

پل

پل ها نقش اساسی در زندگی انسان دارند. انواع مختلفی از پل ها وجود دارند و در موارد زیادی نیروهای وارد بر آنها از فرمول هایی به دست می آید که بایک عبارت گویا بیان می شوند. مثلاً در مورد پل های عابر پیاده بار

محاسباتی از دستور $2 + \frac{15}{L+15}$ به دست می آید که در آن L طول بار گذاری شده بر حسب متر است.

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا

مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتیمتر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{2}{3}$ باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر x را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن $x+4$ است و نسبت عرض به طول را می‌توان با $\frac{x}{x+4}$ نمایش داد؛ بنابراین:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8 \quad \text{عرض} \quad \text{طول} = 12$$

عبارت $\frac{x}{x+4}$ را، که نسبت دو چندجمله‌ای است، عبارت گویا می‌نامیم.

به‌طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند.

عبارت‌های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ به‌طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت v_1 طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت v_2 بازگشته است از رابطه $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ به دست می‌آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرار است:

$\frac{a+b}{2}$	میانگین حسابی دو عدد a و b	$\frac{v^2}{2k}$	محاسبه جرم یک جسم با سرعت v و انرژی جنبشی k
-----------------	--------------------------------	------------------	---

با توجه به تعریف بالا عبارت‌های زیر گویا هستند:

$$\frac{2x-5}{5x^3-2x^2+1} \quad \text{و} \quad \frac{x+5}{x-1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{4} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \frac{x-3}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad \frac{10}{x+2} \quad \text{و} \quad \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \quad \text{و} \quad \frac{xy^2}{(x-y)^2} \quad \text{و} \quad \frac{x^3}{1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b} \quad \text{و} \quad x^2+2x-7$$

اما عبارت‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

کدام یک از عبارت‌های زیر گویا است؟

$$\frac{7}{x-1} \text{ و } \frac{x+6}{3} \text{ و } \frac{ah}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3}+x}{5} \text{ و } \frac{\sqrt{2x}}{25} \text{ و } \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y}+1}{x^2} \text{ و } \frac{x-5}{\sqrt{3}+1} \text{ و } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ و } \frac{mn+n^2}{5-n} \text{ و } 14 \text{ و } \frac{3-a}{2+x}$$

فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید :

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$						

به ازای $x=3$ مخرج عبارت گویای $\frac{x+5}{x-3}$ مساوی صفر می شود و همان گونه که از قبل می دانید $\frac{8}{0}$ به عنوان عدد تعریف نمی شود.

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آنها مخرج کسر صفر می شود؛ به عبارت دیگر این مقادیر را نمی توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال : عبارت گویای $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

حل : چه مقادیری مخرج کسر را صفر می کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم؛ یعنی :

$$(x-1)(x+2)=0$$

از طرفی وقتی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا :

$$\begin{cases} (x-1)=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ (x+2)=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای $x=1$ و $x=-2$ تعریف نشده است.

کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\frac{8x+5}{2}$

ب) $\frac{7+x}{x}$

ج) $\frac{2b+1}{2b-1}$

د) $\frac{3x}{x^2+4}$

ه) $\frac{x}{x^2-1}$

و) $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$

ساده کردن یک عبارت گویا

کسر $\frac{36}{48}$ با کسرهای $\frac{9}{12}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{18}{24}$ و $\frac{3}{4}$ مساوی است. بین این کسرها $\frac{3}{4}$ کسری است که

دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می‌توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0 \text{ و } C \neq 0 \text{ و } C \text{ چند جمله‌ای هستند})$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\frac{18y^3}{60y^5} = \frac{3}{10y^2}$

ب) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)(\cancel{x+3})}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+3}{x+1}$

$$\text{ج) } \frac{y-9}{3y+9} = \frac{(y+3)(y-3)}{3(y+3)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{د) } \frac{8ab^v}{2^v a^2 b^3} = \frac{2b^4}{\hspace{2cm}}$$

$$\text{هـ) } \frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$$

کار در کلاس

۱- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید :

$$\text{الف) } \frac{m^2-16}{4-m}$$

$$\text{ب) } \frac{6m+18}{7m+21}$$

$$\text{ج) } \frac{a^2-5a-14}{a^2+a-2}$$

$$\text{د) } \frac{x^4-y^4}{y-x}$$

۲- عبارت $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده ؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

