام به گام توجیه نشد، زیرا ملاحظات مربوط به همگرایی را به طور کامل نادیده گرفته‌ایم. با وجود این می‌توانیم از این روش برای فرمولبندی حدسهایمان (دربارهٔ حل رابطهٔ بازگشتی) در مسائلی از این نوع استفاده کنیم و سپس می‌توانیم این حدسها را با استفاده از راههای دیگری (مانند استقرای ریاضی) ثابت کنیم.

۵ـ۴ـ۹ مجموع سری متناهی $a_۰ + a_۱ + \cdots + a_n$ را بیابید که در آن $a_۰ = ۲$ ، $a_۱ = ۵$ و به ازای $n > ۱$، $a_n = ۵a_{n-۱} - ۶a_{n-۲}$.

حل. چند جملهٔ اول دنبالهٔ a_i عبارت‌اند از

$$۲, ۵, ۱۳, ۳۵, ۹۷, ۲۷۵, ۳۹۳, \ldots$$

در اینجا دستور کلی جملهٔ nام روشن نیست، در نتیجه به تکنیک تابعهای مولد باز می‌گردیم. فرض کنید

$$F(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots + a_nx^n + \ldots$$

داریم

$$-۵xF(x) = -۵a_۰x - ۵a_۱x^۲ - \cdots - ۵a_{n-۱}x^n - \ldots$$
$$۶x^۲F(x) = \qquad ۶a_۰x^۲ + \cdots + ۶a_{n-۲}x^n + \ldots$$

پس از جمع کردن دو تساوی و استفاده از رابطهٔ بازگشتی $a_n - ۵a_{n-۱} + ۶a_{n-۲} = ۰$، به دست می‌آوریم

$$(۱ - ۵x + ۶x^۲)F(x) = a_۰ + (a_۱ - ۵a_۰)x$$

و در نتیجه

$$F(x) = \frac{۲ - ۵x}{(۱ - ۲x)(۱ - ۳x)}$$

این کسر را به شکل مجموع کسرهای جزئی می‌نویسیم و با استفاده از سری هندسی در می‌یابیم که

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{۱}{۱ - ۲x} + \frac{۱}{۱ - ۳x} \\ &= \sum_{i=۰}^{\infty}(۲x)^i + \sum_{i=۰}^{\infty}(۳x)^i \\ &= \sum_{i=۰}^{\infty}(۲^i + ۳^i)x^i \end{aligned}$$

در نتیجه به ازای $i = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$، $a_i = ۲^i + ۳^i$. [برای امتحان می‌توانیم این دستور را با استفاده از استقرا ثابت کنیم. توجه کنید که به ازای $i \geqslant ۲$،

$$\begin{aligned} a_i = ۵a_{i-۱} - ۶a_i &= ۵(۲^{i-۱} + ۳^{i-۱}) - ۶(۲^{i-۲} + ۳^{i-۲}) \\ &= ۵(۲^{i-۱} + ۳^{i-۱}) - ۳ \times ۲^{i-۱} - ۲ \times ۳^{i-۱} = ۲^i + ۳^i \end{aligned}$$

همچنین، $a_۰ = ۲^۰ + ۳^۰ = ۲$ و $a_۱ = ۲ + ۳ = ۵$.]

حال آماده‌ایم که مجموع را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} a_۰ + a_۱ + \cdots + a_n &= \sum_{i=۰}^{n}(۲^i + ۳^i) = \sum_{i=۰}^{n} ۲^i + \sum_{i=۰}^{n} ۳^i \\ &= \frac{۲^{n+۱} - ۱}{۲ - ۱} + \frac{۳^{n+۱} - ۱}{۳ - ۱} = ۲^{n+۱} - ۱ + \frac{۳^{n+۱} - ۱}{۲} \\ &= \frac{۲^{n+۲} + ۳^{n+۱} - ۳}{۲} \end{aligned}$$

۵ـ۴ـ۱۰ صورت خلاصه‌ای برای T_n بیابید در صورتی که $T_0 = 1$ و به ازای $n \geqslant 1$،

$$T_n = T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_0$$

حل. این رابطهٔ بازگشتی در ۲-۵-۱۲ مطرح شده بود. برای حل آن، فرض می‌کنیم

$$f(x) = T_0 + T_1 x + T_2 x^2 + \cdots + T_n x^n + \ldots$$

و قرار می‌دهیم

$$F(x) = xf(x) = T_0 x + T_1 x^2 + T_2 x^3 + \cdots + T_n x^{n+1} + \ldots$$

دلیل استفاده از این گام آن است که

$$(F(x))^2 = T_0^2 x^2 + (T_0 T_1 + T_1 T_0) x^3 + \cdots + (T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_0) x^{n+1} + \ldots$$

در نتیجه با توجه به رابطهٔ بازگشتی داریم

$$\begin{aligned}(F(x))^2 &= T_1 x^2 + T_2 x^3 + \cdots + T_n x^{n+1} + \ldots \\ &= F(x) - T_0 x\end{aligned}$$

با استفاده از دستور معادلهٔ درجه دوم، در می‌یابیم که

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

(علامت منفی را انتخاب کرده‌ایم زیرا $F(0) = 0$. در صورت انتخاب علامت مثبت، نتیجه می‌شد $F(0) = 1$.)

حال با استفاده از بسط سری توانی، داریم

$$\sqrt{1 - 4x} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-4x) + \binom{\frac{1}{2}}{2}(-4x)^2 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4x)^{n+1} + \ldots$$

از اینجا نتیجه می‌شود که ضریب x^{n+1} در $F(x)$ مساوی است با

$$\begin{aligned}T_n &= -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1} = -\frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{(n+1)!}(-1)^{n+1}4^{n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{(n+1)!} \times \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \times (-1)^{n+1}4^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 2n}{(n+1)!2^n n!} \times \frac{4^{n+1}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

می‌توانیم مفهوم سری توانی با مقدار مختلط

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

را به روشی مشابه با حالت مربوط به عددهای حقیقی تعریف کنیم، که در آن ضریبها می‌توانند عددهای مختلط باشند و z متغیری مختلط است. مقدارهایی از z که به ازای آنها این سری همگراست، تابعی به شکل

$$f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n z^n$$

تعریف می‌کنند. می‌توان نشان داد که با جایگزین کردن متغیر مختلط z به جای متغیر حقیقی x، سریهای توانی (الف) تا (د) که در ابتدای این بخش برای تابعهای مقدماتی مطرح شدند، همچنان درست هستند.

حقیقت سودمندی دربارهٔ سریهای توانی مختلط آن است که اگر $f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n z^n$، آنگاه $\operatorname{Re} f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}\operatorname{Re}(a_n z^n)$ و $\operatorname{Im} f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}\operatorname{Im}(a_n z^n)$.

برای مثال، درستی دستور $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ را که در بخش ۳-۵ آمده است، توجیه می‌کنیم. داریم

$$\operatorname{Re} e^{i\theta}=\operatorname{Re}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}=\sum_{n=۰}^{\infty}\operatorname{Re}\frac{(i\theta)^n}{n!}=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k\theta^{۲k}}{(۲k)!}=\cos\theta$$

و

$$\operatorname{Im} e^{i\theta}=\operatorname{Im}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}=\sum_{n=۰}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{(i\theta)^n}{n!}=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k\theta^{۲k+۱}}{(۲k+۱)!}=\sin\theta$$

در نتیجه، $e^{i\theta}=\operatorname{Re} e^{i\theta}+i\operatorname{Im} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

۵ـ۴ـ۱۱ مجموع سری نامتناهی

$$S=r\cos\theta+\frac{r^۲}{۲}\cos۲\theta+\frac{r^۳}{۳}\cos۳\theta+\ldots,\quad ۰<r<۱,\quad ۰<\theta<\pi$$

را به دست آورید.

حل. سری نامتناهی

$$-\log(۱-z)=z+\frac{z^۲}{۲}+\frac{z^۳}{۳}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\ldots,\quad |z|<۱$$

را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. در این صورت

$$-\log(۱-r\cos\theta-ir\sin\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{r^۲(\cos۲\theta+i\sin۲\theta)}{۲}+\ldots$$

و با در نظر گرفتن جزء حقیقی دو طرف، نتیجه می‌شود

$$\operatorname{Re}(-\log(۱-r\cos\theta-ir\sin\theta))=r\cos\theta+\frac{r^۲}{۲}\cos۲\theta+\frac{r^۳}{۳}\cos۳\theta+\ldots$$

حال می‌دانیم که به ازای عدد مختلط w، $\log w=\log|w|+i\arg w$. در نتیجه

$$r\cos\theta+\frac{r^۲}{۲}\cos۲\theta+\cdots=-\log\sqrt{(۱-r\cos\theta)^۲+(r\sin\theta)^۲}$$

$$=-\log\sqrt{۱-۲r\cos\theta+r^۲}$$

مسائل

۵ـ۴ـ۱۲ فرض کنید که p و q عددهایی حقیقی باشند به طوری که $1/p - 1/q = 1$، $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$. نشان دهید که

$$p + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 + \cdots = q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \ldots$$

۵ـ۴ـ۱۳ بسط سری توانی هر یک از تابعهای زیر را بیابید:

الف) $1/(x^2 + 5x + 6)$

ب) $\dfrac{1 + x}{(1 + x^2)(1 - x)^2}$

ج) $\arcsin x$

د) $\arctan x$ (از این بسط استفاده کنید و یک سری با جمله‌های گویا بیابید که به π همگرا باشد).

۵ـ۴ـ۱۴ مجموع سریهای نامتناهی زیر را به دست آورید:

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-4\pi^2 r^2)^n}{(2n+1)!}$، که در آن r عددی صحیح و ناصفر است.

ب) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1 \times 3}{2!3^2} + \dfrac{1 \times 3 \times 5}{3!3^3} + \ldots$

ج) $\dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{2!}\left(\dfrac{2}{9}\right)^2 + \dfrac{2 \times 5}{3!}\left(\dfrac{2}{9}\right)^3 + \dfrac{2 \times 5 \times 8}{4!}\left(\dfrac{2}{9}\right)^4 + \ldots$

د) $\dfrac{1^2}{1!}x + \dfrac{1^2 + 2^2}{2!}x^2 + \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3!}x^3 + \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{4!}x^4 + \ldots$

۵ـ۴ـ۱۵ فرض کنید $f_0(x) = e^x$ و به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، $f_{n+1}(x) = xf_n'(x)$. نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1)}{n!} = e^e$$

(راهنمایی: تابع $g(x) = e^{e^x}$ را در نظر بگیرید.)

۵ـ۴ـ۱۶ ثابت کنید که اگر n زوج باشد، مشتق nام $x^2/(x^2 - 1)$ در $x = 0$، مساوی با صفر و اگر n فرد و بزرگتر از ۱ باشد، مساوی با $-n!$ است.

۵ـ۴ـ۱۷ نشان دهید که تابع $|x| < 1$ \quad $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{7}x^6 + \ldots,$ در معادلهٔ تابعی $f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = (1 + x^2)f(x)$ صدق می‌کند.

۵ـ۴ـ۱۸ با استفاده از سریهای توانی ثابت کنید $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

۵ـ۴ـ۱۹ نشان دهید که

$$\frac{\sin x}{1 - x} = x + x^2 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right)x^4 + \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right)x^5 + \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right)x^6$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}\right)x^7 + \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}\right)x^8 + \ldots$$

۵ـ۴ـ۲۰ فرض کنید $B(n)$ تعداد یکهای موجود در بسط عدد صحیح و مثبت n در مبنای ۲ باشد. برای مثال $B(۶) = B(۱۱۰_۲) = ۲$ و $B(۱۵) = B(۱۱۱۱_۲) = ۴$. گویا بودن یا گویا نبودن عدد

$$\exp \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{B(n)}{n(n+۱)}$$

را تعیین کنید.

۵ـ۴ـ۲۱ به ازای کدام اعداد حقیقی a، دنبالهٔ u_n که با شرط اولیه $u_۰ = a$ و رابطهٔ بازگشتی $u_{n+۱} = ۲u_n - n^۲$ تعریف می‌شود، به ازای هر $n \geqslant ۰$، در شرط $u_n > ۰$ صدق می‌کند؟

۵ـ۴ـ۲۲ ثابت کنید که

$$\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)^۳ = ۱ + ۶x + ۱۸x^۲ + \cdots + (۴n^۲ + ۲)x^n + \ldots, \quad |x| < ۱$$

۵ـ۴ـ۲۳ فرض کنید $T_n = \sum_{i=۱}^{n} (-۱)^{i+۱}/(۲i - ۱)$ و $T = \lim_{n\to\infty} T_n$. نشان دهید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (T_n - T) = \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۴}$$

۵ـ۴ـ۲۴ رابطهٔ بازگشتی $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۰$، $a_۲ = -۵$ و به ازای $n \geqslant ۳$، $a_n = ۴a_{n-۱} - ۵a_{n-۲} + ۲a_{n-۳}$ را حل کنید.

۵ـ۴ـ۲۵ با استفاده از تکنیک تابعهای مولد، نشان دهید که nاُمین عدد فیبوناتچی F_n مساوی است با

$$F_n = \frac{\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n}{\sqrt{۵}}$$

۵ـ۴ـ۲۶ مجموع سری متناهی $a_۰ + a_۱ + \cdots + a_n$ را به دست آورید که در آن $a_۰ = ۲$، $a_۱ = ۱۷$ و به ازای $i > ۱$، $a_i = ۷a_{i-۱} - ۱۲a_{i-۲}$.

۵ـ۴ـ۲۷ نشان دهید که ضریبهای سری توانی تابع $e^{ax}\cos bx$، $a > ۰$، $b > ۰$، بر حسب توانهای x، یا هیچ‌کدام صفر نیستند و یا تعدادی نامتناهی از آنها صفرند.

۵ـ۴ـ۲۸ مجموع سری نامتناهی $S = ۱ - ۲r\cos\theta + ۳r^۲\cos ۲\theta - ۴r^۳\cos\theta + \ldots, \quad |r| < ۱$ را به دست آورید.

۵ـ۴ـ۲۹ نشان دهید که $\sum_{n=۰}^{\infty} (\sin n\theta)/n! = \sin(\sin\theta)e^{\cos\theta}$.

۵ـ۴ـ۳۰ با استفاده از سریهای نامتناهی، حد $\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt[۳]{x^۳ - ۵x^۲ + ۱} - x\right]$ را به دست آورید.

مثالهای اضافی. ۱-۱۲-۱، ۵-۳-۱۶، ۶-۸-۱، ۷-۶-۷ (ج). همچنین بخش ۵-۲(سریهای هندسی) و بخش ۵-۷ (حل نامساویها با استفاده از سریها) را ببینید.

۶

آنالیز حقیقی میانی

در این فصل از طریق مسائل، به مرور سلسلهٔ تعاریف و احکام مربوط به تابعهای پیوسته، مشتقپذیر و انتگرالپذیر می‌پردازیم و با تکیه بر معلوماتی که خواننده از مفهوم حد دارد، مهمترین تعریفها (یعنی پیوستگی در بخش ۶-۱، مشتقپذیری در بخش ۶-۳ و انتگرالپذیری در بخش ۶-۸) را مرور می‌کنیم. همچنین توجه خواننده را به مهمترین ویژگیهای این رده از تابعها جلب می‌کنیم. برای مثال مفید است بدانیم که هرگاه در یک مسأله، تابع پیوسته‌ای وجود داشته باشد، باید بتوانیم قضیهٔ مقدار میانی یا قضیهٔ مقدار اکسترم را به کار ببریم، یا اگر در یک مسأله تابع مشتقپذیری وجود داشت، انتظار داریم که بتوانیم قضیهٔ مقدار میانگین را به کار بریم. در این فصل، مثالهایی از این کاربردها و همچنین کاربردهایی از قاعدهٔ لوپیتال و قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال آمده‌اند. در طی این فصل مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی را با R نشان می‌دهیم.

۶ـ۱ تابعهای پیوسته

تابع با مقدار حقیقی f در a پیوسته است هرگاه وقتی که $x \to a$، $f(x) \to f(a)$ یا به طور دقیقتر،

الف) $f(a)$ تعریف شده باشد،

ب) $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد، و

ج) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(اگر a نقطه‌ای مرزی در دامنهٔ تعریف f باشد، منظور آن است که xهای به کار رفته در (ب)، محدود به دامنهٔ تعریف f هستند. فرض می‌کنیم که خواننده با این گونه حالتهای خاص آشنایی دارد.)

تابع f در دامنهٔ D پیوسته است هرگاه در هر نقطهٔ D پیوسته باشد. با کمی تلاش می‌توان ثابت کرد که f در a پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که به a همگرا باشد، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ نیز به $f(a)$ همگرا باشد.

تعریف پیوستگی به شکل دنباله‌ای، اغلب در مواردی به کار می‌رود که بخواهیم ناپیوستگی یک تابع را

در یک نقطه نشان دهیم. برای مثال تابع f که به شکل

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & ،\ x\neq 0 \text{ اگر}\\ 0 & ،\ x=0 \text{ اگر}\end{cases}$$

تعریف می‌شود در صفر ناپیوسته است زیرا مثلاً دنبالهٔ $x_n = 2/(4n+1)\pi$ به صفر همگراست در حالی که $\{f(x_n)\} = \left\{\sin\left(2\pi n+\frac{1}{2}\pi\right)\right\}$ همگرا به ۱ است (به جای آنکه به $f(0)=0$ همگرا باشد).

۶ـ۱ـ۱ تابع $f:[0,1]\to[0,1]$ را به روش زیر تعریف می‌کنیم: $f(1)=1$ و اگر $a=0/a_1a_2a_3a_4\ldots$ نمایش اعشاری a باشد (که در صورت امکان آن را به شکل عدد اعشاری مختوم می‌نویسیم، مثلاً به جای $0/99999\ldots$ می‌نویسیم ۱)، تعریف می‌کنیم $f(a)=0/0a_10a_20a_3\ldots$. دربارهٔ پیوستگی f بحث کنید.

حل. ملاحظه می‌کنیم که f یک تابع یکنوای صعودی است. نشان می‌دهیم که f در هر عدد اعشاری مختوم (یعنی در هر نقطه‌ای به شکل $N/10^n$ که در آن N عددی صحیح است و $1\leqslant N<10^n$) ناپیوسته است.

برای مثال نقطهٔ $a=0/413$ را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف، $f(a)=0/040103$. حال دنبالهٔ x_n را به صورت

$$x_1=0/4129$$
$$x_2=0/41299$$
$$x_3=0/412999$$
$$\vdots$$
$$x_n=0/412\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ بار}}$$

تعریف می‌کنیم. دنبالهٔ $\{x_n\}$ به a همگراست ولی

$$f(x_n)=0/0401020\underbrace{\underline{09}\,\underline{09}\ldots\underline{09}}_{n\text{ جفت}}$$

و می‌بینیم که $\{f(x_n)\}$ به $f(a)$ همگرا نیست. بنابراین f در a پیوسته نیست.

ساخت یا روشی مشابه می‌توان ارائه کرد که نشان دهد f در هر عدد اعشاری مختوم، ناپیوسته است. استدلال بر اساس این حقیقت است که هر عدد اعشاری مختوم دو نمایش اعشاری دارد، یعنی

$$a=0/a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n \quad , \quad a_n\neq 0$$
$$a=0/a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n-1)999\ldots$$

حال فرض کنید a عدد اعشاری مختومی در $(0,1)$ نباشد. نشان می‌دهیم که f در a پیوسته است. نمایش اعشاری منحصر به فرد a را می‌نویسیم:

$$a=0/a_1a_2a_3a_4\ldots$$

از آنجاکه a عدد اعشاری مختومی نیست، عددهای صحیح به دلخواه بزرگی چون n موجودند به طوری که $a_n \neq ۰$ و $a_{n+۱} \neq ۹$. برای هر چنین nای، X_n و Y_n را به صورت

$$X_n = ۰/a_۱ a_۲ \dots a_n \left(= \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i}{۱۰^i} \right)$$

$$Y_n = ۰/a_۱ a_۲ \dots a_n (a_{n+۱} + ۱) = X_n + \frac{a_{n+۱} + ۱}{۱۰^{n+۱}}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $a \in (X_n, Y_n)$. به علاوه، n رقم اول هر یک از عددهای موجود در (X_n, Y_n) درست همان n رقم اول X_n و Y_n است. نتیجتاً همهٔ عددهای موجود در (X_n, Y_n) به بازهٔ $(f(X_n), f(Y_n))$ نگاشته می‌شوند.

روشن است که دنباله‌های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ به a همگرا و نیز دنباله‌های $\{f(X_n)\}$ و $\{f(Y_n)\}$ به $f(a)$ همگرا هستند. از آنجاکه هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که به a همگراست باید به ازای هر n، نهایتاً در درون بازهٔ (X_n, Y_n) قرار گیرد، در نتیجه $\{f(X_n)\}$ باید به $f(a)$ همگرا باشد. بنابراین نتیجه می‌شود که f در a پیوسته است.

تصور هندسی مثال قبل دشوار و فهم کامل برهان آن نیازمند داشتن درک روشنی از پیوستگی است. مثال بعدی نیز ترجمهٔ دقیقی از تعریف را طلب می‌کند: تابع f در a پیوسته است هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$، عددی چون $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که $|x - a| < \delta$ ایجاب کند $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

۶ـ۱ـ۲ فرض کنید $f: R \to R$ تابعی یک به یک و پیوسته با نقطهٔ ثابتی چون $x_۰$ باشد (یعنی $f(x_۰) = x_۰$) به طوری که به ازای هر x، $f(۲x - f(x)) = x$. ثابت کنید $f(x) \equiv x$.

حل. فرض کنید $S = \{x | f(x) = x\}$. چون f پیوسته است، در نتیجه مجموعهٔ S زیر مجموعهٔ بسته‌ای از R است (یعنی اگر $x_n \in S$ و $x_n \to x$، آنگاه با توجه به اینکه

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(x)$$

داریم $x \in S$).

حال فرض کنید $S \neq R$ و $x_۰$ یک نقطهٔ مرزی S باشد (یعنی هر همسایگی $x_۰$ شامل نقاطی باشد که در S نیستند. توجه کنید که $x_۰ \in S$، زیرا S بسته است).

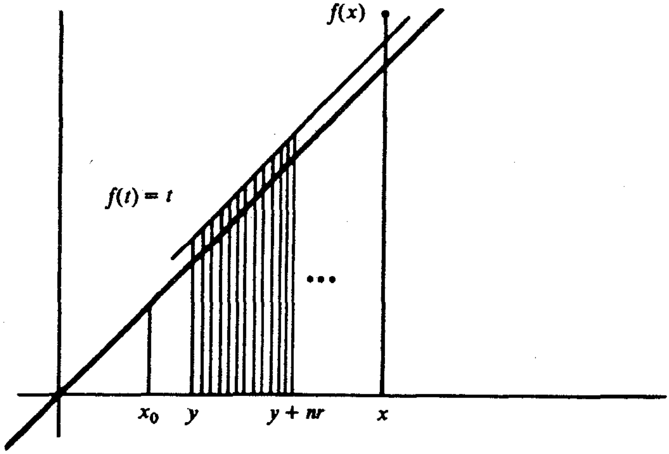
اگر y نقطه‌ای باشد که در S نیست، آنگاه عددی حقیقی و ناصفر مانند r وجود دارد به طوری که $f(y) = y + r$. این حقیقت که f یک به یک است و در تساوی $f(۲x - f(x)) = x$ صدق می‌کند، ایجاب می‌کند که به ازای هر عدد صحیح n،

$$f(y + nr) = (y + nr) + r$$

(این محتوای مسألهٔ ۲-۱-۱۲ است). این اتحاد برای استدلالی که در پیش داریم، ضروری است.

ایدهٔ حل مسأله این است: فرض کنید x در S نباشد، یعنی $f(x) \neq x$. y را در $R - S$ طوری انتخاب کنید که y در «نزدیکی» $x_۰$ و $f(y)$ در «نزدیکی» y باشد (این کار را می‌توان انجام داد زیرا f در $x_۰$ پیوسته است و $f(x_۰) = x_۰$). در این صورت اگر r به قسمی باشد که $f(y) = y + r$ و r به اندازهٔ کافی کوچک باشد،این حقیقت که $f(y + nr) = (y + nr) + r$، پیوستگی f در x را نقض می‌کند (شکل ۶-۱ را ببینید).

برهان رسمی این مطلب به صورت زیر است. همانند قبل، فرض کنید که $x_۰$ یک نقطهٔ مرزی S و x



شکل ۶-۱

به قسمی باشد که $f(x) \neq x$. قرار می‌دهیم $\epsilon = |f(x) - x|$. از آنجا که f در x پیوسته است، $\delta > 0$ای (که می‌توان فرض کرد $\delta \leqslant \frac{1}{4}\epsilon$) وجود دارد به‌طوری که $|z - x| < \delta$ ایجاب می‌کند $|f(z) - f(x)| < \frac{1}{4}\epsilon$. چون f در x_0 پیوسته است، $\eta > 0$ای وجود دارد به طوری که $\eta < \delta$ و $|w - x_0| < \eta$ ایجاب می‌کند $|f(w) - f(x_0)| < \delta$.

حال $y \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ را طوری اختیار می‌کنیم که $f(y) \neq y$ (چنین yای وجود دارد زیرا x_0 یک نقطهٔ مرزی S است). در این صورت

$$
\begin{aligned}
0 < |f(y) - y| &\leqslant |f(y) - f(x_0)| + |f(x_0) - y| = |f(y) - f(x_0)| + |x_0 - y| \\
&< \delta + \eta < 2\delta
\end{aligned}
$$

فرض می‌کنیم $r = f(y) - y$ (توجه کنید که r ممکن است منفی باشد). از آنجا که $0 < |r| < 2\delta$، عدد صحیحی چون n وجود دارد به طوری که $y + nr \in (x - \delta, x + \delta)$. ولی می‌دانیم که $f(y + nr) = (y + nr) + r$. از این نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= |f(x) - x| \\
&\leqslant |f(x) - f(y + nr)| + |f(y + nr) - x| < \frac{1}{4}\epsilon + |(y + nr) + r - x| \\
&\leqslant \frac{1}{4}\epsilon + |(y + nr) - x| + |r| < \frac{1}{4}\epsilon + \delta + 2\delta \\
&< \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon
\end{aligned}
$$

این تناقض به معنای آن است که $S = R$ و حل مسأله کامل است.

از جملهٔ حقایق بسیار مهم دربارهٔ تابعهای پیوسته روی بازهٔ بسته‌ای چون $[a, b]$، این دو حقیقت است که این تابعها روی این بازه یا ماکسیمم و مینیمم دارند و هر مقداری بین این دو را اختیار می‌کنند. این محتوای دو قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ مقدار اکسترم. اگر f تابعی پیوسته روی $[a,b]$ باشد، آنگاه عددهایی چون c و d در $[a,b]$ موجودند به طوری که به ازای همهٔ مقادیر x در $[a,b]$، $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$ (به عبارت دیگر، $f(d)$ مقدار ماکسیمم f و $f(c)$ مقدار مینیمم آن روی $[a,b]$ است).

قضیهٔ مقدار میانی. اگر f تابعی پیوسته روی $[a,b]$ باشد و اگر $f(a) < y < f(b)$ (یا $f(b) < y < f(a)$)، آنگاه عددی چون c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $f(c) = y$.

این نتایج را می‌توان به روشهای مختلفی ثابت کرد. در اینجا طرحی از برهان قضیهٔ مقدار میانی را با استفاده از روشی به نام «تنصیف مکرر» که در سایر مسأله‌ها نیز کاربرد دارد، ارائه می‌کنیم (برای مثال ۶-۳-۶ را ببینید).

فرض کنید که f تابع پیوسته‌ای روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشد و $f(a) < f(b)$ (در حالت $f(a) > f(b)$ نیز برهان شبیه به همین است). فرض کنید $y \in [f(a), f(b)]$. می‌خواهیم عضوی چون c در $[a,b]$ بیابیم به طوری که $f(c) = y$. روند حل مسأله به صورت زیر است (رسم یک نمودار می‌تواند سودمند باشد). فرض کنید $a_۰ = a$ ، $b_۰ = b$ و فرض کنید $x_۱$ وسط بازهٔ $[a,b]$ باشد (تنصیف اول). اگر $f(x_۱) < y$، تعریف می‌کنیم $a_۱ = x_۱$، $b_۱ = b$ و اگر $y \leqslant f(x_۱)$ تعریف می‌کنیم $a_۱ = a$، $b_۱ = x_۱$. در هر صورت داریم $f(a_۱) \leqslant y \leqslant f(b_۱)$ و طول $[a_۱, b_۱]$ نصف طول $[a,b]$ است.

حال فرض کنید $x_۲$ وسط $[a_۱, b_۱]$ باشد (تنصیف دوم). اگر $f(x_۲) < y$ ، تعریف می‌کنیم $a_۲ = x_۲$، $b_۲ = b_۱$ و اگر $y \leqslant f(x_۲)$، تعریف می‌کنیم $a_۲ = a_۱$، $b_۲ = x_۲$. باز نتیجه می‌شود که $f(a_۲) \leqslant y \leqslant f(b_۲)$ و $b_۲ - a_۲ = (b-a)/۴$.

کار را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. حاصل کار دنباله‌ای نامتناهی از بازه‌های بستهٔ تو در تو به صورت

$$[a_۰, b_۰] \supset [a_۱, b_۱] \supset [a_۲, b_۲] \supset \dots \supset \dots$$

است که طولهای آنها به صفر میل می‌کند (در حقیقت $b_i - a_i = (b-a)/۲^i$). این شرایط ایجاب می‌کنند که $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$، هر دو به یک عدد در بازهٔ $[a,b]$ میل کنند. این عدد را c می‌نامیم.

بنابر پیوستگی f، $\lim_{i\to\infty} f(a_i) = f(c)$ و $\lim_{i\to\infty} f(b_i) = f(c)$. همچنین به ازای هر i، $f(a_i) \leqslant y \leqslant f(b_i)$ و در نتیجه (بنابر اصل فشار، که آن را در بخش ۶-۷ بررسی خواهیم کرد) داریم

$$f(c) = \lim_{i\to\infty} f(a_i) \leqslant y \leqslant \lim_{i\to\infty} f(b_i) = f(c)$$

از این نتیجه می‌شود که $f(c) = y$ و قضیه ثابت می‌شود.

می‌توان از روشی مشابه برای اثبات قضیهٔ مقدار اکسترم استفاده کرد که آن را به عنوان یک مسأله باقی می‌گذاریم (۶-۱-۵).

مسائل

۶-۱-۳ فرض کنید که به ازای $a \leqslant x \leqslant b$، f کراندار باشد و برای هر جفت از مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ که $a \leqslant x_۱ \leqslant x_۲ \leqslant b$، داشته باشیم

$$f\left(\frac{۱}{۲}(x_۱ + x_۲)\right) \leqslant \frac{۱}{۲}\Big(f(x_۱) + f(x_۲)\Big)$$

ثابت کنید که به ازای $a < x < b$، f پیوسته است. (راهنمایی: نشان دهید که وقتی $a < x + ۲^n\delta < b$، $f(x+\delta) - f(x) \leqslant \frac{۱}{۲}[f(x+۲\delta) - f(x)] \leqslant \ldots \leqslant (۱/۲^n)[f(x+۲^n\delta) - f(x)]$. حال فرض کنید که $\delta \to ۰$).

۶ـ۱ـ۴ تابعی با مقدار حقیقی و پیوسته، به ازای همهٔ مقادیر x و y در معادلهٔ تابعی

$$f\left(\sqrt{x^۲ + y^۲}\right) = f(x)f(y)$$

صدق می‌کند. ثابت کنید که $f(x) = [f(۱)]^{x^۲}$. (راهنمایی: ابتدا قضیه را برای همهٔ عددهایی به شکل $۲^{n/۲}$ ثابت کنید که در آن n عددی صحیح است. سپس قضیه را برای همهٔ عددهایی به شکل $m/۲^n$ ثابت کنید که در آن m عددی صحیح و n عددی صحیح و نامنفی است.)

۶ـ۱ـ۵ قضیهٔ مقدار اکسترمم را با استفاده از روش تنصیف مکرر ثابت کنید.

۶ـ۱ـ۶ فرض کنید $f(۰) > ۰$، $f(۱) < ۰$. فرض کنید تابع پیوسته‌ای چون g وجود داشته باشد به طوری که $f + g$ نانزولی باشد. ثابت کنید xای وجود دارد به طوری که $f(x) = ۰$. (راهنمایی: با استفاده از روش تنصیف مکرر، اگر xای در نیمهٔ راست بازه وجود داشته باشد که $f(x) \geqslant ۰$، نیمهٔ راست و در غیر این صورت نیمهٔ چپ را انتخاب کنید. این کار منجر به ایجاد دنباله‌ای تو در تو از بازه‌های $[a_۱, b_۱] \supseteq [a_۲, b_۲] \supseteq \ldots$ می‌شود که به نقطه‌ای چون c همگرا هستند. توجه کنید که به ازای هر n، نقطه‌ای چون y_n در $[a_n, c]$ وجود دارد به طوری که $f(y_n) \geqslant ۰$. ثابت کنید $f(c) = ۰$.)

۶ـ۱ـ۷ فرض کنید که f در بازهٔ $[۰, ۱]$ به صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \\ ۱/q & \text{اگر } x = p/q \text{ (و } p/q \text{ تحویلناپذیر باشد)} \end{cases}$$

تعریف شده باشد.

الف) ثابت کنید که f در هر نقطهٔ گویای واقع در $[۰, ۱]$ ناپیوسته است.

ب) ثابت کنید که f در هر نقطهٔ گنگ واقع در $[۰, ۱]$ پیوسته است.

۶ـ۱ـ۸ هرگاه x عضوی از مجموعهٔ کانتور K باشد (۳-۴-۶ را ببینید)، می‌توان آن را به صورت منحصر به فرد

$$x = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲b_n}{۳^n}$$

نشان داد که در آن ۱ یا ۰ $= b_n$. تابع $g : K \to [۰, ۱]$ را به شکل

$$g(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{b_n}{۲^n}$$

تعریف کنید. حال توسیع g به $[۰, ۱]$ را به روش زیر می‌سازیم. اگر $x \in [۰, ۱]$ در مجموعهٔ کانتور نباشد، آنگاه در صورتی که نمادهای ۳-۴-۶ را به کار ببریم، عدد صحیح منحصر به فردی چون n وجود دارد به طوری که $x \in I_n$ که در آن $I_n = (X_n, Y_n)$ و X_n و Y_n در K هستند. تعریف کنید $g(x) = g(Y_n)$ (توجه کنید که به ازای هر n، $g(X_n) = g(Y_n)$ و به این ترتیب g روی بازهٔ بستهٔ $[X_n, Y_n]$ ثابت است.) ثابت کنید که gتابعی

پیوسته است. (همچنین ۶-۲-۱۳ را ببینید.)

مثالهای اضافی. ۶-۳-۱، ۶-۳-۵، ۶-۳-۶، ۶-۴-۳، ۶-۷-۲، ۶-۷-۷، ۶-۸-۹، ۶-۸-۱۰، ۶-۹-۵. در اغلب مثالهای فصل ۶، پیوستگی به طور ضمنی فرض شده است؛ به ویژه بخش ۶-۲ (قضیهٔ مقدار میانی) را ببینید.

۶ـ۲ قضیهٔ مقدار میانی

قضیهٔ مقدار میانی بیان می‌کند که اگر f تابع پیوسته‌ای روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ و d بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه عددی چون c بین a و b وجود دارد به طوری که $f(c) = d$. نیروی این قضیه در این حقیقت نهفته است که به کمک آن راهی در اختیار داریم که می‌توانیم از وجود یک چیز آگاهی پیدا کنیم بی‌آنکه نیاز به کشف صریح آن چیز داشته باشیم.

به عنوان مثال، نشان می‌دهیم که معادلهٔ $-۲x^۵ + ۴x = ۱$ جوابی در بازهٔ $(۰,۱)$ دارد. تابع $f(x) = -۲x^۵ + ۴x$ را در نظر می‌گیریم و دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم: $f(۰)$ از یک کمتر و $f(۱)$ از یک بیشتر است، در نتیجه بنابر قضیهٔ مقدار میانی عددی در $(۰,۱)$ وجود دارد که همان جواب مورد نظر است.

۶ـ۲ـ۱ یک دونده در یک دو صحرایی مسیری به طول شش مایل را در ۳۰ دقیقه می‌دود. ثابت کنید که او در قسمتی از مسیر، دقیقاً در ۵ دقیقه یک مایل دویده است.

حل. فرض کنید x فاصلهٔ طی شده از خط شروع بر حسب مایل باشد. به ازای هر x در $[۰,۵]$، $f(x)$ را زمانی می‌گیریم که برای رسیدن از نقطهٔ x به نقطهٔ $x + ۱$ (بر حسب مایل) طی می‌شود. تابع f پیوسته است. بنابر فرض، $۳۰ = f(۵) + f(۴) + f(۳) + f(۲) + f(۱) + f(۰)$. از این نتیجه می‌شود که همهٔ مقدارهای $f(۰)$، ... ، $f(۵)$ کوچکتر از ۵ نیستند و به طور مشابه همهٔ این مقدارها بزرگتر از ۵ نیستند. بنابراین نقاطی چون a و b در $[۰,۵]$ وجود دارند به طوری که $f(a) \leqslant ۵ \leqslant f(b)$. در نتیجه بنابر قضیهٔ مقدار میانی، عددی چون c بین a و b وجود دارد به‌طوری که $f(c) = ۵$ و این به معنی آن است که طول یک مایلی بین c و $c + ۱$، دقیقاً در مدت ۵ دقیقه دویده شده است.

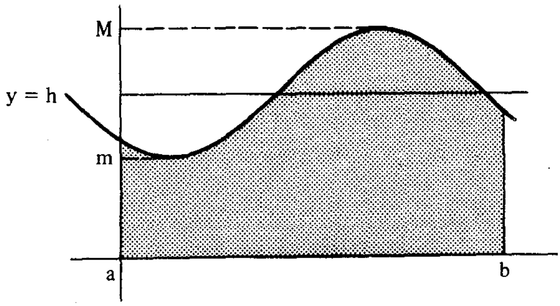
۶ـ۲ـ۲ فرض کنید $f : [a,b] \to R$ تابعی پیوسته باشد.

الف) قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها. ثابت کنید که عددی چون c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$.

ب) ثابت کنید که عددی چون c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\int_a^c f(t)dt = \int_c^b f(t)dt$.

(تذکر: برای این کار، کافی است نشان دهید که f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.)

حل. الف) فرض کنید M و m به ترتیب مقادیر ماکسیمم و مینیمم f روی $[a,b]$ باشند (قضیهٔ مقدار اکسترمم وجود این مقادیر را تضمین می‌کند) و فرض کنید که $A = \int_a^b f(t)dt$. در شکل ۶-۲، صورت شهودی استدلال زیر (در حالتی که f تابعی مثبت است) نشان داده شده است. همین‌طور که خط $y = h$ به طور پیوسته از $y = m$ به طرف $y = M$ حرکت می‌کند، سطح $A(h)$ که محصور در مستطیلی با اضلاع $y = h$، $y = ۰$، $x = a$، $x = b$ است، از مقداری کمتر از A (یعنی $A(m)$) به طرف مقداری بیشتر از A (یعنی $A(M)$) حرکت می‌کند. از نظر جبری، $A(m) = m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a) = A(M)$ (این عبارت، صرف‌نظر از توصیف آن بر حسب «مساحت»، عبارتی درست است). از آنجا که $A(h) \equiv h(b-a)$ تابع پیوسته‌ای از h



شکل ۶-۲

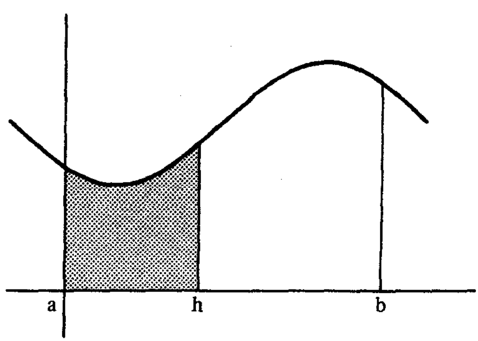
است، از قضیهٔ مقدار میانی نتیجه می‌شود که نقطه‌ای چون d وجود دارد به طوری که $A(d) = A$ و یا به طور معادل $d(b-a) = A$ (تذکر: $A(h) \equiv h(b-a)$ تابعی پیوسته است). ولی d بین m و M است، در نتیجه به دلیل پیوستگی f، از قضیهٔ مقدار میانی نتیجه می‌شود که نقطه‌ای چون c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $f(c) = d$. در نتیجه

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$$

ب) صورت شهودی این مطلب (در حالتی که تابع مورد نظر مثبت است) در شکل ۶-۳ نشان داده شده است. فرض کنید $A = \int_a^b f(t)dt$ و $A(h) = \int_a^h f(t)dt$. در این شکل منظور از $A(h)$ به ازای $a < h < b$، سطح محصور به $y = f(x)$، $y = 0$، $x = a$، $x = h$ (ناحیهٔ سایه‌دار) است. آنچه که مسأله از ما می‌خواهد یافتن نقطه‌ای چون c است به طوری که $A(c) = \frac{1}{2}A$. روشن است که وقتی خط قائم $x = h$ از $x = a$ تا $x = b$ به طرف راست حرکت کند، مقدار انتگرال (مساحت) متناظر، از صفر تا A تغییر می‌کند و در نتیجه باید در نقطه‌ای از مقدار $\frac{1}{2}A$ بگذرد.

هرگاه بتوانیم ثابت کنیم که $A(h)$ تابع پیوسته‌ای از h است، استدلال بالا کاملاً معتبر خواهد بود. برای اثبات، توجه کنید که

$$A(h+x) - A(h) = \int_h^{h+x} f(t)dt$$



شکل ۶-۳

می‌دانیم که بنابر قسمت (الف)، نقطه‌ای چون c_x بین h و $h+x$ وجود دارد به طوری‌که

$$\int_h^{h+x} f(t)dt = c_x|x|$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to 0} [A(h+x) - A(h)] = \lim_{x \to 0} c_x|x| = 0$$

(تذکر: c_x کراندار است زیرا f انتگرال‌پذیر است.) در نتیجه وقتی که $x \to 0$، $A(h+x) \to A(h)$ و این به معنی پیوستگی $A(h)$ در نقطهٔ h است.

۶ـ۲ـ۳ فرض کنید A مجموعه‌ای متشکل از $2n$ نقطه در صفحه باشد که هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند. فرض کنید n تا از آنها به رنگ قرمز و nتای دیگر به رنگ آبی رنگ‌آمیزی شده باشند. حکم زیر را ثابت یا رد کنید: n پاره‌خط راست وجود دارند که هیچ دوتای آنها نقطهٔ مشترکی ندارند و دو سر هر یک از پاره‌خطها نقطه‌هایی از A با رنگهای متفاوت‌اند.

حل. این مسأله را طی ۱-۱۱-۲ بررسی کردیم، ولی دیدن برهان این حکم بر اساس ویژگی مقدار میانی آموزنده است.

با استفاده از استقرا روی n، درستی حکم را نشان می‌دهیم. یقیناً حکم به ازای $n = 1$ درست است. فرض کنید که حکم به ازای $n = 1, 2, \ldots, k$ درست باشد و مجموعهٔ A شامل $2(k+1)$ نقطه را در نظر بگیرید که در آن هیچ سه نقطه‌ای همخط نبوده و $k+1$ نقطهٔ آن به رنگ قرمز و $k+1$ نقطهٔ دیگر به رنگ آبی باشند.

فرض کنید که دو رأس از غلاف محدب A رنگهای متفاوتی داشته باشند. در این صورت دو رأس متوالی واقع بر محیط غلاف محدب، مانند P و Q، رنگهای متفاوتی دارند. بنابر فرض استقرا می‌توان مجموعه نقاط $A - \{P, Q\}$ را به روش مورد نظر به هم وصل کرد. با توجه به روش انتخاب P و Q، هیچ یک از این پاره‌خطها پاره‌خط PQ را قطع نمی‌کند و در نتیجه حکم دربارهٔ مجموعهٔ A درست است.

تنها حالتی که باقیمانده حالتی است که در آن همهٔ رأسهای غلاف محدب همرنگ باشند، مثلاً به رنگ قرمز باشند. اگر L خطی دلخواه و غیر افقی در صفحه باشد، تعداد نقاط A را که در طرف چپ L و به رنگ آبی هستند با $B(L)$ و تعداد نقاط A را که در طرف چپ L و به رنگ قرمز هستند با $R(L)$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم که $D(L) = B(L) - R(L)$. حال خط غیر افقی L را طوری انتخاب می‌کنیم که در طرف چپ همهٔ نقاط A باشد و با هیچ یک از پاره‌خطهایی که از اتصال نقاط A به وجود می‌آیند، موازی نباشد. در این وضعیت $D(L) = 0$. همین‌طور که L به طور پیوسته به طرف راست می‌رود، با نقاط A یکی یکی برخورد می‌کند و در عبور از چنین نقطه‌ای، اگر آن نقطه آبی باشد مقدار $D(L)$ به اندازهٔ $+1$ و در صورتی که قرمز باشد، به اندازهٔ -1 تغییر می‌کند. همین‌طور که L به طرف راست می‌رود، اولین مقدار ناصفرش منفی خواهد بود (که بلافاصله پس از عبور از اولین نقطهٔ A حاصل می‌شود). از آنجا که آخرین نقطه‌ای که L با آن برخورد می‌کند نیز قرمز است، آخرین مقدار ناصفر مثبت است (که بلافاصله قبل از عبور از آخرین نقطهٔ A به دست می‌آید).

از این ملاحظات نتیجه می‌شود که $D(L)$، در جایی بین اولین و آخرین نقاط برخورد با A مساوی صفر می‌شود (توجه کنید که $D(L)$ تابعی با مقدارهای صحیح است). وقتی که L در چنین وضعیتی قرار دارد،

می‌توانیم فرض استقرا را دربارهٔ نقاط واقع در طرف چپ L و همچنین نقاط واقع در طرف راست آن به کار ببریم. از آنجا که هیچ یک از پاره‌خطهای حاصل یکدیگر را قطع نمی‌کنند، حکم بنابر استقرا برای مجموعهٔ A درست است و برهان کامل است.

مسائل

۶ـ۲ـ۴ فرض کنید که $f : [\cdot, 1] \to [\cdot, 1]$ پیوسته باشد. ثابت کنید که عددی چون c در $[\cdot, 1]$ وجود دارد به طوری که $f(c) = c$.

۶ـ۲ـ۵ یک صخره‌نورد صعود از یک کوه را در ساعت ۰۰ : ۷ صبح روز شنبه آغاز می‌کند و در ساعت ۰۰ : ۵ بعد از ظهر به قله می‌رسد. او در قله چادر می‌زند و روز یکشنبه در ساعت ۰۰ : ۷ از کوه پایین می‌آید و در ساعت ۰۰ : ۵ بعد از ظهر به نقطهٔ مبدأ می‌رسد. نشان دهید که او در زمانی از روز یکشنبه در همان ارتفاعی بوده که در روز شنبه در همان زمان در آنجا بوده است.

۶ـ۲ـ۶ ثابت کنید که تابع پیوسته‌ای که هیچ مقداری را بیش از دوبار اختیار نمی‌کند، باید یک مقدار مشخص را دقیقاً یک بار اختیار کند.

