



## عبارت‌های جبری

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

	a	b	c
a	$a^2$	$ab$	$ac$
b	$ab$	$b^2$	$bc$
c	$ac$	$bc$	$c^2$

استفاده از شکل‌های هندسی برای اثبات تساوی‌های جبری سابقه‌ای دیرینه دارد. ریاضی‌دانان دوره اسلامی - ایرانی از پیشگامان این کار بوده‌اند.

## فعالیت

هر عبارت را، که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، یک جمله ای می نامیم.  
عبارت های زیر همگی یک جمله ای هستند.

$$7, x, 5x^1, -\sqrt{3}a^2x^2z, \frac{1}{5}xy, \pi x^2, 4z, -\frac{2}{7}$$

و عبارت های زیر یک جمله ای نیستند.

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2+2x, \sqrt[3]{y}, 1+x$$

هرگاه یک جمله ای ها دارای عبارت های حرفی یکسان باشند، به آنها یک جمله ای های متشابه گفته می شود؛ به عنوان مثال یک جمله ای های  $4x^2y$  و  $\frac{7}{4}x^2y$  و  $-3x^2y$  متشابه اند اما یک جمله ای های  $3x$  و  $3x^2$  متشابه نیستند.

۱- حاصل عبارت های زیر را مانند نمونه به دست آورید :

$$۱) 2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^2) = -56x^2$$

$$۲) \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

$$۳) (-3x^2)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 =$$

$$۴) \left(\frac{1}{4}a^2b\right)(ab)\left(\frac{-2}{5}a^2c^5\right) =$$

$$۵) 2(5xy^4)^2(-2x^5y^2) =$$

$$۶) (2x^2y)(3x^2y^2) + xy^2(-5x^2y) =$$

در یک جمله ای  $5a^2x^2y$ ، توان متغیر  $a$  برابر با ۲ است؛ بنابراین درجه این یک جمله ای نسبت به متغیر  $a$ ، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به  $x$ ، ۳ و درجه نسبت به  $y$ ، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر  $x$  و  $y$  را برابر با  $4=3+1$  تعریف می کنیم.

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x	متغیرها	یک جمله ای
$2+4=6$	۴	۲	a, x, y	$\sqrt{3}a^3x^2y^4$
				$5x^2y^2z^2$
				$-12x^2u$
				$\frac{3}{5}$

یک جمله ای های  $3x^2y^3$  و  $5x^2y^2$  را که مشابه نیستند، یک جمله ای های غیرمتشابه می گوئیم. چنانچه تعدادی یک جمله ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله ای است. چند جمله ای می تواند یک جمله ای یا جمع جبری چند یک جمله ای غیرمتشابه باشد؛ مانند:

$$4x^2 - 4x + 1, \quad x^2 - 2x, \quad \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{4}axy^2 - axy, \quad 3x^4$$

در هر چند جمله ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می کنیم؛ برای مثال در چند جمله ای  $-2xy^3 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به x برابر با ۲ و درجه نسبت به y برابر با ۳ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ ترین درجه یک جمله ای های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می کنیم. در این مثال درجه نسبت به x و y برابر با ۴ است. معمولاً در چند جمله ای ها، جملات را نسبت به توان های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می کنند.

۳- چند جمله ای های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

الف)  $3x^2 + 5 - 2x + 2x^3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$

ب)  $-3bxy^2 + ax^2y - 4bx^2y^2$  ج)  $\frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^3 + 3x^3y - 4$

## کار در کلاس

عبارت های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان های نزولی x مرتب کنید.

الف)  $5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)] =$

$$(4x+5x^2)(x^2-x+1) = \text{ب)}$$

$$(x+x^2)(x^4+x^2+1) = \text{ج)}$$

$$(x^2-2x+1)(x^2+x^2-2) = \text{د)}$$

## فعالیت

۱- به ازای مقادیر داده شده برای  $x$ ، جدول زیر را کامل کنید :

$x$	$x^2$	$6x$	$x^2+6x+9$	$(x+3)^2$
-۲				
۰				
۵				
$\frac{3}{2}$				

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟

حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر  $x$  ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

حاصل عبارت جبری  $(x+3)^2$  را به دست آورید و آن را با عبارت جبری  $x^2+6x+9$  مقایسه کنید.

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشد که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل

یکسانی داشته باشد، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری  $x^2+6x+9 = (x+3)^2$  یک اتحاد است.

برابری  $3x-3 = x+1$  را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای  $x=2$ ، به دست آورید.

آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای  $x$  بررسی کنید.