$$\text{الف) } \frac{a+\cancel{ax}}{\cancel{a}} = a+x$$

$$\text{ب) } \frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1+x$$

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

$$\text{الف) } \frac{5x}{3ab^2}$$

$$\text{ب) } \frac{2y}{y(2y-6)}$$

$$\text{ج) } \frac{2P}{P^2-P-12}$$

$$\text{د) } \frac{2x+5}{x}$$

$$\text{هـ) } \frac{x^2-1}{x+5}$$

$$\text{و) } \frac{a+3}{2a+1}$$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

$$\text{الف) } \frac{3-x}{x^2-5x+6}$$

$$\text{ب) } \frac{4x^2+8x}{12x+24}$$

$$\text{ج) } \frac{24x^2}{12x^2-6x}$$

$$\text{د) } \frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y}$$

$$\text{هـ) } \frac{1-t^4}{t^2+1}$$

$$\text{و) } \frac{16x^2-9y^2}{8x-6y}$$

$$\text{ح) } \frac{-2a-8}{a^2+2a-8} \quad \text{ز) } \frac{6a^2b^2}{4ab^4}$$

۳- عبارت‌هایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

$$\text{ب) } \frac{2y-3}{3-2y} \quad \text{الف) } \frac{2y+3}{2y-3}$$

$$\text{د) } \frac{2y+3}{-2y-3} \quad \text{ج) } \frac{2y+3}{3+2y}$$

۴- هر یک از عبارت‌های داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

۱) $\frac{a-2}{a+5}$	۲) $\frac{a+2}{a-5}$	۳) $\frac{a-2}{a-5}$	۴) $\frac{a+2}{a+5}$	۵) $\frac{2-a}{a+5}$
۶) $\frac{-a-2}{-a-5}$	۷) $\frac{-a-2}{5-a}$	۸) $\frac{a-2}{-a-5}$	۹) $\frac{2-a}{-a-5}$	۱۰) $\frac{-a+2}{-a+5}$

۵- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

$$\text{الف) } \frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{}}{z^3+z}$$

$$\text{ب) } \frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{x^2-x-6}$$

$$\text{ج) } \frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5}(\boxed{})$$

$$\text{د) } \frac{(x-5)(\boxed{})}{(x-2)(x-5)} = x+1$$

۶- از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

$$\text{الف) } \frac{z}{t}(x+y)$$

$$\text{ب) } \frac{zx+y}{t}$$

$$\text{ج) } \frac{1}{t} \times z(x+y)$$

$$\text{د) } z \times \frac{x+y}{t}$$

$$\text{ه) } \frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$$

$$\text{و) } \frac{zx}{t} + y$$

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا را همانند عددهای گویا می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. در مورد عددهای گویا قوانین زیر را داریم:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

(b, d ≠ 0) (b, c, d ≠ 0)

در ضمن در مورد عبارات گویا هم هر جا که امکان داشته باشد، می‌توان عبارت را ساده کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از ضرب‌ها و یا تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل و حاصل عبارت را ساده کنید.

الف) $\frac{5xy^3}{x^2z^2} \times \frac{16z^3}{15y^2} = \frac{2yz}{3x}$

ب) $\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15} = \frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{(x+3)(x-5)} = \frac{x}{x-5}$

ج) $\frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} = \frac{x-6}{(x-6)(x-6)} \times \frac{(x-3)(x+6)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+4}$

د) $\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^3} = \frac{4x^2}{3xy} \times \frac{y^3}{8x} = \frac{y^2}{6}$

هـ) $\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \div \frac{a^2+3a+2}{a-4} = \frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \times \frac{a-4}{a^2+3a+2}$

$= \frac{(a+1)(a-5)}{a(a-4)} \times \frac{a-4}{(a+1)(a+2)} = \frac{a-5}{a+2}$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{a^2 - a - 6}{a + 3} \times \frac{a + 3}{a^2 - 4}$

ب) $\frac{a^2b + ab^2}{a} \times \frac{3ab}{(a + b)^2}$

ج) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \div \frac{x + 1}{x + 5}$

د) $\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^3}$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

جمع و تفریق عبارت‌های گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویا است؛ در مورد عددهای گویا داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \quad (b \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (b, d \neq 0)$$

به طریق مشابه می‌توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل، و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن ارائه کنید.