۶ـ۲ـ۷ ثابت کنید که چندجمله‌ای مثلثاتی

$$a_\circ + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx$$

که در آن همهٔ ضریبها حقیقی‌اند و $|a_\circ| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| \leqslant a_n$، دست‌کم $2n$ صفر در بازهٔ $[\circ, 2\pi)$ دارد.

۶ـ۲ـ۸ شرایط لازم و کافی برای عدد ثابت k را طوری تعیین کنید که تابع با مقدار حقیقی پیوسته‌ای چون $f(x)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x، $f(f(x)) = kx^9$.

۶ـ۲ـ۹ الف) فرض کنید که $f : [a, b] \to R$ پیوسته و $g : [a, b] \to R$ انتگرالپذیر باشد و به ازای هر $x \in [a, b]$، $g(x) \geqslant \circ$. ثابت کنید که عددی چون c در $[a, b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b f(x)dx$$

ب) فرض کنید که $f : [a, b] \to R$ صعودی (و در نتیجه انتگرالپذیر) و $g : [a, b] \to R$ انتگرالپذیر باشد و به ازای هر $x \in [a, b]$، $g(x) \geqslant \circ$. ثابت کنید عددی چون c در $[a, b]$ وجود دارد به طوری‌که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx$$

۶ـ۲ـ۱۰ فرض کنید که $f : [\circ, 1] \to R$ پیوسته باشد و $f(\circ) = f(1)$. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، عددی چون x در $[\circ, 1 - 1/n]$ وجود دارد به طوری که $f(x) = f(x + 1/n)$.

۶ـ۲ـ۱۱ یک چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ حداکثر ۳ دمای یک جسم را در لحظهٔ t معین می‌کند. نشان دهید که همواره می‌توان دمای میانگین جسم را در فاصلهٔ ۹ صبح و ۳ بعد از ظهر با محاسبهٔ میانگین دمای جسم در دو زمان ثابت که مستقل از چندجمله‌ای در نظر گرفته شده هستند، به دست آورد. همچنین، نشان دهید که این

دو زمان ۱۶ : ۱۰ صبح و ۴۴ : ۱ بعد از ظهر هستند که به نزدیکترین دقیقه گرد شده‌اند. (راهنمایی: از قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها استفاده کنید؛ ۶-۲-۲ (الف) را ببینید.)

۶ـ۲ـ۱۲ ثابت کنید که به ازای هر دو مثلث دلخواه، خطی وجود دارد که به طور همزمان آنها را نصف می‌کند.

۶ـ۲ـ۱۳ مثالی از یک تابع با مقدار حقیقی و پیوستهٔ f از $[\circ, \text{۱}]$ به $[\circ, \text{۱}]$ ارائه کنید که هر مقدار واقع در $[\circ, \text{۱}]$ را بی‌نهایت بار بگیرد. (راهنمایی: یک راه برای انجام این کار آن است که تابع پیوستهٔ تعریف شده در ۶-۱-۸ را تعدیل کنید.)

مثالهای اضافی. ۶-۱-۶، ۶-۵-۲، ۶-۵-۳، ۶-۵-۴، ۶-۵-۱۳، ۶-۶-۴، ۶-۶-۵، ۶-۶-۶، ۶-۶-۹، ۷-۶-۱۳.

۶ـ۳ مشتق

مشتق $f : [a, b] \to R$ در نقطهٔ x در (a, b) به شکل

$$f'(x) = \lim_{h \to \circ} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تعریف می‌شود به شرطی که این حد وجود داشته باشد. توجه کنید که اگر f در x مشتق داشته باشد، آنگاه f در x پیوسته است زیرا

$$\begin{aligned}\lim_{h \to \circ} [f(x+h) - f(x)] &= \lim_{h \to \circ} \left[\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \times h\right] \\ &= \lim_{h \to \circ} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \lim_{h \to \circ} h = f'(x) \lim_{h \to \circ} h = \circ\end{aligned}$$

۶ـ۳ـ۱ نشان دهید که اگر تابع $xf(x)$ در نقطهٔ $x_\circ \neq \circ$ مشتق داشته و f در آنجا پیوسته باشد، آنگاه f در آنجا مشتق دارد.

حل. فرض کنید

$$L = \lim_{x \to x_\circ} \frac{xf(x) - x_\circ f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

حد طرف راست وجود دارد زیرا این حد نشان دهندهٔ مشتق $xf(x)$ در نقطهٔ $x_\circ$ است (در تعریف بالا از مشتق، به جای h، $x - x_\circ$ قرار داده‌ایم). به ازای x به اندازهٔ کافی نزدیک ولی مخالف با $x_\circ$ (و در نتیجه مخالف صفر) داریم

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} &= \frac{\frac{xf(x)}{x} - \frac{x_\circ f(x_\circ)}{x_\circ}}{x - x_\circ} = \frac{xx_\circ f(x) - xx_\circ f(x_\circ)}{xx_\circ (x - x_\circ)} \\ &= \frac{xx_\circ f(x) - x^\text{۲} f(x) - xx_\circ f(x_\circ) + x^\text{۲} f(x)}{xx_\circ (x - x_\circ)} \\ &= \frac{xf(x)(x_\circ - x) + x(xf(x) - x_\circ f(x_\circ))}{xx_\circ (x - x_\circ)} \\ &= \frac{\text{۱}}{x_\circ} \left(\frac{xf(x) - x_\circ f(x_\circ)}{x - x_\circ}\right) - \frac{f(x)}{x_\circ}\end{aligned}$$

از این نتیجه می‌گیریم که

$$f'(x_\circ) = \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} = \lim_{x\to x_\circ}\left[\frac{۱}{x_\circ}\left(\frac{xf(x)-x_\circ f(x_\circ)}{x-x_\circ}\right)-\frac{f(x)}{x_\circ}\right]$$
$$=\frac{۱}{x_\circ}\lim_{x\to x_\circ}\left(\frac{xf(x)-x_\circ f(x_\circ)}{x-x_\circ}\right)-\frac{۱}{x_\circ}\lim_{x\to x_\circ} f(x)=\frac{۱}{x_\circ}\left[L-f(x_\circ)\right]$$

این حقیقت که $\lim_{x\to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$ از فرض پیوستگی f در $x_\circ$ نتیجه می‌شود. ولی این فرض لازم نیست زیرا

$$\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\frac{xx_\circ f(x)-xx_\circ f(x_\circ)}{xx_\circ(x-x_\circ)}=\frac{xx_\circ f(x)-x_\circ^۲ f(x_\circ)-xx_\circ f(x_\circ)+x_\circ^۲ f(x_\circ)}{xx_\circ(x-x_\circ)}$$
$$=\frac{۱}{x}\left(\frac{xf(x)-x_\circ f(x_\circ)}{x-x_\circ}\right)-\frac{f(x_\circ)}{x}$$

با استفاده از این در می‌یابیم که

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\left(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}\right)=\lim_{x\to x_\circ}\left(\frac{۱}{x}\left(\frac{xf(x)-x_\circ f(x_\circ)}{x-x_\circ}\right)-\frac{f(x_\circ)}{x}\right)$$
$$=\frac{۱}{x_\circ}\left[L-f(x_\circ)\right]$$

۶ـ۳ـ۲ فرض کنید که $f(x) = a_۱\sin x + a_۲ \sin ۲x + \cdots + a_n \sin nx$ که در آن $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n عددهای حقیقی‌اند و n عددی صحیح و مثبت است. هرگاه به ازای هر x حقیقی، $|f(x)| \leqslant |\sin x|$، ثابت کنید که $|a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + na_n| \leqslant ۱$.

حل. برهانی از این مسأله را به روش استقرا در ۲-۴-۴ ارائه کرده‌ایم. با وجود این، رهیافت طبیعیتر آن است که توجه کنیم که $f'(x) = a_۱\cos x + \cdots + na_n \cos nx$ که از آن دیده می‌شود $f'(\circ) = a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + na_n$ (که طرف چپ نامساوی‌ای است که می‌خواهیم ثابت کنیم). این، استدلال زیر را به ذهن القا می‌کند:

$$|f'(\circ)| = \lim_{x\to\circ}\left|\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}\right| = \lim_{x\to\circ}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$$
$$\leqslant \lim_{x\to\circ}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = ۱$$

و این برهان را کامل می‌کند.

۶ـ۳ـ۳ فرض کنید f در $x = a$ مشتقپذیر باشد و $f(a) \neq \circ$. مقدار $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+۱/n)}{f(a)}\right]^n$ را به دست آورید.

حل. کافی است مقدار $\lim_{x\to\circ}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{۱/x}$ را به دست آوریم. برای مقدار به اندازهٔ کافی کوچک x،

$f(a+x)$ و $f(a)$ هم‌علامت‌اند و از این نتیجه می‌شود که

$$\log\left[\lim_{x\to \circ}\left(\frac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\backslash/x}\right] = \lim_{x\to\circ}\left[\log\left(\frac{|f(a+x)|}{|f(a)|}\right)^{\backslash/x}\right]$$
$$= \lim_{x\to\circ}\frac{\log|f(a+x)| - \log|f(a)|}{x}$$

آخرین عبارت طرف راست تعریف مشتق $\log|f(x)|$ در $x = a$ است که با توجه به حسابان مقدار آن مساوی با $f'(a)/f(a)$ است. بنابراین

$$\lim_{x\to\circ}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\backslash/x} = e^{f'(a)/f(a)}$$

مسائل

۶ـ۳ـ۴ الف) فرض کنید که به جای تعریف معمولی مشتق که آن را به $Df(x)$ نشان می‌دهیم، نوع تازه‌ای از مشتق با نماد $D^*f(x)$ را به وسیله دستور

$$D^*f(x) = \lim_{h\to\circ}\frac{f^{\text{۲}}(x+h) - f^{\text{۲}}(x)}{h}$$

تعریف می‌کنیم. $D^*f(x)$ را بر حسب $Df(x)$ بیان کنید.

ب) اگر f در x مشتق‌پذیر باشد، حد زیر را حساب کنید

$$\lim_{h\to\circ}\left(\frac{f(x+ah) - f(x+bh)}{h}\right)$$

ج) فرض کنید که f در $x = \circ$ مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر x و y در معادلهٔ تابعی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق کند. ثابت کنید که f در هر عدد حقیقی x مشتق‌پذیر است.

۶ـ۳ـ۵ تابع f را به شکل

$$f(x) = \begin{cases} x^{\text{۲}}\sin\dfrac{\backslash}{x} & , x \neq \circ \\ \circ & , x = \circ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید که $f'(x)$ به ازای هر x وجود دارد ولی f' در $x = \circ$ پیوسته نیست. (مشتق تابع به ازای $x \neq \circ$ مساوی است با $\text{۲}x\sin(\backslash/x) - \cos(\backslash/x)$. این مشتق در صفر چیست؟)

ب) فرض کنید $g(x) = x + \text{۲}f(x)$. نشان دهید که $g'(\circ) > \circ$ ولی g در هیچ بازه‌ای حول صفر یکنوا نیست.

۶ـ۳ـ۶ فرض کنید $f : [\circ, \backslash] \to R$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. فرض کنید که تساوی $f(x) = \circ = f'(x)$ به ازای هیچ xای در $[\circ, \backslash]$ برقرار نباشد. نشان دهید که f در بازهٔ $[\circ, \backslash]$ تنها تعداد متناهی صفر دارد. [فرض کنید که این تعداد متناهی نباشد. یکی از دو بازهٔ $[\circ, \frac{\backslash}{\text{۲}}]$ یا $[\frac{\backslash}{\text{۲}}, \backslash]$ (شاید هم هر دو) شامل تعدادی نامتناهی از این صفرها هستند. یکی از بازه‌هایی که این شرط را دارد، انتخاب کنید و تنصیف مکرر را ادامه دهید. همین طور که این کار را انجام می‌دهید، دنبالهٔ همگرایی از صفرهای متمایز بسازید. با استفاده از این دنباله به تناقض برسید.]

۶ـ۳ـ۷ ثابت کنید که اگر f روی بازهٔ (a,b) مشتقپذیر و در نقطه‌ای چون c در (a,b) یک اکسترمم (یعنی ماکسیمم یا مینیمم) داشته باشد، آنگاه $f'(c) = 0$. [برای کاربردهایی از این نتیجه، ۶-۴-۱، ۶-۴-۲، ۶-۴-۵، ۶-۴-۶، ۶-۴-۷، ۶-۶-۴، ۷-۴-۱ را ببینید.]

مثالهای اضافی. ۶-۶-۲، ۶-۷-۲، ۶-۹-۱، ۷-۶-۲.

۶ـ۴ قضیهٔ مقدار اکسترمم

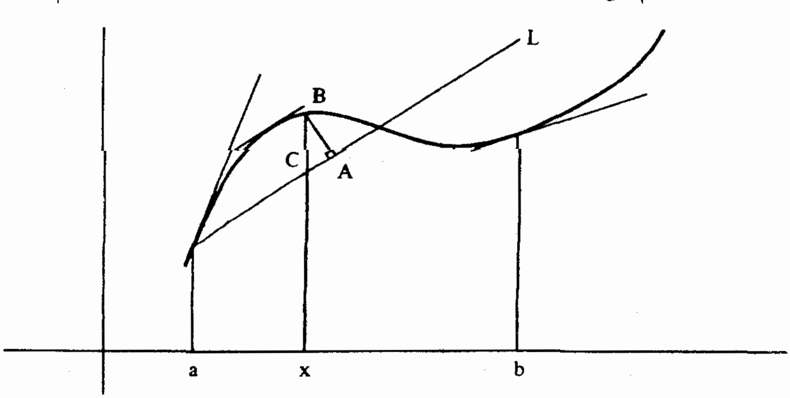
یک قضیهٔ وجودی، قضیه‌ای است که از وجود چیزی (مثلاً درون دامنهٔ یک تابع، از وجود نقطه‌ای با ویژگی بیان شده‌ای) خبر می‌دهد. بیشتر وقتها این موضوع خاص در یک وضعیت «اکسترمم» (یا انتهایی) روی می‌دهد. در چنین شرایطی است که می‌توان از قضیهٔ مقدار اکسترمم استفاده کرد: هرگاه تابع f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، نقاطی چون c و d در $[a,b]$ وجود دارند به طوری که به ازای هر x در $[a,b]$ داشته باشیم $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$.

۶ـ۴ـ۱ فرض کنید $f : [a,b] \to R$ تابعی مشتقپذیر باشد. نشان دهید که f' در حکم قضیهٔ مقدار میانی صدق می‌کند (یعنی اگر d نقطه‌ای بین $f'(a)$ و $f'(b)$ باشد، آنگاه عددی چون c در بازهٔ (a,b) وجود دارد به طوری که $f'(c) = d$).

حل. اگر f' پیوسته بود، می‌توانستیم با استفادهٔ مستقیم از قضیهٔ مقدار میانی (دربارهٔ f') نتیجه مطلوب را به دست آوریم. ولی ممکن است f' پیوسته نباشد (برای مثال ۶-۳-۵ (الف) را ببینید). در این صورت چه باید کرد؟

برای کمک به ایجاد ایدهٔ حل مسأله شکل ۶-۴ را در نظر بگیرید. در این شکل از نقطهٔ $(a, f(a))$ خط L با شیب d گذشته است به طوری که $f'(b) < d < f'(a)$. فرض کنید که به ازای هر نقطهٔ x در $[a,b]$، $g(x)$ فاصلهٔ علامتدار نقطهٔ $f(x)$ تا خط L باشد (که در شکل همان طول پاره‌خط ABاست). از نظر شهودی نقطه‌ای که به دنبالش هستیم نقطه‌ای است که مقدار g را ماکسیمم می‌کند. نشان می‌دهیم که در حقیقت این مطلب درست است، ولی برای ساده‌تر شدن محاسبات تابعی را در نظر می‌گیریم که کمی متفاوت با تابع g است.

فرض کنید $h(x)$ به ازای هر x در $[a,b]$ نشان دهندهٔ فاصلهٔ علامت‌دار پاره‌خط قائمی باشد که از نقطهٔ $(x, f(x))$ تا خط L رسم می‌شود (که در شکل همان پاره‌خط BC است). ملاحظه می‌کنیم که نقطه‌ای که



شکل۶-۴

مقدار h را روی $[a,b]$ ماکسیمم می‌کند همان نقطه‌ای است که به ازای آن مقدار g روی $[a,b]$ ماکسیمم می‌شود (زیرا $g(x) = h(x)\cos\alpha$ که در آن α میل خط L است).امتیاز استفاده از $h(x)$ آن است که می‌توان به سادگی آن را بر حسب $f(x)$ و معادلهٔ L بیان کرد.

حال به مسألهٔ مورد نظر برمی‌گردیم و تابع $h(x) = f(x) - [f(a) + d(x-a)]$ را در نظر می‌گیریم. می‌بینیم که

$$h'(x) = f'(x) - d$$

از اینکه $f'(b) < d < f'(a)$، نتیجه می‌گیریم $h'(b) < ۰ < h'(a)$. این نامساویها ایجاب می‌کنند که $h(a)$ و $h(b)$ هیچ‌کدام مساوی مقدار ماکسیمم h روی $[a,b]$ نباشند (این نتیجه‌ای از تعریف مشتق است). بنابراین چون h روی $[a,b]$ پیوسته است، قضیهٔ مقدار اکسترم می‌گوید که h باید یک ماکسیمم در نقطه‌ای چون c از (a,b) اختیار کند. بنابر ۶-۳-۷، در این نقطه باید $h'(c) = ۰$ و به عبارت دیگر $f'(c) = d$.

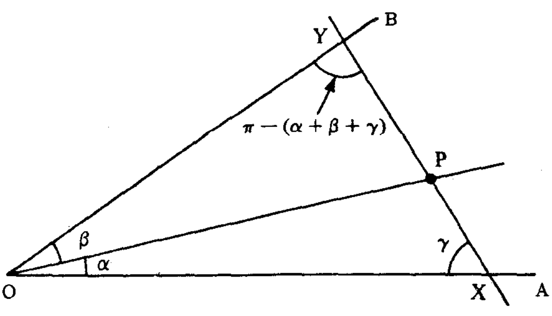
در صورتی که $f'(a) < d < f'(b)$، می‌توان به طور مشابه استدلال کرد. در این حالت h یک مقدار مینیمم خود را در نقطه‌ای چون c در (a,b) می‌گیرد و در این نقطه $f'(c) = d$.

۶ـ۴ـ۲ نقطهٔ P درون زاویه‌ای قرار دارد که ضلعهای آن نیمخطهای OA و OB هستند. نقطهٔ X را روی OA و نقطهٔ Y را روی OB طوری انتخاب کنید که پاره‌خط XY شامل P و حاصلضرب فاصله‌ها، $(PX)(PY)$، مینیمم باشد.

حل. این وضعیت در شکل ۶-۵ نشان داده شده است.

این مسأله نمونه‌ای از مسأله‌های «ماکسیمم ـ مینیمم» است که در درسهای نخستین حسابان مطرح می‌شوند. این مسأله نمی‌پرسد که «آیا مقدار مینیمم وجود دارد یا نه؟»، ولی در عوض می‌پرسد که «در کجا مقدار مینیمم اتفاق می‌افتد؟». تکنیک حل این مسأله، استفاده از نتیجهٔ ۶-۳-۷ است یعنی: اگر مینیمم درون یک بازهٔ باز روی می‌دهد، باید در نقطه‌ای باشد که مشتق در آن صفر می‌شود. از این رو باید $(PX)(PY)$ را به صورت تابعی از یک متغیر بیان کنیم و نقطه‌ای را بیابیم که مشتق در آن صفر می‌شود.

به ازای هر عدد مثبت x، نقطهٔ منحصر به فردی چون X روی OA وجود دارد به طوری‌که $x = |OX|$ و این نقطه خود نقطهٔ منحصر به فرد Y را روی OB طوری مشخص می‌کند به‌طوری که X، P و Y همخط باشند. در نتیجه $(PX)(PY)$ تابعی از x است. با این حال توصیف صریح این تابع بسیار پیچیده است. شاید راه دیگری وجود داشته باشد.



شکل ۶-۵

توجه کنید که $(PX)(PY)$ به وسیلهٔ زاویهٔ γ به صورت منحصر به فردی مشخص می‌شود (شکل ۶-۵ را ببینید). برای به دست آوردن توصیف صریحی برای $(PX)(PY)$ از قانون سینوسها در $\triangle OXP$ و $\triangle OPY$ استفاده می‌کنیم تا به دست آوریم

$$\frac{\sin\beta}{PY} = \frac{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)}{OP} \quad , \quad \frac{\sin\alpha}{PX} = \frac{\sin\gamma}{OP}$$

از این نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} F(\gamma) = (PX)(PY) &= \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\cdot(OP)\cdot\left(\frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)}\right)\cdot(OP) \\ &= C(\csc\gamma)\,(\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma)) \ , \qquad 0<\gamma<\pi \end{aligned}$$

که در آن $C = \sin\alpha\sin\beta(OP)^2$ مقداری ثابت است.

تابع F روی $(0,\pi)$ پیوسته و مشتقپذیر است و وقتی که $\gamma \to 0^+$ یا $\gamma \to \pi^-$، $F(\gamma)\to\infty$. بنابراین F در نقطه‌ای از $(0,\pi)$ یک مقدار مینیمم می‌گیرد. در این نقطه $F'(\gamma) = 0$، یعنی

$$0 = \csc\gamma\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma)\,[\cot\gamma - \cot(\pi-\alpha-\beta-\gamma)]$$

چون $\csc\gamma$ و $\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$ هیچ کدام روی $(0,\pi)$ نیستند، مینیمم زمانی روی می‌دهد که $\cot\gamma = \cot(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$. ولی این تساوی به ازای $0<\gamma<\pi$ و $0<\pi-\alpha-\beta-\gamma<\pi$، تنها زمانی روی می‌دهد که $\gamma = \pi-\alpha-\beta-\gamma$. در نتیجه مینیمم وقتی اتفاق می‌افتد که $\triangle OXY$ متساوی‌الساقین باشد، یعنی وقتی که $OX = OY$ (برای برهان دیگری از این مسأله، ۸-۱-۳ را ببینید).

مسائل

۶ـ۴ـ۳ الف) فرض کنید $f : [a.b] \to R$ پیوسته باشد و به ازای هر x در $[a,b]$، $f(x) > 0$. نشان دهید که عدد مثبت و ثابت c وجود دارد به طوری که به ازای هر x در $[a,b]$، $f(x) \geqslant c$.

ب) نشان دهید که تابع پیوسته‌ای وجود ندارد که بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ را به روی بازهٔ باز $(0,1)$ بنگارد.

۶ـ۴ـ۴ فرض کنید که $f : [a,b] \to R$ در هر نقطهٔ $[a,b]$ مشتقپذیر باشد و $f'(a) = f'(b)$. ثابت کنید که دست‌کم یک نقطهٔ c در (a,b) وجود دارد به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

۶ـ۴ـ۵ الف) قضیهٔ رول. فرض کنید $f : [a,b] \to R$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتقپذیر باشد. اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه عددی مانند c در (a,b) وجود دارد به طوری که $f'(c) = 0$.

ب) قضیهٔ مقدار میانگین. اگر $f : [a,b] \to R$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتقپذیر باشد، آنگاه عددی مانند c در (a,b) وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

۶ـ۴ـ۶ اگر A، B و C اندازه‌های زاویه‌های یک مثلث باشند، ثابت کنید

$$-۲ \leqslant \sin ۳A + \sin ۳B + \sin ۳C \leqslant \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$$

و معین کنید که چه موقع تساوی برقرار می‌شود.

۷ـ۴ـ۶ دایره‌ای به شعاع r وخط مماس L بر آن در نقطهٔ P از دایره داده شده‌اند. از نقطهٔ متغیر R روی دایره، عمود PQ بر L رسم شده است به طوری که Q بر L قرار دارد. ماکسیمم مساحت مثلث PQR را تعیین کنید.

مثالهای اضافی. ۱-۱۱-۵، ۶-۶-۱، ۶-۶-۴، ۶-۶-۵.

۵ـ۶ قضیهٔ رول

یکی از ویژگیهای بنیادی تابعهای مشتق‌پذیر، قضیهٔ وجودی زیر است.

قضیهٔ رول. فرض کنید $f : [a,b] \to R$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a) = f(b)$، آنگاه عددی مانند c در (a,b) وجود دارد به طوری که $f'(c) = ۰$.

این نتیجهٔ مستقیم ۶-۳-۷ است. زیرا فرض کنید c نقطه‌ای در (a,b) باشد به طوری که $f(c)$ اکسترمم باشد (بنابر قضیهٔ مقدار اکسترمم چنین c ای وجود دارد). در نتیجه بنابر ۶-۳-۷، $f'(c) = ۰$. قضیهٔ رول از نظر تئوری مهم است (زیرا در ادامه بحث نشان می‌دهیم که قضیهٔ مقدار میانگین و تعداد زیادی از نتایج سودمند، همه به سادگی از قضیهٔ رول نتیجه می‌شوند)، ولی این قضیه به عنوان روشی در حل مسأله نیز اهمیت دارد.

۱ـ۵ـ۶ نشان دهید که معادلهٔ $۴ax^۳ + ۳bx^۲ + ۲cx = a + b + c$ دست‌کم یک ریشه بین ۰ و ۱ دارد.

حل. از آنجا که اطلاع کافی از مقدارهای a، b، c نداریم، هر تلاشی برای به‌کارگیری قضیهٔ مقدار میانی (شبیه آنچه که در مسأله‌ای مشابه در بخش ۶-۲ انجام دادیم) به پیچیدگیهای زیادی می‌انجامد. ولی تابع $f(x) = ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ - (a+b+c)x$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که $f(۱) = ۰ = f(۰)$. در نتیجه بنابر قضیهٔ رول، نقطه‌ای چون d در $(۰,۱)$ وجود دارد به طوری که $f'(d) = ۰$. به عبارت دیگر d یک ریشهٔ معادلهٔ $۴ax^۳ + ۳bx^۲ + ۲cx = a + b + c$ است و حل مسأله کامل است.

۲ـ۵ـ۶ ثابت کنید که اگر تابعهای مشتق‌پذیر f و g به ازای هر x، در شرط $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$ صدق کنند، آنگاه بین هر دو ریشهٔ $f(x) = ۰$ ریشه‌ای از $g(x) = ۰$ وجود دارد.

حل. فرض کنید a و b دو تا از ریشه‌های f باشند و $a < b$. شرط مسأله ایجاب می‌کند که a و b هیچ‌کدام ریشهٔ $g(x) = ۰$ نباشند. فرض کنید که $g(x)$ ریشه‌ای بین a و b ندارد. در این صورت از قضیهٔ مقدار میانی نتیجه می‌شود که علامت g روی $[a,b]$ تغییر نمی‌کند (یعنی به ازای هر x در $[a,b]$، $g(x) > ۰$ یا به ازای هر x در $[a,b]$، $g(x) < ۰$).

حال تابع $F(x) = f(x)/g(x)$ را در نظر بگیرید. این تابع روی $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و $F(a) = ۰ = F(b)$. در نتیجه بنابر قضیهٔ رول، نقطه‌ای مانند c وجود دارد به طوری که $F'(c) = ۰$. ولی این به تناقض می‌انجامد زیرا

$$F'(c) = \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g^۲(c)}$$

و بنابر فرض، $g(c)f'(c) - g'(c)f(c) \neq ۰$. از این تناقض نتیجه می‌گیریم که g باید صفری بین a و b داشته باشد و برهان کامل است.

یک نتیجهٔ مهم قضیهٔ رول آن است که اگر f روی بازه‌ای چون $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و اگر $x_۱$ و $x_۲$ صفرهای f باشند و $a < x_۱ < x_۲ < b$، آنگاه f' صفری بین $x_۱$ و $x_۲$ دارد. به‌طورکلی اگر f در بازهٔ $[a,b]$، n صفر متمایز داشته باشد، آنگاه f' دست‌کم $n - ۱$ صفر دارد (که این صفرها متناوباً بین صفرهای f قرار دارند)، f'' دست کم $n - ۲$ صفر دارد (به شرط آنکه f' روی $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد) و الی‌آخر.

۶ـ۵ـ۳ نشان دهید که دقیقاً به ازای دو مقدار x، داریم $x^۲ = x\sin x + \cos x$.

حل. $f(x) = x^۲ - x\sin x - \cos x$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $f(-\pi/۲) > ۰$، $f(۰) < ۰$ و $f(\pi/۲) > ۰$. در نتیجه قضیهٔ مقدار میانی ایجاب می‌کند که f دست‌کم دو صفر داشته باشد. اگر f سه صفر یا بیشتر داشته باشد، آنگاه بنابر تذکرات پیش از این مثال، f' دست‌کم دو صفر دارد. ولی

$$f'(x) = ۲x - \sin x - x\cos x + \sin x = x[۲ - \cos x]$$

فقط یک صفر دارد. بنابراین f دقیقاً دو صفر دارد و از اینجا حکم نتیجه می‌شود.

۶ـ۵ـ۴ فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد. چندجمله‌ای

$$Q(x) = (x^۲ + ۱)P(x)P'(x) + x\left[(P(x))^۲ + \left(P'(x)\right)^۲\right]$$

را تشکیل می‌دهیم. با فرض اینکه معادلهٔ $P(x) = ۰$، n ریشهٔ حقیقی متمایز بزرگتر از ۱ داشته باشد، این حکم را که معادلهٔ $Q(x) = ۰$ دست‌کم $۲n - ۱$ ریشهٔ حقیقی متمایز دارد، ثابت یا رد کنید.

حل. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، . . . ، a_n، n ریشهٔ متمایز $P(x) = ۰$ باشند به طوری که $۱ < a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$. $Q(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم

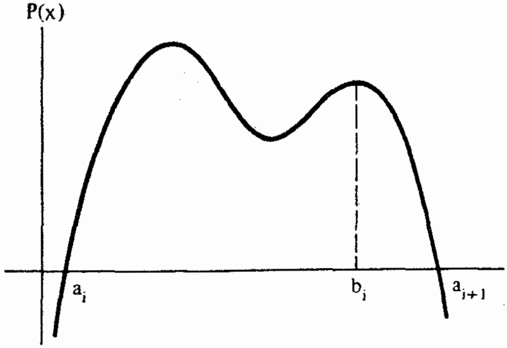
$$Q(x) = (x - ۱)^۲P(x)P'(x) + x\left[P(x) + P'(x)\right]^۲$$

فرض کنید که به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n - ۱$، $P(x)$ صفری در بازهٔ باز $(a_i, a_{i+۱})$ نداشته باشد. (در اینجا از کلیت مسأله کاسته نمی‌شود زیرا در صورت وجود ریشه‌های بیشتر، مثلاً m ریشه که $m > n$، با برچسب‌گذاری مجدد ریشه‌ها، آنها را نیز به حساب می‌آوریم و سپس برهان زیر نشان می‌دهد که Q دست‌کم $۲m - ۱$ ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.) بنابر قضیهٔ رول نقطه‌ای چون b_i در $(a_i, a_{i+۱})$ وجود دارد به طوری که $P'(b_i) = ۰$. چون P یک چندجمله‌ای است، تعداد ریشه‌های معادلهٔ $P'(x) = ۰$ در $(a_i, a_{i+۱})$ متناهی است. در نتیجه می‌توانیم به ازای هر i، b_i را بزرگترین صفر P' در $(a_i, a_{i+۱})$ بگیریم.

فرض کنید که به‌ازای هر x در $(a_i, a_{i+۱})$، $P(x)$ مثبت باشد (شکل ۶-۶ را ببینید) و تابع $F(x) = P(x) + P'(x)$ را در نظر بگیرید. ایدهٔ حل آن است که نقطهٔ c_i در $(b_i, a_{i+۱})$ را طوری بیابیم که $F(c_i) < ۰$. در این صورت چون $F(b_i) > ۰$، قضیهٔ مقدار میانی ایجاب می‌کند که نقطه‌ای چون d_i در (b_i, c_i) وجود داشته باشد به طوری که $F(d_i) = ۰$ و در نتیجه

$$Q(b_i) = b_i\left(F(b_i)\right)^۲ > ۰$$

$$Q(d_i) = (d_i - ۱)^۲P(d_i)P'(d_i) < ۰$$



شکل ۶-۶

(دقت کنید که به ازای هر x در (b_i, a_{i+1})، $P'(x) < \circ$) و

$$Q(a_{i+1}) = a_{i+1}\left(F(a_{i+1})\right)^{\text{۲}} \geqslant \circ$$

در نتیجه بنابر قضیهٔ مقدار میانی، نقاط x_i در (b_i, d_i) و y_i در $(d_i, a_{i+1}]$ وجود دارند به طوری که $Q(x_i) = \circ = Q(y_i)$.

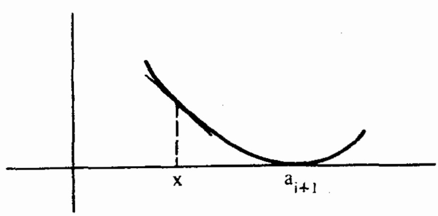
برای کامل شدن برهان بالا، باید وجود نقطه‌ای چون c_i در (b_i, a_{i+1}) را به طوری که $F(c_i) < \circ$، ثابت کنیم. اگر a_{i+1} ریشه‌ای با چندگانگی یک باشد ، آنگاه $F(a_{i+1}) = P'(a_{i+1}) < \circ$ و می‌توان c_iی مورد نظر را در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک a_{i+1} یافت. در صورتی که a_{i+1} ریشه‌ای با چندگانگی بیشتر از یک باشد، آنگاه $P(a_{i+1}) = \circ = P'(a_{i+1})$. در این صورت برای $\delta > \circ$ به اندازهٔ کافی کوچک، بازه‌ای چون $(a_{i+1} - \delta, a_{i+1})$ وجود دارد که در آنجا $P''(x) > \circ$ (شکل ۶-۷ را ببینید). برای چنین xای داریم

$$P'(x) < \frac{P(x) - P(a_{i+1})}{x - a_{i+1}} = \frac{P(x)}{x - a_{i+1}}$$

و بنابراین

$$F(x) = P(x) + P'(x) < P(x)\left[\text{۱} + \frac{\text{۱}}{x - a_{i+1}}\right] = P(x)\left[\frac{x - a_{i+1} + \text{۱}}{x - a_{i+1}}\right]$$

بنابراین قرار می‌دهیم $c_i = x$، که در آن x را به اندازهٔ کافی نزدیک به a_{i+1} انتخاب می‌کنیم به طوری که صورت آخرین عبارت مثبت و مخرج آن منفی باشد. در نتیجه برای چنین c_i ای داریم $F(c_i) < \circ$، $b_i < c_i < a_{i+1}$.



شکل ۶-۷

به این ترتیب برهان مربوط به وجود دو ریشهٔ $Q(x) = ۰$ در $[b_i, a_{i+۱})$ تمام می‌شود.

استدلال بالا بر اساس این فرض بود که وقتی x در $(a_i, a_{i+۱})$ باشد، $P(x) > ۰$. در حالتی که به ازای هر x در $(a_i, a_{i+۱})$، $P(x) < ۰$، می‌توان با استدلالی کاملاً مشابه به همان نتیجه رسید. بنابراین نشان داده‌ایم که Q دست‌کم $۲n - ۲$ صفر(یعنی به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n - ۱$، در هر بازهٔ $(a_i, a_{i+۱})$ دو صفر) دارد. حال اگر بتوانیم نشان دهیم که Q صفری در $(-\infty, a_۱)$ دارد، حل مسأله تمام می‌شود. باز باید حالتهای مختلفی را در نظر بگیریم.

فرض کنید که معادلهٔ $P'(x) = ۰$ ریشه‌ای در بازهٔ $(۰, a_۱)$ داشته باشد. در این‌صورت می‌توانیم بدون آنکه دوباره وارد جزئیات شویم، با استدلال مشابهی نشان دهیم که Q ریشه‌ای در $(b_۰, a_۱)$ دارد که $b_۰$ را بزرگترین صفر P' در $(۰, a_۱)$ اختیار کرده‌ایم.

آنچه باقیمانده آن است که ببینیم وقتی که معادلهٔ $P'(x) = ۰$ در $(۰, a_۱)$ ریشه‌ای ندارد چه می‌شود. اگر به ازای هر x در $(۰, a_۱)$، $P(x) > ۰$، آنگاه به ازای هر x در $(۰, a_۱)$، $P'(x) < ۰$ و در نتیجه $Q(۰) < ۰$ و $Q(a_۱) > ۰$. بنابر قضیهٔ مقدار میانی، معادلهٔ $Q(x) = ۰$ یک ریشه در $(۰, a_۱)$ دارد. به همین ترتیب اگر به ازای هر x در $(۰, a_۱)$، $P(x) < ۰$، آنگاه $Q(۰) > ۰$ و $Q(a_۱) < ۰$ و الی آخر. بنابراین در هر حالت معادلهٔ $Q(x) = ۰$ دست‌کم $۲n - ۱$ ریشه متمایز دارد.

اگر چه تحلیلی که در بالا انجام دادیم خسته کننده و پیچیده بود، ولی به طور کامل بر اساس اصلهای اولیه یعنی قضیهٔ رول و قضیهٔ مقدار میانگین قرار داشت. در صورتی که این دو ایده را مد نظر قرار دهیم، درک جنبه‌های تصوری برهان کاملاً طبیعی و آسان می‌شود. راه حل دیگری برای این مسأله وجود دارد که در آن، ادامهٔ کار پس از یک مرحلهٔ کلیدی زیرکانه که غیر معمول هم نیست، بسیار ساده است (مثلاً ۶-۵-۱۱ و ۶-۹-۴ را ببینید). از آنجا که این راه حل آموزنده است، آن را نیز بررسی می‌کنیم.

ابتدا توجه کنید که می‌توانیم Q را به روش زیر به شکل یک حاصلضرب بنویسیم

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^۲ + ۱)P(x)P'(x) + x\left[(P(x))^۲ + \left(P'(x)\right)^۲\right] \\ &= \left[P'(x) + xP(x)\right]\left[xP'(x) + P(x)\right] \end{aligned}$$

فرض کنید $F(x) = P'(x) + xP(x)$ و $G(x) = xP'(x) + P(x)$. همان‌طور که خواهیم دید، مرحلهٔ کلیدی بر این اساس است که ملاحظه کنیم $F(x) = e^{-x^۲/۲}[e^{x^۲/۲}P(x)]'$ و $G(x) = [xP(x)]'$.

فرض‌کنید $P(x)$ دقیقاً m ریشهٔ حقیقی a_i بزرگتر از ۱ داشته باشد به طوری‌که $۱ < a_۱ < a_۲ < \cdots < a_m$ $(m \geqslant n)$. در این صورت $e^{x^۲/۲}P(x)$ نیز m صفر در $a_۱$، $a_۲$، ...، a_m دارد. پس بنابر قضیهٔ رول، $[e^{x^۲/۲}P(x)]'$ و در نتیجه $F(x)$ نیز دست‌کم $m - ۱$ صفر b_i خواهد داشت به طوری که $a_i < b_i < a_{i+۱}$. به همین ترتیب بنابر قضیهٔ رول، $G(x)$ دست کم m صفر $c_۰$، $c_۱$، ...، $c_{m-۱}$ دارد که $۰ < c_۰ < a_۱$ و به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, m - ۱$، $a_i < c_i < a_{i+۱}$. هرگاه بتوانیم نشان دهیم که به ازای $i = ۱, \ldots, m - ۱$، $b_i \neq c_i$، حکم ثابت می‌شود.

بنابراین فرض می‌کنیم که iای وجود دارد به‌طوری که $b_i = c_i$ و این مقدار مشترک را r می‌نامیم. تساوی $F(r) = ۰$ می‌رساند که $P'(r) = -rP(r)$. با قرار دادن این تساوی در $G(r) = ۰$، نتیجه می‌گیریم که $r[-rP(r)] + P(r) = ۰$ و یا معادلاً $(r^۲ - ۱)P(r) = ۰$. از آنجا که $r > ۱$، معادلهٔ آخر ایجاب می‌کند که

$P(r) = \circ$. ولی چون $a_i < r < a_{i+1}$، این تساوی با فرض مربوط به ریشه‌های $P(x) = \circ$ (یعنی این فرض که a_i و a_{i+1} ریشه‌های متوالی P هستند یا به عبارت دیگر همهٔ ریشه‌های P که بزرگتر از ۱ هستند، جزء a_iها هستند) در تناقض است. از این تناقض نتیجه می‌گیریم که b_iها و c_iها متفاوت‌اند و در نتیجه معادلهٔ $Q(x) = \circ$ دست‌کم $۲m - ۱$ $(\geqslant ۲n - ۱)$ ریشه حقیقی متمایز دارد.

مسائل

۶ـ۵ـ۵ الف) نشان دهید که $۵x^۴ - ۴x + ۱$ ریشه‌ای بین ۰ و ۱ دارد.

ب) اگر $a_\circ$، $a_۱$، ...، a_n عددهایی حقیقی باشند که در رابطهٔ

$$\frac{a_\circ}{۱} + \frac{a_۱}{۲} + \cdots + \frac{a_n}{n+۱} = \circ$$

صدق کنند، نشان دهید که معادلهٔ $a_\circ + a_۱ x + \cdots + a_n x^n = \circ$ دست کم یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۶ـ۵ـ۶ الف) فرض کنید که $f : [\circ, ۱] \to R$ مشتقپذیر باشد؛ علاوه بر آن $f(\circ) = \circ$ و به ازای هر x در $(\circ, ۱)$، $f(x) > \circ$. ثابت کنید که عددی مانند c در $(\circ, ۱)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{۲f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(۱-c)}{f(۱-c)}$$

(راهنمایی: تابع $f^۲(x)f(۱ - x)$ را در نظر بگیرید.)

ب) آیا عددی چون d در $(\circ, ۱)$ وجود دارد به طوری‌که تساوی $\frac{۳f'(d)}{f(d)} = \frac{f'(۱-d)}{f(۱-d)}$ برقرار شود؟

۶ـ۵ـ۷ الف) قضیهٔ مقدار میانگین کوشی. هرگاه f و g روی $[a, b]$ مشتقپذیر باشند، آنگاه عددی مانند c در (a, b) وجود دارد به طوری که

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$$

ب) نشان دهید که قضیهٔ مقدار میانگین (۶-۴-۵ (ب)) حالت خاصی از قسمت (الف) است.

۶ـ۵ـ۸ الف) نشان دهید که مقدار b هر چه‌باشد، $x^۳ - ۳x + b$ نمی‌تواند بیش از یک صفر در $[-۱, ۱]$ داشته باشد.

ب) فرض‌کنید $f(x) = (x^۲ - ۱)e^{cx}$. نشان دهید که دقیقاً به ازای یک x در بازهٔ $(-۱, ۱)$، $f'(x) = \circ$ و این x با پارامتر c هم علامت است.

۶ـ۵ـ۹ تابع $f(x) = ۲^x - ۱ - x^۲$ روی محور اعداد حقیقی چند صفر دارد؟

۶ـ۵ـ۱۰ فرض کنید $f(x) = a_\circ + a_۱ x + \cdots + a_n x^n$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد به طوری که f، $n + ۱$ ریشهٔ حقیقی داشته باشد. با استفاده از قضیهٔ رول، نشان دهید که به ازای $\circ \leqslant k \leqslant n$، $a_k = \circ$.

۶ـ۵ـ۱۱ اگر $f : R \to R$ تابعی مشتقپذیر باشد، ثابت کنید که بین هر دو ریشهٔ $f(x) = \circ$ ریشه‌ای از $f'(x) - af(x) = \circ$ وجود دارد.

۶ـ۵ـ۱۲ فرض کنید n عددی صحیح و نامنفی باشد و

$$f(x) = c_{\circ} e^{r_{\circ} x} + c_{\backslash} e^{r_{\backslash} x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

که در آن c_iها و r_iها عددهای حقیقی‌اند. ثابت کنید که اگر f در R بیش از n صفر داشته باشد، آنگاه $f(x) \equiv \circ$. (راهنمایی: از استقرا روی n استفاده کنید.)

۶ـ۵ـ۱۳ nاُمین چندجمله‌ای لُژاندر (Legendre) به شکل

$$P_n(x) = \frac{۱}{۲^n n!} D^n \left[(x^۲ - ۱)^n\right]$$

تعریف می‌شود که در آن D^n مشتق n ام نسبت به x است. ثابت کنید که $P_n(x)$ دقیقاً n ریشهٔ حقیقی متمایز دارد که همهٔ آنها در بازهٔ $(-۱, ۱)$ هستند. (راهنمایی: $(x^۲ - ۱)^n = (x - ۱)^n (x + ۱)^n$. با استفاده از استقرا، نشان دهید که ۱ و ۱−، هر دو صفرهای مشتق k ام $(x - ۱)^n (x + ۱)^n$ با چندگانگی $n - k$ هستند و علاوه بر این دو، دست‌کم k صفر متمایز دیگر نیز بین ۱ و ۱− وجود دارد.)

۶ـ۶ قضیهٔ مقدار میانگین

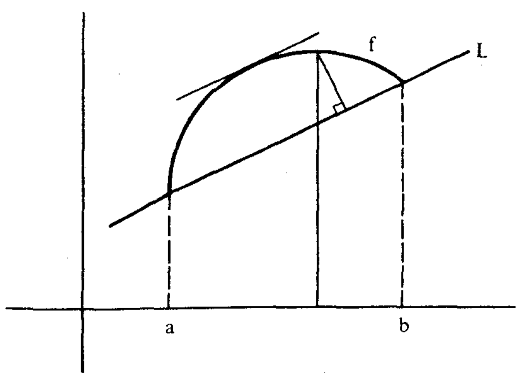
فرض کنید که $f : [a, b] \to R$ روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر باشد. به همان روشی که در راه حل ۶-۴-۱ از آن استفاده کردیم، تابع

$$F(x) = f(x) - L(x)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $L(x)$ معادلهٔ خطی است که از $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد (شکل ۶-۸ را ببینید). از نظر هندسی $F(x)$ فاصلهٔ علامتدار پاره‌خطی است که از نقطهٔ $(x, f(x))$ تا خط $L(x)$ موازی با محور y رسم می‌شود. از آنجا که $F(a) = \circ = F(b)$، از قضیهٔ رول نتیجه می‌شود که نقطه‌ای چون c در (a, b) وجود دارد به طوری که $F'(c) = \circ$. در این نقطه $f'(c) - L'(c) = \circ$ و یا معادلاً

$$f'(c) = L'(c) = (L \text{ شیب}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

پس قضیهٔ صفحهٔ بعد را ثابت کرده‌ایم.



شکل ۶-۸

قضیهٔ مقدار میانگین. اگر $f : [a,b] \to R$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه عددی مانند c در (a,b) وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

اگر در این قضیه $f(a) = f(b)$، آنگاه صورت قضیهٔ رول را داریم. در غیر این صورت، قضیه بیان می‌کند که نقطه‌ای بین b و a وجود دارد که در آن شیب منحنی مساوی با شیب خطی است که از نقطه‌های $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد.

۶ـ۶ـ۱ فرض کنید $g(x)$ تابعی باشد که مشتق اول آن، $g'(x)$، به ازای همهٔ مقادیر x پیوسته باشد. فرض کنید که شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $g(0) = 0$،

ب) به ازای هر x، $|g'(x)| \leqslant |g(x)|$.

ثابت کنید که $g(x)$ متحد با صفر است.