همان طور که می‌دانید به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

$$(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16 \quad \text{الف)}$$

$$7) (a+b)^T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = a^T + b^T$$

– جمله اول سمت راست برابری یعنی  $25x^2$  چه رابطه‌ای با  $5x$  دارد؟

— جمله سوم سمت راست برابری یعنی ۴ چه رابطه‌ای با ۲ دارد؟

$(5x + 2)^2 = (5x)^2 + \underbrace{2 \times 5x \times 2}_{\text{دو برابر حاصل ضرب دو جمله}} + 2^2$

The diagram shows a large square with side length  $a+b$ . It is divided into four regions by a vertical line of length  $a$  and a horizontal line of length  $b$ . The regions are labeled  $S_1$  (orange),  $S_2$  (blue),  $S_3$  (blue), and  $S_4$  (green). The total area is  $(a+b)^2$ .

$$\text{مساحت کل شکل} = (a+b)^2 = s_1 + 2s_2 + s_3$$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف)  $(5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2) =$

$$b) (3x - 5x)^2 =$$

$$7) (a-b)^2 =$$

۸۲

اتحاد مربع دو جمله‌ای :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

## کار در کلاس

۱- مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف)  $(2x+1)^2 =$

ب)  $(4a+3b)^2 =$

ج)  $(x^2 - \frac{1}{4})^2 =$

د)  $(2xy - \frac{1}{4}x^3)^2 =$

هـ)  $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 =$

و)  $(5 - 2\sqrt{2})^2 =$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

الف)  $(\dots + 3b^2)^2 = \underbrace{4a^2}_{\text{مربع}} + \dots + \underbrace{9b^4}_{\text{مربع جمله دوم}}$

مربع جمله دوم دو برابر مربع حاصل ضرب جمله اول  
جمله دوم  
جمله اول

$2a = \text{جمله اول} \Rightarrow (2a)^2 = 4a^2 = \text{مربع جمله اول}$

$12ab^2 = 2(2a)(3b^2) = \text{دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها}$

$(2a+3b^2)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$

در نتیجه داریم :

الف)  $(1+b)^2 = 1 + \dots + b^2$

ب)  $(xy - \frac{1}{4})^2 = \dots - \dots + \frac{1}{4}$

ج)  $(\dots - \dots)^2 = x^4 - \dots + \frac{1}{x^4} \quad (x \neq 0)$

د)  $(\dots - \dots)^2 = 36x^2 - 12xy + \dots$

## فعالیت

در سال گذشته خاصیت پخش‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها مطالعه کرده‌اید.

حاصل ضرب

$a(b+c) = ab+ac$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای  $ab+ac$  را به حاصل ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ ab+ac=a(b+c) \end{array}$$

(م.م.ب) بزرگ‌ترین مقسوم علیه (عامل) مشترک

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:

الف)  $8x^2+12x=4x \cdot 2x+4x \cdot 3$

$$=4x(2x+3)$$

(م.م.ب)  $=4x$  (با توجه به خاصیت پخش)

ب)  $6a^4-18a^2=$  ج)  $7x^4-14x^2+21x^2=$

د)  $5x^2y-10xy^2+15x^2y=$

## کار در کلاس

اگر سه جمله‌ای  $a^2+2ab+b^2$  را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت  $(a+b)^2$  بنویسیم در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده‌ایم؛ زیرا:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b) \end{array}$$

با توجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف)  $x^2+6x+9=(x+3)^2=(x+3)(x+3)$

مربع کامل  $(x+3)$  مربع کامل  $(x+3)$

ب)  $x^2-4x+4=(\quad-\quad)^2$

ج)  $n^4-10n^2+25=(\quad-\quad)^2$

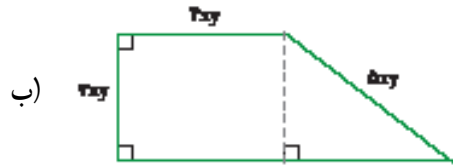
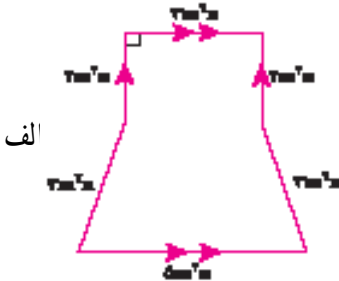
د)  $4ax^2+24axy+18ay^2=2a(4x^2+12xy+9y^2)=2a(\quad+\quad)^2$

(م.م.ب)  $=2a$

۱- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف)  $(-5m)^2(-2m)^3 - (\frac{1}{4}m)^2(-2m)^3$       ب)  $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$   
 ج)  $(x^m - 1)(x^m - 1)$       د)  $x - [(y - x) - (y - 1)]$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



۳- طرف دیگر عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف)  $(5y - 3x)^2 =$       ب)  $(-3a^2 - a)^2 =$   
 ج)  $(8x - \frac{1}{3})^2 =$       د)  $(\frac{2}{7})^2 + 2(\frac{2}{7})(\frac{3}{3}) + (\frac{3}{3})^2 =$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف)  $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$       ب)  $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

۵- عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف)  $2x^2 + 8x^2 + 8x$       ب)  $3a^2b - 12ab^2 + a^2b^2$   
 ج)  $a(x+1) + b(x+1)^2$       د)  $a^2 - 2a^2 + a$   
 هـ)  $x^2y^2 - 4xy + 4$       و)  $25x^2 + 30x^2 + 9x^2$

۶- با تبدیل  $b$  به  $-b$  در اتحاد  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$$\underbrace{(a + (-b))^2}_{(a-b)^2} =$$