الف) $\frac{3x + 7}{x + 2} + \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 + 2x - 3}{x + 2} = \frac{\quad}{\quad}$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

ب) $\frac{3x + 7}{x + 2} - \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 - (2x - 3)}{x + 2} = \frac{x + 10}{x + 2}$

$$\frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

ج) $\frac{a^2 - 20}{a^2 - 4} + \frac{a - 2}{a + 2} = \frac{a^2 - 20 + (a - 2)^2}{a^2 - 4}$
 $= \frac{\quad}{\quad} = \frac{2a^2 - 4a - 16}{\quad} = \frac{2(a^2 - 2a - 8)}{\quad}$

$$\frac{7}{10} - \frac{9}{5} = \frac{\quad}{10}$$

$$= \frac{2(a - 4)(\quad)}{(a + 2)(a - 2)} = \frac{\quad}{\quad}$$

د) $\frac{a + 1}{a} - \frac{3a + 2}{a(a + 2)} = \frac{(a + 1)(\quad) - (3a + 2)}{a(a + 2)} = \frac{\quad}{\quad}$

$$\frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$

ب) $\frac{6}{x} + \frac{4}{-x}$

ج) $\frac{2x^2-16}{x^2-4} - \frac{x+4}{x+2}$

د) $\frac{7}{x^2-x-2} + \frac{x}{x^2+4x+3}$

هـ) $\frac{2}{3y(x-y)} + \frac{x+1}{x(x-y)^2} = \frac{2x(x-y) + 3y(x+1)}{3xy(x-y)^2} =$

ساده کردن عبارت‌های مرکب

هنگام ساده کردن هر عبارت گویای مرکب، همانند کسره‌های مرکب می‌توان صورت و مخرج را جداگانه ساده و سپس آنها را برهم تقسیم کرد و یا از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیرصفر) ضرب کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هر جا لازم است حل را کامل کنید. ($x \neq 0$)

$$\begin{aligned}
 & \text{الف) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)} = \frac{\quad}{x-1} \\
 & \text{ب) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{x^2 - x - 6}{x^2}}{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \div \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} \\
 & = \frac{\cancel{x^2} - x - 6}{\cancel{x^2} - 4x + 3} = \frac{\cancel{x^2} - x - 6}{\cancel{x^2} - 4x + 3} = \frac{\cancel{x^2} - x - 6}{\cancel{x^2} - 4x + 3}
 \end{aligned}$$

$$۲) \left\{ \begin{array}{l} \text{الف) } \frac{\frac{۲}{a} - \frac{۳}{a+۱}}{\frac{۲}{a+۱} - \frac{۳}{a}} = \frac{a(\frac{۲}{a} - \frac{۳}{a+۱})}{a(\frac{۲}{a+۱} - \frac{۳}{a})} = \frac{۲(a+۱) - ۳a}{۲a - ۳(a+۱)} = \frac{۲a + ۲ - ۳a}{۲a - ۳a - ۳} = \frac{-a + ۲}{-a - ۳} \\ \text{ب) } \frac{\frac{۲}{a} - \frac{۳}{a+۱}}{\frac{۲}{a+۱} - \frac{۳}{a}} = \frac{۲(a+۱) - ۳a}{۲a - ۳(a+۱)} = \frac{-a + ۲}{-a - ۳} \\ a \neq ۰ \text{ و } a \neq -۱ \end{array} \right.$$

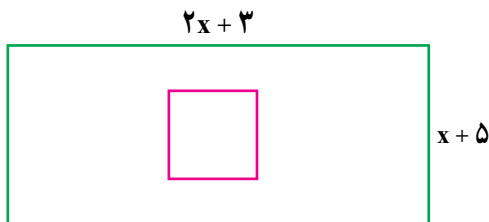
کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\text{الف) } \frac{n - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} =$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} =$$

فعالیت



طول ضلع مربع در داخل مستطیل، نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل $\frac{۵}{۲۶}$ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

حل را کامل کنید و توضیح دهید که چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و حل معادله، پاسخ به دست می‌آید.

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{x+5}{2}$$

$$\text{مساحت مربع} = \left(\frac{\quad}{2} \right)^2$$

$$\frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{5}{26} \quad \text{و} \quad (\quad) (\quad) = \text{مساحت مستطیل}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{4(\quad)(2x+3)} = \frac{5}{26} \Rightarrow \frac{x+5}{4x+6} = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

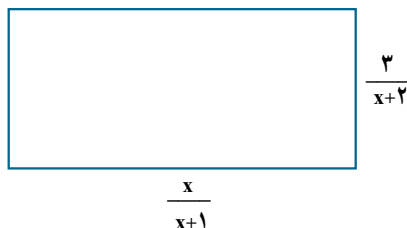
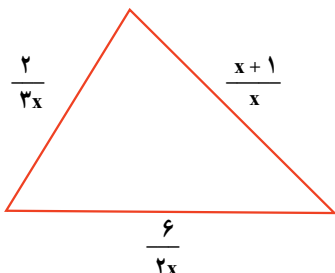
$$\Rightarrow 7x=35 \Rightarrow x=5$$

طول =

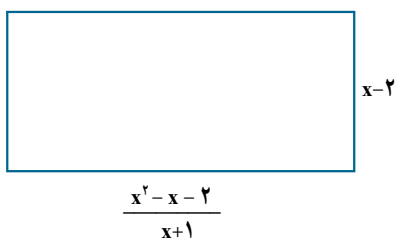
عرض =

کار در کلاس

۱- محیط هر شکل را بر حسب x به دست آورید و آن را ساده کنید. ($x > 0$)



۲- مساحت مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.