حل. راه حلی را که ارائه می‌کنیم، کمی نامعمول است. صرفاً می‌خواهیم کاربرد قضیهٔ مقدار میانگین را نشان دهیم. برای شروع، بازهٔ $[0, 1]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید x نقطهٔ دلخواهی از $(0, 1]$ باشد. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، نقطهٔ c_1 در $(0, x)$ وجود دارد به طوری که

$$g'(c_1) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

از این نتیجه می‌شود که $|g(x)| = |xg'(c_1)| = |x||g'(c_1)| \leqslant |x||g(c_1)|$.

به همین ترتیب، نقطهٔ c_2 در $(0, c_1)$ وجود دارد به طوری که $|g(c_1)| \leqslant |c_1||g(c_2)|$ و پس از قرار دادن این در نامساوی قبلی، نتیجه می‌گیریم $|g(x)| \leqslant |x||c_1||g(c_2)|$.

با ادامهٔ این کار، عددهای c_1، c_2، $\dots$، c_n ، $0 < c_n < \dots < c_2 < c_1 < x < 1$، را به دست می‌آوریم به‌طوری که $|g(x)| \leqslant |x||c_1|\dots|c_{n-1}||g(c_n)|$. چون g روی $[0, 1]$ پیوسته است، در نتیجه کراندار است (در حقیقت g بین مقدارهای ماکسیمم و مینیمم خود که بنابر قضیهٔ مقدار اکسترم وجود دارند، محدود می‌شود). بنابراین از آنجا که می‌توانیم با انتخاب nهای به اندازه کافی بزرگ، طرف راست نامساوی آخر را به دلخواه کوچک کنیم (زیرا هر یک از $|c_i|$ها کوچکتر از ۱ است)، در نتیجه باید داشته باشیم $g(x) = 0$. بنابراین $g(x)$ در همهٔ نقاط $[0, 1]$ مساوی با صفر است.

می‌توان همین استدلال را دربازهٔ $[1, 2]$ به کار برد (یعنی به ازای xای در $(1, 2]$، c_1 ای در $(1, x)$ وجود دارد به طوری که $|g(x)| \leqslant |x-1||g(c_1)|$ و الی آخر). از این استدلال نتیجه می‌شود که $g(x)$ در همهٔ نقاط $[1, 2]$ مساوی با صفر است.

حال با استفاده از استقرا، نتیجه می‌گیریم که به ازای همهٔ مقادیر صحیح n، $g(x)$ در همهٔ نقاط $[n, n+1]$ مساوی با صفر است. بنابراین g همه جا صفر است. (توجه کنید که از فرض پیوسته بودن g' استفاده نکردیم).

قضیهٔ مقدار میانگین فرعهای مهمی دارد که در عمل سودمندند. در زیر، برخی از آنها را بیان می‌کنیم.

فرض کنید f و g روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر باشند.

الف) اگر به ازای هر x در (a, b)، $f'(x) = 0$، آنگاه f ثابت است.

ب) اگر به ازای هر x در (a,b)، $f'(x) = g'(x)$، آنگاه عدد ثابتی چون C وجود دارد به طوری که

$$f(x) = g(x) + C$$

ج) اگر به ازای هر x در (a,b)، $f'(x) > ۰$، آنگاه f تابعی صعودی است. به همین ترتیب اگر به ازای هر x در (a,b)، $f'(x) < ۰$ ($f'(x) \geqslant ۰$، $f'(x) \leqslant ۰$)، آنگاه f روی (a,b) نزولی (به ترتیب نانزولی، ناصعودی) است. [کاربردهایی از این نتیجه‌ها را در بخش ۷-۴ ببینید.]

برهان (الف): فرض کنید $x \in (a,b)$. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، عددی چون c در (a,x) وجود دارد به طوری که $[f(x) - f(a)]/[x-a] = f'(c) = ۰$. از این نتیجه می‌گیریم که برای هر x در (a,b)، $f(x) = f(a)$.

برهان (ب): از (الف) دربارهٔ تابع $h(x) = f(x) - g(x)$ استفاده کنید.

برهان (ج): فرض کنید $x,y \in (a,b)$ و $x < y$. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، عددی چون c در (x,y) وجود دارد به طوری که $[f(y) - f(x)]/[y-x] = f'(c) > ۰$ که از آن نتیجه می‌گیریم که $f(y) > f(x)$ و در نتیجه f صعودی است.

۶ـ۶ـ۲ فرض کنید $f : R \to R$ تابعی باشد که به ازای هر x و y در R، داشته باشیم $|f(x)-f(y)| \leqslant (x-y)^۲$. ثابت کنید که f ثابت است.

حل. بنابر اولین نتیجهٔ بالا، کافی است نشان دهیم که برای هر x، $f'(x) = ۰$. بنابراین به شکل زیر استدلال می‌کنیم:

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left|\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \\ &= \lim_{y\to x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leqslant \lim_{y\to x}\frac{(y-x)^۲}{|y-x|} \\ &= \lim_{y\to x}|y-x| = ۰\end{aligned}$$

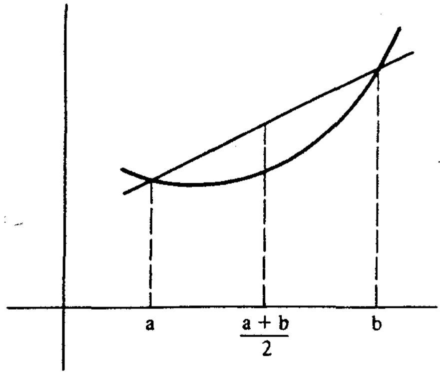
۶ـ۶ـ۳ فرض کنید که $f : R \to R$ دو بار مشتق‌پذیر باشد و برای هر x، $f''(x) \geqslant ۰$. ثابت کنید که به ازای هر a و b که $a < b$، داریم

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{۲}$$

حل. با توجه به شکل ۶-۹، حکم مسأله باورکردنی است. با وجود این، قضیهٔ مقدار میانگین ما را قادر می‌سازد که بتوانیم یک ویژگی کلی را (که به ازای همهٔ مقادیر a و b، صرف‌نظر از میزان نزدیکی آنها به یکدیگر) از ویژگی موضعی $f''(x) \geqslant ۰$ نتیجه بگیریم (موضعی بودن این ویژگی به این دلیل است که مقدار f'' در x از روی مقادیر f در نقاط نزدیک به x تعیین می‌شود).

بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، عددی چون $x_۱$ در بازهٔ $\left(a, \frac{۱}{۲}(a+b)\right)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{f\left(\frac{۱}{۲}(a+b)\right) - f(a)}{\frac{۱}{۲}(a+b) - a} = f'(x_۱)$$



شکل ۶-۹

همچنین عددی چون $x_۲$ در بازهٔ $\left(\frac{۱}{۲}(a+b), b\right)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(b)-f\left(\frac{۱}{۲}(a+b)\right)}{b-\frac{۱}{۲}(a+b)}=f'(x_۲)$$

ولی به ازای هر x در $(x_۱, x_۲)$، $f''(x) \geqslant ۰$، در نتیجه f' تابعی نانزولی است. بنابراین $f'(x_۲) \geqslant f'(x_۱)$ و یا معادلاً

$$\frac{f(b)-f\left(\frac{۱}{۲}(a+b)\right)}{b-a} \geqslant \frac{f\left(\frac{۱}{۲}(a+b)\right)-f(a)}{b-a}$$

$$f\left(\frac{۱}{۲}(a+b)\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{۲}$$

در ادامهٔ این بخش به مسائلی می‌پردازیم که همهٔ مهمترین قضیه‌های وجودی این فصل، یعنی قضیهٔ مقدار میانی، قضیهٔ مقدار اکسترم، قضیهٔ رول و قضیهٔ مقدار میانگین را به کار می‌گیرند.

۶ـ۶ـ۴ فرض کنید که f مشتق‌پذیر و f' روی $[a,b]$ پیوسته باشد. نشان دهید که اگر عددی چون c در $(a,b]$ وجود داشته باشد به طوری که $f'(c)=۰$، آنگاه می‌توانیم عدد ξ در (a,b) را طوری بیابیم که

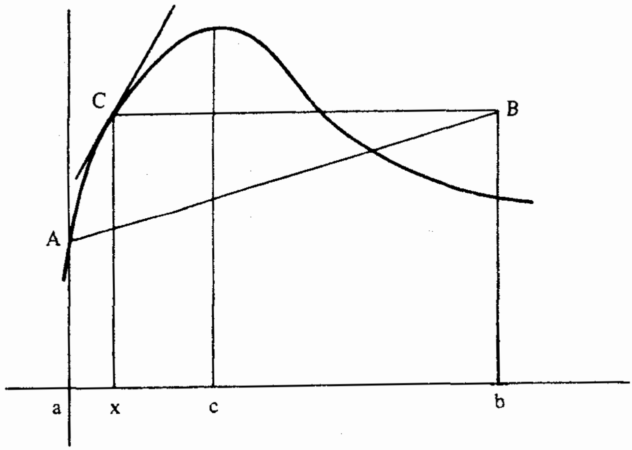
$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

حل. نخست می‌کوشیم که احساسی هندسی دربارهٔ مسأله به دست آوریم. نمودار ۶-۱۰ را در نظر بگیرید که در آن، B طوری قرار گرفته است که خط CB افقی باشد. به ازای نقطهٔ ثابت x بین a و b، طرف راست تساوی، یعنی

$$\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$$

شیب خط AB را نشان می‌دهد در حالی که طرف چپ، یعنی $f'(x)$، شیب مماس بر منحنی در نقطهٔ C است.

تابع $F(x)=f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$ را در نظر بگیرید. این تابع پیوسته‌ای از x است (در اینجاست که از شرط پیوستگی f' استفاده می‌کنیم). در نتیجه اگر نقاطی چون $x_۱$ و $x_۲$ در (a,b) وجود داشته باشند به طوری که $F(x_۱)>۰$ و $F(x_۲)<۰$، آنگاه بنابر قضیهٔ مقدار میانی، نقطه‌ای چون ξ در (a,b) وجود دارد



شکل ۶-۱۰

به‌طوری که $F(\xi) = 0$.

توجه کنید که $F(x)$ تغییر می‌کند و از مقدار مثبت در $x = a$ به مقدار منفی در $x = c$ می‌رسد. آیا این حکم یا چیزی شبیه به این، همواره روی می‌دهد؟

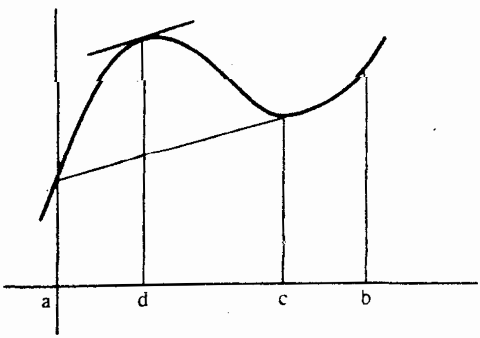
فرض کنید که $f(c) > f(a)$. در این صورت $f'(c) = 0$ و $[f(c) - f(a)]/[b - a] > 0$. در نتیجه

$$F(c) = f'(c) - \frac{f(c) - f(a)}{b - a} < 0$$

بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، نقطه‌ای چون d در (a, c) وجود دارد به طوری که $f'(d) = [f(c) - f(a)]/[c - a]$. بنابراین

$$\begin{aligned} F(d) = f'(d) - \frac{f(d) - f(a)}{b - a} &= \frac{f(c) - f(a)}{c - a} - \frac{f(d) - f(a)}{b - a} \\ &> \frac{f(c) - f(a)}{b - a} - \frac{f(d) - f(a)}{b - a} = \frac{f(c) - f(d)}{b - a} \end{aligned}$$

اکنون اگر بتوانیم نشان دهیم که $f(c) > f(d)$، حکم ثابت می‌شود. متأسفانه همان‌طور که نمودار ۶-۱۱ نشان



شکل ۶-۱۱

می‌دهد، همواره این طور نیست.

حال برای اینکه از این مشکل بکاهیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. تابع f را روی بازهٔ $[a,c]$ در نظر بگیرید. بنابر قضیهٔ مقدار اکسترم، این تابع مقدار ماکسیممی در نقطه‌ای چون $x = s$ (که s می‌تواند مساوی با c باشد) اختیار می‌کند. چون فرض کرده‌ایم که $f(c) > f(a)$، در نتیجه می‌دانیم که $a < s \leqslant c$. اگر $s = c$، آنگاه $f'(s) = f'(c) = ۰$ و اگر $a < s < c$ آنگاه بنابر ۶-۳-۷، $f'(s) = ۰$. حال به ترتیب قبل عمل می‌کنیم: نقطه‌ای چون d در (a,s) وجود دارد به طوری که $f'(d) = [f(s) - f(a)]/[s-a]$ و

$$F(d) = f'(d) - \frac{f(d)-f(a)}{b-a} = \frac{f(s)-f(a)}{s-a} - \frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$
$$> \frac{f(s)-f(a)}{b-a} - \frac{f(d)-f(a)}{b-a} = \frac{f(s)-f(d)}{b-a}$$

عبارت آخر نامنفی است، زیرا بنابر انتخاب s، $f(s) \geqslant f(d)$. این برهان را در این حالت تمام می‌کند. در حالتهای $f(c) < f(a)$ و $f(c) = f(a)$ نیز استدلال به همین شکل است.

۶-۶-۵ فرض کنید f تابعی با مقدار حقیقی باشد که به ازای همهٔ مقادیر حقیقی تعریف شده است. همچنین فرض کنید که f دوبار مشتق‌پذیر با مشتق دوم پیوسته باشد و به ازای هر x، $|f(x)| \leqslant ۱$ و $(f(۰))^۲ + (f'(۰))^۲ = ۴$. ثابت کنید که عددی حقیقی مانند $x_۰$ وجود دارد به طوری که $f(x_۰) + f''(x_۰) = ۰$.

حل. می‌توانیم دو رهیافت طبیعی را در حل این مسأله در نظر بگیریم. نخست استفاده از قضیهٔ مقدار میانی است به این صورت که تابع $F(x) = f(x) + f''(x)$ را در نظر بگیریم و a و b را طوری بیابیم که $F(a) > ۰$ و $F(b) < ۰$. متأسفانه در این رهیافت، دشوار است دریابیم که چطور باید از شرط $(f(۰))^۲ + (f'(۰))^۲ = ۴$ استفاده کرد.

ایدهٔ دیگر آن است که ملاحظه کنیم که آیا تابع $G(x) = (f(x))^۲ + (f'(x))^۲$ در درون بازهٔ معینی اکسترمم دارد یا نه. در چنین اکسترممی داریم $G'(x) = ۰$. توجه کنید که

$$G'(x) = ۲f(x)f'(x) + ۲f'(x)f''(x) = ۲f'(x)\left[f(x) + f''(x)\right]$$

این به حکم مسأله شباهت بیشتری دارد!

رهیافت ما آن است که نشان دهیم نقاطی چون a و b با شرط $-۲ < a < ۰$ و $۰ < b < ۲$ وجود دارند به طوری که $|G(a)| \leqslant ۲$ و $|G(b)| \leqslant ۲$. از آنجاکه $G(۰) = ۴$، نتیجه می‌گیریم که $G(x)$ مقدار ماکسیمم خود را در نقطه‌ای چون $x_۰$ در (a,b) اختیار می‌کند و در این نقطه $G'(x_۰) = ۰$.

از قضیهٔ مقدار میانگین نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ a در $(-۲,۰)$ و b در $(۰,۲)$ وجود دارد به طوری که

$$f'(a) = \frac{f(۰) - f(-۲)}{۲}\ ,\ \ f'(b) = \frac{f(۲) - f(۰)}{۲}$$

از این نتیجه می‌شود

$$|f'(a)| = \left|\frac{f(۰) - f(-۲)}{۲}\right| \leqslant \frac{|f(۰)| + |f(-۲)|}{۲} \leqslant \frac{۱+۱}{۲} = ۱$$
$$|f'(b)| = \left|\frac{f(۲) - f(۰)}{۲}\right| \leqslant \frac{|f(۲)| + |f(۰)|}{۲} \leqslant \frac{۱+۱}{۲} = ۱$$

بنابراین

$$|G(a)| = \left|(f(a))^۲ + \left(f'(a)\right)^۲\right| \leqslant |f(a)|^۲ + |f'(a)|^۲ \leqslant ۲$$

$$|G(b)| = \left|(f(b))^۲ + \left(f'(b)\right)^۲\right| \leqslant |f(b)|^۲ + |f'(b)|^۲ \leqslant ۲$$

فرض کنید $x_۰$ نقطه‌ای در (a,b) باشد به‌طوری که $G(x_۰)$ ماکسیمم است. در این صورت

$$G'(x_۰) = ۲f'(x_۰)\left[f(x_۰) + f''(x_۰)\right] = ۰$$

اگر $f'(x_۰) = ۰$، آنگاه $G(x_۰) = \left(f(x_۰)\right)^۲ + \left(f'(x_۰)\right)^۲ = \left(f(x_۰)\right)^۲ \leqslant ۱$. ولی $G(x_۰) \geqslant ۴$ زیرا $G(۰) = ۴$. پس $f'(x_۰) \neq ۰$ و در نتیجه باید داشته باشیم $f(x_۰) + f''(x_۰) = ۰$. این برهان را تمام می‌کند.

۶ـ۶ـ۶ فرض کنید $f(x)$ روی $[۰,۱]$ مشتق‌پذیر باشد و علاوه بر آن، $f(۰) = ۰$ و $f(۱) = ۱$. نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح مثبت n، نقاطی چون $x_۱$، $x_۲$، ... ، x_n در $[۰,۱]$ وجود دارند به طوری که

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{f'(x_i)} = n$$

حل. برای به دست آوردن ایدهٔ حل مسأله، حالت $n = ۱$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم $x_۱$ای در $[۰,۱]$ بیابیم به طوری که $۱/f'(x_۱) = ۱$. این را می‌توان با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین روی $[۰,۱]$ انجام داد زیرا در این حالت نقطه‌ای مانند $x_۱$ وجود دارد به طوری که $f'(x_۱) = ۱$.

حالت $n = ۲$ را در نظر بگیرید. زیر بازه‌های $[۰,x]$ و $[x,۱]$ را در نظر بگیرید که در آن x عددی در بازهٔ $[۰,۱]$ است که باید مشخص شود. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، $x_۱$ای در $(۰,x)$ و $x_۲$ای در $(x,۱)$ وجود دارد به طوری که

$$f'(x_۱) = \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}\ ,\ f'(x_۲) = \frac{f(۱) - f(x)}{۱ - x}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{f'(x_۱)} + \frac{۱}{f'(x_۲)} = ۲$$

اگر و فقط اگر

$$\frac{x}{f(x)} + \frac{۱ - x}{۱ - f(x)} = ۲$$

$$x\,(۱ - f(x)) + (۱ - x)f(x) = ۲f(x) - ۲\,(f(x))^۲$$

$$x - xf(x) + f(x) - xf(x) - ۲f(x) + ۲\,(f(x))^۲ = ۰$$

$$x - ۲xf(x) - f(x) + ۲\,(f(x))^۲ = ۰$$

$$x\,(۱ - ۲f(x)) - f(x)\,(۱ - ۲f(x)) = ۰$$

$$[x - f(x)]\,[۱ - ۲f(x)] = ۰$$

حال اگر x را در $(۰,۱)$ طوری انتخاب کنیم که $f(x) = \frac{۱}{۲}$ (بنابر قضیهٔ مقدار میانی می‌توانیم این کار را انجام دهیم)، آنگاه اگر مراحل استدلال بالا را به ترتیب عکس در نظر بگیریم، برهان کامل می‌شود.

باتوجه به این زمینه که در اختیار داریم، به بررسی حالتی می‌پردازیم که n عدد صحیح و مثبت دلخواهی است.

فرض کنید c_i کوچکترین عددی در $[۰,۱]$ باشد به‌طوری که $f(c_i) = i/n$ (وجود این عدد نتیجه‌ای

است از فرض پیوستگی و قضیهٔ مقدار میانی). در این صورت $\circ < c_\text{۱} < c_\text{۲} < \cdots < c_{n-\text{۱}} < \text{۱}$. تعریف می‌کنیم $c_\circ = \circ$ و $c_n = \text{۱}$. به ازای هر بازهٔ $(c_{i-\text{۱}}, c_i)$ که $i = \text{۱}, \text{۲}, \ldots, n$، x_i را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$f'(x_i) = \frac{f(c_i) - f(c_{i-\text{۱}})}{c_i - c_{i-\text{۱}}}$$

(این کار را می‌توانیم به وسیلهٔ قضیهٔ مقدار میانگین انجام دهیم). بنابراین

$$f'(x_i) = \frac{\frac{i}{n} - \frac{i-\text{۱}}{n}}{c_i - c_{i-\text{۱}}} = \frac{\text{۱}}{n(c_i - c_{i-\text{۱}})}$$

و در نتیجه

$$\sum_{i=\text{۱}}^{n} \frac{\text{۱}}{f'(x_i)} = \sum_{i=\text{۱}}^{n} n(c_i - c_{i-\text{۱}}) = n$$

مسائل

۶ـ۶ـ۷ الف) با نشان دادن اینکه $F'(x) = \circ$، نشان دهید که تابع $F(x) = \dfrac{\sin x + \sin(x+a)}{\cos x - \cos(x+a)}$ مقدار ثابتی است. (این مسأله، طی ۱-۲-۱ مطرح شد.)

ب) اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای بر حسب x از درجهٔ سه باشد و $y^\text{۲} = P(x)$، نشان دهید که

$$\frac{D(y^\text{۳} D^\text{۲} y)}{y^\text{۲}}$$

که در آن D عملگر مشتق است، مقدار ثابتی است. (راهنمایی: ابتدا عبارت بالا را بر حسب P و مشتقات آن بنویسید.)

۶ـ۶ـ۸ الف) نشان دهید که اگر $y = f(x)$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y + y'' = \circ$ باشد، $f^\text{۲} + (f')^\text{۲}$ مقدار ثابتی است.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید که هر جواب $y'' + y = \circ$ به شکل $y = A\cos x + B\sin x$ است. (راهنمایی: می‌توان به راحتی نشان داد که همهٔ تابعهای به شکل $A\cos x + B\sin x$ در این معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کنند. فرض کنید $f(x)$ جوابی برای معادله باشد. هرگاه $f(x)$ بخواهد به شکل $f(x) = A\cos x + B\sin x$ باشد، لزوماً باید داشته باشیم $A = f(\circ)$ و $B = f'(\circ)$. حال تابع $F(x) = f(x) - f(\circ)\cos x - f'(\circ)\sin x$ را در نظر بگیرید. با استفاده از این حقیقت که $F(\circ) = \circ = F'(\circ)$، حکم قسمت (الف) را دربارهٔ $F(x)$ به کار ببرید.)

ج) با استفاده از قسمت (ب)، فرمولهای جمع را ثابت کنید:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

۶ـ۶ـ۹ فرض کنید $f(x)$ روی $[\circ, \text{۱}]$ مشتق‌پذیر باشد و $f(\circ) = \circ$ و $f(\text{۱}) = \text{۱}$. نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح مثبت n و عددهای مثبت دلخواه $k_\text{۱}$، $k_\text{۲}$، $\ldots$، k_n، عددهای متمایز $x_\text{۱}$، $x_\text{۲}$، $\ldots$، x_n موجودند

به طوری که

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=۱}^{n} k_i$$

مثالهای اضافی. ۶-۹-۶، ۶-۹-۱۰، بخش ۷-۴.

۶ـ۷ قاعدهٔ لوپیتال

انتظار داریم که خواننده با شکلهای مختلف قاعدهٔ لوپیتال آشنایی داشته باشد.

۶ـ۷ـ۱ حد زیر را که در آن $a > ۰$ و $a \neq ۱$، به دست آورید

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{۱}{x}\frac{a^x - ۱}{a - ۱}\right)^{۱/x}$$

حل. عبارت را به شکلی معادل بازنویسی می‌کنیم

$$\left(\frac{۱}{x}\frac{a^x - ۱}{a - ۱}\right)^{۱/x} = \exp\left(\frac{۱}{x}\log\left(\frac{۱}{x}\frac{a^x - ۱}{a - ۱}\right)\right)$$

به این ترتیب مسأله به یافتن حد

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log \frac{۱}{x}\frac{a^x-۱}{a-۱}}{x}\right)$$

و یا معادلاً

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log\frac{۱}{x}}{x}\right) + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(a^x - ۱)}{x}\right) - \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(a - ۱)}{x}\right)$$

تبدیل می‌شود، به شرطی که هر یک از این حدها وجود داشته باشند.

روشن است که $\lim_{x\to\infty}((\log(a-۱))/x) = ۰$ و بنابر قاعدهٔ لوپیتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(۱/x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-\log x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-۱/x}{۱}\right) = ۰$$

همچنین بنابر قاعدهٔ لوپیتال

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(a^x - ۱)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x\log a}{a^x - ۱}\right) = \log a$$

از این نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۱}{x}\frac{a^x - ۱}{a - ۱}\right)^{۱/x} = \exp\log a = a$$

۶ـ۷ـ۲ فرض کنید f تابعی با مشتقهای اول و دوم پیوسته باشد و $f(۰) = ۰$. ثابت کنید تابع g که به صورت $g(۰) = f'(۰)$ و به ازای $x \neq ۰$، $g(x) = f(x)/x$ تعریف می‌شود، مشتق پیوسته دارد.

حل. به ازای $x \neq ۰$ داریم

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^۲}$$

چون f' پیوسته است، g' نیز به ازای همهٔ مقادیر $x \neq 0$ چنین است. کافی است بررسی کنیم که g در $x = 0$ مشتق دارد و اگر $g'(0)$ وجود داشته باشد، g' در $x = 0$ پیوسته است.

برای اثبات وجود $g'(0)$، باید حد زیر را بررسی کنیم:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)/x - f'(0)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}\right)$$

چون وقتی $x \to 0$، $f(x) - xf'(0) \to 0$ و چون f و f' مشتقپذیرند، می‌توانیم با استفاده از قاعدهٔ لوپیتال در این حد نتیجه بگیریم

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\right) = \frac{1}{2}f''(0)$$

(آخرین مرحله از تعریف $f''(0)$ نتیجه می‌شود.) بنابراین $g'(0)$ وجود دارد.

برای بررسی پیوستگی g' در صفر داریم

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f''(x)}{2}\right) = \frac{1}{2}f''(0)$$

مرحلهٔ آخر از فرض پیوستگی مشتق دوم نتیجه می‌شود. بنابراین $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$ و برهان کامل است.

مسائل

۶ـ۷ـ۳ مقدار حد $\lim_{n\to\infty} 4^n\left(1-\cos\frac{\theta}{2^n}\right)$ را به دست آورید.

۶ـ۷ـ۴ مقدار هر یک از حدود زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

ب) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

ج) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

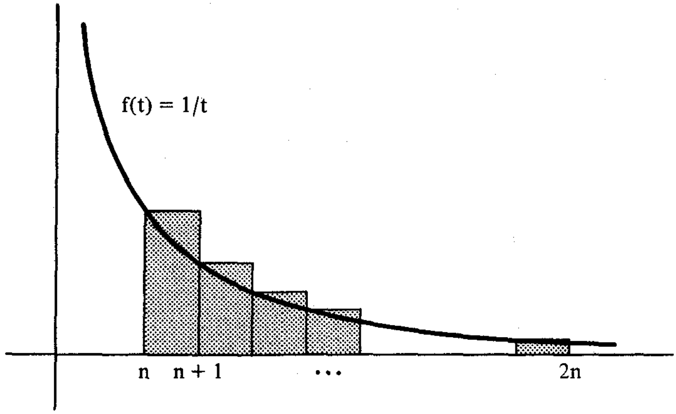
د) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

ه) $\lim_{n\to\infty}\frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$ که در آن $p_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و $P_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

۶ـ۷ـ۵ فرض کنید $0 < a < b$. مقدار حد $\lim_{t\to 0}\left[\int_0^1 \left[bx + a(1-x)\right]^t dt\right]^{1/t}$ را به دست آورید.

۶ـ۷ـ۶ حاصل $\lim_{x\to\infty} x\int_0^x e^{t^2-x^2}dt$ را به دست آورید.

۶ـ۷ـ۷ ثابت کنید که تابع $y = (x^2)^x$، $y(0) = 1$، در $x = 0$ پیوسته است.



شکل۶-۱۲

۶ـ۸ انتگرال

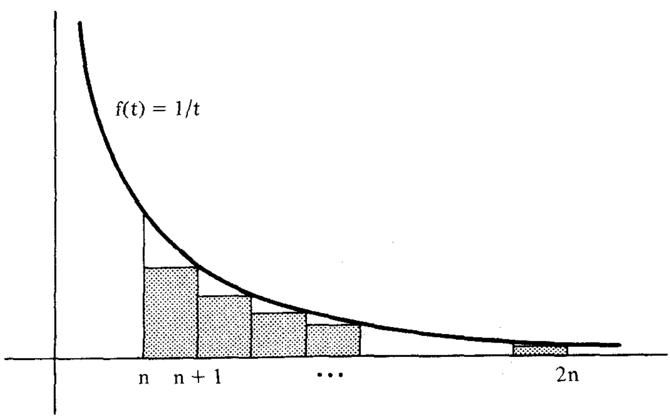
ببینید وقتی که $n \to \infty$، برای مجموع $\frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n-۱}$ چه روی می‌دهد. یک راه برای بررسی این حد آن است که آن را به شکل هندسی بیان کنیم. یعنی همان‌طورکه در شکل ۶-۱۲ نشان داده شده است، مستطیلهایی روی بازهٔ $[n, ۲n]$ بسازید. با توجه به شکل، روشن است که

$$\frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n-۱} > \int_n^{۲n} \frac{۱}{x}\, dx = \log x \Big]_n^{۲n}$$

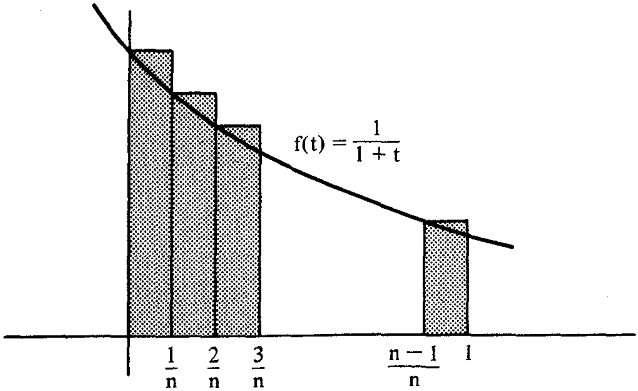
$$= \log ۲n - \log n = \log ۲$$

به همین ترتیب با توجه به شکل ۶-۱۳، ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n} < \int_n^{۲n} \frac{۱}{t}\, dt = \log ۲$$



شکل۶-۱۳



شکل ۶-۱۴

می‌توانیم این دو نامساوی را یکجا به‌صورت زیر بنویسیم

$$\log ۲ < \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n-۱} < \left(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{۲n}\right) + \log ۲$$

اکنون وقتی که $n \to \infty$، مجموع مورد نظر به وضوح به $\log ۲$ میل می‌کند.

راه دیگری برای دیدن این نتیجه آن است که مجموع را به شکل زیر بنویسیم

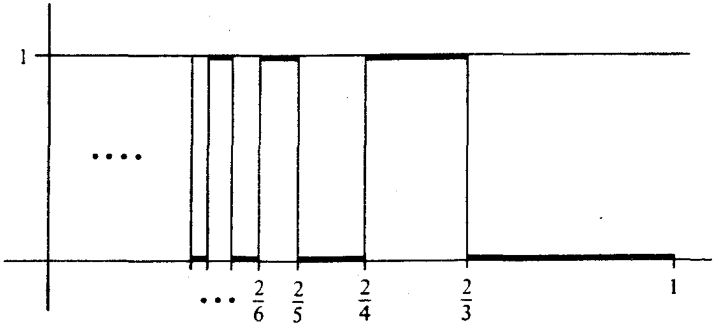
$$\sum_{k=۰}^{n-۱} \frac{۱}{n+k} = \sum_{k=۰}^{n-۱} \left(\frac{۱}{۱+k/n}\right) \frac{۱}{n}$$

و هر یک از جمله‌های $\left(\frac{۱}{۱+k/n}\right)\frac{۱}{n}$ را به عنوان مساحت مستطیلی با قاعدهٔ $[k/n, (k+۱)/n]$ و ارتفاع $۱/(۱+k/n)$ در نظر بگیریم. به این ترتیب، مجموع مورد نظر نمایش دهندهٔ مساحت مستطیلهای سایه‌دار در شکل ۶-۱۴ است. وقتی که $n \to \infty$، این مساحتها به مساحت ناحیهٔ محدود به $y = ۱/(۱+x)$، $y = ۰$، $x = ۰$، $x = ۱$ نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=۰}^{n-۱} \frac{۱}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=۰}^{n-۱} \left(\frac{۱}{۱+k/n}\right) \frac{۱}{n} = \int_۰^۱ \frac{۱}{۱+x} dx = \log ۲$$

۶ـ۸ـ۱ حاصل $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{n} \left(\left\llbracket \frac{۲n}{k} \right\rrbracket - ۲\left\llbracket \frac{n}{k} \right\rrbracket\right)$ را به دست آورید.

حل. مسأله از ما می‌خواهد که مقدار انتگرال معین $\int_۰^۱ \left(\left\llbracket \frac{۲}{x} \right\rrbracket - ۲\left\llbracket \frac{۱}{x} \right\rrbracket\right) dx$ را به دست آوریم. این کار را به طریق هندسی با محاسبهٔ مساحت زیر نمودار $f(x) = \llbracket ۲/x \rrbracket - ۲\llbracket ۱/x \rrbracket$ در فاصلهٔ $x = ۰$ و $x = ۱$ انجام می‌دهیم. نقاط ناپیوستگی $f(x)$ در $(۰, ۱)$، نقاطی هستند که به ازای آنها $۲/x$ یا $۱/x$ عددهای صحیح باشند. در حالت اول، $۲/x = n$ وقتی که $x = ۲/n$ و در حالت دوم، $۱/x = n$ وقتی که $x = ۱/n$. از این رو توجه خود را به نقاط $۱ > ۲/۳ > ۲/۴ > ۲/۵ > ۲/۶ > \cdots$ جلب می‌کنیم.



شکل۶-۱۵

می‌توانیم به سادگی بررسی کنیم که به ازای هر n،

$$f(x)=\begin{cases} \circ & ,x\in\left(\frac{۲}{۲n+۱},\frac{۲}{۲n}\right] \\ ۱ & ,x\in\left(\frac{۲}{۲n+۲},\frac{۲}{۲n+۱}\right] \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۶-۱۵ نشان داده شده است. پس انتگرال مورد نظر مساوی است با

$$\left(\frac{۲}{۳}-\frac{۲}{۴}\right)+\left(\frac{۲}{۵}-\frac{۲}{۶}\right)+\left(\frac{۲}{۷}-\frac{۲}{۸}\right)+\dots$$

یا

$$۲\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۸}+\dots\right)$$

اکنون به یاد آورید که

$$\log(۱+x)=x-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۴}}{۴}+\dots,\quad -۱<x\leqslant ۱$$

این می‌رساند که

$$۲\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\dots\right)=۲\left[\log ۲-۱+\frac{۱}{۲}\right]=\log ۴-۱$$

و به این ترتیب حل مسأله کامل می‌شود.

۶ـ۸ـ۲ حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^{۴}}\prod_{i=۱}^{۲n}(n^{۲}+i^{۲})^{۱/n}$ را به دست آورید.

حل. می‌توانیم شکل حاصلضرب را با نوشتن آن به صورت معادل زیر، تغییر دهیم

$$\frac{۱}{n^{۴}}\prod_{i=۱}^{۲n}(n^{۲}+i^{۲})^{۱/n}=\exp\left[\log\frac{۱}{n^{۴}}\prod_{i=۱}^{۲n}(n^{۲}+i^{۲})^{۱/n}\right]$$
$$=\exp\left[\sum_{i=۱}^{۲n}\frac{۱}{n}\log(n^{۲}+i^{۲})-\log n^{۴}\right]$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log(n^2+i^2)-\log n^4\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log n^2\left(\frac{n^2+i^2}{n^2}\right)-\log n^4\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\left\{\log n^2+\log\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\right\}-\log n^4\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log n^2+\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)-\log n^4\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{n}\log n^2+\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\log\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)-\log n^4\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\log\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{n}\right]
\end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که عبارت نهایی همان انتگرال معین $\int_0^2\log(1+x^2)dx$ است. با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء، داریم

$$\begin{aligned}
\int_0^2\log(1+x^2)dx&=x\log(1+x^2)\Big]_0^2-2\int_0^2\frac{x^2}{1+x^2}dx\\
&=2\log 5-2\int_0^2\left[1-\frac{1}{1+x^2}\right]dx\\
&=2\log 5-2[x-\arctan x]_0^2\\
&=2\log 5-2[2-\arctan 2]
\end{aligned}$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر در مسأله، برابر است با

$$\exp[2\log 5-4+2\arctan 2]$$

و یا معادلاً

$$25\exp(2\arctan 2-4)$$

۶ـ۸ـ۳ ثابت کنید که

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{k+n+1}$$

حل. کلید حل مسأله آن است که ملاحظه کنیم

$$\frac{1}{k+m+1}=\int_0^1 t^{k+m}dt$$

با استفاده از این تساوی، در می‌یابیم که

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{k+m}dt$$
$$=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}t^{k+m}dt$$
$$=\int_0^1 t^m(1-t)^n dt$$

اکنون از تغییر متغیر $s=1-t$ استفاده می‌کنیم. در ادامهٔ محاسبات قبل داریم:

$$=\int_0^1 s^n(1-s)^m ds$$
$$=\int_0^1 s^n\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}s^k ds$$
$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\int_0^1 s^{k+n}ds$$
$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{k+n+1}$$

مسائل

۶ـ۸ـ۴ مقدار هریک از حدود زیر را به‌دست آورید:

الف) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right]$

ب) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^a+2^a+\cdots+n^a}{n^{1+a}}\right]$، $a>-1$.

ج) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$

د) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}$

۶ـ۸ـ۵ مقدار هریک از حدود زیر را به‌دست آورید:

الف) $\lim_{n\to\infty}n^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

ب) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$

۶ـ۸ـ۶ جزء صحیح $\sum_{n=1}^{10^9}n^{-2/3}$ را بیابید. (راهنمایی: مساحت زیر نمودار $f(x)=x^{-2/3}$ روی $[1,10^9+1]$ را با مساحت زیر نمودار $g(x)=(x-1)^{-2/3}$ روی $[2,10^9+1]$ مقایسه کنید.)

۶ـ۸ـ۷ فرض کنید f و g تابعهای پیوسته‌ای روی $[0,a]$ باشند و به ازای هر x در $[0,a]$، $f(x)=f(a-x)$

و $g(x)+g(a-x)=k$ که در آن k عدد ثابتی است. ثابت کنید

$$\int_{۰}^{a} f(x)g(x)dx = \frac{۱}{۲}k\int_{۰}^{a} f(x)dx$$

با استفاده از این واقعیت، مقدار انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_{۰}^{\pi} \frac{x\sin x}{۱+\cos^{۲} x}dx$$

۶ـ۸ـ۸ الف) فرض کنید $A=\int_{۰}^{\pi}\frac{\cos x}{(x+۲)^{۲}}dx$. مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{\sin x\cos x}{x+۱}dx$ را بر حسب A به دست آورید.

ب) فرض کنید که به ازای $x>۰$،

$$f(x)=\int_{۱}^{x}\frac{\log t}{۱+t}dt$$

مقدار $f(x)+f(۱/x)$ را به دست آورید.

۶ـ۸ـ۹ به ازای $۰\leqslant x\leqslant ۱$، همهٔ تابعهای مثبت پیوسته‌ای چون $f(x)$ را بیابید به طوری که $\int_{۰}^{۱} f(x)dx=۱$، $\int_{۰}^{۱} xf(x)dx=a$، $\int_{۰}^{۱} x^{۲}f(x)dx=a^{۲}$ که در آن a عدد حقیقی معیّنی است.

۶ـ۸ـ۱۰ فرض کنید $f(x,y)$ تابع پیوسته‌ای روی مربع زیر باشد

$$S=\{(x,y): ۰\leqslant x\leqslant ۱, ۰\leqslant y\leqslant ۱\}$$

فرض کنید $S_{(a,b)}$، به ازای هر نقطهٔ (a,b) از ناحیهٔ درونی S، بزرگترین مربع مشمول در S باشد که مرکزش (a,b) و ضلعهایش موازی با S است. در صورتی که مقدار انتگرال دوگانهٔ $\iint f(x,y)dxdy$ روی هر مربع $S_{(a,b)}$ مساوی صفر باشد، آیا لزوماً باید $f(x,y)$ روی S تابع ثابت صفر باشد؟

مثالهای اضافی. ۱-۴-۴، ۱-۶-۳، ۱-۱۲-۳، ۱-۱۲-۶، ۲-۵-۱۵، ۶-۲-۲، ۶-۲-۹، ۷-۶-۳.

۶ـ۹ قضیهٔ اصلی

قضیه اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال مربوط است به رابطهٔ معکوسی که بین مشتقگیری و انتگرالگیری وجود دارد. قضیهٔ اصلی دربارهٔ انتگرالهای مشتقها، بیان می‌کند که اگر $F(t)$ روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق پیوسته‌ای داشته باشد، آنگاه

$$\int_{a}^{b} F'(t)dt = F(b)-F(a)$$

به عبارت دیگر مشتقگیری و به دنبالش انتگرالگیری، تابع را با اختلاف عدد ثابت دوباره به دست می‌دهد، به این مفهوم که

$$F(x)=\int_{۰}^{x} F'(t)dt + C$$

که در آن $C=F(۰)$.

برای مثال، مشتق $F(t) = \sin^۲ t$ مساوی است با $F'(t) = ۲\sin t\cos t$. با انتگرالگیری روی $[۰, x]$ به دست می‌آوریم

$$\sin^۲ x = \int_۰^x ۲\sin t\cos t dt$$

در این حالت به دلیل آنکه $F(۰) = ۰$، دقیقاً خود تابع را باز یافتیم. ولی توجه کنید که می‌توانیم انتگرالگیری را به روش دیگری نیز انجام دهیم، یعنی (فرض کنیم $u = \cos t$)

$$\int_۰^x ۲\sin t\cos t dt = -\cos^۲ t\Big]_۰^x = -\cos^۲ x + ۱$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\sin^۲ x = -\cos^۲ x + ۱$ یا معادلاً به ازای هر x، $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$.

۶ـ۹ـ۱ همهٔ تابعهای مشتقپذیر f را بیابید که به ازای $x > ۰$ تعریف شده‌اند و در تساوی

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad , \quad x, y > ۰$$

صدق می‌کنند.

حل. وقتی که $x = y = ۱$، نتیجه می‌گیریم که $f(۱) = f(۱\times ۱) = f(۱) + f(۱)$ و این نتیجه می‌دهد $f(۱) = ۰$. اگر $x \neq ۰$، داریم $f(x\times ۱/x) = f(x) + f(۱/x) = f(۱) = ۰$ و در نتیجه $f(۱/x) = -f(x)$. از این نتیجه می‌گیریم که $f(x/y) = f(x) + f(۱/y) = f(x) - f(y)$.

اکنون ایدهٔ حل مسأله آن است که با توجه به مشتق f، به کمک انتگرالگیری، تابع f را باز می‌یابیم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = \lim_{h\to ۰}\left(\frac{f((x+h)/x)}{h}\right) \\ &= \lim_{t\to ۰}\left(\frac{f(۱+t)}{tx}\right) \quad , \quad h/x = t \\ &= \lim_{t\to ۰}\left(\frac{۱}{x}\cdot\frac{f(۱+t) - f(۱)}{t}\right) = \frac{۱}{x}f'(۱) \end{aligned}$$

در نتیجه بنابر قضیهٔ اصلی داریم

$$f(x) = f(x) - f(۱) = \int_۱^x f'(x)dx = \int_۱^x \frac{f'(۱)}{x}dx = f'(۱)\log x$$

بنابراین تابعهایی که به دنبالشان هستیم، به شکل $f(x) = A\log x$ هستند که در آن A عدد ثابت دلخواهی است.

۶ـ۹ـ۲ مجموع سری $۱ - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۱۱} + \cdots + \frac{۱}{۶n-۵} - \frac{۱}{۶n-۱} + \ldots$ را بیابید.

حل. تابعی را که به ازای $۰ < x \leqslant ۱$ توسط سری نامتناهی زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید:

$$f(x) = x - \frac{x^۵}{۵} + \frac{x^۷}{۷} - \frac{x^{۱۱}}{۱۱} + \cdots + \frac{x^{۶n-۵}}{۶n-۵} - \frac{x^{۶n-۱}}{۶n-۱} + \ldots$$

این سری به ازای $|x| < ۱$ مطلقاً همگرا است و به این جهت می‌توانیم جمله‌های آن را تجدید آرایش کنیم:

$$f(x) = \left(x + \frac{x^{۷}}{۷} + \frac{x^{۱۳}}{۱۳} + \cdots + \frac{x^{۶n-۵}}{۶n-۵} + \dots\right)$$
$$- \left(\frac{x^{۵}}{۵} + \frac{x^{۱۱}}{۱۱} + \cdots + \frac{x^{۶n-۱}}{۶n-۱} + \dots\right)$$

در اینجا ایدهٔ حل آن است که از f مشتق بگیریم تا شکل جمله‌های آن تغییر کند و سپس با استفاده از قضیهٔ اصلی، و با استفاده از انتگرالگیری، f را باز می‌یابیم. به ازای $۰ < x < ۱$، داریم

$$f'(x) =(۱ + x^{۶} + \cdots + x^{۶n-۶} + \dots) - (x^{۴} + x^{۱۰} + \cdots + x^{۶n-۲} + \dots)$$
$$=\frac{۱}{۱ - x^{۶}} - \frac{x^{۴}}{۱ - x^{۶}} = \frac{(۱ - x^{۲})(۱ + x^{۲})}{(۱ - x^{۲})(۱ + x^{۲} + x^{۴})} = \frac{۱ + x^{۲}}{۱ + x^{۲} + x^{۴}}$$

با توجه به تساوی $f(۰) = ۰$ و انتگرالگیری (که در اینجا وارد جزئیات آن نمی‌شویم)، به دست می‌آوریم

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\left[\arctan\left(\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳}}\right) + \arctan\left(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}}\right)\right]$$

از آنجا که نمایش سری f به ازای $x = ۱$ همگراست، آزمون آبل (بخش ۵-۴ را ببینید) ایجاب می‌کند که سری اولیه به

$$f(۱) = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\left[\arctan\frac{۱}{\sqrt{۳}} + \arctan\sqrt{۳}\right] = \frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}$$

همگرا شود.

قضیهٔ اصلی مشتقهای انتگرالها، بیان می‌کند که اگر تابع f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر x در (a, b)،

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

به بیان دیگر، انتگرالگیری و به دنبال آن مشتقگیری، f را دقیقاً باز می‌یابد.

۶ـ۹ـ۳ اگر $a(x)$، $b(x)$، $c(x)$ و $d(x)$ چند جمله‌ایهایی از x باشند، نشان دهید که

$$\int_۱^x a(x)c(x)dx \int_۱^x b(x)d(x)dx - \int_۱^x a(x)d(x)dx \int_۱^x b(x)c(x)dx$$

بر $(x-۱)^{۴}$ بخش‌پذیر است.

حل. عبارت مورد بحث را $F(x)$ می‌نامیم. توجه کنید که $F(x)$ یک چندجمله‌ای از x است. همچنین توجه کنید که $F(۱) = ۰$ و در نتیجه $x - ۱$ عاملی از $F(x)$ است.

چون F چندجمله‌ای است، بنابراین $(x-۱)^{۴}$ یک عامل $F(x) = ۰$ است اگر و فقط اگر $F'''(۱) = ۰$. می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ اصلی F' را حساب کنیم:

$$F'(x) = ac\int_۱^x bd + bd\int_۱^x ac - ad\int_۱^x bc - bc\int_۱^x ad$$

(توجه کنید که $F'(۱) = ۰$ و در نتیجه $(x-۱)^{۲}$ یک عامل $F(x) = ۰$ است.) همین کار را برای F'' و

F''' انجام می‌دهیم. نتیجه می‌گیریم که $F'''(1) = (ac)'bd + (bd)'ac - (ad)'bc - (bc)'ad]_{x=1} = 0$.
این برهان را تمام می‌کند.

در سه مثال بعدی چند ایدهٔ مختلف از این فصل با هم آمیخته شده‌اند.

۶ـ۹ـ۴ فرض کنید $f : (0,\infty) \to R$ مشتقپذیر باشد و وقتی که $x \to \infty$، $f(x) + f'(x) \to 0$. نشان دهید که وقتی $x \to \infty$، $f(x) \to 0$.

حل. ابتدا به بحثی جانبی می‌پردازیم: اگر $p(x)$ و $q(x)$ تابعهای پیوسته‌ای باشند، می‌توانیم معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

را به ترتیب زیر حل کنیم. دو طرف معادله را در $m(x) = e^{\int p(x)dx}$ ضرب و توجه می‌کنیم که معادلهٔ حاصل را می‌توان به شکل

$$\frac{d}{dx}(ym(x)) = m(x)q(x)$$

نوشت. در این صورت بنابر قضیهٔ اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، به ازای هر مقدار ثابت a، مقدار ثابتی چون C وجود دارد به طوری که

$$ym(x) = \int_a^x m(t)q(t)dt + C$$

از این تساوی می‌توانیم y را به دست آوریم.

اکنون به مسأله اصلی باز می‌گردیم و قرار می‌دهیم $g(x) = f(x) + f'(x)$. مطابق استدلال بند بالا، می‌توانیم با ضرب دو طرف در e^x، $f(x)$ را (بر حسب $g(x)$) به دست آوریم. همانند آنچه که در بالا به دست آمد، این کار به معادلهٔ

$$f(x)e^x = \int_a^x e^t g(t)dt + C$$

یا معادلاً $f(x) = e^{-x}\int_a^x e^t g(t)dt + Ce^{-x}$ می‌انجامد.

فرض کنید $\varepsilon > 0$. از آنجا که وقتی $x \to \infty$، $g(x) \to 0$، مقدار a را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای هر $x > a$، $|g(x)| < \varepsilon$. در این صورت

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant e^{-x}\left|\int_a^x e^t g(t)dt\right| + |Ce^{-x}| \\
&\leqslant e^{-x}\int_a^x e^t|g(t)|dt + |Ce^{-x}| \\
&\leqslant \varepsilon e^{-x}\int_a^x e^t dt + |Ce^{-x}| \\
&= \varepsilon e^{-x}(e^x - e^a) + |Ce^{-x}| \\
&= \varepsilon(1 - e^{a-x}) + |Ce^{-x}|
\end{aligned}$$

حال برای xهای به اندازه کافی داریم $|f(x)| < 2\varepsilon$. از این نتیجه می‌شود که وقتی $x \to \infty$، $f(x) \to 0$.

۶ـ۹ـ۵ حاصل $\lim_{x\to 0}(1/x)\int_0^x(1+\sin 2t)^{1/t}dt$ را به دست آورید.

حل. هدف ما آن است که از قاعدهٔ لوپیتال استفاده کنیم، ولی پیش از آن باید مقدمات کار را فراهم کنیم. نخست این سؤال مطرح است که آیا این انتگرال وجود دارد، زیرا انتگرالده در $t = ۰$ تعریف نشده است. با این حال داریم

$$\lim_{x\to ۰}(۱+\sin ۲x)^{۱/x} = \lim_{x\to ۰}\left[\exp\frac{۱}{x}\log(۱+\sin ۲x)\right] = \exp\left[\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\log(۱+\sin ۲x)}{x}\right)\right]$$

که بنابر قاعدهٔ لوپیتال مساوی است با

$$\exp\left[\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos ۲x}{۱+\sin ۲x}\right] = \exp ۲ = e^{۲}$$

بنابراین، اگر تعریف کنیم

$$f(x) = \begin{cases}(۱+\sin ۲x)^{۱/x} & ,x\neq ۰\\ e^{۲} & ,x = ۰\end{cases}$$

تابع f پیوسته است و $\int_۰^x (۱+\sin ۲t)^{۱/t}dt = \int_۰^x f(t)dt$.

برای آنکه بتوانیم در این مسأله از قاعدهٔ لوپیتال استفاده کنیم، باید نشان دهیم که وقتی $x\to ۰$، $\int_۰^x (۱+\sin ۲t)^{۱/t}dt \to ۰$. برای این منظور، فرض کنید که به ازای هر x در $(-۱, ۱)$، K کران بالایی برای $|f(x)|$ باشد. در این صورت به ازای x در $(-۱, ۱)$ داریم

$$\left|\int_۰^x (۱+\sin ۲t)^{۱/t}dt\right| \leqslant \int_۰^x |۱+\sin ۲t|^{۱/t}dt \leqslant K|x|$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\int_۰^x (۱+\sin ۲t)^{۱/t}dt \to ۰ \qquad , \qquad \text{وقتی } x\to ۰$$

اکنون می‌توانیم قاعدهٔ لوپیتال را در مسأله اصلی به کار ببریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\int_۰^x (۱+\sin ۲t)^{۱/t}dt}{x} = \lim_{x\to ۰}(۱+\sin ۲x)^{۱/x} = e^{۲}$$

۶ـ۹ـ۶ فرض کنید $f : [۰, ۱] \to R$ مشتق دوم پیوسته داشته باشد، $f(۰) = ۰ = f(۱)$ و به ازای هر x در بازهٔ $(۰, ۱)$، $f(x) > ۰$. نشان دهید که

$$\int_۰^۱ \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > ۴$$

حل. فرض کنید X نقطه‌ای در $[۰, ۱]$ باشد که در آن $f(x)$ ماکسیمم می‌شود و نیز $Y = f(X)$. در این صورت

$$\int_۰^۱ \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > \frac{۱}{|Y|}\int_۰^۱ |f''(x)|dx$$

$$\geqslant \frac{۱}{|Y|}\left|\int_۰^۱ f''(x)dx\right| = \frac{f'(۱)-f'(۰)}{Y}$$

به‌نظر می‌رسد که در اینجا به مانع برخورده‌ایم زیرا بی‌تردید لازم نیست که $f'(۱) - f'(۰) \geqslant ۴|Y|$. با وجود این،

بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، نقاط a در $(\circ, X)$ و b در $(X, ۱)$ موجودند به طوری که

$$f'(a) = \frac{f(X) - f(\circ)}{X - \circ} = \frac{f(X)}{X} = \frac{Y}{X}$$

و

$$f'(b) = \frac{f(۱) - f(X)}{۱ - X} = \frac{-Y}{۱ - X}$$

در نتیجه

$$\int_\circ^۱ \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geqslant \int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geqslant \frac{۱}{|Y|}\left|\int_a^b f''(x)dx\right|$$

بنابراین با به‌کار بردن قضیهٔ اصلی در انتگرال آخری، داریم

$$\int_\circ^۱ \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > \frac{۱}{|Y|}|f'(b) - f'(a)| = \frac{۱}{|Y|}\left|\frac{-Y}{۱ - X} - \frac{Y}{X}\right|$$

$$= \frac{۱}{|Y|}\left|\frac{Y}{۱ - X} + \frac{Y}{X}\right| = \left|\frac{۱}{X(۱ - X)}\right|$$

ولی مقدار ماکسیمم $x(۱ - x)$ در $(\circ, ۱)$ برابر با $\frac{۱}{۴}$ است (وقتی که $x = \frac{۱}{۲}$) و بنابراین

$$\int_\circ^۱ \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > \frac{۱}{|X(۱ - X)|} \geqslant ۴$$

مسائل

۶ـ۹ـ۷ معادلهٔ زیر چه تابعی را مشخص می‌کند؟

$$f(x) = \int_\circ^x f(t)dt + ۱$$

۶ـ۹ـ۸ فرض کنید $f : [\circ, ۱] \to (\circ, ۱)$ پیوسته باشد. نشان دهید که معادلهٔ

$$۲x - \int_\circ^x f(t)dt = ۱$$

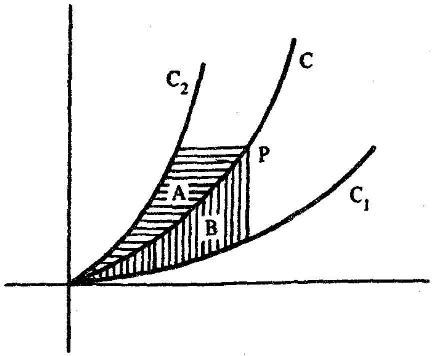
یک و فقط یک جواب دربازهٔ $[\circ, ۱]$ دارد.

۶ـ۹ـ۹ فرض کنید f تابعی باشد که برای هر x پیوسته است و به ازای عدد ثابت C، در معادلهٔ

$$\int_\circ^x f(t)dt = \int_x^۱ t^۲ f(t)dt + \frac{x^{۱۶}}{۸} + \frac{x^{۱۸}}{۹} + C$$

صدق می‌کند. شکل صریحی برای $f(x)$ بیابید و مقدار C را به دست آورید.

۶ـ۹ـ۱۰ فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ دو منحنی باشند که مطابق شکل ۶-۱۶ از مبدأ می‌گذرند. گوییم منحنی C ناحیهٔ بین $C_۱$ و $C_۲$ را از نظر مساحت نصف می‌کند اگر به ازای هر نقطهٔ P از C، دو ناحیهٔ سایه‌دار A و B در شکل، مساحتهای مساوی داشته باشند. با فرض اینکه معادلهٔ منحنی نصف کنندهٔ C، $y = x^۲$ و معادلهٔ منحنی پایینی $C_۱$، $y = \frac{۱}{۲}x^۲$ باشد، منحنی بالایی $C_۲$ را تعیین کنید.



شکل ۶-۱۶

۶ـ۹ـ۱۱ مجموع سری $\ldots - \frac{۱}{۱۳} - \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۳} + ۱$ را به دست آورید.

۶ـ۹ـ۱۲ فرض کنید که f مشتقپذیر و $f'(x)$ به ازای $x \geqslant ۰$، اکیداً صعودی باشد. اگر $f(۰) = ۰$، ثابت کنید که $f(x)/x$ به ازای $x > ۰$ اکیداً صعودی است.

مثالهای اضافی. ۱-۵-۱، ۵-۱-۳، ۵-۱-۹، ۵-۱-۱۱، ۵-۴-۶، ۷-۶-۵.

۷

نامساویها

نامساویها واقعاً در همهٔ زمینه‌های ریاضی مفیدند و مسائل مربوط به نامساویها از زیباترین مسائل ریاضی هستند. از بین همهٔ نامساویهای ممکنی که می‌توانیم بررسی کنیم، تنها بر دو نامساوی تأکید می‌کنیم: یکی نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی در بخش ۷-۲ و دیگری نامساوی کوشی ـ شوارتز در بخش ۷-۳. علاوه بر این، در بخش ۷-۱ تکنیکهای جبری و هندسی مختلفی را بررسی می‌کنیم و در بخشهای ۷-۴ و ۷-۵ به تکنیکهای تحلیلی می‌پردازیم. در آخرین بخش، یعنی بخش ۷-۶، می‌بینیم که چگونه می‌توان از نامساویها دریافتن مقدار حدود استفاده کرد.

۷ـ۱ ویژگیهای اساسی نامساویها

از سریعترین رهیافتها در اثبات یک نامساوی، توسل به عملیات جبری یا تعبیرهای هندسی است. برای مثال می‌توانیم نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی یعنی

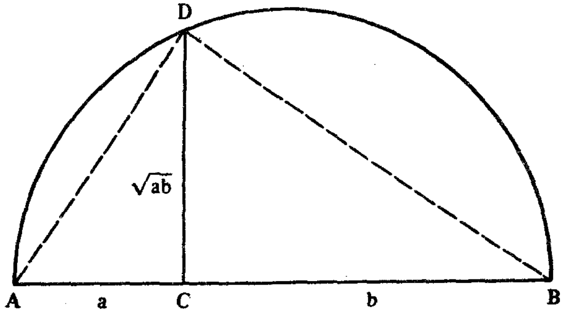
$$\frac{a+b}{۲} \geqslant \sqrt{ab} \quad , \quad ۰ < a \leqslant b$$

را با نوشتن آن به شکل معادل

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{۲} \geqslant ۰$$

به روش جبری ثابت کنیم. همچنین می‌توانیم با توجه به نیمدایرهٔ شکل ۷-۱، آن را به روش هندسی ثابت کنیم. (قطر این نیمدایره، AB، مساوی با $a+b$ است و نقطهٔ C طوری انتخاب شده است که $AC=a$ و $CB=b$. خطی که در C بر AB عمود رسم می‌شود، دایره را در D قطع می‌کند. مثلثهای ACD و CDB متشابه‌اند و در نتیجه $a/CD = CD/b$. از این نتیجه می‌گیریم که $CD=\sqrt{ab}$. روشن است که $\sqrt{ab} \leqslant$ شعاع دایره $= (a+b)/۲$.) از هر دو برهان روشن است که تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a=b$.

در این بخش به مثالهایی می‌پردازیم که در اثبات آنها تنها به ایده‌های جبری و هندسی نیاز داشته باشیم.



شکل۷-۱

۷ـ۱ـ۱ نشان دهید که به ازای عددهای مثبت a، b، c،

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geqslant ab + bc + ca$$

حل. از استدلال به روش قهقرایی استفاده می‌کنیم.

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geqslant ab + bc + ca$$

$$۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ \geqslant ۲ab + ۲bc + ۲ca$$

$$(a^۲ - ۲ab + b^۲) + (b^۲ - ۲bc + c^۲) + (c^۲ - ۲ca + a^۲) \geqslant ۰$$

$$(a - b)^۲ + (b - c)^۲ + (c - a)^۲ \geqslant ۰$$

بدیهی است که نامساوی آخر درست است و چون مراحل برهان برگشت‌پذیرند، راه حل مسأله کامل می‌شود. (همچنین با توجه به برهان، می‌توانیم ببینیم که تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $a = b = c$).

این مثال یک روش معمول را نشان می‌دهد، یعنی: عبارتها را آنقدر دستکاری کنید تا به شکلی در آیند که بتوانید از این حقیقت که عددهای مجذور نامنفی‌اند، استفاده کنید.

۷ـ۱ـ۲ ثابت کنید که به ازای $\frac{\pi}{۲} > x > ۰$، $\cos^۲ x + x \sin x < ۲$.

حل. تابع $f(x) = ۲ - \cos^۲ x - x \sin x$ را در نظر بگیرید و عملیات زیر را روی آن انجام دهید

$$f(x) = ۱ + (۱ - \cos^۲ x) - x \sin x = ۱ + \sin^۲ x - x \sin x$$

$$= (۱ - ۲\sin x + \sin^۲ x) - x \sin x + ۲ \sin x = (۱ - \sin x)^۲ + (۲ - x) \sin x$$

این شکل تابع نشان می‌دهد که نامساوی مورد نظر به ازای $۲ > x > ۰$ برقرار است.

۷ـ۱ـ۳ نشان دهید که اگر $۰ \leqslant a, b, c \leqslant ۱$، آنگاه

$$\frac{a}{b + c + ۱} + \frac{b}{c + a + ۱} + \frac{c}{a + b + ۱} + (۱ - a)(۱ - b)(۱ - c) \leqslant ۱$$

حل. اگر در اینجا بخواهیم عبارت را مستقیماً به روش جبری بسط دهیم، به عبارتهای بسیار پیچیده‌ای می‌رسیم که راهی را نمی‌نمایاند. یکی از راههای ساده‌تر کردن مسأله، بی‌آنکه به کلیت آن خللی وارد شود، آن است که

فرض کنیم $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 1$. بنابراین، به عنوان مثال داریم

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1} \leqslant \frac{a+b+c}{a+b+1}$$

و ممکن است بکوشیم تا ثابت کنیم که

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1$$

این مسأله از نظر جبری ساده‌تر است، ولی هنوز هم پیچیده است و امکان دارد که ما را بیش از حد از مسألهٔ اصلی دور کرده باشد (یعنی ممکن است این نامساوی حتی درست هم نباشد). ولی داریم

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{a+b+1}&+(1-a)(1-b)(1-c)\\ &=\frac{a+b+1}{a+b+1}+\frac{c-1}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\\ &=1-\left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)]\end{aligned}$$

اکنون می‌توانیم با توجه به این عبارت و محاسبهٔ زیر، نامساوی مورد نظر را نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned}(1+a+b)(1-a)(1-b) &\leqslant (1+a+b+ab)(1-a)(1-b)\\ &=(1+a)(1+b)(1-a)(1-b)\\ &=(1-a^2)(1-b^2) \leqslant 1\end{aligned}$$

۷ـ۱ـ۴ فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد و به ازای $i=1,2,\ldots,n$، $a_i \geqslant 1$. نشان دهید که

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+\cdots+a_n)$$

حل. استراتژی طبیعی در اینجا استفاده از استقرا است که این کار چندان هم دشوار نیست. ولی استدلال زیر جالبتر است:

$$\begin{aligned}(1+a_1)&(1+a_2)\ldots(1+a_n)\\ &=2^n\left(\frac{1}{2}+\frac{a_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{a_2}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+\frac{a_n}{2}\right)\\ &=2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}\right)\left(1+\frac{a_2-1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n-1}{2}\right)\\ &\geqslant 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}+\frac{a_2-1}{2}+\cdots+\frac{a_n-1}{2}\right)\\ &\geqslant 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{n+1}+\frac{a_2-1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n-1}{n+1}\right)\\ &=\frac{2^n}{n+1}(n+1+a_1-1+a_2-1+\cdots+a_n-1)\\ &=\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\end{aligned}$$

۷ـ۱ـ۵ ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n،

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

حل. راههای مختلفی برای اثبات این نامساوی مهم وجود دارد (۷-۱-۱۱، ۷-۲-۸، ۷-۴-۱۸ را ببینید). برهانی که در اینجا می‌آوریم بر اساس مقایسهٔ جمله‌های متناظر در بسطهای دو جمله‌ای دو طرف نامساوی است. در طرف چپ داریم

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\,\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

به همین ترتیب داریم

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

اکنون نامساوی به وضوح نتیجه می‌شود زیرا با مقایسهٔ ضریبهای $1/k!$ در این عبارتها، می‌بینیم که به ازای هر k که $k=0,1,2,\dots,n$،

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

توجه به این نکته مفید است که

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k}}\\ &< 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k}} = 3\end{aligned}$$

بنابراین دنبالهٔ $(1+1/n)^{n}$ صعودی است و ۳ یک کران بالای آن است. (می‌توان نشان داد که این دنباله به e میل می‌کند.)

نتیجهٔ بعدی از نظر تئوری مهم و بسیار سودمند است (مثلاً ۷-۴-۹ و ۷-۴-۲۰ را ببینید).

۷ـ۱ـ۶ فرض کنید که تابع $f: R \to R$ به ازای هر x و y در بازهٔ (a,b) که $x \neq y$، در نامساوی

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

صدق کند. نشان دهید که

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

که در آن x_iها در (a,b) هستند و دست کم برای یک جفت (i,j)، $x_i \neq x_j$.

حل. فرض می‌کنیم که حکم برای $n = m$ برقرار باشد و نشان می‌دهیم که برای $n = 2m$ نیز درست است. داریم

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2m}}{2m}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}+\frac{x_{m+1}+\cdots+x_{2m}}{m}\right)\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}\right)+f\left(\frac{x_{m+1}+\cdots+x_{2m}}{m}\right)\right]\\ &< \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_m)}{m}+\frac{f(x_{m+1})+\cdots+f(x_{2m})}{m}\right)\\ &= \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2m})}{2m} \end{aligned}$$

از این رو حکم بنابر استقرا، به ازای هر توان مثبت ۲ درست است.

حال فرض کنید که $n > 2$ و n توانی از ۲ نباشد، یعنی به ازای عددی طبیعی چون m، $2^{m-1} < n < 2^m$. فرض کنید $k = 2^m - n$ و به ازای $i = 0, 1, 2, \ldots, k$، $y_i = (x_1+\cdots+x_n)/n$. در این صورت x_1، x_2، $\ldots$، x_n، y_1، y_2، $\ldots$ ، y_k، 2^m عدد دربازهٔ (a,b) هستند و در نتیجه استدلال قبلی ایجاب می‌کند که

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+y_1+\cdots+y_k}{2m}\right) < \frac{f(x_1)+\cdots+f(y_k)}{2m}$$

ولی توجه کنید که

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+y_1+\cdots+y_k}{2m}\right) &= f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+k(x_1+\cdots+x_n)/n}{2m}\right)\\ &= f\left(\frac{n(x_1+\cdots+x_n)+(2^m-n)(x_1+\cdots+x_n)}{n\times 2^m}\right)\\ &= f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \end{aligned}$$

با قرار دادن این در آخرین نامساوی، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &< \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(y_1)+\cdots+f(y_k)}{2m}\\ &= \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+kf\left((x_1+\cdots+x_n)/n\right)}{2m} \end{aligned}$$

اگر دو طرف را در ۲^m ضرب کنیم، به دست می‌آوریم

$$۲^m f\left(\frac{x_۱+\cdots+x_n}{n}\right) < f(x_۱)+\cdots+f(x_n)+(۲^m-n)f\left(\frac{x_۱+\cdots+x_n}{n}\right)$$

و از اینجا نامساوی مطلوب برای n به دست می‌آید:

$$f\left(\frac{x_۱+\cdots+x_n}{n}\right) < \frac{f(x_۱)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

مسائل

۷ـ۱ـ۷ فرض کنید a، b، c عددهای مثبت باشند. ثابت کنید که

الف) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant ۸abc$.

ب) $a^۲b^۲+b^۲c^۲+c^۲a^۲ \geqslant abc(a+b+c)$.

ج) اگر $a+b+c=۱$، آنگاه $ab+bc+ca \leqslant \frac{۱}{۳}$.

۸ـ۱ـ۷ ثابت کنید که

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۹۹۹۹۹۹}{۱۰۰۰۰۰۰} < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

(راهنمایی: دو طرف را به توان دو برسانید و سپس با کمی تلاش حاصلضربی ادغامی بسازید(بخش ۵-۳ را ببینید).)

۹ـ۱ـ۷ الف) اگر a و b عددهایی حقیقی و ناصفر باشند، ثابت کنید که دست‌کم یکی از نامساویهای زیر برقرار است:

$$\left|\frac{a+\sqrt{a^۲+۲b^۲}}{۲b}\right| < ۱\ ,\quad \left|\frac{a-\sqrt{a^۲+۲b^۲}}{۲b}\right| < ۱$$

ب) اگر n عدد $x_۱$، $x_۲$، ... ، x_n در بازهٔ $(۰,۱)$ قرار داشته باشند، ثابت کنید که دست‌کم یکی از نامساویهای زیر برقرار است:

$$x_۱x_۲\ldots x_n \leqslant ۲^{-n} \quad , \quad (۱-x_۱)(۱-x_۲)\ldots(۱-x_n) \leqslant ۲^{-n}$$

۱۰ـ۱ـ۷ الف) فرض کنید $a_۱/b_۱$، $a_۲/b_۲$، ... ، a_n/b_n، n کسر باشند که به ازای $i=۱,۲,\ldots,n$، $b_i > ۰$. نشان دهید که کسر $\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{b_۱+b_۲+\cdots+b_n}$ عددی است که بین بزرگترین و کوچکترین این کسرها قرار می‌گیرد. (به حالت خاصی که در آن همهٔ کسرها مساوی‌اند، توجه کنید.)

ب) ثابت کنید که اگر $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}$ آنگاه $a=c$ یا $a+b+c+d=۰$.

۱۱ـ۱ـ۷ الف) نشان دهید که به ازای $۰<a<b$،

$$(n+۱)(b-a)a^n < b^{n+۱}-a^{n+۱} < (n+۱)(b-a)b^n$$

ب) با استفاده از نامساوی بالا در حالت خاصی که در آن $a=۱+۱/(n+۱)$ و $b=۱+۱/n$، نشان دهید که $(۱+۱/n)^n < (۱+۱/(n+۱))^{n+۱}$.

۷ـ۱ـ۱۲ ثابت کنید که برای هر n،

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

۷ـ۱ـ۱۳ **(نامساوی کوشی ـ شوارتز). با استقرا روی n نشان دهید که به ازای همهٔ عددهای حقیقی و دلخواه** a_1، ...، a_n، b_1، ...، b_n،

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

۷ـ۱ـ۱۴ ثابت کنید که در یک چهار ضلعی محدب (چهارضلعی‌ای که دو قطرش در داخل آن قرار دارند)، مجموع طول قطرها از محیط کوچکتر و از نصف محیط بزرگتر است.

۷ـ۱ـ۱۵ ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{2/n}$.

مثالهای اضافی. ۱-۳-۳، ۱-۷-۴، ۱-۷-۵، ۱-۸-۲، ۱-۸-۵، ۱-۸-۶، ۱-۱۲-۷،۲-۱-۵، ۲-۱-۶، ۲-۲-۴، ۲-۲-۶، ۲-۴-۱، ۲-۴-۴، ۲-۴-۶، ۵-۳-۸، ۶-۱-۳، ۷-۳-۱، ۷-۴-۸، ۷-۴-۹، ۷-۴-۲۰، ۷-۴-۲۱، ۷-۴-۲۲، ۷-۴-۲۳.

۷ـ۲ نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی

فرض کنید که به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، $x_i > 0$. میانگین حسابی x_1، x_2، ...، x_n، عبارت است از عدد

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

و میانگین هندسی x_1، x_2، ...، x_n، عبارت است از عدد

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n}$$

نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی بیان می‌کند که

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که همهٔ x_iها با هم مساوی باشند.

حالت خاص $n = 2$ را در بندهای ابتدایی بخش ۷-۱ به هر دو روش جبری و هندسی ثابت کردیم. حالتهای مربوط به nهای بزرگتر را می‌توان به کمک استقرای ریاضی (مثلاً ۷-۲-۵ یا ۷-۵-۲ را ببینید) یا با بررسی تحدب تابع $f(t) = \log t$ ثابت کرد (۷-۴-۲۰ را ببینید). با وجود این، راهیابی آموزنده‌تر زیر را (اگر چه برهان تلقی نمی‌شود) ارائه می‌کنیم.

میانگین هندسی $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n}$ و میانگین حسابی $(x_1 + \cdots + x_n)/n$ را در نظر بگیرید. اگر همهٔ x_iها با هم برابر نباشند، به جای بزرگترین و کوچکترین آنها که به ترتیب x_M و x_m هستند، مقدار $\frac{1}{2}(x_M + x_m)$ می‌گذاریم. در این صورت چون $\frac{1}{2}(x_M + x_m) + \frac{1}{2}(x_M + x_m) = x_M + x_m$ و $\left[\frac{1}{2}(x_M + x_m)\right]^2 > x_M x_m$، در نتیجه این جاگذاری موجب می‌شود که میانگین هندسی افزوده شود و میانگین حسابی ثابت بماند. در صورتی که همهٔ عضوهای مجموعه‌ای که از n عدد جدید تشکیل شده، با هم

برابر نباشند، می‌توانیم روند قبلی را تکرار کنیم. هرگاه این روند را به اندازهٔ کافی تکرار کنیم، می‌توانیم تساوی بین کمیتها را با هر تقریب دلخواه برقرار کنیم(این مرحله به توجیه بیشتری نیاز دارد، ولی در اینجا از آن صرف‌نظر می‌کنیم). در هر مرحله از روند، میانگین هندسی افزایش می‌یابد و میانگین حسابی ثابت می‌ماند. اگر اتفاقاً همهٔ عددها باهم مساوی شوند، آنگاه هر دو میانگین باهم برابر می‌شوند (ممکن است هیچ وقت این اتفاق رخ ندهد، مثلاً قرار دهید $x_1 = ۱$، $x_2 = ۳$، $x_3 = ۴$). بنابراین نتیجه می‌گیریم که میانگین هندسی کوچکتر یا مساوی با میانگین حسابی است و تساوی وقتی و فقط وقتی رخ می‌دهد که همهٔ عددها با هم مساوی باشند.

به عنوان مثالی از این روند، حالتی را در نظر بگیرید که $x_1 = ۲$، $x_2 = ۴$، $x_3 = ۸$، $x_4 = ۱۲$. الگوریتمی که در بالا گفته شد، به دنبالهٔ زیر از مجموعه‌ها می‌انجامد:

$$\{۲, ۴, ۸, ۱۲\} \to \{۷, ۴, ۸, ۷\} \to \{۷, ۶, ۶, ۷\} \to \{\frac{۱۳}{۲}, \frac{۱۳}{۲}, \frac{۱۳}{۲}, \frac{۱۳}{۲}\}$$

در اینجا میانگین هندسی مجموعه‌های متناظر افزوده می‌شود و به $\frac{۱۳}{۲}$ می‌رسد در حالی که میانگین حسابی آنها در مقدار $\frac{۱۳}{۲}$ ثابت می‌ماند.

۷ـ۲ـ۱ ثابت کنید که بین همهٔ مکعب مستطیلهایی که مساحت جانبی ثابتی دارند، مکعب بیشترین حجم و بین همهٔ مکعب مستطیلهایی که حجم ثابتی دارند، مکعب بیشترین مساحت جانبی را دارد.

حل. فرض کنید که طول سه یال مجاور a، b، c باشد. فرض کنید A و V به ترتیب مساحت جانبی و حجم مکعب مستطیل باشند. در این صورت

$$A = ۲(ab + bc + ca) \quad , \quad V = abc$$

بنابر نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، داریم

$$V^۲ = a^۲b^۲c^۲ = (ab)(bc)(ca)$$
$$\leqslant \left(\frac{ab+bc+ca}{۳}\right)^۳ = \left(\frac{۲(ab+bc+ca)}{۶}\right)^۳ = \left(\frac{A}{۶}\right)^۳$$

بنابراین برای هر a، b، c داریم

$$۶V^{۲/۳} \leqslant A$$

به علاوه در تمام حالتها داریم $A > ۶V^{۲/۳}$. مگر وقتی که $ab = bc = ca$ (یا معادلاً $a = b = c$) که در این حالت $A = ۶V^{۲/۳}$. بنابراین اگر A ثابت باشد، آنگاه بیشترین حجم (یعنی $V = (A/۶)^{۳/۲}$) زمانی رخ می‌دهد که $a = b = c$ (در مکعب) و اگر V ثابت باشد، کمترین مساحت(یعنی $A = ۶V^{۲/۳}$) زمانی اتفاق می‌افتد که $a = b = c$ (در مکعب).

۷ـ۲ـ۲ نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$n\left[(n+۱)^{۱/n} - ۱\right] < ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n} < n - (n-۱)n^{-۱/(n-۱)}$$

حل. فرض کنید $s_n = ۱ + ۱/۲ + \cdots + ۱/n$. نامساوی طرف چپ بالا معادل است با اینکه نامساوی

$$\frac{n + s_n}{n} > (n+۱)^{۱/n}$$

را ثابت کنیم. این نامساوی به طور مبهمی به نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی شباهت دارد. می‌توانیم از این ایده به روش زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{n+s_n}{n} &= \frac{n+(۱+۱/۲+\cdots+۱/n)}{n} = \frac{(۱+۱)+(۱+۱/۲)+\cdots+(۱+۱/n)}{n}\\ &= \frac{۲+۳/۲+۴/۳+\cdots+(n+۱)/n}{n} > \left(۲\cdot\frac{۳}{۲}\cdot\frac{۴}{۳}\cdots\frac{n+۱}{n}\right)^{۱/n}\\ &= (n+۱)^{۱/n}\end{aligned}$$

برای اثبات نامساوی طرف راست باید نشان دهیم که

$$\frac{n-s_n}{n-۱} > n^{-۱/(n-۱)}$$

بار دیگر با استفاده از نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\frac{n-s_n}{n-۱} &= \frac{n-(۱+۱/۲+۱/۳+\cdots+۱/n)}{n-۱}\\ &= \frac{(۱-۱)+(۱-۱/۲)+\cdots+(۱-۱/n)}{n-۱}\\ &= \frac{۱/۲+۲/۳+\cdots+(n-۱)/n}{n-۱}\\ &> \left(\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۳}{۴}\cdots\frac{n-۱}{n}\right)^{۱/(n-۱)}\\ &= \left(\frac{۱}{n}\right)^{۱/(n-۱)} = n^{-۱/(n-۱)}\end{aligned}$$

۷ـ۲ـ۳ ثابت کنید که اگر a، b، c عددهای صحیح مثبتی باشند به طوری که $(۱+a)(۱+b)(۱+c) = ۸$ آنگاه $abc \leqslant ۱$.

حل. می‌دانیم که

$$۱+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc = ۸$$

بنابر نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، داریم

$$ab+bc+ca \geqslant ۳(abc)^{۲/۳} \quad \text{و} \quad a+b+c \geqslant ۳(abc)^{۱/۳}$$

که در هر دوی آنها تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a=b=c$. بنابراین

$$۸ \geqslant ۱+۳(abc)^{۱/۳}+۳(abc)^{۲/۳}+abc = \left[۱+(abc)^{۱/۳}\right]^۳$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$(abc)^{۱/۳} \leqslant (۲-۱) = ۱$$

یا معادلاً

$$abc \leqslant ۱$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a=b=c=۱$.

۷ـ۲ـ۴ فرض کنید که به ازای $i = ۱, ۲, \dots, n$، $x_i > ۰$ و همچنین $x_{n+۱} = x_۱$. نشان دهید که

$$\sum_{i=۱}^{n} \left(\frac{x_{i+۱}}{x_i}\right) \leqslant \sum_{i=۱}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{i+۱}}\right)^n$$

حل. حالتی را که $n = ۳$ در نظر بگیرید. بنابر نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{x_۲}{x_۱} &= \frac{x_۲}{x_۳} \cdot \frac{x_۳}{x_۱} \cdot ۱ \leqslant && \frac{۱}{۳}\left(\frac{x_۲}{x_۳}\right)^۳ + \frac{۱}{۳}\left(\frac{x_۳}{x_۱}\right)^۳ + \frac{۱}{۳} \\
\frac{x_۳}{x_۲} &= \frac{x_۱}{x_۲} \cdot \frac{x_۳}{x_۱} \cdot ۱ \leqslant \frac{۱}{۳}\left(\frac{x_۱}{x_۲}\right)^۳ + && + \frac{۱}{۳}\left(\frac{x_۳}{x_۱}\right)^۳ + \frac{۱}{۳} \\
\frac{x_۱}{x_۳} &= \frac{x_۱}{x_۲} \cdot \frac{x_۲}{x_۳} \cdot ۱ \leqslant \frac{۱}{۳}\left(\frac{x_۱}{x_۲}\right)^۳ + \frac{۱}{۳}\left(\frac{x_۲}{x_۳}\right)^۳ + && + \frac{۱}{۳}
\end{aligned}$$

همچنین

$$۱ = \frac{x_۱}{x_۲} \cdot \frac{x_۲}{x_۳} \cdot \frac{x_۳}{x_۱} \leqslant \frac{۱}{۳}\left(\frac{x_۱}{x_۲}\right)^۳ + \frac{۱}{۳}\left(\frac{x_۲}{x_۳}\right)^۳ + \frac{۱}{۳}\left(\frac{x_۳}{x_۱}\right)^۳$$

با جمع این نامساویها نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید. شبیه به همین استدلال را می‌توان برای عدد صحیح مثبت و دلخواه n نیز به کار برد.

مسائل

۷ـ۲ـ۵ مراحل برهان استقرایی زیر را برای نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی کامل کنید: فرض کنید که به ازای هر k، $A_k = (x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)/k$ و $G_k = (x_۱x_۲\dots x_k)^{۱/k}$. فرض کنید که نشان داده‌ایم $A_k \geqslant G_k$. قرار می‌دهیم

$$G = (x_k A_{k+۱}^{k-۱})^{۱/k} \quad \text{و} \quad A = \frac{x_{k+۱} + (k-۱)A_k}{k}$$

در این صورت بنابر فرض استقرا داریم $A \geqslant G$ و در نتیجه

$$A_{k+۱} = \frac{۱}{۲}(A_k + A) \geqslant (A_k A)^{۱/۲} \geqslant (G_k G)^{۱/۲} = (G_{k+۱}^{k+۱} A_{k+۱}^{k-۱})^{۱/۲k}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $A_{k+۱} \geqslant G_{k+۱}$. بر اساس این استدلال، می‌توان به آسانی ثابت کرد که تساوی فقط و فقط وقتی برقرار می‌شودکه همهٔ x_iها باهم مساوی باشند.

۷ـ۲ـ۶ ثابت کنید که اگر a، b، c عددهای مثبت باشند، آنگاه

$$(a^۲b + b^۲c + c^۲a)(a^۲c + b^۲a + c^۲b) \geqslant ۹a^۲b^۲c^۲$$

۷ـ۲ـ۷ فرض کنید $a_۱$، $\dots$ ، a_n عددهای مثبت و $b_۱$، $\dots$ ، b_n ترتیب مجددی از عددهای $a_۱$، $\dots$ ، a_n باشند. نشان دهید که

$$\frac{a_۱}{b_۱} + \frac{a_۲}{b_۲} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n$$

۷ـ۲ـ۸ الف) ثابت کنید که به ازای عددهای مثبت a و b که $a \neq b$،

$$(ab^n)^{۱/(n+۱)} < \frac{a+nb}{n+۱}$$

ب) در قسمت (الف)، حالتی را در نظر بگیرید که $a = ۱$ و $b = ۱ + ۱/n$ و نشان دهید که

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n < \left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}$$

ج) در قسمت (الف)، به جای n قرار دهید $n+۱$. همچنین قرار دهید $a = ۱$ و $b = n/(n+۱)$ و نشان دهید که

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱} > \left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۲}$$

۷ـ۲ـ۹ ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح $n > ۲$،

الف) $$\prod_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{۲^n - ۲}{n-۱}\right)^{n-۱}$$

ب) $$n! < \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n$$

ج) $$۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots \times (۲n-۱) < n^n$$

۷ـ۲ـ۱۰ در صورتی که بدانیم همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $x^۶ - ۶x^۵ + ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ + dx + ۱ = ۰$ مثبت‌اند، مقدارهای a، b، c، d را بیابید.

۷ـ۲ـ۱۱ الف) فرض کنید که به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $x_i > ۰$ و $p_۱$، $p_۲$، …، p_n عددهای صحیح مثبت باشند. ثابت کنید

$$(x_۱^{p_۱} x_۲^{p_۲} \ldots x_n^{p_n})^{۱/(p_۱+\cdots+p_n)} \leqslant \frac{p_۱x_۱+\cdots+p_nx_n}{p_۱+\cdots+p_n}$$

ب) ثابت کنید وقتی که همهٔ p_iها عددهای گویای مثبت‌اند، حکم قسمت (الف) باز هم برقرار است.

۷ـ۲ـ۱۲ در هر یک از موارد زیر، از نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی استفاده کنید:

الف) می‌خواهیم مخزنی سرباز با قاعده و دیوارهای مستطیلی بسازیم به طوری که عرض آن ۴ متر و حجمش ۳۶ متر مکعب باشد. اگر هزینهٔ ساختن هر متر مربع قاعده ۱۰۰۰۰ تومان و هر متر مربع دیواره‌ها ۵۰۰۰ تومان باشد، قیمت ارزانترین مخزن چقدر است؟

ب) کشاورزی که مزرعه‌اش در کنار یک رودخانه قرار دارد که ساحلش به صورت خطی راست است، می‌خواهد یک ناحیهٔ مستطیلی را برای چراگاه حصارکشی کند. اگر در کنار رودخانه نیازی به حصار نباشد و کشاورز ۱۰۰۰ متر حصار در اختیار داشته باشد، ابعاد مزرعه چقدر باشد تا مساحت آن ماکسیمم شود؟ (راهنمایی: برای این کار کافی است دو برابر مساحت را ماکسیمم کنید.)

ج) کشاورزی می‌خواهد به کمک ۱۰۰۰ متر حصار، محوطه‌ای مستطیلی برای نگهداری حیواناتش بسازد و سپس با استفاده از حصاری مشترک که از وسط محوطه می‌گذرد، آن را به دو بخش مستطیلی کوچکتر تقسیم کند. ابعاد محوطه چقدر باشد تا مساحت کل ماکسیمم شود؟

د) ثابت کنید که مربع، مستطیلی است که به ازای محیط ثابت، بیشترین مساحت و به ازای مساحت ثابت، کمترین محیط را دارد.

ه) ثابت کنید که مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلثی است که به ازای محیط ثابت، بیشترین مساحت و به ازای مساحت ثابت، کمترین محیط را دارد. (راهنمایی: مساحت مثلث توسط دستور $A = (s(s-a)(s-b)(s-c))^{1/2}$ به محیط آن وابسته است. در اینجا a، b، c طول ضلعهای مثلث هستند و $s = \frac{1}{2}P$ که P محیط مثلث است.)

مثالهای اضافی. مقدمهٔ بخش ۷-۶؛ ۷-۳-۱، ۸-۱-۴.

۷ـ۳ نامساوی کوشی ـ شوارتز

فرض کنید که به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، $a_i > 0$ و $b_i > 0$. نامساوی کوشی ـ شوارتز بیان می‌کند که

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

و در آن تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

این نامساوی را می‌توان به وسیلهٔ استقرا ثابت کرد (۷-۱-۱۳ را ببینید). ولی رهیافت ساده‌تر، در نظر گرفتن چندجمله‌ای درجهٔ دوم $P(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2$ است. توجه کنید که به ازای هر x، $P(x) \geqslant 0$. در حقیقت تنها وقتی $P(x) = 0$ که $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$ و $x = b_i/a_i$. اکنون داریم

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 x^2 - 2a_i b_i x + b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

از آنجا که $P(x) \geqslant 0$، مبین P نمی‌تواند مثبت باشد و در واقع تنها وقتی مساوی صفر است که $P(x) = 0$. بنابراین

$$\left(-2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leqslant 0$$

یا معادلاً

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

توجه کنید که شرط مثبت بودن a_iها و b_iها در این نامساوی زاید است زیرا به ازای هر a_i و b_i،

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

۷ـ۳ـ۱ اگر $a, b, c > 0$ باشد، آیا درست است که بگوییم نامساوی $a\cos^2\theta + b\sin^2\theta < c$ نامساوی $\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}\sin^2\theta < \sqrt{c}$ را ایجاب می‌کند؟

حل. بنابر نامساوی کوشی ـ شوارتز

$$\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta \leqslant \left[\left(\sqrt{a}\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt{b}\sin\theta\right)^2\right]^{1/2}\left[(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right]^{1/2}$$
$$=(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)^{1/2}<\sqrt{c}$$

همچنین می‌توان برهان زیبایی از این مطلب را بر اساس نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی ارائه کرد:

$$\left(\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta\right)^2=a\cos^4\theta+2\sqrt{a}\sqrt{b}\cos^2\theta\sin^2\theta+b\sin^4\theta$$
$$\leqslant a\cos^4\theta+(a+b)\cos^2\theta\sin^2\theta+b\sin^4\theta$$
$$=(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)<c$$

راه حل دیگری در ۷-۴-۱۹ ارائه می‌کنیم که ماهیت هندسی بیشتری دارد.

۷ـ۳ـ۲ فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث ABC و r_1، r_2، r_3 به ترتیب فاصله‌های P از ضلعهای a_1، a_2، a_3 از مثلث باشند. فرض کنید R شعاع دایره محیطی ABC باشد. نشان دهید که

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2R}}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}$$

و نامساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که ABC متساوی‌الاضلاع و P مرکز دایرهٔ محاطی آن باشد.

حل. بنابر نامساوی کوشی ـ شوارتز داریم

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}=\sqrt{a_1r_1}\sqrt{1/a_1}+\sqrt{a_2r_2}\sqrt{1/a_2}+\sqrt{a_3r_3}\sqrt{1/a_3}$$
$$\leqslant(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)^{1/2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^{1/2}$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که

$$\frac{\sqrt{a_1r_1}}{\sqrt{1/a_1}}=\frac{\sqrt{a_2r_2}}{\sqrt{1/a_2}}=\frac{\sqrt{a_3r_3}}{\sqrt{1/a_3}}$$

یا به طور معادل وقتی و فقط وقتی که

$$a_1^2r_1=a_2^2r_2=a_3^2r_3$$

توجه می‌کنیم که در نامساوی آخر $a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3=2A$ که در آن A مساحت مثلث است. همچنین می‌دانیم که مساحت مثلث بر حسب شعاع دایرهٔ محیطی R به وسیلهٔ فرمول $A=a_1a_2a_3/4R$ بیان می‌شود (۸-۱-۱۲ را ببینید). در نتیجه $a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3=a_1a_2a_3/2R$ و داریم

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\leqslant\left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^{1/2}$$
$$=\left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{1/2}\left(\frac{a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2}{a_1a_2a_3}\right)^{1/2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2R}}(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)^{1/2}$$

حال بازهم با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز، داریم

$$\begin{aligned} a_۲a_۳ + a_۳a_۱ + a_۱a_۲ &\leqslant (a_۲^۲ + a_۳^۲ + a_۱^۲)^{۱/۲}(a_۳^۲ + a_۱^۲ + a_۲^۲)^{۱/۲} \\ &= (a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲) \end{aligned}$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که

$$a_۲/a_۳ = a_۳/a_۱ = a_۱/a_۲ \left(= (a_۲ + a_۳ + a_۱)/(a_۳ + a_۱ + a_۲) = ۱\right)$$

(۷-۱-۱۲ را ببینید). معادلاً تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که

$$a_۱ = a_۲ = a_۳$$

بنابراین داریم

$$\sqrt{r_۱} + \sqrt{r_۲} + \sqrt{r_۳} \leqslant \frac{۱}{\sqrt{۲R}}(a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲)^{۱/۲}$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a_۱^۲r_۱ = a_۲^۲r_۲ = a_۳^۲r_۳$ و $a_۱ = a_۲ = a_۳$، یعنی اگر و فقط اگر $a_۱ = a_۲ = a_۳$ و $r_۱ = r_۲ = r_۳$. این برهان را کامل می‌کند.

۷ـ۳ـ۳ هرگاه عددهای حقیقی a، b، c، d، e طوری داده شده باشند که

$$a + b + c + d + e = ۸$$

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + e^۲ = ۱۶$$

بیشترین مقدار e را مشخص کنید.