تمرین

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{a^2-16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2-8a+16}$

ب) $\frac{m^2-49}{m+1} \div \frac{7-m}{m^2-1}$

ج) $\frac{x^2-4x+4}{4x^2y-8xy} \div \frac{x^2+x-6}{6x^2+18}$

د) $\frac{1-c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2}$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف)} \quad \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4} \quad \text{ب)} \quad \frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} \quad \text{د)} \quad \frac{4+x^2-2x}{2+x} - 2-x$$

۳- فقط یکی از عبارت‌های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^2+5}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+3}{3} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2-5a}{a}$$

۴- از میان عبارت‌های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{x+3}{y+3} \quad \text{ب)} \quad \frac{3-x}{3-y} \quad \text{ج)} \quad \frac{3x}{3y} \quad \text{د)} \quad \frac{x^3}{y^3} \quad \text{ه)} \quad \frac{a^2x}{a^2y}$$

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

$$\text{الف)} \quad -\frac{x+3}{x+5} \quad \text{ب)} \quad -\frac{x-3}{x+5} \quad \text{ج)} \quad \frac{x-3}{x+5} \quad \text{د)} \quad -\frac{3-x}{x+5}$$

۶- کدام یک از عبارت‌های زیر به درستی ساده شده است؟

$$\text{الف)} \quad \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5 \quad \text{ب)} \quad \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$$

۷- اگر $A=a^2-b^2$ و $B=a^2+b^2$ و $C=2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2-B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

۸- کدام یک از تساوی های زیر، درست و کدام یک نادرست است. موارد نادرست را اصلاح کنید. (همه عبارات های جبری تعریف شده فرض می شود).

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$

ب) $\frac{x^{13}}{x^{20}} = x^7$

ج) $\frac{a}{5} - \frac{v-b}{5} = \frac{a-v-b}{5}$

د) $\frac{a-b}{b-a} = 1$

هـ) $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$

و) $\frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$

ز) $\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$

ح) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.
۱۰- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف) $\frac{\frac{a-a^2}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}-a}$

ب) $\frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{\frac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}}$

ج) $\frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که :

الف) حاصل ضرب آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود.

ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود.

۱۲- طول مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

مساحت مستطیل x^2-9 است.

$A=x^2-9$

$\frac{x^2-x-12}{x-4}$

۱- تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

– برای تقسیم دو یک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{7x^3}{y} \quad \text{و} \quad \frac{-18a^2xz^4}{27x^6z} = \frac{-2a^2z^3}{3x^5} \quad \text{مثال}$$

۲- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

اگر a و b و c اعدادی صحیح و d عددی صحیح و غیر صفر باشد، داریم:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

به طور مشابه برای تقسیم چند جمله‌ای $12x^3 - 18x + 2$ بر 6 به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{12x^3 - 18x + 2}{6} = \frac{12x^3}{6} - \frac{18x}{6} + \frac{2}{6} = 2x^3 - 3x + \frac{1}{3}$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است؛ جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف) $\frac{2a^4 + 5a^3 - 8a}{4a^2} = \frac{2a^4}{4a^2} + \frac{5a^3}{4a^2} - \frac{8a}{4a^2} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{4}a - \frac{2}{a}$

ب) $\frac{14x^3yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{14x^3yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z}$
 $= \frac{7x}{y} - \frac{3}{y^2} + \frac{3z}{2}$

ج) $(8y^3 - 4y^2 + 12y) \div (-4y^2) = \frac{8y^3 - 4y^2 + 12y}{-4y^2}$
 $= \frac{8y^3}{-4y^2} - \frac{4y^2}{-4y^2} + \frac{12y}{-4y^2} = -2y + 1 - \frac{3}{y}$

تقسیم های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-21a^5b^4c}{28ab^6}$

ب) $\frac{24x^6y - 2z + 3xyz}{x^2z}$

۳- تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای

اگر تقسیم مقابل را در نظر بگیریم :

$$\begin{array}{r} 26 \quad | \quad 8 \\ -24 \quad 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

عدد ۲۶ را مقسوم، ۸ را مقسوم علیه، ۳ را خارج قسمت و ۲ را باقی مانده می نامیم. رابطه های تقسیم بالا به صورت زیر است :

$$\begin{cases} 3 \times 8 + 2 = 26 \\ 2 < 8 \end{cases}$$

مثال : چند جمله ای $2x^2 - 7x - 15$ را بر چند جمله ای $x - 5$ تقسیم کنید.