حل. می‌توانیم تساویهای مفروض را به شکل زیر بنویسیم

$$۸ - e = a + b + c + d$$

$$۱۶ - e^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲$$

می‌خواهیم نامساوی‌ای به دست آوریم که تنها شامل e باشد. نامساوی کوشی ـ شوارتز طریق زیر را ارائه می‌دهد. داریم

$$(a + b + c + d) \leqslant (۱ + ۱ + ۱ + ۱)^{۱/۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲)^{۱/۲}$$

با قرار دادن مقدارهای بالا و مجذور کردن دو طرف، داریم

$$(۸ - e)^۲ \leqslant ۴(۱۶ - e^۲)$$

$$۶۴ - ۱۶e + e^۲ \leqslant ۶۴ - ۴e^۲$$

$$۵e^۲ - ۱۶e \leqslant ۰$$

$$e(۵e - ۱۶) \leqslant ۰$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $۰ \leqslant e \leqslant \frac{۱۶}{۵}$. کران بالای $\frac{۱۶}{۵}$ زمانی به دست می‌آید که $a = b = c = d = \frac{۱۶}{۵}$.

۷ـ۳ـ۴ فرض کنید که a_1، a_2، ... ، a_n اعداد حقیقی باشند $(n > 1)$ و

$$A + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

ثابت کنید که به ازای $1 \leqslant i < j \leqslant n$، $A < 2a_i a_j$.

حل. بنابر نامساوی کوشی ـ شوارتز

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 &= \left[(a_1 + a_2) + a_3 + \cdots + a_n\right]^2 \\ &\leqslant (1 + \cdots + 1)\left((a_1 + a_2)^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2\right) \\ &= (n-1)\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_1 a_2\right]\end{aligned}$$

این به همراه نامساوی مفروض ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}A &< -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \\ &< -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \frac{1}{n-1}\left[(n-1)\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_1 a_2\right]\right] \\ &= 2a_1 a_2\end{aligned}$$

به همین ترتیب به ازای $1 \leqslant i < j \leqslant n$، $A < 2a_i a_j$.

۷ـ۳ـ۵ فرض کنید که به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، $x_i > 0$. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح و نامنفی k،

$$\frac{x_1^k + \cdots + x_n^k}{n} \leqslant \frac{x_1^{k+1} + \cdots + x_n^{k+1}}{x_1 + \cdots + x_n}$$

حل. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله، می‌توانیم فرض کنیم $x_1 + \cdots + x_n = 1$، زیرا در غیر این صورت می‌توانیم به جای x_i مقدار $X_i = x_i/(x_1 + \cdots + x_n)$ را قرار دهیم.

حکم به ازای $k = 0$ برقرار است. فرض کنید که حکم به ازای همهٔ مقادیر صحیح و نامنفی کمتر از k برقرار باشد. بنابر نامساوی کوشی ـ شوارتز

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k+1)/2} \frac{x_i^{(k-1)/2}}{n} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k-1}}{n^2}\right)^{1/2}$$

بنا بر فرض استقرا، $\sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1}/n \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ و در نتیجه در ادامهٔ نامساوی آخر داریم

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k-1}}{n^2}\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n}\right)^{1/2}$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n}\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n}\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right)^{1/2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}$$

در نتیجه برهان به استقرا تمام می‌شود.

مسائل

۷ـ۳ـ۶ با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز، ثابت کنید که اگر a_1، $\ldots$ ، a_n اعدادی حقیقی باشند به طوری که $a_1 + \cdots + a_n = 1$، آنگاه $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant 1/n$.

۷ـ۳ـ۷ با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز، ثابت کنید:

الف) اگر p_1، $\ldots$ ، p_n و x_1، $\ldots$ ، x_n، $2n$ عدد مثبت باشند، آنگاه

$$(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n)^2 \leqslant (p_1 + \cdots + p_n)(p_1x_1^2 + \cdots + p_nx_n^2)$$

ب) اگر a، b، c عددهای مثبتی باشند، آنگاه

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geqslant 9a^2b^2c^2$$

ج) اگر x_k و y_k، $k = 1, 2, \ldots, n$، عددهای مثبتی باشند، آنگاه

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} kx_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2/k\right)^{1/2}$$

د) اگر a_k، b_k، c_k، $k = 1, 2, \ldots, n$، عددهای مثبتی باشند، آنگاه

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^{1/4} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^2$$

هـ) اگر به ازای $n > 2$ و $1 \leqslant k \leqslant n$ داشته باشیم $C_k = \binom{n}{k}$، آنگاه

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{C_k} \leqslant \sqrt{n(2^n - 1)}$$

۷ـ۳ـ۸ فرض کنید که به ازای عدد صحیح و مثبت n، $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ دو جایگشت $(1, 2, \ldots, n)$ باشند (که لزوماً متمایز نیستند). برای مقدار $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ کرانهای بالا و پایین اکیدی بیابید.

۷ـ۳ـ۹ ثابت کنید که اگر a، b، c، d عددهای مثبتی باشند به طوری که $c^۲ + d^۲ = (a^۲ + b^۲)^۳$، آنگاه

$$\frac{a^۳}{c} + \frac{b^۳}{d} \geqslant ۱$$

و در آن تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $ad = bc$.

(راهنمایی: نشان دهید که $(a^۳/c + b^۳/d)(ac + bd) \geqslant (a^۲ + b^۲)^۲ \geqslant ac + bd$.)

۷ـ۳ـ۱۰ فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث ABC و $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$ به ترتیب فاصله‌های P از ضلعهای $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ از مثلث باشد. با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز، نشان دهید که مقدار مینیمم

$$\frac{a_۱}{r_۱} + \frac{a_۲}{r_۲} + \frac{a_۳}{r_۳}$$

وقتی اتفاق می‌افتد که P مرکز دایرهٔ محاطی مثلث باشد. (راهنمایی: $a_i = \sqrt{a_i r_i}\sqrt{a_i/r_i}$.)

مثالهای اضافی. ۷-۶-۱۴.

۷ـ۴ بررسیهای تابعی

در این بخش با ارائه مثالهایی نشان خواهیم داد که چگونه تکنیکهای آنالیز و به ویژه مشتقگیری، به شکل مؤثری در اثبات بخش وسیعی از مسائل مربوط به نامساویها به کار می‌روند.

۷ـ۴ـ۱ عددهای مفروض p، q و r طوری داده شده‌اند که $۲p = q + r$ و $q \neq r$. نشان دهید که

$$\frac{p^{q+r}}{q^q r^r} < ۱$$

حل. فرض کنید که q و r عددهای صحیح و مثبت باشند و q عدد $۱/q$، ...، $۱/q$ و r عدد $۱/r$، ...، $۱/r$ را در نظر بگیرید. بنابر نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، داریم

$$\left(\frac{۱}{q^q} \cdot \frac{۱}{r^r}\right)^{۱/(q+r)} < \frac{q(۱/q) + r(۱/r)}{q+r} = \frac{۱}{p}$$

این با نامساوی مورد نظر معادل است.

این برهان وقتی که یکی از دو عدد q و r صحیح نباشد، دچار اشکال می‌شود. پس چه باید کرد؟ یک راه آن است که نامساوی را به شکل زیر بنویسیم:

$$p^{q+r} < q^q r^r$$

$$\left(\frac{q+r}{۲}\right)^{q+r} < q^q r^r$$

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{q+r} < \left(\frac{q}{q+r}\right)^q \left(\frac{r}{q+r}\right)^r$$

$$\frac{۱}{۲} < \left(\frac{q}{q+r}\right)^{q/(q+r)} \left(\frac{r}{q+r}\right)^{r/(q+r)}$$

قرار دهید $x = q/(q+r)$ و $y = r/(q+r)$ و توجه کنید که $x + y = ۱$ و $۰ < x, y < ۱$. بنابراین مسأله

معادل است با اینکه ثابت کنیم

$$F(x) \equiv x^x(1-x)^{1-x} > \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

با تعریف این تابع به این گونه، می‌توانیم روشهای آنالیز را به کار ببریم. ایدهٔ حل مسأله آن است که مقدار مینیمم F را روی $(0,1)$ بیابیم. برای ساده‌تر شدن عمل مشتقگیری، تابع $G(x) = \log F(x)$ را در نظر می‌گیریم. به منظور یافتن نقاط بحرانی، مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} G'(x) =& \frac{d}{dx}\left[x\log x + (1-x)\log(1-x)\right] \\ =&(\log x + 1) - 1 - \log(1-x) \\ =&\log\frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

می‌بینیم که $G'(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = \frac{1}{2}$. همچنین روی بازهٔ $(0, \frac{1}{2})$، $G'(x) < 0$ و روی بازهٔ $(\frac{1}{2}, 1)$، $G'(x) > 0$. در نتیجه $G(x)$ مقدار مینیمم خود را روی $(0,1)$ در $x = \frac{1}{2}$ می‌گیرد. بنابراین، مقدار مینیمم $F(x)$ روی $(0,1)$ مساوی است با $F\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}$. از اینجا نتیجه می‌شود که به ازای هر مقدار x در $(0,1)$ که $x \neq \frac{1}{2}$، $F(x) > \frac{1}{2}$ و برهان کامل می‌شود.

۷ـ۴ـ۲ فرض کنید p و q عددهای مثبتی باشند به طوری که $p + q = 1$. نشان دهید که برای هر x،

$$pe^{x/p} + qe^{-x/q} \leqslant e^{x^2/8p^2q^2}$$

حل. تابع $F(x) = \dfrac{pe^{x/p} + qe^{-x/q}}{e^{x^2/8p^2q^2}}$ را در نظر بگیرید. حکم مسأله آن است که ثابت کنیم که برای هر x، $F(x) \leqslant 1$. به دلیل وجود تقارن در مسأله، کافی است ثابت کنیم که به ازای هر $x \geqslant 0$، $F(x) \leqslant 1$.

توجه کنید که $F(0) = 1$. بنابر نتیجه (ج) از قضیهٔ مقدار میانگین (بحث پیش از ۶-۶-۲ را ببینید)، کافی است ثابت کنیم که به ازای هر x، $F'(x) \leqslant 0$. برای سادگی محاسبات، تابع $G(x) = \log F(x)$ را در نظر می‌گیریم. پس از مشتقگیری و عملیات جبری معمولی، نتیجه می‌شود

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{e^{x/p} - e^{-x/q}}{pe^{x/p} + qe^{-x/q}} - \frac{x}{4p^2q^2} = \frac{e^{x/pq} - 1}{pe^{x/pq} + q} - \frac{x}{4p^2q^2}$$

از آنجا که به ازای هر $x \geqslant 0$، $F(x) > 0$، در نتیجه $F'(x) \leqslant 0$ اگر و فقط اگر $G'(x) \leqslant 0$. متأسفانه تشخیص اینکه $G'(x) \leqslant 0$ یا نه، از روی شکل $G'(x)$ در بالا دشوار است. از این رو در تحلیل مسأله، یک مرحله پیشتر می‌رویم، یعنی ملاحظه می‌کنیم که $G'(0) = 0$ و (دوباره با صرف نظر کردن از جزئیات)، به دست می‌آوریم

$$G''(x) = -\frac{(pe^{x/pq} - q)^2}{4p^2q^2(pe^{x/pq} + q)^2}$$

از اینجا روشن است که به ازای هر $x \geqslant 0$، $G''(x) \leqslant 0$. این به همراه $G'(0) = 0$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $x \geqslant 0$، $G'(x) \leqslant 0$ و این به نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد که به ازای هر $x \geqslant 0$، $F'(x) \leqslant 0$. در نتیجه چون $F(0) = 1$، باید به ازای هر $x \geqslant 0$ داشته باشیم $F(x) \leqslant 1$ و برهان کامل می‌شود.

روندی که در مسأله قبل از آن استفاده شد بسیار معمول است. اگر بخواهیم نکات اصلی آن را تکرار کنیم، باید بگوییم: برای اثبات یک نامساوی به شکل

$$f(x) \geqslant g(x) \quad , \quad x \geqslant a$$

کافی است که معادلاً نامساوی

$$Q(x) \equiv \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant ۱ \quad , \quad x \geqslant a$$

یا

$$D(x) \equiv f(x) - g(x) \geqslant ۰ \quad , \quad x \geqslant a$$

را ثابت کنیم. در صورتی که بتوانیم نشان دهیم که هر یک از این نامساویها به ازای $x = a$ برقرارند و سپس ثابت کنیم که به ازای هر $x \geqslant a$، $Q'(x) \geqslant ۰$ (یا به ترتیب $D'(x) \geqslant ۰$)، آنگاه درستی آنها را ثابت کرده‌ایم.

اگر در مثال قبل، تابع

$$D(x) = e^{x^۲/۸p^۲q^۲} - pe^{x/p} - qe^{-x/q}$$

را در نظر می‌گرفتیم، تحلیل مسأله به نتیجه نمی‌رسید، زیرا اگر چه $D(۰) = ۰$، ولی لزوماً شرط $D'(x) \geqslant ۰$ برقرار نبود (مثلاً وقتی که $p = \frac{۱}{۳}$، $q = \frac{۲}{۳}$، $x = \frac{۱}{۲}$).

۷ـ۴ـ۳ ثابت کنید که به ازای هر دو عدد حقیقی a و b،

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + |b|^p \quad , \quad ۰ \leqslant p \leqslant ۱$$

حل. در چند حالت خاص، نامساوی بدیهی است. مثلاً اگر $a = ۰$ یا اگر a و b علامتهای مختلف داشته باشند، حکم برقرار است. همچنین وقتی که $p = ۰$ یا $p = ۱$، نتیجه درست است. بنابراین کافی است نشان دهیم که حکم وقتی که a و b مثبت‌اند و $۰ < p < ۱$، درست است.

برای چنین a و b و p ای، قرار می‌دهیم $x = b/a$. در این صورت مسأله آن است که نشان دهیم

$$(۱+x)^p \leqslant ۱ + x^p, \quad x > ۰, \quad ۰ < p < ۱$$

برای این کار، قرار می‌دهیم

$$D(x) = ۱ + x^p - (۱+x)^p$$

در این صورت $D(۰) = ۰$ و $D'(x) = px^{p-۱} - p(۱+x)^{p-۱} > ۰$، در نتیجه بنابر آنچه که پیشتر گفتیم، برهان کامل می‌شود. (توجه کنید که اگر $p > ۱$، جهت نامساویها معکوس می‌شد.)

۷ـ۴ـ۴ فرض کنید که تابع f مشتق پیوسته‌ای روی $[۰, ۱]$ داشته باشد به طوری که $۰ < f'(t) \leqslant ۱$. همچنین فرض کنید که $f(۰) = ۰$. ثابت کنید

$$\left[\int_۰^۱ f(t)dt\right]^۲ \geqslant \int_۰^۱ [f(t)]^۳ dt$$

حل. در اینجا نیز همانند مسأله قبل، روشن نیست که چطور می‌توان از مشتقگیری استفاده کرد. ایدهٔ حل مسأله

آن است که با معرفی یک متغیر، حکم کلیتری را ثابت کنیم. فرض کنید که به ازای $\circ \leqslant x \leqslant ۱$،

$$F(x) \equiv \left[\int_\circ^x f(t)dt\right]^۲ - \int_\circ^x (f(t))^۳dt$$

در این صورت $F(\circ) = \circ$ و

$$F'(x) = ۲\left[\int_\circ^x f(t)dt\right] f(x) - [f(x)]^۳ = f(x)\left[۲\int_\circ^x f(t)dt - [f(x)]^۲\right]$$

می‌دانیم که به ازای $\circ < x < ۱$، $f(x) \geqslant \circ$ (زیرا فرض مسأله آن است که $f(\circ) = \circ$ و $f'(x) > \circ$). با وجود این، معلوم نیست که عامل دوم در آخرین عبارت مربوط به F'، نامنفی است. بنابراین فرض می‌کنیم

$$G(x) = ۲\int_\circ^x f(t)dt - [f(x)]^۲ \quad , \quad \circ \leqslant x \leqslant ۱$$

در این صورت $G(\circ) = \circ$ و

$$G'(x) = ۲f(x) - ۲f(x)f'(x) = ۲f(x)[۱ - f'(x)] \geqslant \circ$$

(دلیل برقراری نامساوی آخر، آن است که $f(x) \geqslant \circ$ و بنا بر فرض $۱ - f'(x) \geqslant \circ$).

از استدلالهای بالا نتیجه می‌شود که به ازای هر x که $\circ \leqslant x \leqslant ۱$، $F(x) \geqslant \circ$. به ویژه $F(۱) \geqslant \circ$ و برهان کامل می‌شود.

۷ـ۴ـ۵ نشان دهید که اگر x مثبت باشد، آنگاه $\log(۱ + ۱/x) > ۱/(۱ + x)$.

حل. فرض کنید $f(x) = \log(۱ + ۱/x) - ۱/(۱ + x)$ (که مساوی با $\log(۱ + x) - \log x - ۱/(۱ + x)$ است). در این صورت

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{۱}{۱ + x} - \frac{۱}{x} + \frac{۱}{(۱ + x)^۲} \\ &= \frac{x(۱ + x) - (۱ + x)^۲ + x}{x(۱ + x)^۲} \\ &= \frac{-۱}{x(۱ + x)^۲} < \circ \quad , \quad \text{وقتی که } x > \circ \end{aligned}$$

همچنین $\lim_{x\to\infty} f(x) = \circ$ و این به همراه شرط $f'(x) < \circ$ وقتی که $x > \circ$، ایجاب می‌کند که به‌ازای $x > \circ$، $f(x) > \circ$.

۷ـ۴ـ۶ همهٔ عددهای صحیح و مثبت n را بیابید به طوری که

$$۳^n + ۴^n + \cdots + (n + ۲)^n = (n + ۳)^n$$

حل. محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که وقتی $n = ۲$ و $n = ۳$، تساوی برقرار می‌شود. با استدلال به وسیلهٔ زوجیت می‌توان نشان داد که تساوی در حالت $n = ۴$ و $n = ۵$ نمی‌تواند برقرار باشد. بر اساس این ملاحظات آغازی، انتظار داریم که بینش کلیدی در حل مسأله، به نوعی به حساب پیمانه‌ای مربوط شود. با وجود این، این کوششها بی‌ثمرند و از این رو، به دنبال رهیافت دیگری می‌گردیم. نشان می‌دهیم که به ازای $n \geqslant ۶$،

$$۳^n + ۴^n + \cdots + (n + ۲)^n < (n + ۳)^n$$

و در نتیجه، تساوی تنها به ازای ۲ = n و ۳ = n برقرار می‌شود.

نامساوی‌ای را که می‌خواهیم ثابت کنیم، می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\left(\frac{۳}{n+۳}\right)^n + \left(\frac{۴}{n+۳}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n+۲}{n+۳}\right)^n < ۱$$

$$\left(۱-\frac{n}{n+۳}\right)^n + \left(۱-\frac{n-۱}{n+۳}\right)^n + \cdots + \left(۱-\frac{۱}{n+۳}\right)^n < ۱$$

و با تعویض ترتیب برای سادگی، داریم

$$\left(۱-\frac{۱}{n+۳}\right)^n + \left(۱-\frac{۲}{n+۳}\right)^n + \cdots + \left(۱-\frac{n}{n+۳}\right)^n < ۱$$

برای اثبات این نامساوی، کافی است نشان دهیم که

$$\left(۱-\frac{k}{n+۳}\right)^n < \left(\frac{۱}{۲}\right)^k \quad , \quad k = ۱, ۲, \ldots, n$$

زیرا در این صورت

$$\left(۱-\frac{۱}{n+۳}\right)^n + \left(۱-\frac{۲}{n+۳}\right)^n + \cdots + \left(۱-\frac{n}{n+۳}\right)^n$$
$$< \frac{۱}{۲} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \cdots + \left(\frac{۱}{۲}\right)^n < ۱$$

تنها باقی مانده است ثابت کنیم

$$\left(۱-\frac{k}{n+۳}\right)^n < \left(\frac{۱}{۲}\right)^k \quad , \quad k = ۱, ۲, \ldots, n$$

بنابر نامساوی برنولی (یکی از نامساویهای بسیار سودمند، ۷-۴-۱۰ را ببینید)، داریم

$$\left(۱-\frac{۱}{n+۳}\right)^k \geqslant \left(۱-\frac{k}{n+۳}\right)$$

و در نتیجه

$$\left(۱-\frac{k}{n+۳}\right)^n \leqslant \left(۱-\frac{۱}{n+۳}\right)^{kn} = \left[\left(۱-\frac{۱}{n+۳}\right)^n\right]^k$$

مرحلهٔ نهایی آن است که نشان دهیم وقتی که $n \geqslant ۶$،

$$\left(۱-\frac{۱}{n+۳}\right)^n \leqslant \frac{۱}{۲}$$

به این منظور، تابع

$$F(x) = \left(۱-\frac{۱}{x+۳}\right)^x$$

را در نظر بگیرید. می‌توان به سادگی نشان داد که به ازای $x \geqslant ۶$، $F'(x) < ۰$ و $F(۶) < \frac{۱}{۲}$. بنابراین برهان کامل است.

۷ـ۴ـ۷ ثابت کنید که به ازای $\circ \leqslant a < b < \frac{۱}{۲}\pi$،

$$\frac{b-a}{\cos^{۲} a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^{۲} b}$$

حل. تابع $f(x) = \tan x$ را روی $[a,b]$ در نظر بگیرید. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، نقطه‌ای چون c در (a,b) وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

در این حالت تساوی بالا به معنی آن است که برای مقداری مانند c در (a,b) داریم

$$\frac{\tan b - \tan a}{b-a} = \sec^{۲} c$$

نامساوی مورد نظر از این حقیقت نتیجه می‌شود که به ازای $\circ \leqslant a < b < \pi/۲$، $\sec^{۲} a < \sec^{۲} c < \sec^{۲} b$.

می‌توان بسیاری از نامساویها را با در نظر گرفتن تابع محدب (یا مقعر) مناسبی ثابت کرد. این ایده بر اساس نتیجهٔ ۶-۶-۳ است که می‌گوید: اگر $f : R \to R$ تابعی باشد به طوری که $f''(x) \geqslant \circ$، آنگاه

$$f\left(\frac{x+y}{۲}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{۲}$$

و اگر $f''(x) \leqslant \circ$، آنگاه

$$f\left(\frac{x+y}{۲}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{۲}$$

مثلاً برای دو عدد حقیقی x و y، داریم

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)^{۲} \leqslant \frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}$$

زیرا $f(x) = x^{۲}$ تابعی محدب است. به عنوان مثالی دیگر، اگر $\circ < x, y < \pi$، آنگاه

$$\sin\left(\frac{x+y}{۲}\right) \geqslant \frac{\sin x + \sin y}{۲}$$

زیرا تابع $f(x) = \sin x$ روی $(\circ, \pi)$ مقعر است.

۸ـ۴ـ۷ ثابت کنید که اگر a و b عددهای مثبتی باشند به طوری که $a + b = ۱$، آنگاه

$$\left(a+\frac{۱}{a}\right)^{۲} + \left(b+\frac{۱}{b}\right)^{۲} \geqslant \frac{۲۵}{۲}$$

حل. می‌دانیم که

$$\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲} \geqslant \left(\frac{x+y}{۲}\right)^{۲}$$

قرار می‌دهیم $x = a + ۱/a$ و $y = b + ۱/b$. در این صورت

$$\frac{۱}{۲}\left[\left(a+\frac{۱}{a}\right)^{۲} + \left(b+\frac{۱}{b}\right)^{۲}\right] \geqslant \left\{\frac{۱}{۲}\left[\left(a+\frac{۱}{a}\right) + \left(b+\frac{۱}{b}\right)\right]\right\}^{۲}$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\right)\right]^{۲}$$

اما بنابر نامساوی کوشی ـ شوارتز، $۴ = (۱ + ۱)^۲ \leqslant (a + b)(۱/a + ۱/b)$، در نتیجه

$$\left[\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\right)\right]^۲ \geqslant \left[\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۴}{a+b}\right)\right]^۲ = \left(\frac{۱+۴}{۲}\right)^۲ = \frac{۲۵}{۴}$$

پس از ترکیب دو نامساوی بالا و ضرب دو طرف در ۲، حکم مسأله به دست می‌آید.

۷ـ۴ـ۹ فرض کنید که به ازای $i = ۱, \ldots, n$، $۰ < x_i < \pi$، و قرار دهید $x = (x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n)/n$. ثابت کنید

$$\prod_{i=۱}^{n}\left(\frac{\sin x_i}{x_i}\right) \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

حل. مسأله معادل است با اینکه ثابت کنیم

$$\sum_{i=۱}^{n}\log\frac{\sin x_i}{x_i} \leqslant n\log\frac{\sin x}{x}$$

تابع $f(t) = \log\frac{\sin t}{t}$ را در نظر بگیرید. می‌توان به سادگی نشان داد که f روی بازهٔ $(۰, \pi)$ مقعر است ($f''(t) < ۰$). بنابراین

$$f\left(\frac{x_۱ + x_۲}{۲}\right) \geqslant \frac{f(x_۱) + f(x_۲)}{۲}$$

به روشی کاملاً مشابه با برهان ۷-۱-۶، نتیجه می‌شود

$$f\left(\frac{x_۱ + \cdots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_۱) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

با جایگذاری مستقیم در این نامساوی، برهان کامل می‌شود:

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) \geqslant \frac{۱}{n}\left(\log\frac{\sin x_۱}{x_۱} + \cdots + \log\frac{\sin x_n}{x_n}\right)$$

مسائل

۷ـ۴ـ۱۰ (نامساوی برنولی). ثابت کنید که به ازای $۰ < a < ۱$،

$$(۱ + x)^a \leqslant ۱ + ax \quad , \quad x \geqslant -۱$$

در صورتی که $a < ۰$ یا $a > ۱$، نامساوی چگونه باید باشد؟

۷ـ۴ـ۱۱ ثابت کنید

$$\frac{x}{۱+x} < \log(۱+x) < \frac{x(x+۲)}{۲(x+۱)} \quad , \quad x > ۰$$

۷ـ۴ـ۱۲ (نامساوی هویگنس). ثابت کنید

$$۲\sin x + \tan x \geqslant ۳x, \quad ۰ < x < \pi/۲$$

۷ـ۴ـ۱۳ به ازای هر $x > ۰$، نامساوی $(۲ + \cos x)x > ۳\sin x$ را در نظر بگیرید.

الف) با در نظر گرفتن تابع $F(x) = x - (۳\sin x)/(۲+\cos x)$، این نامساوی را ثابت کنید.

ب) با در نظر گرفتن تابع $F(x) = (۲+\cos x)x - ۳\sin x$، این نامساوی را ثابت کنید.

۷ـ۴ـ۱۴ ثابت کنید

$$\circ \leqslant \frac{x\log x}{x^{۲}-۱} \leqslant \frac{۱}{۲} \quad , \quad x > \circ, \quad x \neq ۱$$

۷ـ۴ـ۱۵ ثابت کنید

$$\log\left(۱ - \frac{۱}{x+۳}\right) + \frac{x}{(x+۲)(x+۳)} < \circ, \quad x > -۲$$

۷ـ۴ـ۱۶ ثابت کنید

$$\left(\frac{a+۱}{b+۱}\right)^{b+۱} > \left(\frac{a}{b}\right)^{b} \quad , \quad a, b > \circ, \quad a \neq b$$

۷ـ۴ـ۱۷ ثابت کنید

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{\tan a}{\tan b} \quad , \quad \circ < b < a < \frac{۱}{۲}\pi$$

۷ـ۴ـ۱۸ با استفاده از روشهای این بخش، ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} < \left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}$$

(به عبارت دیگر نشان دهید که $f(x) = (۱+۱/x)^{x}$ تابعی صعودی است.)

۷ـ۴ـ۱۹ با استفاده از مقعر بودن تابع $f(x) = \sqrt{x}$، ثابت کنید که اگر a، b و c عددهای مثبتی باشند، آنگاه نامساوی $a\cos^{۲}\theta + b\sin^{۲}\theta < c$ ایجاب می‌کند که $\sqrt{a}\cos^{۲}\theta + \sqrt{b}\sin^{۲}\theta < \sqrt{c}$. (راهنمایی: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید. نقطهٔ $\sqrt{a}\cos^{۲}\theta + \sqrt{b}\sin^{۲}\theta$ در کجای دامنه و نقطهٔ $a\cos^{۲}\theta + b\sin^{۲}\theta$ در کجای بُرد قرار دارد؟)

۷ـ۴ـ۲۰ فرض کنید که به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $x_i > \circ$. تابع $f(t) = \log t$ را در نظر بگیرید و به همان روشی که در ۷-۴-۹ به کار رفت، ثابت کنید

$$(x_{۱}x_{۲}\ldots x_{n})^{۱/n} \leqslant \frac{x_{۱}+x_{۲}+\cdots+x_{n}}{n}$$

که در آن تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که همهٔ x_iها با هم مساوی باشند.

۷ـ۴ـ۲۱ الف) فرض کنید که به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $x_i > \circ$. با استفاده از نتیجهٔ ۷-۴-۲۰، نشان دهید

$$\frac{n}{\frac{۱}{x_{۱}}+\frac{۱}{x_{۲}}\cdots+\frac{۱}{x_{n}}} \leqslant (x_{۱}x_{۲}\ldots x_{n})^{۱/n}$$

ب) نشان دهید که به ازای عددهای مثبت a، b، c به قسمی که $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c} = ۱$، داریم

$$(a-۱)(b-۱)(c-۱) \geqslant ۸$$

۷ـ۴ـ۲۲ نشان دهید که به ازای عددهای مثبت a، b، c که $a+b+c=1$، داریم

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \frac{100}{3}$$

۷ـ۴ـ۲۳ فرض کنید a، b، c طول ضلعهای یک مثلث باشند. نشان دهید که

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \leqslant 2$$

مثالهای اضافی. ۶-۴-۶، ۶-۴-۷.

۷ـ۵ کاربرد سریها در نامساویها

یکی دیگر از راههای اثبات یک نامساوی به شکل

$$f(x) \leqslant g(x), \qquad 0<x<c,$$

(بحث پیش از ۷-۴-۳ را ببینید)، آن است که f و g را به شکل سریهای توانی، مثلاً $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$، بسط دهیم به طوری که در آنها x دربازهٔ $(-d,d)$ قرار داشته باشد. اگر به ازای هر n داشته باشیم $a_n \leqslant b_n$، آنگاه روشن است که برای هر x در بازهٔ $(0,d)$، $f(x) \leqslant g(x)$.

۷ـ۵ـ۱ به ازای کدام عدد حقیقی c، نامساوی $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \leqslant e^{cx^2}$ به ازای هر عدد حقیقی x برقرار می‌شود؟

حل. اگر نامساوی به ازای هر x برقرار باشد، آنگاه

$$0 \leqslant e^{cx^2}-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n x^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^{2n}}{n!}$$

برای آنکه ببینید چرا $c \geqslant \frac{1}{2}$، دو طرف را بر x^2 تقسیم کنید و قرار دهید $x=0$.

از طرف دیگر، اگر $c \geqslant \frac{1}{2}$، آنگاه

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$$
$$=e^{x^2/2} \leqslant e^{cx^2}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که نامساوی مورد نظر به‌ازای هر x برقرار است اگر و فقط اگر $c \geqslant \frac{1}{2}$.

یکی دیگر از تکنیکهای مهم کاربرد سریها در مسائل مربوط به نامساویها، استفاده ازسریهای متناوب است. به یاد آورید که اگر a_0، a_1، a_2، ... دنباله‌ای از عددهای مثبت باشند، سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ زمانی

همگراست که جمله‌های آن به طور مداوم به صفر کاهش یابند (یعنی $a_{n+1} < a_n$ و وقتی $n \to \infty$، $a_n \to 0$). آنچه از نظر منظورهای ما در اینجا اهمیت دارد، آن است که بدانیم که مجموع سری متناوب، بین هر دو مجموع جزئی متوالی آن قرار می‌گیرد. (اگر مجموع سری را با S و nاُمین مجموع جزئی آن را با S_n نشان دهیم، آنگاه $\{S_{2n+1}\}$ دنباله‌ای صعودی و $\{S_{2n}\}$ دنباله‌ای نزولی است و برای هر n، $S_{2n+1} < S < S_{2n}$.)

۲ـ۵ـ۷ نشان دهید که به ازای هر x،

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0$$

حل. وقتی که x عددی مثبت یا صفر باشد، ادعای مسأله درست است. فرض کنید که x عددی منفی و k عددی صحیح و نامنفی باشد به طوری که $1 \leqslant |x| \leqslant |x^2/2| \leqslant \ldots \leqslant |x^k/k!|$ و $|x^k/k!| \geqslant |x^{k+1}/(k+1)!| \geqslant \ldots$. هرگاه $2n \leqslant k$، حکم مسأله درست است، در حالی که اگر $2n > k$، استدلال مسألهٔ قبل ایجاب می‌کند که

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = e^x > 0$$

۳ـ۵ـ۷ ثابت کنید که وقتی $x > 0$، $(2 + \cos x)x > 3\sin x$.

حل. این همان مسألهٔ ۷-۴-۱۳ است، ولی در اینجا راه حلی بر اساس روش سریها ارائه می‌کنیم.

به ازای $x > 0$، در طرف چپ نامساوی مورد نظر داریم

$$(2 + \cos x)x > \left(2 + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)x$$

و در طرف راست آن

$$3\sin x < 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم که

$$3x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} > 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)$$

این نامساوی به ازای $x > 0$ برقرار است اگر و فقط اگر

$$\frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} > \frac{3x^5}{5!}$$

$$\left(\frac{1}{4!} - \frac{3}{5!}\right) > \frac{1}{6!}x^2$$

$$x^2 < 6!\left(\frac{2}{5!}\right) = 12$$

این نامساوی مورد نظر را به ازای $0 < x < \sqrt{12}$ ثابت می‌کند. ولی به ازای $x \geqslant \sqrt{12}$ برقراری نامساوی بدیهی است و در نتیجه حکم به ازای هر $x > 0$ برقرار است و برهان کامل است.

شاید کسی بپرسد که در برهان بالا به چه دلیل این تعداد از جمله‌های سری نامتناهی را انتخاب کردیم. چرا کمتر یا بیشتر انتخاب نکردیم؟ برای آنکه جهت نامساویها عوض نشوند، باید $\cos x$ را کمتر و $\sin x$ را بیشتر برآورد

کنیم و به این ترتیب علامت جمله‌های پایانی در تقریب سری الزاماً تعیین می‌شود. خامترین تقریب آن است که به جای $\cos x$، $1 - x^2/2$ و به جای $\sin x$، x بگذاریم. این کار به بررسی نامساوی $3x > x\left(3 - \frac{x^2}{2}\right)$ می‌انجامد که معادل است با $-\frac{x^3}{2} > 0$ و این نامساوی به ازای هیچ مقدار مثبت x برقرار نیست.

با افزایش تعداد جمله‌ها در سری، تقریبها بهتر می‌شوند و آزمایش بعدی می‌تواند جایگزین کردن $1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6!$ به جای $\cos x$ و $x - x^3/3! + x^5/5!$ به جای $\sin x$ باشد. این به راه حلی که ارائه دادیم منجر می‌شود.

۷ـ۵ـ۴ ثابت کنید

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x \quad , \quad 0 < x \leqslant \frac{1}{2}\pi$$

حل. به ازای $x > 0$،

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216}$$

و

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

پس کافی است نشان دهیم که

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

یا معادلاً

$$\frac{1}{4!} + \left(-\frac{1}{216} + \frac{1}{720}\right)x^2 - \frac{1}{8!}x^4 > 0$$

طرف چپ روی بازهٔ $(0, \frac{1}{2}\pi]$ نزولی است و در نتیجه مقدار مینیمم خود را به‌ازای $x = \frac{1}{2}\pi$ می‌گیرد. به ویژه به ازای $0 < x \leqslant \frac{1}{2}\pi$، داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{4!} + \left(-\frac{1}{216} + \frac{1}{720}\right)x^2 - \frac{1}{8!}x^4 &\geqslant \frac{1}{4!} + \left(-\frac{1}{216} + \frac{1}{720}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{8!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \\ &> \frac{1}{4!} + \left(-\frac{1}{216}\right)(2)^2 - \frac{1}{8!}(2)^4 > 0\end{aligned}$$

این برهان را کامل می‌کند.

مسائل

۷ـ۵ـ۵ با استفاده از سریهای نامتناهی، نامساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $e^x > 1 + (1+x)\log(1+x)$، $x > 0$.

ب) $(1+x)/(1-x) > e^{2x}$، $0 < x < 1$.

ج) $\arcsin x < x(1-x^2)$، $0 < x < 1$.

۷ـ۵ـ۶ ثابت کنید که وقتی $x > 0$، $\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 < \frac{5}{81}x^3$.

۷ـ۵ـ۷ ثابت کنید که وقتی $x > ۰$، $\frac{۱}{۳}(۲\sin x + \tan x) > x$. (راهنمایی: نشان دهید که به ازای $x > ۰$، نامساوی معادل $\sin x(۲\cos x + ۱) > ۳x\cos x$ برقرار است.)

۸ـ۵ـ۷ نشان دهید که به ازای $۰ < x < \sqrt{\frac{\pi}{۲}}$، $\sin^۲ x < \sin x^۲$.

۶ـ۷ اصل فشار

در این بخش می‌بینیم که چگونه بررسی نامساویها می‌تواند نقش مهمی در به دست آوردن مقدار حدود ایفا کند. می‌توان ایدهٔ اصلی را (که صورتهای گوناگونی دارد) به شکل زیر بیان کرد.

اصل فشار. اگر $\{a_n\}$، $\{b_n\}$، $\{c_n\}$ دنباله‌هایی نامتناهی باشند به طوری که به ازای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ داشته باشیم $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ و اگر $\{a_n\}$ و $\{c_n\}$ هر دو به حد مشترک L میل کنند، آنگاه $\{b_n\}$ نیز به L میل می‌کند.

این اصل آن اندازه بی‌خاصیت به نظر می‌رسد که امکان استفاده از آن در حل مسأله تعجب‌آور است (زیرا بدیهی است که برای $\{b_n\}$ انتخاب دیگری وجود ندارد، زیرا بین دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{c_n\}$ که هر دو به یک حد میل می‌کنند، «فشرده» می‌شود)، با وجود این می‌توان از آن به شکل زیر استفاده کرد. فرض کنید که بخواهیم حد دنبالهٔ $\{b_n\}$ را به دست آوریم و نیز فرض کنید که b_nها به شکل ناامیدکننده‌ای پیچیده باشند و به همین دلیل نتوانیم مستقیماً با آنها کار کنیم. در این صورت با توجه به اصل فشار، می‌کوشیم دنبالهٔ $\{b_n\}$ را بین دو دنبالهٔ ساده‌تر $\{a_n\}$ و $\{c_n\}$ «بفشاریم».

برای مثال دنبالهٔ $\{n^{۱/n}\}$ را در نظر بگیرید. می‌توانیم با استفاده از قاعدهٔ لوپیتال حد آن را به دست آوریم. با وجود این استدلال زیر را در نظر بگیرید. بنابر نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، داریم

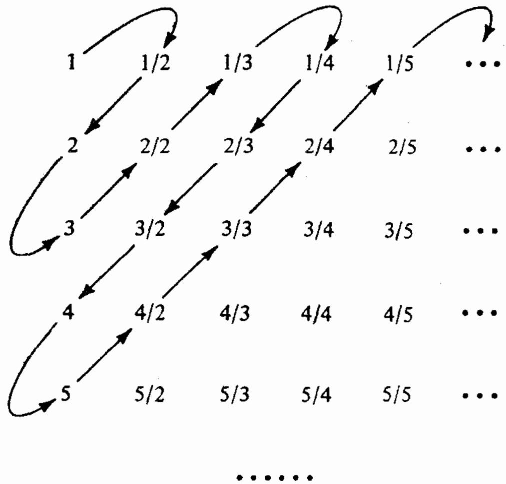
$$۱ \leqslant n^{۱/n} = \left(\underbrace{۱ \times ۱ \times \ldots \times ۱}_{n-۲} \times \sqrt{n} \times \sqrt{n}\right)^{۱/n} \leqslant \frac{(n-۲) + ۲\sqrt{n}}{n} = ۱ + ۲\left(\frac{۱}{\sqrt{n}} - \frac{۱}{n}\right)$$

اکنون بنابر اصل فشار (که در آن $a_n = ۱$ و $c_n = ۱ + ۲(۱/\sqrt{n} - ۱/n)$)، می‌بینیم که $n^{۱/n}$ اجباراً به ۱ همگرا می‌شود.

۱ـ۶ـ۷ ثابت یا رد کنید: مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای مثبت را **می‌توان** در یک دنبالهٔ نامتناهی $\{b_n\}$ طوری مرتب کرد که دنبالهٔ $\{(b_n)^{۱/n}\}$ همگرا باشد.

حل. ابتدا مطابق شکل ۷-۲، عددهای گویا را که در یک آرایهٔ مربعی قرار گرفته‌اند، با دنبال کردن یک مسیر مارمانند معمولی مرتب می‌کنیم. در این ترتیب، همهٔ کسرهایی را که به ساده‌ترین صورت تحویل نشده‌اند، حذف می‌کنیم. بنابراین دنباله به صورت ۱، $\frac{۱}{۲}$، ۲، ۳، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۲}$، ۴، ۵، $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۱}{۶}$، ... آغاز می‌شود. اگر b_n جملهٔ nام این دنباله باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که $\{b_n^{۱/n}\}$ به ۱ همگرا است.

همان‌طور که در شکل ۷-۲ می‌بینید، هر عضو سطر nام، کوچکتر یا مساوی با n است و هر عضو ستون nام، بزرگتر یا مساوی با $۱/n$ است. همچنین اگر b_n در سطر iام و ستون jام باشد، آنگاه $i \leqslant n$ و $j \leqslant n$.



شکل۷-۲

بنابراین

$$\text{به ازای هر } n \quad , \quad \frac{۱}{n} \leqslant \frac{۱}{j} \leqslant b_n \leqslant i \leqslant n$$

و در نتیجه

$$a_n \equiv \frac{۱}{n^{۱/n}} = \left(\frac{۱}{n}\right)^{۱/n} \leqslant b_n^{۱/n} \leqslant n^{۱/n} \equiv c_n$$

اینک بنابر اصل فشار، $\{b_n^{۱/n}\}$ به ۱ همگراست.

۷ـ۶ـ۲ فرض کنید $f(x)$ تابعی با مقدار حقیقی باشد که به ازای $-۱ < x < ۱$ تعریف شده و $f'(\circ)$ موجود باشد. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \circ = \lim_{n\to\infty}(b_n) \text{ ، } -۱ < a_n < \circ < b_n < ۱$$

ثابت کنید که

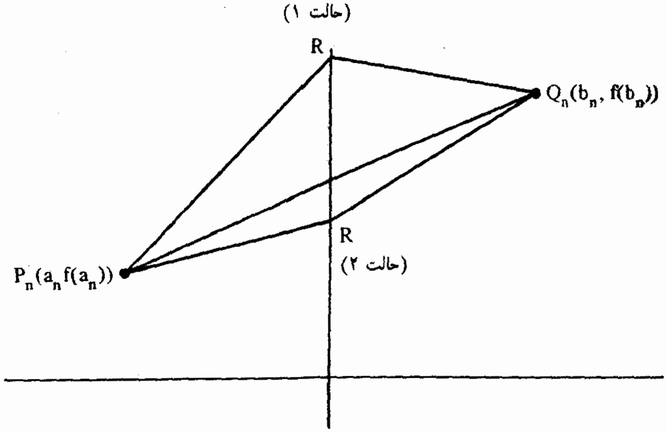
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(\circ)$$

حل. می‌توان کسر $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ را به صورت هندسی به عنوان شیب پاره‌خط واصل بین نقاط $P_n\left(a_n, f(a_n)\right)$ و $Q_n\left(b_n, f(b_n)\right)$ تعبیر کرد (شکل ۷-۳ را ببینید).

فرض کنید R نقطهٔ $(\circ, f(\circ))$ باشد. در این صورت، عرض از مبدأ پاره‌خط P_nQ_n کوچکتر یا مساوی $f(\circ)$ (حالت ۱)، یا بزرگتر از $f(\circ)$ است (حالت ۲).

در حالت اول، داریم

$$\text{شیب } P_nR \leqslant \text{شیب } P_nQ_n \leqslant \text{شیب } RQ_n$$



شکل ۷-۳

یا معادلاً

$$\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0} \leqslant \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} \leqslant \frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0}$$

در حالت دوم، داریم

$$\text{شیب } P_n R \leqslant \text{شیب } P_n Q_n \leqslant \text{شیب } RQ_n$$

یا معادلاً

$$\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0} \leqslant \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} \leqslant \frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0}$$

در حالت ۲، نامساویها دقیقاً به ترتیب عکس نامساویهای حالت ۱ هستند. برای اصلاح این حالت، دو دنبالهٔ جدید را طوری می‌سازیم که نقش a_n و b_n را در حالت ۲ تعویض کنند. از این رو، فرض می‌کنیم که $\{c_n\}$ و $\{d_n\}$ به شکل زیر تعریف شده باشند:

اگر a_n و b_n در حالت ۱ صدق کنند، $c_n = b_n$ و $d_n = a_n$

اگر a_n و b_n در حالت ۲ صدق کنند، $c_n = a_n$ و $d_n = b_n$

در این صورت برای هر n داریم

$$\frac{f(c_n)-f(0)}{c_n-0} \leqslant \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} \leqslant \frac{f(d_n)-f(0)}{d_n-0}$$

از آنجا که $f'(0)$ موجود است و $\lim_{n\to\infty} d_n = 0 = \lim_{n\to\infty} c_n$، داریم

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(c_n)-f(0)}{c_n-0} = f'(0) \quad ، \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(d_n)-f(0)}{d_n-0} = f'(0)$$

اکنون حکم مسأله از اصل فشار نتیجه می‌شود.

راه حل آموزندهٔ دیگری که باز هم بر اساس اصل فشار است، از این حقیقت استفاده می‌کند که اگر a و b عددهایی حقیقی باشند که $a < b$، آنگاه به ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت r و s که مجموعشان مساوی ۱

است، داریم (۱-۲-۱۱ را ببینید)

$$a \leqslant ra+sb \leqslant b$$

در این مسأله می‌نویسیم

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\left(\frac{f(b_n)-f(\circ)}{b_n}\right)\left(\frac{b_n}{b_n-a_n}\right)+\left(\frac{f(a_n)-f(\circ)}{a_n}\right)\left(\frac{-a_n}{b_n-a_n}\right)$$

و قرار می‌دهیم $r=b_n/(b_n-a_n)$ و $s=-a_n/(b_n-a_n)$. در این صورت $r \geqslant \circ$ و $s \geqslant \circ$ و $r+s=۱$. بنابراین $\frac{[f(b_n)-f(a_n)]}{[b_n-a_n]}$ بین $\frac{[f(b_n)-f(\circ)]}{b_n}$ و $\frac{[f(a_n)-f(\circ)]}{a_n}$ قرار دارد. از آنجا که کسرهای اخیر به $f'(\circ)$ میل می‌کنند، بنابر اصل فشار، $\frac{[f(b_n)-f(a_n)]}{[b_n-a_n]}$ نیز باید به $f'(\circ)$ میل کند.

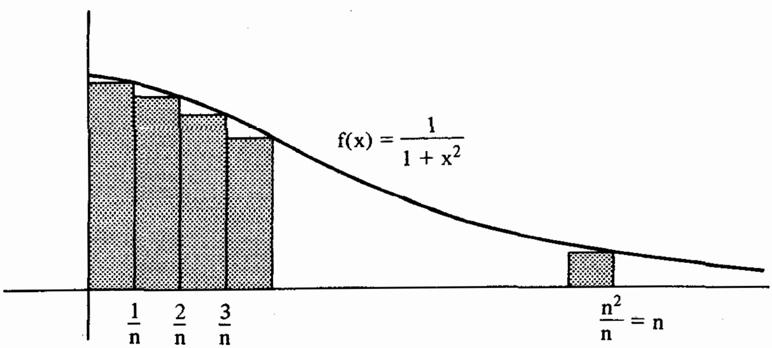
۷ـ۶ـ۳ مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=۱}^{n^۲}\frac{n}{n^۲+j^۲}$ را به دست آورید.