چند جمله ای $2x^2 - 7x - 15$ را مقسوم و $x - 5$ را مقسوم علیه می نامیم. در اولین گام باید مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان های نزولی متغیر موجود (در اینجا x) مرتب کرد. در مثال ما چند جمله ای های مورد نظر مرتب شده هستند.

اکنون اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می کنیم؛ یعنی : $\frac{2x^2}{x} = 2x$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ + 2x^2 - 10x \quad \quad 2x \\ \hline \end{array}$$

حاصل ضرب $2x$ در $x - 5$ را به دست می آوریم و آن را از عبارت مقسوم کم می کنیم :

$$2x^2 - 7x - 15 - (2x^2 - 10x) = 2x^2 - 7x - 15 - 2x^2 + 10x = 3x - 15$$

برای آسان تر شدن، می توانیم پس از محاسبه حاصل ضرب $2x$ در $x - 5$ ، در کادر بالا علامت

عبارت حاصل را قرینه کنیم و محاسبه را انجام دهیم؛ یعنی :

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^2} - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\
 + \cancel{2x^2} - 10x \quad \quad 2x \\
 \hline
 3x - 15
 \end{array}$$

اکنون دوباره $3x - 15$ را بر $x - 5$ تقسیم و مراحل قبل را تکرار می‌کنیم؛ یعنی اولین جمله عبارت $3x - 15$ را بر اولین جمله $x - 5$ تقسیم می‌کنیم. توجه داریم که این چند جمله‌ای‌ها نیز باید برحسب توان‌های نزولی مرتب شده باشند؛ داریم: $\frac{3x}{x} = 3$ این تقسیم‌ها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یا باقیمانده صفر شود یا درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\
 \pm 2x^2 \pm 10x \quad \quad 2x + 3 \\
 \hline
 3x - 15 \\
 \pm 3x \pm 15 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

وقتی باقیمانده صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

فعالیت

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف)
$$\begin{array}{r}
 4x^3 - 3x^2 + x + 7 \quad | \quad x^2 - 2 \\
 \pm 4x^3 \quad \quad \mp 8x \quad \quad \square - 3 \\
 \hline
 -3x^2 + 9x + 7 \\
 - 3x^2 + \quad \square \\
 \hline
 \quad \square + 1
 \end{array}$$

باقیمانده این تقسیم چیست؟

ب)
$$\begin{array}{r}
 x^2 - 5x - 24 \quad | \quad x - 8 \\
 + x^2 - 8x \quad \quad \square + \square \\
 \hline
 3x - 24 \\
 + 3x - 24 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. حل را کامل کنید.

$$\begin{array}{r}
 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad -3 + 2x^2 \\
 \hline
 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad 2x^2 - 3 \\
 + 10x^4 - 15x^2 \quad \quad 5x^2 + \boxed{} \\
 \hline
 12x^2 + 2x - 19 \\
 + 12x^2 - 18 \\
 \hline
 2x - \boxed{}
 \end{array}$$

رابطه‌های تقسیم:

$$(5x^2 + \boxed{})(2x^2 - 3) + 2x - \boxed{}$$

$$=$$

$$= 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19$$

و درجه چند جمله‌ای $2x - \boxed{}$ از درجه $2x^2 - 3$ کمتر است.

کار در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \quad | \quad 2 - x$

ب) $-x^3 - 12 + 8x \quad | \quad x + 6$

تمرین

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-2x^2y^3z^4}{18xz^5}$

ب) $\frac{2a^3y - a^4y^2 + 15xy}{-5y^2}$

ج) $(x^2 - 27) \div (x - 2)$

د) $(3y^2 - 10y - 24) \div (3y - 4)$

ه) $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad | \quad x + 3$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط

$$-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5 \quad | \quad 1 - x$$

تقسیم نشان دهید.

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با $2x^2 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این

جعبه x و طول آن $x + 4$ باشد، عرض آن را به دست آورید.

۴- اگر چند جمله‌ای $10x^2 + 23x^2 - 10x + a$ بر $4x + 3$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید.

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 9x + 9$ را بر هریک از عبارت‌های زیر به دست آورید.

$2x + 3$ و $2x - 3$ و $x - 3$ و $x + 3$