حل. مجموع $\sum_{j=۱}^{n^۲}\frac{n}{n^۲+j^۲}=\sum_{j=۱}^{n^۲}\left(\frac{۱/n}{۱+(j/n)^۲}\right)$ را می‌توان به عنوان مجموع ریمان تابع $f(x)=۱/(۱+x^۲)$ روی بازهٔ $[\circ,n]$ در نظر گرفت (شکل ۷-۴ را ببینید). متأسفانه این واقعاً یک مجموع ریمان نیست، زیرا بازه‌ای که این مجموع را روی آن اختیار کرده‌ایم، ثابت نیست؛ بنابراین وقتی که $n\to\infty$، انتگرال معینی به دست نمی‌آید. با وجود این، می‌توان گفت که به ازای هر n،

$$\sum_{j=۱}^{n^۲}\left(\frac{n}{n^۲+j^۲}\right)\leqslant\int_\circ^{n^۲}\frac{dx}{۱+x^۲}=\arctan n^۲$$

برای به دست آوردن یک کران پایین برای مجموع مورد نظر، فرض می‌کنیم k عدد صحیح مثبت و ثابتی باشد و بازهٔ ثابت $[\circ,k]$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت به ازای هر n بزرگتر از k، مجموع

$$\sum_{j=۱}^{kn}\frac{n}{n^۲+j^۲}=\sum_{j=۱}^{kn}\frac{۱/n}{۱+(j/n)^۲}$$



شکل ۷-۴

یک مجموع ریمان از تابع $f(x) = ۱/(۱ + x^۲)$ روی بازهٔ $[۰, k]$ است. همچنین داریم

$$\sum_{j=۱}^{kn} \frac{n}{n^۲ + j^۲} < \sum_{j=۱}^{n^۲} \frac{n}{n^۲ + j^۲}$$

با در نظر گرفتن همهٔ این نتایج، داریم

$$\sum_{j=۱}^{kn} \frac{n}{n^۲ + j^۲} < \sum_{j=۱}^{n^۲} \frac{n}{n^۲ + j^۲} < \arctan n^۲$$

و در نتیجه بنابر اصل فشار، داریم

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=۱}^{kn} \frac{۱/n}{۱ + (j/n)^۲} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=۱}^{n^۲} \frac{n}{n^۲ + j^۲} \leqslant \lim_{n\to\infty} \arctan n^۲$$

$$\int_۰^k \frac{dx}{۱ + x^۲} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=۱}^{n^۲} \frac{n}{n^۲ + j^۲} \leqslant \frac{۱}{۲}\pi$$

ولی چون k عدد صحیح مثبت دلخواهی بود، خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}\pi = \lim_{k\to\infty} \arctan k \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=۱}^{n^۲} \frac{n}{n^۲ + j^۲} \leqslant \frac{۱}{۲}\pi$$

از اینجا نتیجه می‌شود که حد مورد نظر مساوی $\frac{۱}{۲}\pi$ است.

یکی دیگر از کاربردهای نامساویها در محاسبهٔ حدود، بر حقیقت مهم زیر استوار است:

هر دنبالهٔ یکنوا و کراندار، همگرا است.

به عبارت دیگر اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد به طوری که به ازای nهای به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $a_n \leqslant a_{n+۱}$ (یا به ازای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ، $a_{n+۱} \leqslant a_n$) و اگر به ازای عدد ثابتی مانند K، برای هر n داشته باشیم $a_n \leqslant K$ (یا به ترتیب $a_n \geqslant K$)، آنگاه دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگراست.

مثلاً برای اثبات همگرایی دنبالهٔ $(۱ + ۱/n)^n$، کافی است ثابت کنیم که این دنباله یکنواست (در این مثال صعودی است) و از بالا کراندار است (مثلاً ۳ کران بالایی برای این دنباله است؛ ۷-۱-۵ را ببینید).

۷ـ۶ـ۴ اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که به ازای $n \geqslant ۱$ داشته باشیم

$$(۲ - a_n)a_{n+۱} = ۱$$

ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد و مساوی با ۱ است.

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر دنباله همگرا باشد، باید به ۱ میل کند. استدلالی را که در اینجا به کار می‌بریم، در مواردی که یک دنباله به شکل بازگشتی تعریف می‌شود، استدلال استانداردی است. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. سپس با محاسبهٔ حد دو طرف در رابطهٔ بازگشتی $(۲ - a_n)a_{n+۱} = ۱$، می‌بینیم که $(۲ - L)L = ۱$ و یا معادلاً $(۱ - L)^۲ = ۰$، که از این نتیجه می‌شود $L = ۱$.

اکنون برای اثبات همگرایی دنباله، ثابت می‌کنیم که این دنباله کراندار است و «نهایتاً» یکنوا خواهد شد.

(برای راه حل دیگری از این مسأله، ۱-۱-۱۱ را ببینید.)

فرض کنید که به ازای برخی a_n، $۰ < a_n < ۱$. در این صورت

$$a_{n+۱} - a_n = \frac{۱}{۲ - a_n} - a_n = \frac{۱ - (۲ - a_n)a_n}{۲ - a_n} = \frac{(۱ - a_n)^۲}{۲ - a_n} > ۰$$

و در نتیجه $a_{n+۱} = ۱/(۲ - a_n) < ۱$. بنابراین $a_n < a_{n+۱} < a_{n+۲} < \cdots < ۱$، در نتیجه، دنباله یکنوا و کراندار است، پس همگراست. بنابراین کافی است ثابت کنیم که به ازای برخی n، $۰ < a_n < ۱$. چند حالت وجود دارد.

اگر $a_۱ < ۰$، آنگاه $۰ < a_۲ < ۱/(۲ - a_۱) < ۱$، پس بنابر استدلال قبلی حکم ثابت می‌شود.

اگر $a_۱ > ۲$، آنگاه $a_۲ = ۱/(۲ - a_۱) < ۰$ بنابراین باز حکم ثابت است.

اگر $a_۱ = ۱$، آنگاه به ازای هر n، $a_n = ۱$.

آنچه باقیمانده، بررسی حالت $۱ < a_۱ \leqslant ۲$ است. کندوکاو در چند حالت خاص در این بازه به حالتهای زیر (که هر یک را می‌توان با استفاده از استقرا ثابت کرد)، می‌انجامد.

هرگاه $a_۱$ به شکل $(n + ۱)/n$ باشد، دنباله تعریف نمی‌شود زیرا اگر $a_۱ = (n + ۱)/n$، آنگاه (می‌توان نشان داد که) $a_n = ۲$ و در نتیجه $a_{n+۱}$ قابل تعریف نیست. اگر $a_۱$ به بازهٔ

$$\left(\frac{n + ۱}{n}, \frac{n}{n - ۱}\right) \qquad , n > ۱$$

تعلق داشته باشد، آنگاه (می‌توان نشان داد که) $a_{n+۱}$ در بازهٔ $(۰ , ۱)$ قرار دارد و بنابر استدلال قبلی، برهان تمام می‌شود.

بنابراین، دنبالهٔ مورد نظر در همهٔ حالتها (که در آنها دنباله تعریف می‌شود)، همگراست.

۷ـ۶ـ۵ فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد که $f(۱) = ۱$ و به ازای $x \geqslant ۱$،

$$f'(x) = \frac{۱}{x^۲ + f^۲(x)}$$

ثابت کنید $\lim_{x\to\infty} f(x)$ وجود دارد و کمتر از $۱ + \frac{۱}{۴}\pi$ است.

حل. بنابر قضیهٔ اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، داریم

$$f(x) - f(۱) = \int_۱^x f'(x)dx$$

توجه کنید که $f(x)$ صعودی است؛ همچنین به ازای هر $x \geqslant ۱$، $f(x) \geqslant ۱$ زیرا $f(۱) = ۱$ و $f'(x) > ۰$. بنابراین

$$f(x) - f(۱) = \int_۱^x \frac{dx}{x^۲ + f^۲(x)} \leqslant \int_۱^x \frac{dx}{۱ + x^۲}$$

$$= \arctan x]_۱^x = \arctan x - \arctan ۱$$

$$< \frac{۱}{۲}\pi - \frac{۱}{۴}\pi = \frac{۱}{۴}\pi$$

بنابراین $f(x)$ صعودی است و $۱ + \frac{\pi}{۴}$ کران بالای آن است، در نتیجه $\lim_{x\to\infty} f(x)$ وجود دارد و از

$\frac{\pi}{۴} + ۱$ کمتر است.

۷ـ۶ـ۶ همهٔ عددهای طبیعی را در نظر بگیرید که در دستگاه دهدهی، بین رقمهای آنها رقم ۹ نباشد. ثابت کنید که سری حاصل از عکس این عددها، همگراست.

حل. فرض کنید S_m، mاُمین مجموع جزئی سری مورد نظر باشد. دنبالهٔ $\{S_m\}$ به طور یکنوا صعودی است؛ بنابراین برای اثبات همگرایی آن، کافی است ثابت کنیم که این دنباله کراندار است.

به ازای مجموع جزئی مفروض S_m، n را تعداد رقمهای عدد صحیح m بگیرید. تعداد عددهای صحیحی که دقیقاً n رقم داشته و در نمایش اعشاری آنها ۹ وجود نداشته باشد، $۸ \times ۹^{n-۱}$ تاست (رقم اول نمی‌تواند صفر باشد). بنابراین مجموع عکسهای آنها کمتر از $۸ \times ۹^{n-۱}/۱۰^{n-۱}$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} S_m &< ۸ + ۸ \times \frac{۹}{۱۰} + ۸ \times \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^۲ + \cdots + ۸ \times \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{n-۱} \\ &< ۸\left[۱ + \frac{۹}{۱۰} + \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^۲ + \ldots\right] = ۸۰ \end{aligned}$$

و برهان کامل می‌شود.

مسائل

۷ـ۶ـ۷ نامساوی زیر را ثابت کنید و با استفاده از اصل فشار، مقدار حد را به دست آورید:

الف) $\frac{n}{\sqrt{n^۲+n}} < \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\sqrt{n^۲+i}} < \frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}}$.

ب) $a < (a^n + b^n)^{۱/n} < b^n\sqrt{۲}$، $۰ < a < b$.

ج) $e^{۱-۱/(۲n)} < (۱+۱/n)^n < e^{۱-۱/(۲n)+۱/(۳n^۲)}$.

۷ـ۶ـ۸ ثابت کنید که دنباله‌های زیر همگرا هستند و حد آنها را بیابید:

الف) $\sqrt{۱}, \sqrt{۱+\sqrt{۱}}, \sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱}}}, \sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱}}}}, \ldots$

ب) $\sqrt{۲}, \sqrt{۲+\sqrt{۲}}, \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}, \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}, \ldots$

۷ـ۶ـ۹ ثابت کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}$، که توسط رابطهٔ

$$a_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n} - \log n$$

تعریف می‌شود، همگراست.

۷ـ۶ـ۱۰ ثابت کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}$، که توسط رابطهٔ $a_{n+۱} = \frac{۶(۱+a_n)}{۷+a_n}$ تعریف می‌شود، همگراست و حد آن را بیابید.

۷ـ۶ـ۱۱ فرض کنید $a_۱$ و $b_۱$ دو عدد مثبت دلخواه باشند و $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ توسط رابطه‌های

$$a_n = \frac{۲a_{n-۱}b_{n-۱}}{a_{n-۱}+b_{n-۱}} \quad , \quad b_n = \sqrt{a_{n-۱}b_{n-۱}}$$

تعریف شوند. ثابت کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا هستند و یک حد دارند.

۷ـ۶ـ۱۲ فرض کنید $S_۱ = \log a$ و به ازای $n > ۱$، $S_n = \sum_{i=۱}^{n-۱} \log(a - S_i)$. نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a - ۱$$

(راهنمایی: توجه کنید که $S_{n+۱} = S_n + \log(a - S_n)$.)

۷ـ۶ـ۱۳ دنبالهٔ $Q_n(x)$ از چندجمله‌ایها، توسط رابطه‌های

$$Q_۱(x) = ۱ + x \quad , \quad Q_۲(x) = ۱ + ۲x$$

و نیز به ازای $m \geqslant ۱$،

$$Q_{۲m+۱}(x) = Q_{۲m}(x) + (m+۱)xQ_{۲m-۱}(x)$$
$$Q_{۲m+۲}(x) = Q_{۲m+۱}(x) + (m+۱)xQ_{۲m}(x)$$

تعریف شده است. فرض کنید x_n بزرگترین جواب حقیقی معادلهٔ $Q_n(x) = ۰$ باشد. ثابت کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای صعودی است و $\lim_{n\to\infty} x_n = ۰$.

۷ـ۶ـ۱۴ ثابت کنید که اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n^۲$ همگرا باشد، $\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n/n)$ نیز همگراست.

۷ـ۶ـ۱۵ ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲^۲ \times ۴^۲ \times ۶^۲ \times \ldots \times (۲n)^۲}{(۱\times ۳)(۳\times ۵)\ldots((۲n-۱)(۲n+۱))}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{۲^۲ \times ۴^۲ \times ۶^۲ \times \ldots \times (۲n)^۲}{۱^۲ \times ۳^۲ \times ۵^۲ \times \ldots \times (۲n-۱)^۲}\left(\frac{۱}{۲n+۱}\right) = \frac{۱}{۲}\pi$$

(راهنمایی: به ازای $۰ \leqslant \theta \leqslant \frac{۱}{۲}\pi$، داریم $\int_۰^{\pi/۲} \sin^{۲n+۱}\theta d\theta \leqslant \int_۰^{\pi/۲} \sin^{۲n}\theta d\theta \leqslant \int_۰^{\pi/۲} \sin^{۲n-۱}\theta d\theta$. حکم ۲-۵-۱۴ را به همراه اصل فشار به کار ببرید.)

مثالهای اضافی. ۶-۱-۵، ۶-۳-۷، ۶-۴-۴، ۶-۶-۲، بخش ۶-۸، ۶-۹-۴. همچنین مثالهای «تنصیف مکرر» در بخش ۶-۱ را ببینید.

۸

هندسه

در این فصل توجه خود را به برخی از معمولترین تکنیکهای حل مسائل در هندسه اقلیدسی معطوف می‌کنیم. در اینجا علاوه بر روشهای ترکیبی کلاسیک اقلیدس، خواهیم دید که چگونه جبر، مثلثات، آنالیز، جبر برداری و اعداد مختلط می‌توانند ابزارهای مناسبی برای مطالعهٔ هندسه باشند.

۸ـ۱ هندسهٔ مسطحهٔ کلاسیک

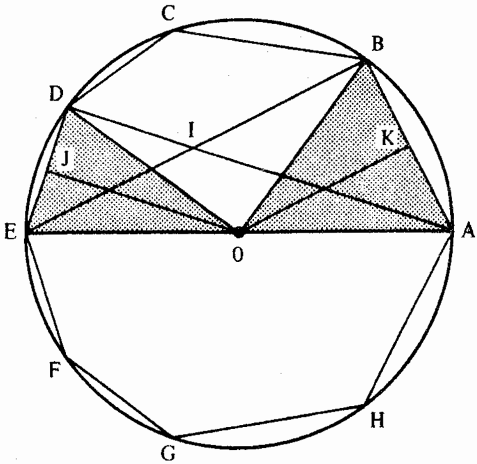
در این بخش ایده‌ها و روشهای مشخص هندسه مسطحهٔ کلاسیک را یادآوری می‌کنیم، یعنی آن دسته از ویژگیهای مثلثها، چهارضلعیها و دایره‌ها را مطالعه می‌کنیم که تحت حرکت، ناوردا (تغییرناپذیر) هستند (مثلاً انتقال، دوران و تقارن از این قبیل‌اند). در اینجا با هندسهٔ ترکیبی سروکار داریم، یعنی هندسه‌ای که بر اساس درک مفاهیم همنهشتی، تشابه، تناسب، همرسی، کمانها و وترهای دایره، زاویه‌های محاطی و غیره ساخته می‌شود. همچنین مایلیم توجه خواننده را به اهمیت تکنیکهای جبری و مثلثاتی در اثبات احکام هندسهٔ مسطحهٔ کلاسیک جلب کنیم.

۸ـ۱ـ۱ مساحت هشت‌ضلعی محدبی را بیابید که در یک دایره محاط است و چهار ضلع متوالی آن به طول ۳ واحد و چهار ضلع باقیمانده آن به طول ۲ واحد باشند. پاسخ خود را به شکل $r + s\sqrt{t}$ بیان کنید که در آن r، s و t عددهای صحیح مثبت‌اند.

به منظور نشان دادن روشهای گوناگونی که در این موضوع در اختیار داریم، چند راه حل برای این مسأله ارائه می‌دهیم.

حل ۱. همان‌طور که در شکل ۸-۱ نشان داده شده است، فرض می‌کنیم که رأسها با حروف $ABCDEFGH$ نامگذاری شده‌اند به طوری که $AB = BC = GH = HA = ۳$ و $CD = DE = EF = FG = ۲$. فرض کنید O مرکز دایره باشد.

ابتدا مساحت $\triangle OAB$ و $\triangle ODE$ را می‌یابیم. برای این کار، کافی است که طول ارتفاعهای OK و OJ را به دست آوریم.



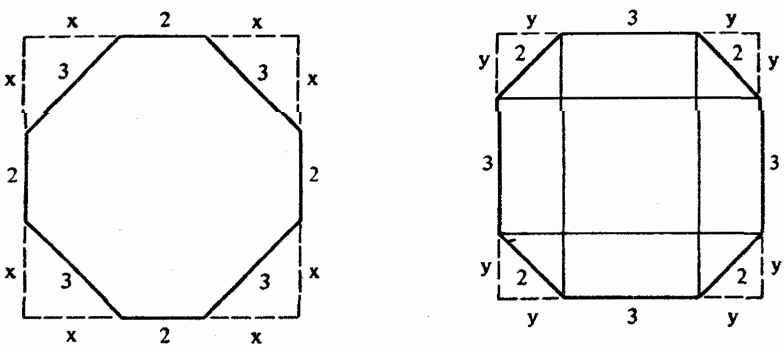
شکل۸-۱

توجه کنید که $OK = \frac{۱}{۲}EB$، زیرا O وسط EA و K وسط AB است. به همین‌ترتیب، $OJ = \frac{۱}{۲}AD$ و بنابراین کافی است DI، IA، EI و IB را بیابیم که در آن I نقطهٔ برخورد AD و EB است. بنابر (زض‌ز)، $\triangle DBI \cong \triangle DBC$، در نتیجه $DI = ۲$ و $IB = ۳$. همچنین چون $\triangle ADE$ و $\triangle ABE$ هر دو در یک نیمدایره محاط شده‌اند، $\angle ADE$ و $\angle ABE$ زاویه‌های قائمه‌اند. در نتیجه $\triangle IBA$ و $\triangle EDI$ مثلثهای متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌اند. بنابراین $IA = ۳\sqrt{۲}$ و $EI = ۲\sqrt{۲}$.

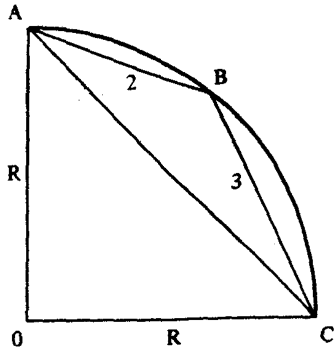
اکنون می‌توانیم مساحت هشت‌ضلعی را به دست آوریم.

$$\text{مساحت} = ۴\left[\frac{۱}{۲} \times ۳\left(\frac{۳ + ۲\sqrt{۲}}{۲}\right)\right] + ۴\left[\frac{۱}{۲} \times ۲\left(\frac{۲ + ۳\sqrt{۲}}{۲}\right)\right] = ۱۳ + ۱۲\sqrt{۲}$$

حل ۲. شاید ساده‌ترین راه حل، بر اساس درک این مطلب باشد که مساحت هشت‌ضلعی، درست برابر است با مساحت یکی از شکلهایی که در دو وضعیت شکل ۸-۲ نشان داده شده‌اند. در هر یک از این شکلها، طول ضلعها متوالیاً برابر با ۲ و ۳ است. مساحت این شکلها را می‌توان با کاستن مساحتهای چهار ناحیهٔ مثلثی از



شکل۸-۲



شکل۸-۳

مساحت یک مربع یا با جمع کردن مساحت یک مربع، چهار مستطیل و چهار مثلث به دست آورد. بنابراین در نمودار طرف چپ داریم ($x = \frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$)،

$$\text{مساحت هشت ضلعی} = (۲x + ۲)^{۲} - ۴(\frac{۱}{۲}x^{۲})$$
$$= ۲x^{۲} + ۸x + ۴ = ۲\left(\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}\right)^{۲} + ۸ \times \frac{۳}{۲}\sqrt{۲} + ۴$$
$$= ۱۳ + ۱۲\sqrt{۲}$$

اگر در شکل طرف راست، محاسبه را از درون به بیرون انجام دهیم، داریم ($y = \sqrt{۲}$)،

$$\text{مساحت هشت ضلعی} = ۹ + ۴(۳y) + ۴(\frac{۱}{۲}y^{۲})$$
$$= ۹ + ۱۲\sqrt{۲} + ۲ \times ۲ = ۱۳ + ۱۲\sqrt{۲}$$

حل ۳. فرض کنید R شعاع دایره باشد. مساحت هشت‌ضلعی مساوی است با چهار برابر مساحت چهارضلعی $OABC$ (شکل ۸-۳ را ببینید). بدیهی است که

$$\text{مساحت}\triangle ABC + \text{مساحت}\triangle OAC = \text{مساحت}OABC$$

بنابر فرمول هرون برای مساحت مثلث،

$$\text{مساحت}\triangle ABC = \sqrt{s(s-۲)(s-۳)(s-\sqrt{۲}R)}$$

که در آن $s = \frac{۱}{۲}(۲ + ۳ + \sqrt{۲}R) = \frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}R$. از اینجا نتیجه می‌گیریم

مساحت$OABC$

$$= \frac{۱}{۲}R^{۲} + \sqrt{\left(\frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}R\right)\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}R\right)\left(-\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}R\right)\left(\frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}R\right)}$$
$$= \frac{۱}{۲}R^{۲} + \sqrt{\left(\frac{۲۵}{۴} - \frac{۱}{۲}R^{۲}\right)\left(-\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲}R^{۲}\right)}$$

از قانون کسینوسها (برای $\angle B$ در $\triangle ABC$) به دست می‌آوریم

$$۲R^۲ = ۴ + ۹ - ۲ \times ۲ \times ۳ \cos ۱۳۵^\circ = ۱۳ + ۱۲ \times \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$$

در نتیجه

$$R^۲ = \frac{۱۳}{۲} + ۳\sqrt{۲}$$

با جایگذاری این مقدار به جای $R^۲$ در معادلهٔ مساحت $OABC$، نتیجهٔ نهایی به دست می‌آید.

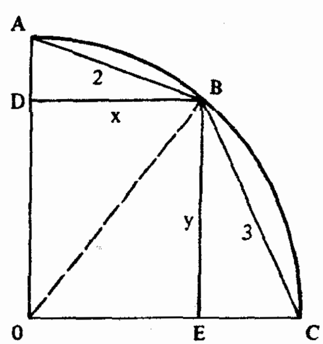
حل ۴. در شکل ۸-۴، D و E پای عمودهایی هستند که به ترتیب از B بر OA و OC رسم شده‌اند. فرض کنید $x = OE$، $y = OD$ و R شعاع دایره باشد. در این صورت

$$\text{مساحت هشت ضلعی} = ۴(\text{مساحت چهار ضلعی } OABC)$$
$$= ۴(\text{مساحت } \triangle OAB + \text{مساحت } \triangle OCB)$$
$$= ۴\left(\frac{۱}{۲}Rx + \frac{۱}{۲}Ry\right)$$
$$= ۲R(x+y)$$

طرح ما آن است که $x+y$ را بر حسب R بیان کنیم و سپس از تساوی $R^۲ = \frac{۱۳}{۲} + ۳\sqrt{۲}$ استفاده کنیم (راه‌حل قبلی را ببینید).

اگر قضیهٔ فیثاغورس را در $\triangle ABD$ به کار ببریم، نتیجه می‌گیریم $۴ = (R-y)^۲ + x^۲$، یا به طور معادل $۲R(R-y) = ۴$ (توجه کنید که $x^۲ + y^۲ = R^۲$). به همین ترتیب، از $\triangle EBC$ نتیجه می‌گیریم که $(R-x)^۲ - ۹ = y^۲$ یا به طور معادل $۲R(R-x) = ۹$. با جمع $R - y = ۴/(۲R)$ و $R - x = ۹/(۲R)$ به تساوی $۲R - (x+y) = ۱۳/(۲R)$ و یا معادلاً $x + y = (۴R^۲ - ۱۳)/(۲R)$ می‌رسیم. با جایگذاری به دست می‌آوریم

$$\text{مساحت هشت ضلعی} = ۲R\left[\frac{۴R^۲ - ۱۳}{۲R}\right] = ۴R^۲ - ۱۳$$
$$= ۴\left(\frac{۱۳}{۲} + ۳\sqrt{۲}\right) - ۱۳ = ۱۳ + ۱۲\sqrt{۲}$$



شکل۸-۴

حل ۵. می‌توانیم هشت‌ضلعی را مانند یک کیک، به هشت تکهٔ مثلث شکل با ساقهای مساوی به طول R (شعاع دایرهٔ محیطی) و قاعده‌های به طول ۲,۳ تقسیم کنیم. فرض کنید که مطابق شکل ۸-۵، H و h ارتفاعهای این مثلثها باشند. در این صورت

$$\text{مساحت هشت ضلعی} = ۴\left(\frac{۱}{۲}۳\times H\right)+۴\left(\frac{۱}{۲}۲\times h\right)=۶H+۴h$$

اگر α و β مطابق شکل ۸-۵ باشند، رابطه‌های زیر را داریم: $\alpha+\beta=\pi/۴$؛ $\sin\alpha=۳/(۲R)$؛ $\cos\alpha=H/R$؛ $\sin\beta=۱/R$؛ $\cos\beta=h/R$. از اینها نتیجه می‌شود

$$R=\frac{۱}{\sin\beta}=\frac{۱}{\sin\left(\frac{۱}{۴}\pi-\alpha\right)}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\cos\alpha-\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\sin\alpha}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{H/R-۳/۲R}\right)=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۲R}{۲H-۳}\right)$$

از اینجا نتیجه می‌شود

$$۱=\frac{۴}{\sqrt{۲}(۲H-۳)}$$

یا معادلاً

$$H=\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲}$$

با استفاده از این، داریم

$$h=R\cos\beta=R\left[\cos\left(\frac{۱}{۴}\pi-\alpha\right)\right]=R\left[\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\cos\alpha+\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\sin\alpha\right]$$

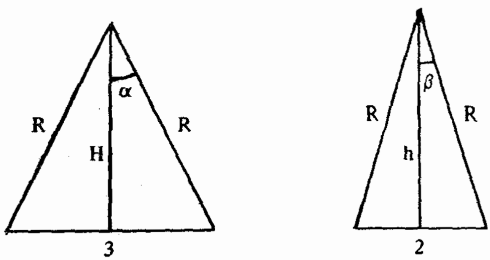
$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}R\left[\frac{H}{R}+\frac{۳}{۲R}\right]=\frac{۱}{۴}\sqrt{۲}[۲H+۳]$$

$$=\frac{۱}{۴}\sqrt{۲}\left[۲\left(\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲}\right)+۳\right]$$

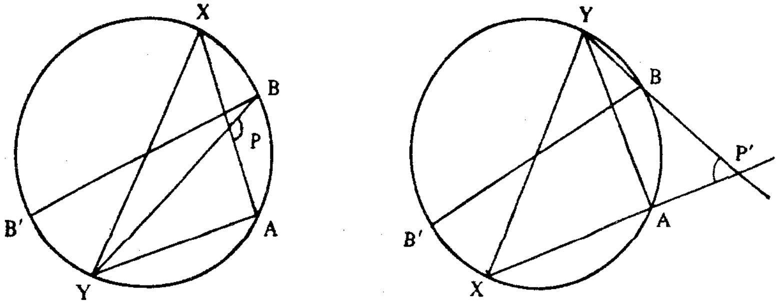
$$=۱+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$$

با جایگذاری داریم

$$\text{مساحت هشت ضلعی} = ۶\left(\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲}\right)+۴\left(۱+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}\right)=۱۳+۱۲\sqrt{۲}$$



شکل ۸-۵



شکل۸-۶

۸ـ۱ـ۲ اگر A و B نقطه‌های ثابتی روی یک دایره و XY قطر متحرکی از آن دایره باشد، مکان هندسی نقاط برخورد دو خط AX و BY را تعیین کنید. (می‌توانید فرض کنید AB یک قطر نیست.)

حل. شکل ۸-۶ را در نظر بگیرید که در آن A و B نقطه‌های ثابتی روی دایره مفروض هستند. فرض کنید B' نقطه‌ای باشد که با B روی یک قطر دایره و در انتهای دیگر آن واقع باشد. فرض کنید P و P' به ترتیب نقطهٔ برخورد دو خط AX و BY باشد وقتی که این نقطه درون دایره یا بیرون آن واقع شود (این بستگی دارد به آن که X در کدام طرف خط BB' قرار گیرد؛ شکل را ببینید).

در حالت اول، $\angle APB = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}$ (کمان AB) و این برای همه قطرهایی که به ایجاد نقطهٔ برخورد «درونی» P می‌انجامند، مقدار ثابتی است. این موجب می‌شود که P روی دایره‌ای واقع شود که توسط نقاطی که با وتر AB، زاویهٔ ثابتی می‌سازند (($۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}$ (کمان AB)) تشکیل می‌شود.

در حالت دوم، $\angle AP'B = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}$ (کمان AB) و این مقدار برای تمام قطرهایی که منجر به نقطهٔ برخورد «بیرونی» P' می‌شوند، مقدار ثابتی است. بنابراین P' روی دایره‌ای که از A و B می‌گذرد واقع است. همچنین $\angle APB$ و $\angle AP'B$ زاویه‌های مکمل‌اند. (زیرا

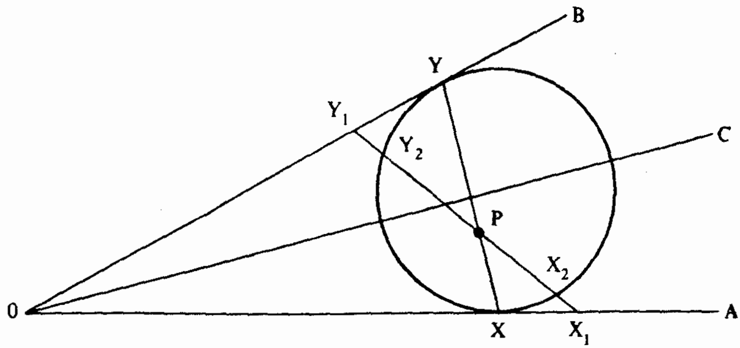
$$(\angle APB + \angle AP'B = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}(AB\text{کمان}) + ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}(AB\text{کمان}) = ۱۸۰^\circ$$

و در نتیجه چهارضلعی $APBP'$ یک چهارضلعی محاطی است؛ به عبارت دیگر P، P'، A، B روی یک دایره واقع‌اند.

۸ـ۱ـ۳ نقطهٔ P درون زاویه‌ای است که ضلعهای آن نیمخطهای OA و OB هستند. نقطهٔ X را روی OA و Y را روی OB طوری مشخص کنید که پاره‌خط XY از P بگذرد و حاصلضرب $(PX)(PY)$ مینیمم باشد.

حل. در ۶-۴-۲، این مسأله با استفاده از روشهای آنالیز حل شد. در اینجا آن را به روش هندسی حل می‌کنیم.

فرض کنید OC نیمساز $\angle AOB$ و L خطی باشد که از P می‌گذرد و بر OC عمود است. فرض کنید X و Y به ترتیب نقاط برخورد L با OA و OB باشند (شکل ۸-۷ را ببینید).اکنون داریم $OX = OY$، بنابراین دایره‌ای وجود دارد که در X بر OA و در Y بر OB مماس است. فرض کنید $X_۱Y_۱$ پاره‌خط دلخواه دیگری باشد که از P می‌گذرد به طوری که $X_۱$ بر OA و $Y_۱$ بر OB واقع است. فرض کنید $X_۲$ و $Y_۲$ نقاط برخورد $X_۱Y_۱$ با دایره باشند. در این صورت $(PX)(PY) = (PX_۲)(PY_۲) < (PX_۱)(PY_۱)$ و در نتیجه $(PX)(PY)$ مینیمم است.



شکل۸-۷

۸ـ۱ـ۴ فرض کنید P درون مثلث ABC و x، y، z، به ترتیب فاصله‌های P تا BC، AC و AB باشند. نقطهٔ P کجا باشد تا حاصلضرب xyz ماکسیمم شود؟

حل. فرض کنید a، b، c، به ترتیب طول ضلعهای BC، AC و AB باشند (شکل ۸-۸). بنابر نامساوی میانگین‌حسابی ـ میانگین هندسی،

$$\sqrt[3]{(ax)(by)(cz)} \leqslant \frac{ax+by+cz}{3}$$

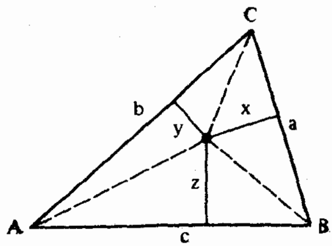
ولی می‌دانیم که $ax+by+cz = 2A$، که در آن A مساحت مثلث است. بنابراین مقدار ماکسیمم xyz مساوی $8A^3/(27abc)$ است و این مقدار را اختیار می‌کند اگر و فقط اگر $ax=by=cz$.

نشان می‌دهیم که $ax=by=cz$ اگر و فقط اگر P مرکز ثقل $\triangle ABC$ باشد. برای این کار، فرض کنید که CP و AB یکدیگر را در نقطهٔ D قطع می‌کنند. فرض کنید α، β، γ و δ زاویه‌هایی باشند که در شکل ۸-۹ نشان داده شده‌اند. می‌دانیم که

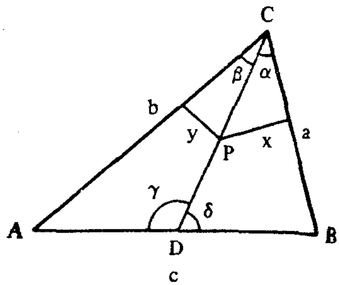
$$\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha} = \frac{AD}{DB}$$

(این رابطه در مسائل زیادی سودمند است. برای دیدن درستی آن، قانون سینوسها را در $\triangle ADC$ و $\triangle CDB$ بنویسید تا حاصل شود

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\gamma} \quad , \quad \frac{DB}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\delta}$$



شکل۸-۸



شکل۸-۹

با استفاده از این تساویها، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}=\frac{AD\sin\gamma}{DB\sin\delta}=\frac{AD}{DB}$$

زیرا بدیهی است که γ و δ متمم یکدیگرند.)

با استفاده از تساوی بالا، خواهیم داشت

$$\frac{AD}{DB}=\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}=\frac{by/(CP)}{ax/(CP)}=\frac{by}{ax}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $AD = DB$ اگر و فقط اگر $by = ax$. بنابراین $ax = by$ اگر و فقط اگر P روی میانهٔ نظیر رأس C باشد.

به همین ترتیب، $ax = cz$ اگر و فقط اگر P روی میانهٔ نظیر رأس B باشد. از این نتیجه می‌شود که $ax = by = cz$ اگر و فقط اگر P مرکز ثقل $\triangle ABC$ باشد.

مسائل

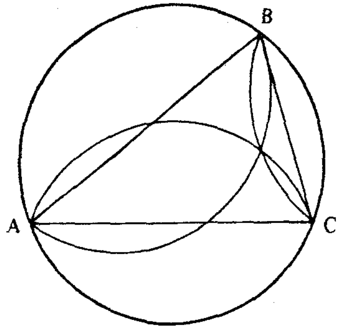
۸ـ۱ـ۵ نشان دهید که اگر در یک مثلث، هر جفت از مرکزهای زیر برهم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الاضلاع است: مرکز دایره محاطی، مرکز دایره محیطی، مرکز ثقل، مرکز ارتفاعی.

۸ـ۱ـ۶ مثلث حاده‌ای در یک دایره محاط شده است. قرینهٔ سه کمانی را که روی دایره پدید می‌آیند، نسبت به ضلعهای متناظرشان به دست می‌آوریم (یعنی قرینهٔ کمان AB را نسبت به ضلع AB و الی آخر به دست می‌آوریم؛ شکل ۸-۱۰ را ببینید). آیا این کمانهای قرینه همرس‌اند؟

۸ـ۱ـ۷ فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ دایره‌هایی به شعاع ۱، مماس برهم و مماس بر محور xها باشند و مرکز دایرهٔ $C_۱$ بر محور yها واقع باشد. اینک دنباله‌ای از دایره‌های C_n بسازید به طوری که $C_{n+۱}$ بر C_n، $C_{n-۱}$ و محور x مماس باشد.

الف) شعاع C_n یعنی r_n را بیابید.

ب) نشان دهید که طول مماس مشترک دو دایرهٔ متوالی $C_{n-۱}$ و C_n به ازای $n \geqslant ۲$، مساوی است با $\binom{n}{۲}^{-۱}$.



شکل۸-۱۰

ج) با توجه به قسمت (ب) و تعبیر هندسی مسأله، نشان دهید که

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \binom{n}{۲}^{-۱} = ۲$$

۸ـ۱ـ۸ اگر a، b، c ضلعهای مثلث ABC، t_a، t_b، t_c نیمسازهای آن و T_a، T_b، T_c وترهایی باشند که دایرهٔ محیطی مثلث از امتداد این نیمسازها جدا می‌کند، ثابت کنید

$$abc = \sqrt{T_a T_b T_c t_a t_b t_c}$$

(راهنمایی: ثابت کنید $T_a t_a = bc$ و الی آخر.)

۸ـ۱ـ۹ الف) نقطهٔ P درون زاویهٔ دلخواه XOY مفروض است. فرض کنید AB پاره‌خطی باشد که از P می‌گذرد به طوری که $AP = PB$ و MN خط دیگری باشد که از P می‌گذرد و OX و OY را به ترتیب در M و N قطع می‌کند. ثابت کنید که مساحت $\triangle MON$ بزرگتر یا مساوی با مساحت $\triangle AOB$ است.

ب) فرض کنید AD و AE بر دایره مماس باشند و P نقطهٔ دلخواهی روی کمان کوچکتر باشد. فرض کنید BPC مماس دیگری بر آن دایره باشد. ثابت کنید که به ازای همهٔ وضعیتهای نقطهٔ P روی کمان کوچکتر، مساحت $\triangle ABC$ ثابت است.

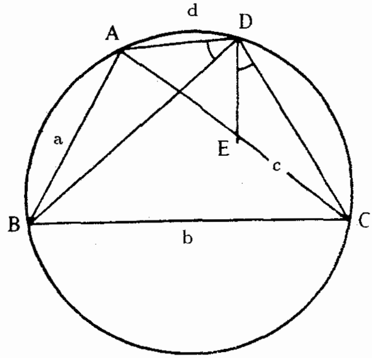
ج) فرض کنید که در شرایط قسمت (ب)، MN خط دیگری باشد که از P می‌گذرد و AE و AD را به ترتیب در M و N قطع می‌کند. ثابت کنید که محیط $\triangle ABC$ کوچکتر از محیط $\triangle AMN$ است.

۸ـ۱ـ۱۰ چهارضلعی $ABCD$ در یک دایره محاط شده است (شکل ۸-۱۱ را ببینید). فرض کنید $x = BD$، $y = AC$ و a، b، c، d طول ضلعها به ترتیبی باشند که مشخص شده‌اند. $\angle CDE$ را به اندازهٔ $\angle ABD$ بسازید.

الف) ثابت کنید $\triangle CDE \sim \triangle ADB$ و درنتیجه $EC \times x = ac$.

ب) ثابت کنید $\triangle ADE \sim \triangle BCD$ و درنتیجه $AE \times x = bd$.

ج) با توجه به قسمتهای (الف) و (ب)، قضیهٔ بطلمیوس را (که یکی از حقایق مهم دربارهٔ چهارضلعیهای محاطی است) ثابت کنید: در یک چهار ضلعی محاطی، حاصلضرب قطرها مساوی با مجموع حاصلضربهای ضلعهای روبه‌رو است.



شکل۸-۱۱

۸ـ۱ـ۱۱ الف) خطی که از یکی از رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌گذرد، ضلع مقابل، یعنی BC، را در نقطهٔ P و دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. ثابت کنید

$$\frac{۱}{PQ} = \frac{۱}{BQ} + \frac{۱}{CQ}$$

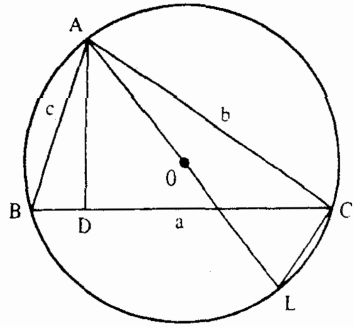
ب) با استفاده از نمادگذاری قسمت (الف)، ثابت کنید که مقدار $AQ^۴ + BQ^۴ + CQ^۴$ برای همهٔ وضعیتهای Q روی کمان کوچکتر BC، ثابت است. (راهنمایی: برای رهیافتی مثلثاتی، فرض کنید $x = AQ$، $y = BQ$، $z = CQ$ و $\theta = \angle BAQ$. نشان دهید که $x = (۲/\sqrt{۳}) \sin\theta$، $z = \left(۱/\sqrt{۳}\right)[\cos\theta - \sin\theta]$، $y = x + z$. همچنین ۸-۴-۶ را ببینید.)

۸ـ۱ـ۱۲ در شکل ۸-۱۲، مثلث محاط شدهٔ ABC را می‌بینید. فرض کنید R شعاع دایرهٔ محیطی و h_a طول ارتفاع AD باشد.

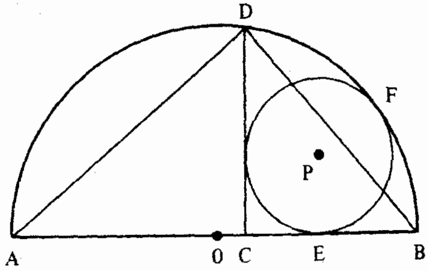
الف) نشان دهید که مثلثهای ABC و ALC متشابه‌اند و در نتیجه $h_a \times ۲R = bc$.

ب) نشان دهید که مساحت $\triangle ABC$ مساوی است با $abc/۴R$.

۸ـ۱ـ۱۳ شعاع دایرهٔ محاطی مثلثی برابر است با ۴ و یکی از ضلعها به وسیلهٔ نقطهٔ تماس، به دو پاره خط به طولهای ۶ و ۸ تقسیم می‌شود. دو ضلع دیگر را تعیین کنید.



شکل۸-۱۲



شکل۸-۱۳

۸ـ۱ـ۱۴ مثلثهای ABC و DEF در یک دایره محاط شده‌اند. ثابت کنید که تساوی

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F$$

برقرار است اگر و فقط اگر محیطهای دو مثلث با هم مساوی باشند.

۸ـ۱ـ۱۵ در شکل ۸-۱۳، CD نصف وتری است که بر قطر AB از نیمدایره‌ای به مرکز O عمود است. مطابق شکل، دایره‌ای را به مرکز P محاط کرده‌ایم به طوری‌که در E بر AB و در F بر کمان BD مماس است. ثابت کنید که $\triangle AED$ متساوی الساقین است. (راهنمایی: شکل را با حروف علامتگذاری کنید و قضیهٔ فیثاغورس را به خوبی به کار ببرید.)

۸ـ۱ـ۱۶ طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی را بیابید که در آن فاصلهٔ رأسها تا نقطه‌ای درونی برابر با ۵، ۷ و ۸ باشد.

مثالهای اضافی. ۱-۲-۱، ۱-۳-۱۴، ۱-۴-۲، ۱-۶-۱، ۱-۶-۱۰، ۱-۸-۳، ۱-۸-۷.

۸ـ۲ هندسهٔ تحلیلی

با معرفی دستگاه مختصات می‌توانیم به بسیاری از مسائل هندسی با روشهای جبری و تحلیلی یورش ببریم.

۸ـ۲ـ۱ فرض کنید P نقطه‌ای واقع بر یک بیضی به کانونهای F_1 و F_2 و d فاصلهٔ مرکز بیضی با خطی باشد که در نقطهٔ P بر بیضی، مماس است (شکل ۸-۱۴). ثابت کنید که مقدار $(PF_1)(PF_2)d^2$ با حرکت نقطهٔ P بر بیضی، ثابت می‌ماند.

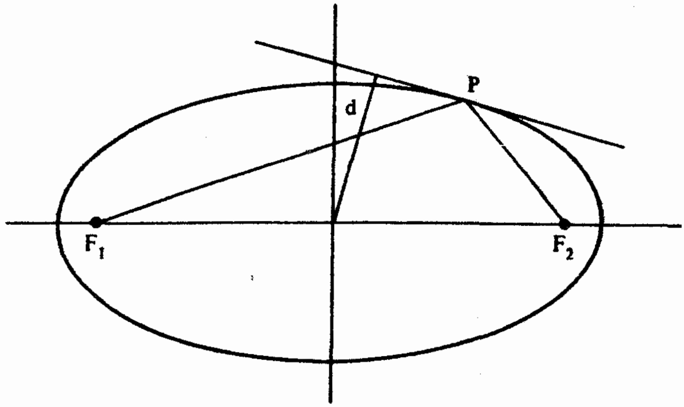
حل. دستگاه مختصات را طوری در صفحه انتخاب می‌کنیم که معادلهٔ بیضی به شکل زیر باشد

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad , \qquad 0 < b \leqslant a$$

تکنیک سر راست است: PF_1، PF_2 و d را (به صورت تابعهایی از مختص x نقطهٔ P) حساب می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که آیا حاصلضرب مطلوب ثابت است یا خیر.

فرض کنید که مختصات P به‌صورت (α, β) باشد. مختصات F_1 و F_2، به صورت $(\pm c, 0)$ است که در آن $c^2 = a^2 - b^2$. بنابراین داریم

$$PF_1 = \sqrt{\beta^2 + (\alpha + c)^2}$$



شکل۸-۱۴

$$PF_2 = \sqrt{\beta^2 + (\alpha - c)^2}$$

برای یافتن d^2 لازم است که معادلهٔ مماس بر بیضی در نقطهٔ $P(\alpha, \beta)$ را بنویسیم. برای یافتن شیب مماس در P، مشتق می‌گیریم:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0$$

بنابراین

$$y' = \frac{-2x/a^2}{2y/b^2} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که معادلهٔ مماس در نقطهٔ $P(\alpha, \beta)$، عبارت است از

$$y - \beta = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}(x - \alpha)$$

یا معادلاً

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = b^2\alpha^2 + a^2\beta^2$$

ولی $\alpha^2/a^2 + \beta^2/b^2 = 1$ زیرا $P(\alpha, \beta)$ نقطه‌ای روی بیضی است و از این رو $\alpha^2b^2 + a^2\beta^2 = a^2b^2$. پس معادلهٔ مماس در $P(\alpha, \beta)$، عبارت است از

$$\alpha b^2x + \beta a^2y - a^2b^2 = 0$$

اینک فرمول فاصلهٔ D از نقطهٔ $Q(c, d)$ تا خط $Ax + By + C = 0$ را یادآوری می‌کنیم:

$$D = \frac{|Ac + Bd + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

در وضعیت فعلی، فاصلهٔ d از مبدأ تا خط مماس برابر است با

$$d = \frac{a^2b^2}{\sqrt{\alpha^2b^4 + \beta^2a^4}}$$

حال باید حاصلضرب $d^2(PF_1)(PF_2)$ را بررسی کنیم. می‌توانیم β را در هر یک از عاملهای حاصلضرب حذف کنیم، زیرا

$$\beta^2 = \frac{a^2b^2 - \alpha^2b^2}{a^2}$$

داریم

$$
\begin{aligned}
d^{۲} &= \frac{a^{۴}b^{۴}}{\alpha^{۲}b^{۴} + ((a^{۲}b^{۲} - \alpha^{۲}b^{۲})/a^{۲})\,a^{۴}} = \frac{a^{۴}b^{۴}}{\alpha^{۲}b^{۴} + a^{۴}b^{۲} - \alpha^{۲}a^{۲}b^{۲}} \\
&= \frac{a^{۴}b^{۴}}{b^{۲}[\alpha^{۲}b^{۲} - \alpha^{۲}a^{۲}] + a^{۴}b^{۲}} = \frac{a^{۴}b^{۴}}{b^{۲}(-c^{۲}\alpha^{۲}) + a^{۴}b^{۲}} \\
&= \frac{a^{۴}b^{۲}}{a^{۴} - c^{۲}\alpha^{۲}}
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
PF_{۱}^{۲} &= \beta^{۲} + (\alpha + c)^{۲} = \frac{a^{۲}b^{۲} - \alpha^{۲}b^{۲}}{a^{۲}} + \alpha^{۲} + ۲\alpha c + c^{۲} \\
&= \frac{a^{۲}b^{۲} - \alpha^{۲}b^{۲} + a^{۲}\alpha^{۲} + ۲a^{۲}\alpha c + a^{۲}c^{۲}}{a^{۲}} \\
&= \frac{a^{۲}(b^{۲} + c^{۲}) + \alpha^{۲}(a^{۲} - b^{۲}) + ۲a^{۲}c\alpha}{a^{۲}} \\
&= \frac{a^{۴} + ۲a^{۲}c\alpha + c^{۲}\alpha^{۲}}{a^{۲}} = \frac{(a^{۲} + c\alpha)^{۲}}{a^{۲}}
\end{aligned}
$$

به همین ترتیب

$$
PF_{۲}^{۲} = \frac{(a^{۲} - c\alpha)^{۲}}{a^{۲}}
$$

بنابراین

$$
d^{۲}(PF_{۱})(PF_{۲}) = \left(\frac{a^{۴}b^{۲}}{a^{۴} - c^{۲}\alpha^{۲}}\right)\left(\frac{a^{۲} + c\alpha}{a}\right)\left(\frac{a^{۲} - c\alpha}{a}\right) = a^{۲}b^{۲}
$$

این برهان را تمام می‌کند.

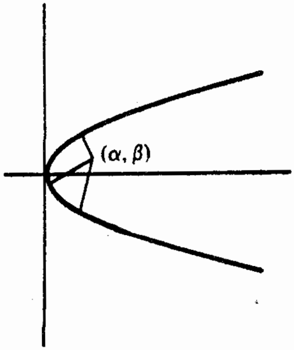
۸ـ۲ـ۲ فرض کنید $(x_{۱}, y_{۱})$، $(x_{۲}, y_{۲})$، $(x_{۳}, y_{۳})$، سه نقطه روی سهمی $y^{۲} = ax$ با این ویژگی باشند که خطهای قائم در آنها، از نقطهٔ مشترکی می‌گذرند. ثابت کنید $y_{۱} + y_{۲} + y_{۳} = ۰$.

حل. راه حل مسأله نتیجهٔ فرعی تحلیل زیر است. فرض کنید (α, β) مختصات نقطهٔ برخورد سه خط قائم (شکل ۸-۱۵) و (x, y) نقطهٔ دلخواهی روی سهمی باشد. شیب خطی که از (α, β) و (x, y) می‌گذرد، $(y - \beta)/(x - \alpha)$ است. شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ (x, y) برابر با $y' = a/(۲y)$ است. بنابراین شیب خط قائم در (x, y) برابر با $-۲y/a$ است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که سه نقطهٔ $(x_{۱}, y_{۱})$، $(x_{۲}, y_{۲})$، $(x_{۳}, y_{۳})$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$
\frac{y - \beta}{x - \alpha} = -\left(\frac{۲y}{a}\right)
$$

اگر به جای x، $y^{۲}/a$ بگذاریم، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$
\begin{aligned}
y - \beta &= -\left(\frac{۲y}{a}\right)\left(\frac{y^{۲}}{a} - \alpha\right) \\
a^{۲}(y - \beta) &= -۲y^{۳} + ۲a\alpha y
\end{aligned}
$$



شکل۸-۱۵

بنابراین y_1، y_2، y_3 سه ریشهٔ معادلهٔ درجه سوم زیر هستند

$$2y^3 + a(a - 2\alpha)y - a^2\beta = 0$$

حال اگر به خاطر بیاوریم که چگونه ضریبهای یک معادلهٔ درجه سوم به ریشه‌های آن مربوط‌اند (بخش ۴-۳ را ببینید)، می‌بینیم که $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ (زیرا ضریب y^2 صفر است).

۸ـ۲ـ۳ خط راستی مجانبهای یک هذلولی را در نقاط A و B و منحنی را در نقاط P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید $AP = BQ$.

حل. می‌توانیم فرض کنیم که معادله‌های هذلولی و خط راست به ترتیب عبارت باشند از

$$xy = 1 \tag{1}$$

و

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{2}$$

(می‌توان با استفاده از مقیاس مناسب و یک دوران، هذلولی را به این شکل تبدیل کرد. هر یک از اینها، خط راست را به خط راست تبدیل کرده و نسبت پاره‌خطها را نیز حفظ می‌کند.)

مجانبهای این هذلولی محورهای x و y هستند (شکل ۸-۱۶). بنابراین فرض کنید که A نقطهٔ برخورد خط با محور x و B نقطهٔ برخورد آن با محور y باشد. فرض کنید (x_1, y_1) و (x_2, y_2) مختصات نقاط P و Q باشند. با جاگذاری $y = 1/x$ در (۲) نتیجه می‌شود

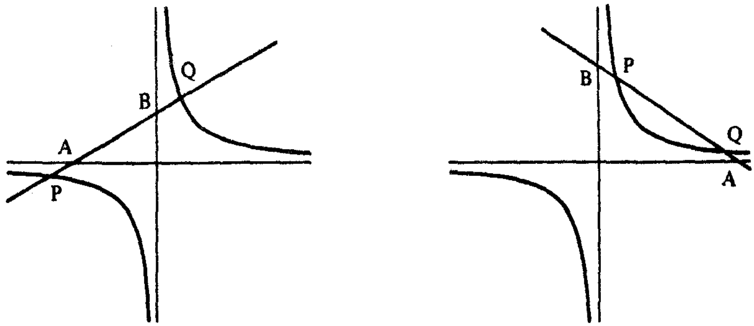
$$x^2 - ax + a/b = 0$$

چون x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله هستند، می‌دانیم که

$$x_1 + x_2 = a$$

به همین ترتیب با قرار دادن $x = 1/y$ در (۲) داریم

$$y^2 - by + b/a = 0$$



شکل۸-۱۶

و این ایجاب می‌کند که

$$y_1 + y_2 = b$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$AP^2 = (x_1 - a)^2 + y_1^2 = (a - x_2 - a)^2 + (b - y_2)^2 = x_2^2 + (b - y_2)^2 = BQ^2$$

و حکم به دست می‌آید.

۸ـ۲ـ۴ همهٔ خطوط راستی را بیابید که در رویهٔ $z = xy$ واقع‌اند.

حل. معادلهٔ پارامتری خطی که از نقطهٔ (a_1, a_2, a_3) و در راستای (d_1, d_2, d_3) می‌گذرد، توسط معادلات زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} x &= a_1 + d_1 t \\ y &= a_2 + d_2 t \\ z &= a_3 + d_3 t \end{aligned}$$

شرط لازم و کافی برای آنکه چنین خطی در رویهٔ $z = xy$ واقع باشد آن است که به ازای هر t، داشته باشیم

$$a_3 + d_3 t = (a_1 + d_1 t)(a_2 + d_2 t) = a_1 a_2 + (a_2 d_1 + a_1 d_2)t + d_1 d_2 t^2$$

از این نتیجه می‌شود که $d_1 d_2 = 0$ و d_1 و d_2 نمی‌توانند هر دو صفر باشند، زیرا این موجب می‌شود که $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ که تناقض است.

اگر $d_2 = 0$، آنگاه

$$a_3 + d_3 t = a_2(a_1 + d_1 t)$$

یا

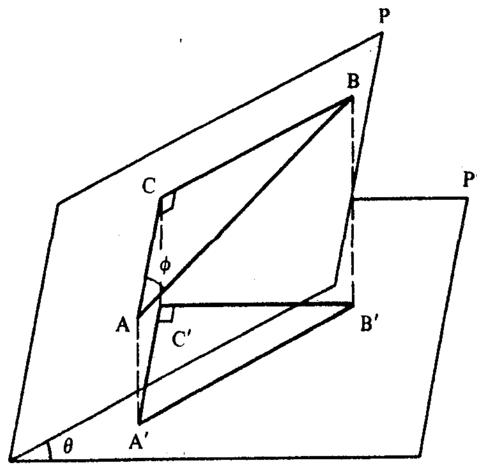
$$z = a_2 x$$

اگر $d_1 = 0$، آنگاه

$$a_3 + d_3 t = a_1(a_2 + d_2 t)$$

یا

$$z = a_1 y$$



شکل۸-۱۷

بنابراین تنها خطهای راستی که در رویهٔ $z = xy$ واقع‌اند به شکل $z = ax$، $y = a$ یا به شکل $z = ay$، $x = a$ هستند که در آن a عدد ثابت و دلخواهی است.

۸ـ۲ـ۵ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را که در صفحهٔ P واقع است، به طور قائم روی صفحهٔ دیگری به نام P' تصویر می‌کنیم. نشان دهید که مجموع مربعهای ضلعها در مثلث حاصل، $A'B'C'$ (شکل ۸-۱۷)، مستقل از طرز قرار گرفتن مثلث ABC در صفحهٔ P است.

حل. ابتدا به چند نکته دربارهٔ چگونگی تبدیل شدن طولها توسط این تصویر می‌پردازیم. فرض کنید AB پاره‌خطی به طول یک در P باشد. همچنین فرض کنید که AB با L یعنی فصل مشترک دو صفحهٔ P و P'، زاویهٔ ϕ بسازد. فرض کنید زاویهٔ بین دو صفحه θ باشد. وضعیت نقطهٔ C را طوری انتخاب می‌کنیم که $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه و AC موازی با L باشد (شکل را ببینید). تصویر مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'B'C'$ است. همچنین طولهای AC و $A'C'$ برابرند و $B'C' = BC\cos\theta$. چون $AC = \cos\phi$ و $BC = \sin\phi$، نتیجه می‌گیریم که

$$A'B' = \sqrt{(\cos\phi)^2 + (\sin\phi\cos\theta)^2}$$

اینک فرض کنید ABC مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواهی در P باشد. می‌توانیم فرض کنیم که طول ضلع آن یک است. فرض کنید ϕ زاویهٔ AB با L باشد. در این صورت زاویهٔ L با BC و CA به ترتیب مساوی است با $\phi + \frac{1}{3}\pi$ و $\phi + \frac{2}{3}\pi$. با استفاده از نتیجه‌ای که در بالا به دست آمد، در می‌یابیم که مجموع مربعهای ضلعهای مثلث $A'B'C'$ مساوی است با

$$[(\cos\phi)^2 + (\sin\phi\cos\theta)^2] + \left[\left(\cos(\phi + \tfrac{1}{3}\pi)\right)^2 + \left(\sin(\phi + \tfrac{1}{3}\pi)\cos\theta\right)^2\right]$$
$$+ \left[\left(\cos(\phi + \tfrac{2}{3}\pi)\right)^2 + \left(\sin(\phi + \tfrac{2}{3}\pi)\cos\theta\right)^2\right]$$

که به صورت عبارت زیر خلاصه می‌شود

$$۳\cos^۲\theta + \frac{۳}{۲}\sin^۲\theta$$

که عبارتی مستقل از ϕ است.

مسائل

۸ـ۲ـ۶ فرض کنید که مثلث ABC در دایره‌ای محاط شده، P مرکز ثقل مثلث و O مرکز دایرهٔ محیطی آن باشد. فرض کنید که مختصات A، B، C به ترتیب $(۰, ۰)$، $(a, ۰)$ و (b, c) باشد.

الف) مختصات P و O را بر حسب a، b، c بیان کنید.

ب) پاره‌خطهای AP، BP و CP را امتداد دهید تا دایره را به ترتیب در نقاط D، E و F قطع کنند. نشان دهید که

$$\frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} = ۳$$

(راهنمایی: یکی از راهها آن است که به این ترتیب عمل کنید: فرض کنید x طول OP و R شعاع دایرهٔ محیطی باشد. در این صورت

$$\frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} = \frac{AP^۲ + BP^۲ + CP^۲}{R^۲ - x^۲}$$

حال هر یک از عبارتهای طرف راست را بر حسب a، b، c بیان کنید [از نتیجه‌های قسمت (الف) استفاده کنید].)

۸ـ۲ـ۷ رابطه‌ای را بیابید که باید بین پارامترهای a، b، c برقرار باشد تا خط $x/a + y/b = ۱$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = c^۲$ مماس شود.

۸ـ۲ـ۸ مثلثهای متساوی‌الاضلاع با طول ضلعهای ۱، ۳، ۵، ۷، ... روی یک خط راست طوری قرار دارند که انتهای یکی بر ابتدای دیگری واقع است. نشان دهید که رأسهای آنها روی یک سهمی قرار دارند و فاصلهٔ همهٔ آنها تا کانون سهمی، عددهایی صحیح‌اند.

۸ـ۲ـ۹ الف) از نقاط (a, b) و (c, d) واقع بر سهمی $y = x^۲$، دو مماس رسم شده است. مختصات نقطهٔ برخورد آنها را بیابید.

ب) از نقطهٔ T دو مماس $L_۱$ و $L_۲$ بر یک سهمی رسم شده است. فرض کنید P و Q به ترتیب نقاط تماس دو خط $L_۱$ و $L_۲$ باشند. فرض کنید L مماس دیگری بر سهمی باشد و L، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را به ترتیب در نقاط R و S قطع کند. ثابت کنید

$$\frac{TR}{TP} + \frac{TS}{TQ} = ۱$$

۸ـ۲ـ۱۰ دایرهٔ $(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = r^۲$، سهمی با معادلهٔ $y^۲ = ax$ را در چهار نقطه قطع کرده است. حاصلضرب فاصله‌های این چهار نقطه را تا محور سهمی به دست آورید.

۸ـ۲ـ۱۱ فرض کنید b و c عددهایی حقیقی و ثابت و ده نقطهٔ (j, y_j)، $j = ۱, ۲, \ldots, ۱۰$ روی سهمی $y = x^۲ + bx + c$ واقع باشند. فرض کنید که به ازای $j = ۱, ۲, \ldots, ۹$، I_j نقطهٔ برخورد مماسهایی باشد که

در نقاط (j, y_j) و $(j+\text{۱}, y_{j+\text{۱}})$ بر سهمی رسم شده‌اند. تابع چندجمله‌ای $y = g(x)$ را با کوچکترین درجه بیابید به طوری که نمودار آن از هر نه نقطهٔ I_j بگذرد.

۸ـ۲ـ۱۲ ثابت یا رد کنید: حداقل یک خط راست وجود دارد به‌طوری که در نقطهٔ $(a, \cosh a)$ قائم بر منحنی $y = \cosh x$ و در نقطهٔ $(c, \sinh c)$ قائم بر منحنی $y = \sinh x$ باشد.

۸ـ۲ـ۱۳ الف) نشان دهید که خطهای مماس بر بیضی $x^\text{۲}/a^\text{۲} + y^\text{۲}/b^\text{۲} = \text{۱}$، به شکل

$$y = \alpha x \pm (a^\text{۲}\alpha^\text{۲} + b^\text{۲})^{\text{۱}/\text{۲}}$$

هستند که به ازای مقادیر مختلف α، وضعیتهای مختلف دارند. (این معادله را به دلیل کاربرد زیاد آن به ویژه در مسائل مربوط به مماس که در آنها نقطهٔ تماس دخالتی ندارد، معادلهٔ جادویی مماس می‌نامند.)

ب) معادلهٔ مماسهایی را بر بیضی $\text{۳}x^\text{۲} + y^\text{۲} = \text{۳}$ بیابید که شیبشان یک باشد.

ج) مساحت مثلثی را بیابید که از برخورد خط مماس بر بیضی (مثلاً با شیب m) با محورهای مختصات پدید می‌آید.

۸ـ۲ـ۱۴ الف) فرض کنید D قرص $x^\text{۲} + y^\text{۲} < \text{۱}$ و A نقطه‌ای با مختصات $(r, \text{۰})$، $\text{۰} < r < \text{۱}$ باشد. مجموعهٔ نقاط P در D را توصیف کنید به طوری که قرص بازی که مرکزش وسط AP و شعاعش $AP/\text{۲}$ است، زیرمجموعهٔ D باشد.

ب) فرض کنید D قرص $x^\text{۲} + y^\text{۲} < \text{۱}$ و A و B نقاطی باشند که به تصادف از D انتخاب شده‌اند. احتمال آن را بیابید که قرص بازی که مرکزش وسط AB و شعاعش $AB/\text{۲}$ است، زیرمجموعهٔ D باشد.

۸ـ۲ـ۱۵ به ازای بیضی مفروض $x^\text{۲}/a^\text{۲} + y^\text{۲}/b^\text{۲} = \text{۱}$، $a \neq b$، معادلهٔ مجموعهٔ همهٔ نقاطی را بیابید که بتوان از آنها دو مماس بر بیضی رسم کرد به طوری که شیب مماسها عکس یکدیگر باشند.

۸ـ۲ـ۱۶ ثابت کنید که اگر دو وتر یک مقطع مخروطی یکدیگر را نصف کنند، آن مقطع مخروطی سهمی نیست.

۸ـ۲ـ۱۷ ثابت کنید که نمودار یک معادلهٔ درجهٔ سوم نسبت به نقطهٔ عطفش متقارن است. (تذکر. اگر معادلهٔ درجهٔ سوم، $f(x) = ax^\text{۳} + bx^\text{۲} + cx + d$ باشد، مختص x نقطهٔ عطف $-b/\text{۳}a$ است.)

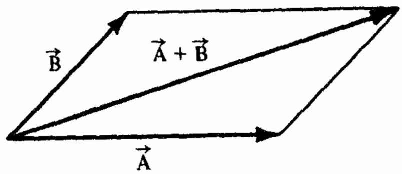
مثالهای اضافی. ۱-۳-۱۱، ۱-۵-۳، ۱-۵-۸، ۱-۶-۴، ۳-۱-۴، ۴-۳-۶، ۴-۳-۷.

۸ـ۳ هندسهٔ برداری

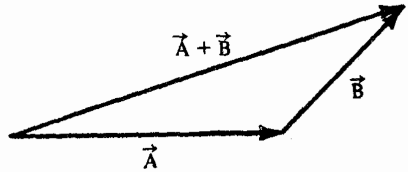
در این بخش، بردارها را به عنوان کمیتهایی که اندازه و جهت دارند، در نظر می‌گیریم. نیرو، سرعت و شتاب، مثالهایی از بردار هستند. همانطور که خواهیم دید، می‌توان بردارها را به شکل سودمندی در مسائل هندسه به کار برد.

در صفحهٔ اقلیدسی هر بردار را با یک پیکان (یعنی پاره‌خطی جهتدار) نشان می‌دهیم. جهت پیکان جهت بردار و طول آن اندازهٔ بردار را مشخص می‌کند.

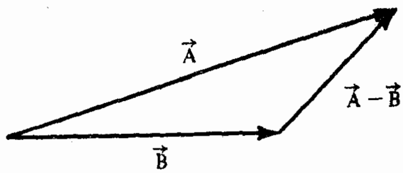
دو بردار مساوی‌اند، هرگاه یک طول و یک جهت داشته باشند. مهم است بدانیم که ممکن است دو بردار مساوی باشند بی‌آنکه همخط باشند.



شکل ۸-۱۸



شکل ۸-۱۹



شکل ۸-۲۰

به ازای دو نقطهٔ P و Q، بردار از P به Q را با $\overrightarrow{PQ}$ نشان می‌دهیم. طول یا اندازهٔ $\overrightarrow{PQ}$ را با $|\overrightarrow{PQ}|$ نشان می‌دهیم.

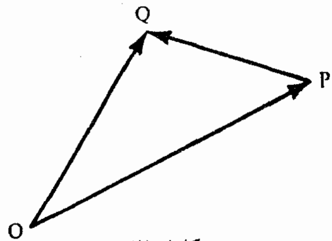
مجموع دو بردار $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$ یعنی $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ توسط قانون متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید (شکل ۸-۱۸ را ببینید). معادلاً کافی است مطابق شکل ۸-۱۹ مثلث را کامل کنیم. شکل ۸-۲۰، تفاضل دو بردار $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$ یعنی $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$ را به شکل هندسی نشان می‌دهد.

دستگاه محورهای مختصات را در صفحه در نظر می‌گیریم و مبدأ را با O نشان می‌دهیم. هر نقطهٔ P در صفحه، بردار منحصر به فرد $\overrightarrow{OP}$ را مشخص می‌کند که آن را بردار مکان P می‌نامیم. اغلب این بردار را (به‌جای $\overrightarrow{OP}$) تنها با $\overrightarrow{P}$ نشان می‌دهیم.

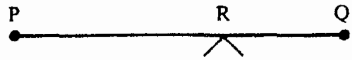
فرض کنید $\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{Q}$ بردارهای مکان دو نقطه P و Q باشند (شکل ۸-۲۱). فرض کنید R نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط جهتدار PQ باشد که آن را به نسبت $m:n$ تقسیم می‌کند (شکل ۸-۲۲). در این صورت بردار مکان R توسط رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\overrightarrow{R}=\overrightarrow{P}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{P})=\frac{(m+n)\overrightarrow{P}+m(\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{P})}{m+n}$$
$$=\left(\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{P}+\left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{Q}$$

آموزنده است که با اصطلاحهای فیزیکی به $\overrightarrow{R}$ به صورت زیر نگاه کنیم. میلهٔ بی‌وزن PQ را با جرم



شکل۸-۲۱



شکل۸-۲۲

$n/(m+n)$ در نقطهٔ P و جرم $m/(m+n)$ در نقطهٔ Q در نظر بگیرید. مرکز جرم دستگاه حاصل در نقطهٔ X روی PQ واقع است؛ جایی که «الاکلنگ متعادل می‌شود»، یعنی X نقطه‌ای است که در آن

$$\left(\frac{n}{m+n}\right) PX = \left(\frac{m}{m+n}\right) XQ$$

ولی این همان رابطهٔ زیر است

$$\frac{PX}{XQ} = \frac{m}{n}$$

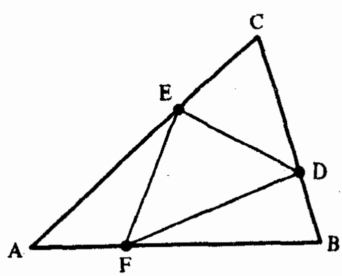
بنابراین X ، PQ را به نسبت $m : n$ تقسیم می‌کند. به عبارت دیگر

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{R} = (n/(m+n))\ \overrightarrow{P} + (m/(m+n))\ \overrightarrow{Q}$$

می‌توان ضریبهای $n/(m+n)$ و $m/(m+n)$ را به عنوان «عاملهای وزن» در نظر گرفت. با افزایش نسبت «وزن» در P، نقطهٔ R به طرف P حرکت می‌کند و نسبت $m : n$ را کاهش می‌دهد و الی‌آخر.

۸ـ۳ـ۱ نقاط D، E، F ضلعهای مثلث ABC را به سه قسمت تقسیم می‌کنند به طوری که $BC = ۳BD$، $CA = ۳CE$ و $AB = ۳AF$ (شکل ۸-۲۳). نشان دهید که مثلثهای ABC و DEF یک مرکز ثقل دارند.

حل. نخست نشان می‌دهیم که بردار مکان مرکز ثقل مثلث دلخواه PQR از دستور $\frac{۱}{۳}\ \overrightarrow{P} + \frac{۱}{۳}\ \overrightarrow{Q} + \frac{۱}{۳}\ \overrightarrow{R}$ به دست می‌آید. برای این کار به یاد آورید که مرکز ثقل مثلث PQR در فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}$ نقطهٔ P تا وسط QR واقع



شکل۸-۲۳

است. با توجه به بحثی که پیش از این مسأله انجام شد، می‌دانیم که بردار مکان وسط QR، $\frac{۱}{۲}\overrightarrow{Q}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{R}$ است و درنتیجه بردار مکان مرکز ثقل PQR، بردار $\frac{۱}{۳}\overrightarrow{P}+\frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\overrightarrow{Q}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{R}\right)$ است و این، همان طور که ادعا کرده بودیم، مساوی با $\frac{۱}{۳}\overrightarrow{P}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{Q}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{R}$ است.

بنابر تعریف D، E و F، داریم

$$\overrightarrow{D}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{B}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{C}$$

$$\overrightarrow{E}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{C}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{F}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{A}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{B}$$

و در نتیجه

$$\triangle DEF\text{ مرکز ثقل}=\frac{۱}{۳}\overrightarrow{D}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{E}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{F}$$

$$=\frac{۱}{۳}\left[\frac{۲}{۳}\overrightarrow{B}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{C}\right]+\frac{۱}{۳}\left[\frac{۲}{۳}\overrightarrow{C}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{A}\right]+\frac{۱}{۳}\left[\frac{۲}{۳}\overrightarrow{A}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{B}\right]$$

$$=\frac{۱}{۳}\overrightarrow{A}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{B}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{C}$$

$$=\triangle ABC\text{ مرکز ثقل}$$

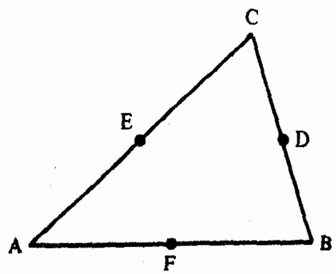
۸ـ۳ـ۲ ثابت کنید که می‌توان مثلثی ساخت که ضلعهایش با میانه‌های مثلث مفروضی مساوی و موازی باشند.

حل. مثلث ABC را در نظر بگیرید و فرض کنید D، E و F، به ترتیب وسطهای ضلعهای BC، AC و AB باشند (شکل ۸-۲۴ را ببینید). در این صورت

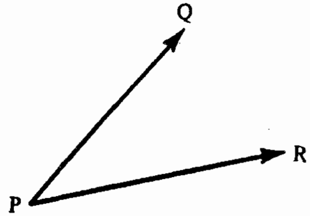
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}$$



شکل ۸-۲۴



شکل۸-۲۵

با جمع اینها در می‌یابیم که

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \times 0 = 0$$

این ایجاب می‌کند که بردارهای $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{CF}$ یک مثلث بسازند. ولی $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{CF}$ با میانه‌های مثلث ABC، از نظر طول و جهت برابرند.

پیش از بررسی مثال بعدی، اصل بنیادی زیر را توضیح می‌دهیم. فرض کنید P، Q و R سه نقطهٔ ناهمخط باشند (شکل ۸-۲۵). اگر $a\ \overrightarrow{PQ} + b\ \overrightarrow{PR} = c\ \overrightarrow{PQ} + d\ \overrightarrow{PR}$، آنگاه $a = c$ و $b = d$. زیرا اگر شرط مسأله برقرار باشد و $a \neq c$، آنگاه

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{d-b}{a-c}\right) \overrightarrow{PR}$$

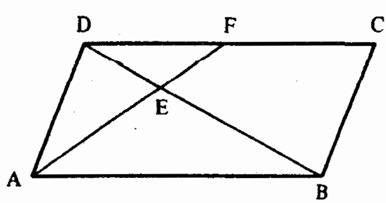
و این ایجاب می‌کند که نقاط P، Q، R همخط باشند(نقطهٔ P در بردارهای $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ مشترک است)، که تناقض است. در نتیجه $a = c$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $b = d$.

۸ـ۳ـ۳ ثابت کنید خطی که یکی از رأسهای متوازی‌الاضلاعی را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کند، یکی از قطرهای آن را به نسبت دو به یک تقسیم می‌کند.

حل. مطابق شکل ۸-۲۶، متوازی‌الاضلاعی را با حروف A، B، C، D نامگذاری کنید. فرض کنید F وسط DC و E نقطهٔ برخورد AF و BD باشد. توجه کنید که $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ، زیرا به عنوان بردار، یک اندازه و یک جهت دارند.

نقطهٔ E محل برخورد دو خط است. می‌توانیم این مطلب را به شکل جبری این طور بیان کنیم که عددهای ثابتی چون a و b وجود دارند به گونه‌ای که

$$\overrightarrow{AE} = a\ \overrightarrow{AF}$$



شکل۸-۲۶

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + b\ \overrightarrow{BD}$$

بنابراین

$$\overrightarrow{AB} + b\ \overrightarrow{BD} = a\ \overrightarrow{AF}$$

ایدهٔ حل مسأله آن است که هر بردار موجود در این تساوی آخر را بر حسب $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ بیان کنیم. سپس، از اصلی که پیش از مسأله بیان کردیم، استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم

$$\overrightarrow{AB} + b(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = a(\overrightarrow{AD} + \frac{۱}{۲}\ \overrightarrow{AB})$$

$$(۱ - b)\ \overrightarrow{AB} + b\ \overrightarrow{AD} = \frac{۱}{۲}a\ \overrightarrow{AB} + a\ \overrightarrow{AD}$$

از این نتیجه می‌شود

$$۱ - b = \frac{۱}{۲}a$$

$$b = a$$

این تساویها ایجاب می‌کنند که $a = b = \frac{۲}{۳}$ وحکم مسأله ثابت می‌شود.

۸ـ۳ـ۴ فرض کنید که در مثلث ABC (شکل ۸-۲۷)، D و E نقاطی باشند که ضلع BC را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کنند و D بین B و E واقع است. فرض کنید F وسط AC، G وسط AB و H نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای EG و DF باشد. نسبت $EH : HG$ را بیابید.

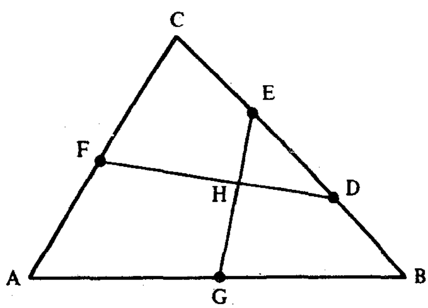
حل. روش حل، دقیقاً شبیه به مسأله قبل است. عددهای ثابت a و b وجود دارند به طوری که

$$\overrightarrow{AG} + a\ \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AF} + b\ \overrightarrow{FD}$$

اینک هر یک از بردارها را بر حسب $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بیان می‌کنیم

$$\overrightarrow{AG} = \frac{۱}{۲}\ \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = \frac{۱}{۲}\ \overrightarrow{AB} + \frac{۲}{۳}\ \overrightarrow{BC} = \frac{۱}{۲}\ \overrightarrow{AB} + \frac{۲}{۳}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{۱}{۶}\ \overrightarrow{AB} + \frac{۲}{۳}\ \overrightarrow{AC}$$



شکل۸-۲۷

$$\overrightarrow{AF}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{BC}$$

$$=-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{۱}{۶}\overrightarrow{AC}+\frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB}$$

با قرار دادن اینها در تساوی بالا، به دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}+a\left[-\frac{۱}{۶}\overrightarrow{AB}+\frac{۲}{۳}\overrightarrow{AC}\right]=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}+b\left[-\frac{۱}{۶}\overrightarrow{AC}+\frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB}\right]$$

$$\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}a\right)\overrightarrow{AB}+\frac{۲}{۳}a\overrightarrow{AC}=\frac{۲}{۳}b\overrightarrow{AB}+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}b\right)\overrightarrow{AC}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}a=\frac{۲}{۳}b$$

$$\frac{۲}{۳}a=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}b$$

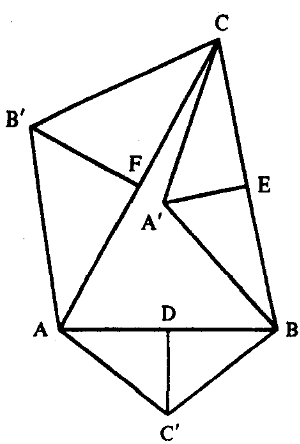
یا معادلاً

$$a+۴b=۳$$

$$۴a+b=۳$$

جواب این دستگاه $a=b=\frac{۳}{۵}$ است که از آن نتیجه می‌شود $EH:HG=۲:۵$.

۸ـ۳ـ۵ مثلث ABC مفروض است. مثلثهای متساوی‌الساقین متشابه ABC' و ACB' را به ترتیب با قاعده‌های AB و AC و در خارج مثلث ABC و نیز مثلث متساوی‌الساقین BCA' را با قاعدهٔ BC و متشابه با دو مثلث دیگر درون مثلث ABC می‌سازیم (شکل ۸-۲۸). نشان دهید که $AB'A'C'$ متوازی‌الاضلاع است.



شکل۸-۲۸

حل. به بیان برداری، مسأله آن است که ثابت کنیم $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'}$. فرض کنید D، E و F، به ترتیب وسطهای AB، BC، AC باشند. در این صورت

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FB'}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC'}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA'}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{EA'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EA'}$$

برای آنکه بتوانیم $\overrightarrow{FB'}$، $\overrightarrow{DC'}$ و $\overrightarrow{EA'}$ را بر حسب $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بیان کنیم، نماد زیر را (که در مسائل دیگر نیز مفید است) معرفی می‌کنیم. فرض کنید که به ازای نقاط مفروض P و Q، $|\overrightarrow{PQ}$ برداری باشد که مطابق شکل ۸-۲۹، از دوران $\overrightarrow{PQ}$ به اندازهٔ یک زاویهٔ قائمه در جهت مثبت و بدون تغییر اندازهٔ آن به دست می‌آید. اینک فرض کنید که در مثلثهایی که روی ضلعهای ABC بنا شده‌اند، نسبت ارتفاع به قاعده برابر با k باشد. به عبارت دیگر $FB'/AC = DC'/AB = EA'/BC = k$. در این صورت

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FB'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + k|\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} - k|\overrightarrow{AB}$$

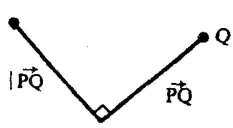
$$\overrightarrow{AA'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EA'}$$

$$= \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + k|\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + k|(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} + k|\overrightarrow{AC} - k|\overrightarrow{AB}$$

(توجه کنید که $|(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}) = |\overrightarrow{P} + |\overrightarrow{Q}$ و به ازای عدد ثابت و دلخواه a، $|a\overrightarrow{P} = a|\overrightarrow{P}$.) این عبارتها که مربوط به $\overrightarrow{AB'}$، $\overrightarrow{AC'}$ و $\overrightarrow{AA'}$ هستند، نشان می‌دهند که $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'}$ و به این ترتیب برهان کامل می‌شود.



شکل۸-۲۹

به ازای بردارهای مفروض $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$، حاصلضرب نقطه‌ای $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS}$ را توسط فرمول زیر تعریف می‌کنیم

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = |\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{RS}|\cos\theta$$

که در آن θ زاویهٔ بین بردارهاست و $۰ \leqslant \theta < ۱۸۰^\circ$.

می‌توان نشان داد که به ازای بردارهای دلخواه $\overrightarrow{A}$، $\overrightarrow{B}$، $\overrightarrow{C}$،

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A}$$

و

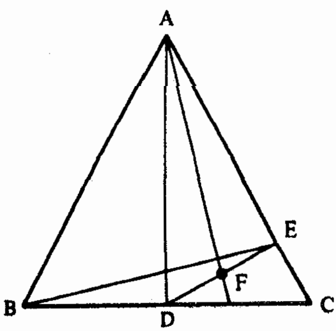
$$\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}$$

توجه کنید که اگر $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$ برهم عمود باشند، آنگاه $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = ۰$، به عکس، اگر $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = ۰$، آنگاه یا $\overrightarrow{A} = ۰$، یا $\overrightarrow{B} = ۰$ یا $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$ برهم عمودند. همچنین توجه کنید که $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = |\overrightarrow{A}|^۲$.

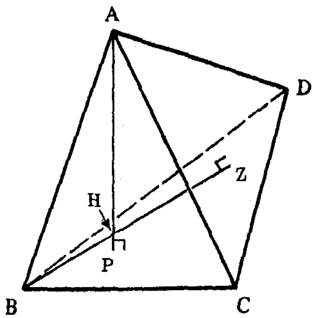
۸ـ۳ـ۶ در مثلث ABC (شکل ۸-۳۰)، $AB = AC$، D وسط BC است، E پای عمودی است که از D بر AC رسم می‌شود و F وسط DE است. ثابت کنید که AF بر BE عمود است.

حل. این همان مسألهٔ ۱-۵-۳ است، ولی در اینجا با استفاده از نماد برداری برهان دیگری می‌آوریم. داریم

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}) \\
&= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DE} \\
&= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DE} \\
&= \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DE} \\
&= \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} - \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}}{۲} - \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DE}}{۲} \\
&= \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}}{۲} - \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DE}}{۲} = \overrightarrow{DE} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DE}}{۲} \right) \\
&= \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EC}}{۲} = ۰
\end{aligned}$$



شکل ۸-۳۰



شکل۸-۳۱

مفهوم بردار در فضای ۳ بعدی اقلیدسی نیز درست مشابه با این مفهوم در صفحهٔ اقلیدسی است. در اینجا نیز بردارها درست شبیه به حالت صفحهٔ اقلیدسی دارای طول و جهت‌اند و توسط پیکان یا پاره‌خطهای جهتدار (منتها در فضای ۳ بعدی) نشان داده می‌شوند. بردارها به وسیلهٔ قانون متوازی‌الاضلاع باهم جمع می‌شوند و می‌توان با استفاده از آنها نتایجی را در هندسهٔ فضایی ثابت کرد.

۸ـ۳ـ۷ اگر دو ارتفاع یک چهاروجهی همصفحه باشند، آنگاه یالی که از دو سر این دو ارتفاع می‌گذرد، بر یال مقابلش در چهار وجهی عمود است .

حل. فرض کنید AP و BZ به ترتیب ارتفاعهای رسم شده از A و B باشند و فرض کنید که این ارتفاعها در نقطهٔ H با یکدیگر برخورد کنند (شکل ۸-۳۱ را ببینید).

بردار $\overrightarrow{AH}$ بر $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BH}$ بر $\overrightarrow{CD}$، $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{AC}$ عمود است. می‌خواهیم نشان دهیم که $\overrightarrow{AB}$ بر $\overrightarrow{CD}$ عمود است. برای این کار، حاصلضرب نقطه‌ای زیر را حساب می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HA})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CD}=0-0=0$$

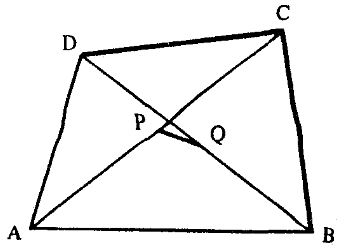
این برهان را کامل می‌کند.

۸ـ۳ـ۸ ثابت کنید که اگر در یک چهارضلعی کج (نامسطح)، یالهای مقابل طولهای مساوی داشته باشند، خطی که وسط دو قطر آن را به هم وصل می‌کند، بر آن دو قطر عمود است.

حل. فرض کنید A، B، C، D رأسهای چهارضلعی و P و Q به ترتیب وسطهای AC و BD باشند (شکل ۸-۳۲). بنابر فرض، $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|$ و $|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}|$. اگر دو طرف را به توان دو برسانیم و نتیجه را به زبان ضرب نقطه‌ای بیان کنیم، داریم

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}$$



شکل۸-۳۲

یا معادلاً

$$(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{A})\cdot(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{A})=(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B})$$
$$(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A})\cdot(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A})=(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{C})\cdot(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{C}) \qquad (۱)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $\overrightarrow{PQ}$ بر $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ عمود است. به زبان بردارها، می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC}=۰$$
$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD}=۰$$

یا معادلاً

$$(\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{P})\cdot(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{A})=۰$$
$$(\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{P})\cdot(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{B})=۰$$

با قرار دادن $\overrightarrow{P}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C})$ و $\overrightarrow{Q}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{D})$ در تساویهای بالا، خواهیم داشت

$$(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{D}-\overrightarrow{A}-\overrightarrow{C})\cdot(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{A})=۰$$
$$(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{D}-\overrightarrow{A}-\overrightarrow{C})\cdot(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{B})=۰ \qquad (۲)$$

بنابراین، مسأله معادل است با آنکه نشان دهیم که تساویهای (۱)، تساویهای (۲) را ایجاب می‌کنند.

با بسط (۱) داریم

$$\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{D}-۲\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{D}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{C}-۲\,\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}$$
$$\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}-۲\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{D}-۲\,\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{D}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{C}$$

با جمع اینها، خواهیم داشت

$$-۲\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{D}-۲\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+۲\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=۲\,\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{C}-۲\,\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}-۲\,\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{D}$$
$$-(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{D})\cdot\overrightarrow{A}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{C}-\overrightarrow{C}\cdot(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{D})$$
$$(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{D})\cdot(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{A})-(\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{C}-\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A})=۰$$

$$(\vec{B}+\vec{D})\cdot(\vec{C}-\vec{A})-(\vec{C}+\vec{A})\cdot(\vec{C}-\vec{A})=0$$
$$(\vec{B}+\vec{D}-\vec{C}-\vec{A})\cdot(\vec{C}-\vec{A})=0$$

این اولین تساوی از تساویهای (۲) است. برای یافتن دومین تساوی (۲)، تفاضل تساویهای (۱) را حساب کنید. جزئیات دقیقاً شبیه به محاسبات قبلی است.

به روشی مشابه، جمع و تفریق تساویهای (۲) به تساویهای (۱) می‌انجامد، که این به آن معناست که عکس قضیه نیز برقرار است. به عبارت دیگر، اگر خطی که وسطهای دو قطر یک چهارضلعی کج را به هم وصل می‌کند بر هر دو قطر عمود باشد، آنگاه یالهای مقابل آن چهارضلعی طولهای مساوی دارند.

مسائل

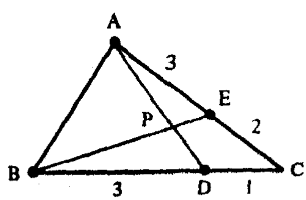
۸ـ۳ـ۹ در مثلث ABC، نقاط D، E و F ضلعها را به سه بخش تقسیم می‌کنند به‌طوری که $BC=3BD$، $CA=3CE$ و $AB=3AF$. به همین ترتیب، نقاط G، H و I ضلعهای مثلث DEF را به سه بخش تقسیم می‌کنند به طوری که $EF=3EG$، $FD=3FH$ و $DE=3DI$. ثابت کنید که ضلعهای $\triangle GHI$ با ضلعهای $\triangle ABC$ موازی‌اند و طول هر ضلع مثلث کوچکتر، $\frac{1}{4}$ طول ضلعی در مثلث بزرگتر است که با آن موازی است.

۸ـ۳ـ۱۰ ضلعهای AD، AB، CB و CD از چهارضلعی $ABCD$ توسط نقاط E، F، G، H طوری تقسیم شده‌اند که $AE:ED=AF:FB=CG:GB=CH:HD$. ثابت کنید که $EFGH$ متوازی‌الاضلاع است.

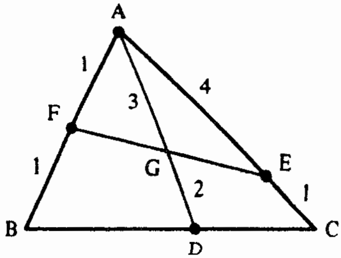
۸ـ۳ـ۱۱ الف) در مثلث ABC (شکل ۸-۳۳)، نقاط D و E به ترتیب ضلعهای BC و AC را طوری تقسیم می‌کنند که $BD/DC=3$ و $AE/EC=\frac{3}{2}$. فرض کنید P نقطهٔ برخورد AD با BE باشد. نسبت $BP:PE$ را بیابید.

ب) در مثلث ABC (شکل ۸-۳۴)، نقاط E و F ضلعهای AC و AB را به ترتیب طوری تقسیم می‌کنند که $AE/EC=4$ و $AF/FB=1$. فرض کنید D نقطه‌ای روی ضلع BC و G نقطهٔ برخورد EF و AD باشد. همچنین فرض کنید که D طوری واقع شده باشد که $AG/GD=\frac{3}{2}$. نسبت BD/DC را بیابید.

۸ـ۳ـ۱۲ روی ضلعهای متوازی‌الاضلاع دلخواه $ABCD$، مربعهایی ساخته شده‌اند که در بیرون آن واقع‌اند. ثابت کنید که مرکزهای این مربعها، M_1، M_2، M_3، M_4، خود رأسهای یک مربع‌اند.



شکل ۸-۳۳



شکل۸-۳۴

۸ـ۳ـ۱۳ روی ضلعهای چهارضلعی محدب دلخواه $ABCD$، مثلثهای متساوی‌الاضلاع $ABM_۱$، $BCM_۲$، $CDM_۳$ و $DAM_۴$ طوری ساخته شده‌اند که اولی و سومی در بیرون چهارضلعی واقع‌اند، در حالی که دومی و چهارمی در همان طرفی از ضلعهای BC و DA واقع‌اند که خود چهار ضلعی قرار دارد. ثابت کنید که چهارضلعی $M_۱M_۲M_۳M_۴$ یک متوازی‌الاضلاع است.

۸ـ۳ـ۱۴ روی ضلعهای چهارضلعی محدب دلخواه $ABCD$، مربعهایی ساخته شده‌اند که همگی بیرون چهارضلعی واقع‌اند و مرکزهایشان $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$ و $M_۴$ است. نشان دهید که $M_۱M_۳ = M_۲M_۴$ و $M_۱M_۳$بر $M_۲M_۴$ عمود است.

۸ـ۳ـ۱۵ روی ضلعهای مثلث ABC، مثلثهای متساوی‌الساقین BCX، CAY و ABZ بیرون ABC رسم شده‌اند. نشان دهید که مرکز ثقلهای $\triangle ABC$ و $\triangle XYZ$ بر هم منطبق‌اند.

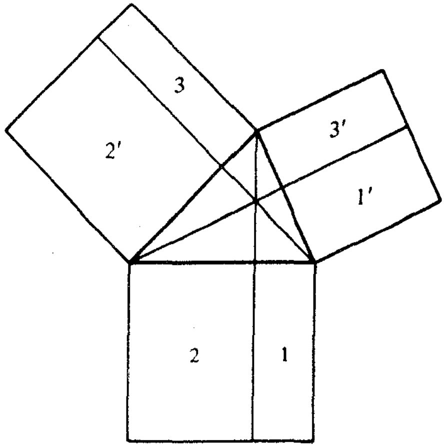
۸ـ۳ـ۱۶ ارتفاعهای مثلث ABC را به طرف بیرون به ترتیب تا نقاط A'، B' و C' امتداد داده‌ایم که در آن $AA' = k/h_a$، $BB' = k/h_b$ و $CC' = k/h_c$. در اینجا k عددی ثابت و h_a طول ارتفاعی است که از رأس A بر BC عمود شده است و الی‌آخر. ثابت کنید که مرکز ثقل مثلث $A'B'C'$ بر مرکز ثقل مثلث ABC منطبق است.

۸ـ۳ـ۱۷ فرض کنید ABC مثلثی حاده باشد. روی سه ضلع آن مربعهایی به طرف بیرون بسازید. ارتفاعهای رسم شده از رأسها را آنقدر امتداد دهید تا دو طرف دیگر ضلع مقابل مربع را قطع‌کند. در این صورت هر یک از این مربعها به دو مستطیل تقسیم می‌شوند. ثابت کنید که مساحت «مستطیلهای مجاور» از مربعهای متفاوت، مساویند؛ یعنی ثابت کنید که به ازای $i = ۱, ۲, ۳$، مساحتi' = مساحتi (شکل ۸-۳۵ را ببینید). (با استفاده از ضرب نقطه‌ای، برهانی یک سطری ارائه دهید.) هنگامی که ABC به مثلث قائم‌الزاویه تبدیل شود، چه روی می‌دهد؟

۸ـ۳ـ۱۸ در یک چهار وجهی، دو جفت از یالهای مقابل برهم عمودند. ثابت کنید که سومین جفت یالهای مقابل نیز برهم عمودند.

۸ـ۳ـ۱۹ فرض کنید O نقطه‌ای مفروض و $P_۱$، $P_۲$، . . . ، P_n، راسهای یک n ضلعی منتظم، $(n \geqslant ۷)$ باشند و $Q_۱$، $Q_۲$، . . . ، Q_n، توسط فرمول زیر مشخص شوند

$$\overrightarrow{OQ_i} = \overrightarrow{OP_i} + \overrightarrow{P_{i+۱}P_{i+۲}} \quad , i = ۱, ۲, \ldots, n$$



شکل۸-۳۵

($P_{n+1} = P_1$ ،$P_{n+2} = P_2$). ثابت کنید که Q_1، Q_2، … ، Q_n رأسهای یک n ضلعی منتظم‌اند.

۴ـ۸ عددهای مختلط در هندسه

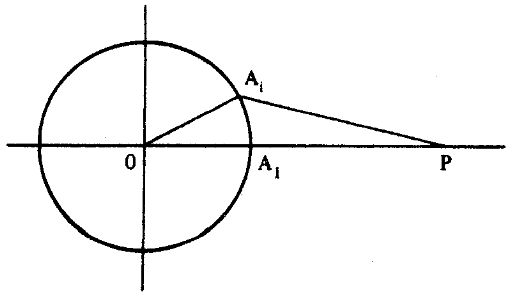
برهانهای این بخش بر اساس هندسهٔ عددهای مختلط است که آنها را در بخش ۳-۵ معرفی کردیم.

۱ـ۴ـ۸ نقطه‌های A_1، A_2، … ، A_n رأسهای یک چندضلعی منتظم‌اند که در دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O محاط شده است. P نقطه‌ای واقع بر امتداد OA_1 و در طرف دیگر A_1 است. نشان دهید که

$$\prod_{k=1}^{n} PA_k = OP^n - r^n$$

حل. شکل ۸-۳۶، صفحهٔ مختلط را نشان می‌دهد که در آن مرکز دایره در مبدأ و رأسهای A_i در مکان n ریشهٔ معادلهٔ $z^n - r^n = 0$ واقع‌اند. به ویژه به نقطهٔ A_k برچسب $z_k = re^{2\pi(k-1)i/n}$ را متصل می‌کنیم. (برچسب نقطهٔ Q در صفحه، عدد مختلط متناظر با Q است.) با توجه به این مختصات، P متناظر است با عددی حقیقی که آن را z می‌نامیم. در این صورت

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} PA_k &= \prod_{k=1}^{n} |z - z_k| \\ &= \left|\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)\right| \\ &= |z^n - r^n| \\ &= z^n - r^n \qquad (\text{حقیقی‌اند } r \text{ و } z) \\ &= OP^n - r^n\end{aligned}$$



شکل۸-۳۶

۸ـ۴ـ۲ نقطهٔ P روی محیط دایرهٔ واحد مفروض است و نقاط $A_۱$، $A_۲$، $\ldots$ ، A_n، رأسهای یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌اند. ثابت کنید که $PA_۱^۲ + PA_۲^۲ + \cdots + PA_n^۲$ مقداری ثابت است.

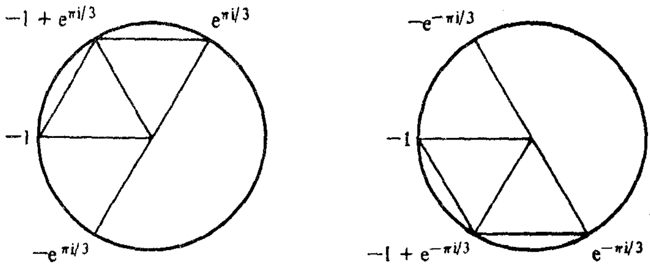
حل. باز هم فرض می‌کنیم که $A_۱$، $A_۲$، $\ldots$ ، A_n متناظر با n ریشهٔ واحد باشند؛ به ویژه فرض می‌کنیم که به ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n$، برچسب A_k، $z_k = e^{۲\pi ki/n}$، باشد. برچسب P را z می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{n} PA_k^۲ &= \sum_{k=۱}^{n} |z - z_k|^۲ \\ &= \sum_{k=۱}^{n} (z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k) \qquad (w^۲ = w\bar{w}) \\ &= \sum_{k=۱}^{n} (z\bar{z} - z_k\bar{z} - z\bar{z}_k + z_k\bar{z}_k) \\ &= \sum_{k=۱}^{n} z\bar{z} - \left(\sum_{k=۱}^{n} z_k\right)\bar{z} - z\left(\sum_{k=۱}^{n} \bar{z}_k\right) + \sum_{k=۱}^{n} z_k\bar{z}_k\end{aligned}$$

ولی $\sum_{k=۱}^{n} z_k = ۰$ زیرا z_kها ریشه‌های $z^n - ۱ = ۰$ هستند و ضریب $z^{n-۱}$ صفر است. بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{n} PA_k^۲ &= \sum_{k=۱}^{n} z\bar{z} + \sum_{k=۱}^{n} z_k\bar{z}_k \\ &= \sum_{k=۱}^{n} |z|^۲ + \sum_{k=۱}^{n} |z_k|^۲ \\ &= n + n \qquad (|z_k| = ۱ \text{ و } |z| = ۱) \\ &= ۲n\end{aligned}$$

۸ـ۴ـ۳ ثابت کنید که اگر نقاطی از صفحهٔ مختلط که با دو عدد $z_۱$ و $z_۲$ متناظرند، دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، آنگاه رأس سوم آن متناظر است با عدد $-\omega z_۱ - \omega^۲ z_۲$ که در آن ω یکی از ریشه‌های سوم موهومی واحد است.



شکل۸-۳۷

حل. نقاط $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند اگر و فقط اگر $z_۳-z_۱=(z_۲-z_۱)e^{\pm\pi i/۳}$. بنابراین با معلوم بودن $z_۱$ و $z_۲$، عدد $z_۳$ باید به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} z_۳ &= (۱-e^{\pm\pi i/۳})z_۱ + e^{\pm\pi i/۳}z_۲ \\ &= -[-۱+e^{\pm\pi i/۳}]z_۱ - [-e^{-\pi i/۳}]z_۲ \end{aligned}$$

با توجه به تعبیر هندسی این مقادیر (شکل ۸-۳۷)، می‌توانیم ببینیم که $-۱+e^{\pm\pi i/۳}$ و $-e^{\pm\pi i/۳}$ ریشه‌های سوم موهومی واحد هستند. این مطلب را می‌توانیم به روش جبری تحقیق کنیم:

$$\begin{aligned} -۱+e^{\pm\pi i/۳} &= -۱+\cos\left(\pm\frac{۱}{۳}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{۱}{۳}\pi\right) \\ &= -۱+\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}i = -\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}i \end{aligned}$$

و

$$-e^{\pm\pi i/۳} = -\left[\cos\left(\pm\frac{۱}{۳}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{۱}{۳}\pi\right)\right] = -\frac{۱}{۲}\mp\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}i$$

به عکس، فرض کنید $z_۳=-\omega z_۱-\omega^۲ z_۲$، که در آن ω، یکی از ریشه‌های سوم موهومی واحد است. در این صورت

$$\omega=-۱+e^{\pi i/۳} \quad , \quad \omega^۲=-e^{\pi i/۳}$$

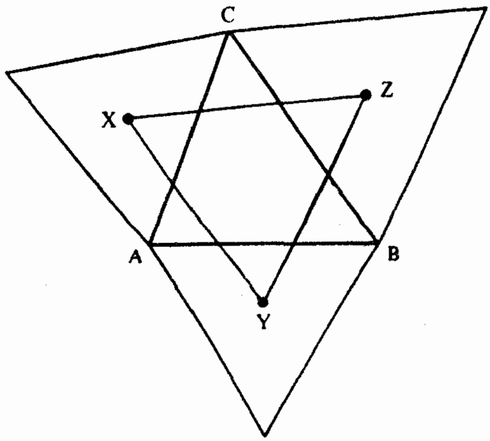
یا

$$\omega=-۱+e^{-\pi i/۳} \quad , \quad \omega^۲=-e^{-\pi i/۳}$$

و آنچه که در بالا بیان کردیم، نشان می‌دهد که نقاط $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند.

۸ـ۴ـ۴ روی ضلعهای مثلث دلخواه ABC، مثلثهای متساوی‌الاضلاعی به طرف بیرون ساخته شده‌اند. ثابت کنید که مرکز (ثقل)های این مثلثها، مثلثی متساوی‌الاضلاع می‌سازند.

حل. فرض کنید که مطابق شکل ۸-۳۸، a، b، c به ترتیب، برچسب نقاط A، B، C (در صفحهٔ مختلط) و x و y و z، برچسب مرکزهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند. فرض کنید $\omega=e^{۲\pi i/۳}$. در این صورت $۰=۱+\omega+\omega^۲$ (ω یکی از ریشه‌های سوم واحد است، پس $(۱+\omega+\omega^۲)(۱-\omega)=۱-\omega^۳=۰$).



شکل۸-۳۸

همچنین توجه کنید که $e^{\pi i/۳} = -\omega^۲$ و $e^{-\pi i/۳} = -\omega$.

برچسب مرکز ثقل $\triangle ABC$، $\frac{۱}{۳}(a+b+c)$ است. به همین ترتیب، x و y و z به صورت زیر به دست می‌آیند

$$x = \frac{۱}{۳}\left[a+c+\left[a-\omega^۲(c-a)\right]\right] = \frac{۱}{۳}\left[(۲+\omega^۲)a+(۱-\omega^۲)c\right]$$
$$y = \frac{۱}{۳}\left[a+b+\left[a-\omega(b-a)\right]\right] = \frac{۱}{۳}\left[(۲+\omega)a+(۱-\omega)b\right]$$
$$z = \frac{۱}{۳}\left[b+c+\left[b-\omega(c-b)\right]\right] = \frac{۱}{۳}\left[(۲+\omega)b+(۱-\omega)c\right]$$

برای آنکه نشان دهیم که مقادیر x، y و z یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازند، کافی است نشان دهیم که

$$z - x = -\omega^۲(y-x)$$

داریم

$$۳(z-x) = -(۲+\omega^۲)a+(۲+\omega)b+(-\omega+\omega^۲)c$$
$$-۳\omega^۲(y-x) = ۳\omega^۲(x-y) = (\omega^۴-\omega^۳)a-(\omega^۲-\omega^۳)b+(\omega^۲-\omega^۴)c$$

ولی

$$\omega^۴-\omega^۳ = \omega-۱ = (-۱-\omega^۲)-۱ = -(۲+\omega^۲)$$
$$-(\omega^۲-\omega^۳) = -\omega^۲+۱ = (۱+\omega)+۱ = ۲+\omega$$
$$\omega^۲-\omega^۴ = \omega^۲-\omega$$

و بنابراین ضریبهای a، b، c در عبارتهای مربوط به $z-x$ و $-\omega^۲(y-x)$ در بالا، مساوی‌اند. از اینجا نتیجه می‌شود که x، y، z یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازند.

مسائل

۸ـ۴ـ۵ فرض کنید $A_{\circ}$، A_{1}، A_{2}، A_{3}، A_{4}، دایرهٔ واحد (دایرهٔ به شعاع ۱) را به پنج بخش مساوی تقسیم کنند. ثابت کنید که وترهای $A_{\circ}A_{1}$ و $A_{\circ}A_{2}$ در تساوی زیر صدق می‌کنند

$$(A_{\circ}A_{1} \cdot A_{\circ}A_{2})^{2} = 5$$

۸ـ۴ـ۶ نقطهٔ P و رأسهای A_{1}، A_{2}، $\ldots$ ، A_{n} از یک n ضلعی منتظم محاطی، روی محیط دایرهٔ واحد مفروض‌اند. ثابت کنید که $PA_{1}^{4} + PA_{2}^{4} + \cdots + PA_{n}^{4}$ مقداری ثابت است (یعنی مستقل از مکان P روی محیط دایره است).

۸ـ۴ـ۷ فرض کنید G مرکز ثقل مثلث ABC باشد. ثابت کنید

$$3(GA^{2} + GB^{2} + GC^{2}) = AB^{2} + BC^{2} + CA^{2}$$

۸ـ۴ـ۸ فرض کنید $ABCDEF$ یک شش ضلعی محاط در دایره‌ای به شعاع r باشد. نشان دهید که اگر $AB = CD = EF = r$، آنگاه وسطهای BC، DE و FA رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

۸ـ۴ـ۹ اگر z_{1}، z_{2}، z_{3} عددهایی باشند به طوری که $|z_{1}| = |z_{2}| = |z_{3}| = 1$ و $z_{1} + z_{2} + z_{3} = 0$، نشان دهید که z_{1}، z_{2}، z_{3} رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی هستند که در دایرهٔ واحد محاط است.

۸ـ۴ـ۱۰ نشان دهید که z_{1}، z_{2}، z_{3}، یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازند اگر و فقط اگر

$$z_{1}^{2} + z_{2}^{2} + z_{3}^{2} = z_{1}z_{2} + z_{2}z_{3} + z_{3}z_{1}$$

۸ـ۴ـ۱۱ سه‌نقطه‌ای که در صفحهٔ مختلط با ریشه‌های معادلهٔ

$$z^{3} - 3pz^{2} + 3qz - r = 0$$

متناظرند، رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) ثابت کنید که مرکز ثقل مثلث نقطهٔ متناظر با p است.

ب) ثابت کنید که ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع است اگر و فقط اگر $p^{2} = q$.

فهرست علامتها و تعریفها

مرکز ثقل (مثلث)	نقطه‌ای است که در آنجا میانه‌های مثلث با یکدیگر برخورد می‌کنند (میانهٔ مثلث خطی است که یک رأس آن را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کند)
مرکز دایرهٔ محیطی (مثلث)	مرکز دایرهٔ محیطی (دایره‌ای که از سه رأس مثلث می‌گذرد) نقطهٔ برخورد عمودمنصفهای ضلعهای مثلث است.
غلاف محدب	کوچکترین مجموعهٔ محدبی است که شامل همهٔ نقاط مجموعهٔ مفروض است.
مجموعهٔ محدب	مجموعه‌ای است که شامل تمام پاره‌خطهایی می‌باشد که دو نقطهٔ دلخواه آن را به هم وصل می‌کنند.
دنبالهٔ فیبوناتچی	دنباله‌ای از اعداد است که به شکل $F_1 = 1$، $F_2 = 1$ و به‌ازای $n > 2$، $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ تعریف می‌شود. آغاز دنباله به‌این صورت است: ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ...

تابعها

تابع زوج	تابعی با این ویژگی است که به‌ازای هر x، $f(-x) = f(x)$.
تابع فرد	تابعی با این ویژگی است که به‌ازای هر x، $f(-x) = -f(x)$.
تابع محدب	تابع f با مقدار حقیقی را روی بازهٔ (a,b) محدب گویند هرگاه به‌ازای هر x، y، z که $a < x < y < z < b$، داشته باشیم $f(x) \leqslant L(x)$ که در آن $L(x)$ تابعی خطی است که در نقاط x و z با $f(x)$ برابر است.
تابع مقعر	تابعی است که از ضرب عدد ۱− در تابعی محدب ساخته می‌شود.

⟦ ⟧ تابع بزرگترین عدد صحیح یا جزءِ صحیح است. به عبارت دیگر به‌ازای هر x، $[\![x]\!]$ بزرگترین عدد صحیحی است که کوچکتر یا مساوی با x است.

مرکز دایرهٔ محاطی (مثلث) این نقطه مرکز دایره‌ای است که بر سه ضلع مثلث مماس است (دایرهٔ محاطی). مرکز دایرهٔ محاطی نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث است.

نقطهٔ مشبکه‌ای نقطه‌ای در صفحهٔ اقلیدسی (یا $\mathbb{R}^n$) است که مختصاتش اعداد صحیح‌اند.

مرکز ارتفاعی (مثلث) نقطهٔ برخورد سه ارتفاع مثلث است.

مثلث پاسکال آرایه‌ای مثلثی‌شکل از اعداد است که سطر nام آن $(n = ۰, ۱, ۲, \cdots)$ از ضریبهای بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ تشکیل شده است.

سه‌تایی فیثاغورسی مجموعه‌ای متشکل از سه عدد صحیح مثبت است که در برابری $x^۲ + y^۲ = z^۲$ صدق می‌کنند.

مجموعه‌ها

مجموعهٔ S-T زیرمجموعه‌ای از S است که عضوهای آن عضوهایی از مجموعهٔ S هستند که در T قرار ندارند.

زیرمجموعهٔ k عضوی زیرمجموعه‌ای است که شامل k عضو از مجموعهٔ مورد بحث است.

اعداد مثلثی اعداد دنبالهٔ ۱، ۳، ۶، ۱۰، ... هستند که جملهٔ nام آن $n(n+۱)/۲$ است.

منابع

۱-۱-۲ 1974 Putnam Exam

۱-۱-۳ 1979 Putnam Exam

۱-۱-۴ 1976 International Olympiad

۱-۱-۵ 1971 Putnam Exam

۱-۱-۶ *The Mathematics Student,* Vol. 26, No. 2, November 1978

۱-۱-۷ B. G. Eke, *Mathematical Spectrum,* Vol. 9, No. 3, 1976-1977, p.97.

۱-۱-۸ 1968 Putnam Exam

۱-۱-۹ D. H. Browne, *American Mathematical Monthly,* Vol. 53, No. 2, February 1946, p.97

۱-۱-۱۰ ۱-۵-۱۰ را ببینید

۱-۱-۱۱ ۷-۶-۴ را ببینید

۱-۱-۱۲ 1972 Putnam Exam

۱-۲-۱ J. E. Trevor, *American Mathematical Monthly,* Vol. 42, No. 8, October 1935, p. 508

۱-۲-۲ 1972 Putnam Exam

۱-۲-۴ Richard A. Howland, A Generalization of the Handshake Problem, *Crux Mathematicorum,* Vol. 6, No. 8, October 1980, pp. 237-238

۱-۲-۷ W. R. Ransom, *American Mathematical Monthly,* Vol. 60, No. 9, November 1953, p.627; W. A. Wickelgren, *How to Solve Problems,* W. H. Freeman, San Francisco, 1974, pp. 163-166

۱-۲-۹ 1961 Putnam Exam

۱-۲-۱۰ ۶-۶-۴ را ببینید

۱-۳-۳ 1981 International Olympiad

۱ـ۳ـ۵ 1955 Putnam Exam

۱ـ۳ـ۶ Romae Cormier and Roger Eggleton, Counting by Correspondence, *Mathematics Magazine*, Vol. 49, No. 4, September 1976, pp. 181-186

۱ـ۳ـ۷ *Mathematical Spectrum*, Vol. 2, No. 2, 1960-1970, p. 70

۱ـ۳ـ۱۱ USSR Olympiad

۱ـ۳ـ۱۲ 1956 Putnam Exam

۱ـ۳ـ۱۳ 1957 Putnam Exam

۱ـ۴ـ۱ William R. Klinger, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 12, No. 2, March 1981, p. 154

۱ـ۴ـ۲ Fred A. Miller, *School Science and Mathematics*, Vol. 81, No. 2, February 1981, p. 165

۱ـ۴ـ۳ USSR Olympiad

۱ـ۵ـ۱ J. A. Renner, *American Mathematical Monthly*, Vol. 44, No. 10, December 1937, p. 666

۱ـ۵ـ۳ M. T. Salhab, *American Mathematical Monthly*, Vol. 68, No. 7, September 1961, p. 667. Solution by D. C. Stevens

۱ـ۵ـ۴ Michael Golomb, *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, No. 6, June-July 1980, p. 489

۱ـ۵ـ۵ John Clement, Jack Lockhead, and George Monk, Translation Difficulties in Learning Mathematics, *American Mathematical Monthly*, Vol. 88, No. 4, April 1981, pp. 286-290

۱ـ۵ـ۸ 1963 Putnam Exam

۱ـ۵ـ۱۰ 1974 Putnam Exam

۱ـ۶ـ۱ 1977 International Olympiad

۱ـ۶ـ۳ 1980 Putnam Exam

۱ـ۶ـ۴ G. P. Henderson, *Crux Mathematicorum*, Vol. 5, No. 6, June-July 1979, p. 171

۱ـ۶ـ۵ Zalman Usiskin, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 12, No. 2, March 1981, p.155

۱ـ۶ـ۶ب ۴ـ۳ـ۹ را ببینید

۱ـ۶ـ۷ Alvin J. Paullay and Sidney Penner, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 11, No. 5, November 1980, p. 336

۱ـ۷ـ۳ ۲ـ۳ـ۱ را ببینید

۱ـ۷ـ۸ Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 5, No. 9, November 1979, p. 259

۱ـ۸ـ۴ 1965 Putnam Exam

۱ـ۸ـ۶الف Léo Sauvé, *Eureka*, Vol. 1, No. 1, November 1975, p. 88

۱ـ۸ـ۶ب Victor Linis, *Eureka*, Vol. 4, No. 4, June 1975, p. 28

۱ـ۸ـ۸ Edwin A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics*, Cambridge Press, London, 1961, p. 42

۱ـ۹ This proof that the harmonic series diverges is due to Leonard Gillman

۱ـ۹ـ۱ 1907 Hungarian Olympiad

۱ـ۹ـ۲ 1982 Olympiad

۱ـ۹ـ۴ 1981 U.S.A. Olympiad

۱ـ۹ـ۵ 1962 Putnam Exam

۱ـ۱۰ـ۱ 1971 Putnam Exam

۱ـ۱۰ـ۴ 1954 Putnam Exam

۱ـ۱۰ـ۵ 1973 Putnam Exam

۱ـ۱۰ـ۸ 1906 Hungarian Olympiad

۱ـ۱۰ـ۹ Thomas E. Moore, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 12, No. 1, January 1981, p. 63

۱ـ۱۰ـ۱۰ 1954 Putnam Exam

۱ـ۱۱ـ۱ Paul Erdös

۱ـ۱۱ـ۲ 1979 Putnam Exam

۱ـ۱۱ـ۳ 1965 Putnam Exam

۱ـ۱۱ـ۵ *Mathematical Spectrum*, Vol. 1, No. 2, 1968-1969, p. 60

۱ـ۱۲ـ۶ج 1982 Putnam Exam

۱ـ۱۲ـ۷ Mau-Keung Siu, Inventor's Paradox, *Two-Year College Journal of Mathematics*, Vol. 12, No. 4, September 1981, p. 267

۲ـ۱ـ۲ Leo Moser, *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 8, October 1962, p. 809

۲ـ۱ـ۶ب C. S. Venkataraman, *American Mathematical Monthly*, Vol. 59, No. 6, June 1952, p. 410

۲ـ۱ـ۷ 1962 Putnam Exam

۲ـ۱ـ۸ Leonard Cohen, *American Mathematical Monthly*, Vol. 68, No. 1, January 1961, p. 62

۲ـ۲ـ۲ 1978 Putnam Exam

۲ـ۲ـ۶ Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 5, No. 1, January 1979, p. 13

۲ـ۲ـ۷ ۲ـ۶ـ۱ را ببینید

۲ـ۲ـ۸ S. W. Golomb and A. W. Hales, *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 8, October 1962, p. 809

۲ـ۳ـ۱ Solution due to A. Liu, *Crux Mathematicorum*, Vol. 4, No. 9, November 1978, pp. 272-274

۲ـ۳ـ۲ J. L. Brown, *American Mathematical Monthly*, Vol. 68, No. 10, December 1961, p. 1005

۲ـ۴ـ۲ Douglas Hensley, *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, No. 7, September 1980, p. 577

۴ـ۴ـ۲ 1967 Putnam Exam

۵ـ۴ـ۲ Murray Klamkin, *American Mathematical Monthly*, Vol. 61, No. 6, June 1954, p. 423

۶ـ۴ـ۲ George Polya, *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1954, pp. 118-119

۳ـ۵ـ۲ David Wheeler, *Crux Mathematicorum*, Vol. 4, No. 3, March 1978, p. 74. Solution given by Bob Prielipp

۴ـ۵ـ۲ 1954 Putnam Exam

۶ـ۵ـ۲ب 1969 Putnam Exam

۶ـ۵ـ۲د E. M. Scheuer, *American Mathematical Monthly*, Vol. 66, No. 9, November 1959, p. 813

۹ـ۵ـ۲ 1980 Canadian Olympiad

۱۳ـ۵ـ۲ 1982 Canadian Olympiad

۱ـ۶ـ۲ 1958 Putnam Exam

۲ـ۶ـ۲ 1954 Putnam Exam

۳ـ۶ـ۲ 1976 U.S.A. Olympiad

۴ـ۶ـ۲ 1980 Putnam Exam

۶ـ۶ـ۲ 1978 Putnam Exam

۷ـ۶ـ۲ب Michael Brozinsky, *School Science and Mathematics*, Vol. 81, No. 6, October 1981, p. 532

۹ـ۶ـ۲ 1975 Canadian Olympiad

۱۰ـ۶ـ۲ 1928 Hungarian Olympiad

۱۱ـ۶ـ۲الف C. W. Bostwick, *American Mathematical Monthly*, Vol. 65, No. 6, June-July 1958, p. 446

۱۲ـ۶ـ۲ Leo Moser, *American Mathematical Monthly*, Vol. 60, No. 10, December 1953, p. 713

۱ـ۱ـ۳ Steve Galovich, *American Mathematical Monthly*, Vol. 84, No. 6, June-July 1977, p. 487

۵ـ۱ـ۳ 1959 International Olympiad

۶ـ۱ـ۳ 1981 U.S.A. Olympiad

۱۰ـ۱ـ۳ب 1956 Putnam Exam

۱۴ـ۱ـ۳ William J. LeVeque, *Elementary Theory of Numbers*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1962, p. 34

۳-۲-۱ ۳-۲-۱۱ را ببینید

۳-۲-۵ Andy Vince, *American Mathematical Monthly*, Vol. 72, No. 3, March 1965, p. 316

۳-۲-۶ R. S. Luthar, *American Mathematical Monthly*, Vol. 83, No. 7, August-September 1976, p. 566

۳-۲-۷ 1894 Hungarian Olympiad

۳-۲-۹ 1955 Putnam Exam

۳-۲-۱۰ Albert A. Mullin, *American Mathematical Monthly*, Vol. 84, No. 5, May 1977, p. 386

۳-۲-۱۱ *The Mathematics Student*, Vol. 26, No. 3, December 1978

۳-۲-۱۲ Larry Lass, *American Mathematical Monthly*, Vol. 71, No. 3, March 1964, p. 317

۳-۲-۱۳ب Hugh L. Montgomery, *American Mathematical Monthly*, Vol. 82, No. 9, November 1975, p. 936

۳-۲-۱۴ه 1899 Hungarian Olympiad

۳-۲-۱۵و 1976 U.S.A. Olympiad

۳-۲-۱۷ Michael Brozinsky, *School Science and Mathematics*, Vol. 81, No. 4, p. 352

۳-۲-۱۸ 1954 Putnam Exam

۳-۲-۲۲ 1900 Hungarian Olympiad

۳-۲-۲۴ Hal Forsey, *Mathematics Magazine*, Vol. 53, No. 4, September 1980, p. 244

۳-۲-۲۵ N. S. Mendelsohn, *American Mathematical Monthly*, Vol. 66, No. 10, December 1959, p. 915

۳-۳-۵ W. C. Rufus, *American Mathematical Monthly*, Vol. 51, No. 6, June-July 1944, p. 348

۳-۳-۶ 1981 Hungarian Olympiad

۳-۳-۷ 1960 Putnam Exam

۳-۳-۸ 1980 Putnam Exam

۳-۳-۹ 1972 U.S.A. Olympiad

۳-۳-۱۳ Murray Klamkin, *Mathematics Magazine*, Vol. 27, No. 1, January 1953, p. 56

۳-۳-۱۴ 1947 Putnam Exam

۳-۳-۱۷ *The Mathematics Student*, Vol. 27, No. 1, October 1979

۳-۳-۱۸ 1967 Putnam Exam

۳-۳-۱۹ج 1956 Putnam Exam

۳-۳-۲۲د Harvey Berry, *American Mathematical Monthly*, Vol. 59, No. 3, March 1952, p. 180

۳-۳-۲۴ H. J. Godwin, *Mathematical Spectrum*, Vol. 11, No. 1. 1978-1979, p. 28

۳-۳-۲۵ Norman Schaumberger, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 12, No. 1, January 1981, p. 185

۳-۴-۱ *Mathematical Spectrum*, Vol. 1, No. 2, 1968-1969, p. 59

۳ـ۴ـ۲ 1981 Canadian Olympiad

۳ـ۴ـ۳ 1975 International Olympiad

۳ـ۴ـ۴ 1977 Putnam Exam

۳ـ۴ـ۷ USSR Olympiad

۳ـ۴ـ۸ 1962 Olympiad

۳ـ۴ـ۹الف H. G. Dworschak, *Eureka*, Vol. 1, No. 9, November 1975, p. 86

۳ـ۴ـ۹د Leo Moser, *American Mathematical Monthly*, Vol. 58, No. 10, December 1951, p. 700

۳ـ۴ـ۱۱ USSR Olympiad

۳ـ۴ـ۱۲ C. H. Braunholtz, *American Mathematical Monthly*, Vol. 70, No. 6, June-July 1963, p. 675

۳ـ۵ـ۱ H. G. Dworschak, *Eureka*, Vol. 2, No. 3, March 1976, p. 50

۳ـ۵ـ۲ L. Mirsky, *Mathematical Spectrum*, Vol. 13, No. 2, 1980-1981, p.58

۳ـ۵ـ۵ 1980 U.S.A. Olympiad

۴ـ۱ـ۱ F. G. B. Maskell, *Crux Mathematicorum*, Vol. 4, No. 6, June-July 1978, p. 164. Solution by Bob Prielipp

۴ـ۱ـ۲ 1977 Putnam Exam

۴ـ۱ـ۳ 1976 Putnam Exam

۴ـ۱ـ۴ 1979 British Olympiad

۴ـ۱ـ۶ 1969 International Olympiad

۴ـ۱ـ۷ 1975 Putnam Exam

۴ـ۱ـ۱۰ Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 5, No. 4, April 1979, p. 105

۴ـ۲ـ۲ USSR Olympiad

۴ـ۲ـ۳ 1970 Canadian Olympiad

۴ـ۲ـ۴ 1940 Putnam Exam

۴ـ۲ـ۵ Azriel Rosenfeld, *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 8, October 1962, p. 809. Solution by Murray Klamkin

۴ـ۲ـ۱۰ Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 5, No. 10, 1979, p. 290

۴ـ۲ـ۱۶الف 1952 Putnam Exam

۴ـ۲ـ۱۶ب 1963 Putnam Exam

۴ـ۲ـ۱۸ 1977 U.S.A. Olympiad

۴ـ۲ـ۲۱ *The Mathematics Student*, Vol. 28, No. 5, February 1981

۴ـ۳ـ۱ 1971 Putnam Exam

۴ـ۳ـ۵ 1956 Putnam Exam

۴ـ۳ـ۶ 1977 Putnam Exam

۴ـ۳ـ۷ Solution by G. P. Henderson, *Crux Mathematicorum*, Vol. 5, No. 6, June-July 1979, p. 171

۴ـ۳ـ۸ 1899 Hungarian Olympiad

۴ـ۳ـ۹ Hayo Ahlberg, *Crux Mathematicorum*, Vol. 7, No. 5, May 1981, p. 639

۴ـ۳ـ۱۰ Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 5, No. 9, November 1979, p. 259

۴ـ۳ـ۱۲الف *Mathematical Spectrum*, Vol. 3, No. 1, 1970-1971, p. 28

۴ـ۳ـ۱۲ب *Mathematical Spectrum*, Vol. 9, No. 1, 1976-1977, p. 32

۴ـ۳ـ۱۵ 1962 Putnam Exam

۴ـ۳ـ۱۷ج 1977 Putnam Exam

۴ـ۳ـ۱۷د J. M. Gandhi, *American Mathematical Monthly*, Vol. 66, No. 1, January 1959, p. 61

۴ـ۴ـ۳ 1972 Putnam Exam

۴ـ۴ـ۴ I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, Xerox College Publishing, 1964, p. 41

۴ـ۴ـ۶ Guy Torchinelli, *American Mathematical Monthly*, Vol. 71, No. 3, March 1964, p. 317. Solution by Francis P. Callahan

۴ـ۴ـ۷ 1972 Putnam Exam

۴ـ۴ـ۸ R. L. Graham and F.D. Parker, *American Mathematical Monthly*, Vol. 70, No. 2, February 1963, p. 210. Solution by J. A. Schatz

۴ـ۴ـ۹ Solomon W. Golomb, *American Mathematical Monthly*, Vol. 85, No. 7, August-September 1978, p. 593

۴ـ۴ـ۱۰ F. S. Carter, *Mathematics Magazine*, Vol. 49, No. 4, September 1976, p. 211

۴ـ۴ـ۱۲ F. M. Sioson, *American Mathematical Monthly*, Vol. 70, No. 8, October 1963, p. 891

۴ـ۴ـ۱۳ 1968 Putnam Exam

۴ـ۴ـ۱۴ 1977 Putnam Exam

۴ـ۴ـ۲۰ Leo Moser, *American Mathematical Monthly*, Vol. 67, No. 3, March 1960, p. 290

۴ـ۴ـ۲۱ T. J. Kearns, *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 1, January 1962, p. 57

۴ـ۴ـ۲۲ Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 6, No. 3, March 1980, p. 73

۴ـ۴ـ۲۳ J. Linkovskii-Condé, *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, No. 2, February 1980, p. 137

۴ـ۴ـ۲۴ 1982 U.S.A. Olympiad

۴ـ۴ـ۲۵ Seth Warner, *Classical Modern Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971, p. 134

۴ـ۴ـ۲۸ ۴ـ۴ـ۲۵ را ببینید

۴ـ۴ـ۲۹ 1968 Putnam Exam

۴ـ۴ـ۳۰ج 1957 Putnam Exam

۴ـ۴ـ۳۱ 1979 Putnam Exam

۵ـ۱ـ۵ Peter Orno, *Mathematics Magazine*, Vol. 54, No. 4, September 1981, p. 213. Solution by Harry Sedinger

۵ـ۱ـ۷الف W. C. Waterhouse, *American Mathematical Monthly*, Vol. 70, No. 10, December 1963, p. 1099

۵ـ۱ـ۷ب Roger B. Eggleton, *American Mathematical Monthly*, Vol. 71, No. 8, October 1964, p. 913

۵ـ۱ـ۱۰الف Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 5, No. 5, May 1979, p. 129

۵ـ۱ـ۱۴ Andy Liu, *Crux Mathematicorum*, Vol. 4, No. 7, August-September 1978, p. 192

۵ـ۱ـ۱۵ Donald Knuth, Take-home problem Stanford University, Fall 1974. C. F. Pinska, *American Mathematical Monthly*, Vol. 65, No. 4, Aprill 1958, p. 284

۵ـ۲ـ۲ 1975 Putnam Exam

۵ـ۲ـ۵ A. D. Sands, *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, No. 1, January 1980, p. 60

۵ـ۲ـ۶ W. L. Nicholson, *American Mathematical Monthly*, Vol. 70, No. 8, October 1963, p. 893

۵ـ۲ـ۸ L. L. Garner, *American Mathematical Monthly*, Vol. 67, No. 8, October 1960, p. 807

۵ـ۲ـ۹ 1981 Putnam Exam

۵ـ۲ـ۱۳ 1982 Canadian Olympiad

۵ـ۲ـ۱۶ 1977 Putnam Exam

۵ـ۳ـ۳ 1978 Putnam Exam

۵ـ۳ـ۴ Gabriel Klambauer, *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, No. 2, February 1980, pp. 128-130

۵ـ۳ـ۷ب 1977 Putnam Exam

۵ـ۳ـ۸ British Scholarship Problem

۵ـ۳ـ۱۰ Gabriel Klambauer, *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, No. 2, February 1980, pp. 128-130

۵ـ۳ـ۱۱ج 1981 Putnam Exam

۵ـ۳ـ۱۲ Leo Moser, *American Mathematical Monthly*, Vol. 55, No. 7, September 1948, p. 427

۵ـ۳ـ۱۳ Michael Aissen, *American Mathematical Monthly*, Vol. 76, No. 9, November 1969, p. 1063

۵ـ۴ـ۲ 1972 Putnam Exam

۵ـ۴ـ۵ 1951 Putnam Exam

۵ـ۴ـ۶ V. N. Murty, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 11, No. 4, September 1980, p. 276

۵ـ۴ـ۷ 1939 Putnam Exam

۵ـ۴ـ۱۲ A. J. Douglas, *Mathematical Spectrum*, Vol. 5, No. 2, 1972-1977, p. 67

۵ـ۴ـ۱۵ 1975 Putnam Exam

۵ـ۴ـ۲۰ 1981 Putnam Exam

۵ـ۴ـ۲۱ 1980 Putnam Exam
۵ـ۴ـ۲۳ V. N. Murty, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 11, No. 4, September 1980, p.276
۵ـ۴ـ۲۷ 1970 Putnam Exam

۶ـ۱ـ۲ Ko-Wei-Lih, *American Mathematical Monthly*, Vol. 88, No. 6, June-July 1981, p. 444
۶ـ۱ـ۴ 1947 Putnam Exam
۶ـ۱ـ۶ Albert Wilansky, *American Mathematical Monthly*, Vol. 65, No. 9, November 1958, p. 708
۶ـ۲ـ۳ 1979 Putnam Exam
۶ـ۲ـ۷ Joseph Silverman, *Mathematics Magazine*, Vol. 51, No. 2, March 1978, p. 127
۶ـ۲ـ۸ 1979 Putnam Exam
۶ـ۲ـ۱۱ 1970 Putnam Exam
۶ـ۲ـ۱۳ 1959 Putnam Exam

۶ـ۳ـ۲ 1967 Putnam Exam

۶ـ۴ـ۲ 1976 Putnam Exam
۶ـ۴ـ۶ 1981 U.S.A. Olympiad
۶ـ۴ـ۷ 1981 Canadian Olympiad

۶ـ۵ـ۴ 1981 Putnam Exam
۶ـ۵ـ۵ب 1958 Putnam Exam
۶ـ۵ـ۹ 1973 Putnam Exam

۶ـ۶ـ۱ 1946 Putnam Exam
۶ـ۶ـ۴ Sidney Penner, *Mathematics Magazine*, Vol. 49, No. 3, May 1976, p. 150
۶ـ۶ـ۵ 1976 Putnam Exam
۶ـ۶ـ۶ Peter Orno, *Mathematics Magazine*, Vol. 51, No. 4, September 1978, p. 245
۶ـ۶ـ۹ G. Z. Chang, *Mathematics Magazine*, Vol. 54, No. 3, May 1981, p. 140

۶ـ۷ـ۱ 1956 Putnam Exam
۶ـ۷ـ۲ 1955 Putnam Exam
۶ـ۷ـ۴ه 1946 Putnam Exam
۶ـ۷ـ۵ 1979 Putnam Exam
۶ـ۷ـ۶ Bernard Vanbrugghe

۶ـ۸ـ۱ 1976 Putnam Exam
۶ـ۸ـ۲ 1970 Putnam Exam
۶ـ۸ـ۶ Victor Linis, *Crux Mathematicorum*, Vol. 2, No. 9, November 1976, p. 203

۶_۸_۹ 1964 Putnam Exam

۶_۸_۱۰ 1977 Putnam Exam

۶_۹_۲ H. G. Dworschak, *Eureka*, Vol. 1, No. 8, October 1975, p. 77

۶_۹_۳ 1946 Putnam Exam

۶_۹_۴ Marius Solomon, *American Mathematical Monthly*, Vol. 77, No. 6, June-July 1977, p. 487

۶_۹_۵ 1938 Putnam Exam

۶_۹_۱۱ D. H. Browne, *American Mathematical Monthly*, Vol. 53, No. 1, January 1946, p. 36

۷_۱_۳ 1980 U.S.A. Olympiad

۷_۱_۴ Solution by Angus Rodgers, *Mathematical Spectrum*, Vol. 5, No. 1, 1972-1973, p. 31

۷_۱_۱۵ Victor Linis, *Eureka*, Vol. 2, No. 2, February 1976, p. 29

۷_۲_۲ 1975 Putnam Exam

۷_۲_۳ Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 5, No. 2, February 1979, p. 45

۷_۲_۹الف Freddy Storey, *American Mathematical Monthly*, Vol. 68, No. 10, December 1961, p. 1009

۷_۳_۱ J. L. Brenner, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 12, No. 1, January 1981, p. 64

۷_۳_۲ Mark Kleiman, *Mathematics Magazine*, Vol. 50, No. 1, January 1977, p. 49

۷_۳_۳ 1978 U.S.A. Olympiad

۷_۳_۴ 1977 Putnam Exam

۷_۳_۸ Micheal Ecker, *Crux Mathematicorum*, Vol. 7, No. 7, August-September 1981, p. 208

۷_۳_۹ Dan Sokolowsky, *Crux Mathematicorum*, Vol. 6, No. 8, October 1980, p. 259

۷_۳_۱۰ 1981 International Olympiad

۷_۴_۱ T. B. Cruddis, *Mathematical Spectrum*, Vol. 10, No. 1, 1977-1978, p. 31

۷_۴_۲ T. S. Bolis, *American Mathematical Monthly*, Vol. 82, No. 7, August-September 1975, p. 756

۷_۴_۴ 1973 Putnam Exam

۷_۴_۶ Gideon Schwarz, *American Mathematical Monthly*, Vol. 88, No. 2, February 1981, p. 148

۷_۴_۸ USSR Olympiad

۷_۴_۹ 1978 Putnam Exam

۷_۴_۱۲ H. G. Dworschak, *Eureka*, Vol. 2, No. 5, May 1976, p. 98

۷_۴_۱۳ ۷_۴_۱۲ را ببینید

۷ـ۴ـ۱۹ ۷ـ۳ـ۱ را ببینید

۷ـ۵ـ۱ 1980 Putnam Exam

۷ـ۵ـ۴ Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 6, No. 10, December 1980, p. 312

۷ـ۵ـ۷ ۷ـ۴ـ۱۲ را ببینید

۷ـ۵ـ۸ Ralph Boas, *American Mathematical Monthly*, Vol. 85, No. 6, June-July 1978, p. 495

۷ـ۶ـ۱ Marius Solomon, *Mathematics Magazine*, Vol. 49, No. 2, March 1976, p. 95. Solution by Jordan Levy

۷ـ۶ـ۲ 1954 Putnam Exam

۷ـ۶ـ۳ 1961 Putnam Exam

۷ـ۶ـ۴ 1947 Putnam Exam

۷ـ۶ـ۵ 1947 Putnam Exam

۷ـ۶ـ۱۲ 1957 Putnam Exam

۷ـ۶ـ۱۳ 1978 Putnam Exam

۸ـ۱ـ۱ 1978 Putnam Exam

۸ـ۱ـ۲ 1976 U.S.A. Olympiad

۸ـ۱ـ۳ 1976 Putnam Exam

۸ـ۱ـ۷ Leon Bankoff, *Crux Mathematicorum*, Vol. 6, No. 3, March 1980, p. 90

۸ـ۱ـ۸ Jack Garfunkel, *Mathematics Magazine*, Vol. 50, No. 3, May 1977, p. 164

۸ـ۱ـ۹ John A. Tierney, *Eureka*, Vol. 2, No. 5, May 1976, p. 103

۸ـ۱ـ۱۵ Zelda Katz, *Pi Mu Epsilon Journal*, Vol. 7, No. 4, Spring 1981, p. 265

۸ـ۱ـ۱۶ Norman Schaumberger, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 12, No. 2, March 1981, p. 155

۸ـ۲ـ۱ 1976 Putnam Exam

۸ـ۲ـ۴ 1938 Putnam Exam

۸ـ۲ـ۵ Murray Klamkin, *Mathematics Magazine*, Vol. 49, No. 4, September 1976, p. 211

۸ـ۲ـ۶ K. R. S. Sastry, *Mathematics Magazine*, Vol. 54, No. 2, March 1981, p. 84

۸ـ۲ـ۸ Norman Anning, *American Mathematical Monthly*, Vol. 27, No. 10, December 1920, p. 482

۸ـ۲ـ۱۱ 1980 Putnam Exam

۸ـ۲ـ۱۲ 1979 Putnam Exam

۸ـ۲ـ۱۴الف Roger L. Creech, *Mathematics Magazine*, Vol. 53, No. 1, January 1980, p. 49

۸ـ۲ـ۱۴ب Roger L. Creech, *Mathematics Magazine*, Vol. 54, No. 1, January 1981, p. 35

۸ـ۲ـ۱۶ Murray Klamkin, *Crux Mathematicorum*, Vol. 7, No. 2, February 1981, p. 65

۸ـ۳ـ۱ 1978 U.S.A. Olympiad

۸ـ۳ـ۵ M. Slater, *American Mathematical Monthly*, Vol. 88, No. 1, January 1981, pp. 66-67. Solution by Jordi Dou

۸ـ۳ـ۶ ۱ـ۵ـ۳ را ببینید

۸ـ۳ـ۸ 1977 U.S.A. Olympiad

۸ـ۳ـ۱۸ H. G. Dworschak, *Eureka*, Vol. 2, No. 3, March 1976, p. 46

۸ـ۴ـ۱ 1955 Putnam Exam

۸ـ۴ـ۳ 1959 Putnam Exam

۸ـ۴ـ۵ 1899 Hungarian Olympiad

۸ـ۴ـ۸ 1967 Putnam Exam

نمایه

(پسوندهای + یا − که پس از شمارهٔ برخی از مسأله‌ها آمده‌اند، به‌ترتیب به تأخر یا تقدم مطلب موردنظر نسبت به آن مسأله اشاره دارند.)