بسم الله الرحمن الرحیم

پاسخ تمرین‌های فصل سوم کتاب پژوهش عملیاتی دکتر مهرگان

(تمارین فصل روش سیمپلکس)

نویسندگان : **رضا محمدیان**

امیرمزیکی

دانلود شده از

www.Rasad-ATU.ir

سایت انجمن علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی

۱) از سه معادله و پنج مجهول زیر ، X_3و X_4 و X_5 را بر حسب X_1و X_2 با استفاده از روش گوس- جردن پیدا کنید.

$$2X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 + 3X_5 = 14$$

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4 = 5$$

$$X_1 - 2X_3 - 2X_5 = -10$$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	RHS
۲	-۱	۲	-۱	۳	۱٤
۱	۲	۳	۱	۰	۵
۱	۰	-۲	۰	-۲	-۱۰

برای به دست آوردن X_3و X_4و X_5بر حسب X_1و X_2 می‌بایست X_3و X_4و X_5را یکه سازی کنیم پس ابتدا X_3 را یکه می‌کنیم

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	RHS
۱	$-\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۳}{۲}$	۷
-۲	$\frac{۷}{۲}$	۰	$\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۹}{۲}$	-۱٦
۳	-۱	۰	-۱	۱	٤

X_4 را یکه می‌کنیم

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	RHS
$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۱	۰	$\frac{۳}{۵}$	۹
$-\frac{٤}{۵}$	$\frac{۷}{۵}$	۰	۱	$-\frac{۹}{۵}$	$-\frac{۳۲}{۵}$
$\frac{۱۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۰	۰	$-\frac{٤}{۵}$	$-\frac{۱۲}{۵}$

X_5 را یکه می‌کنیم

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	RHS
$\frac{۹}{٤}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۰	$\frac{۳٦}{۵}$
$-\frac{۲۳}{٤}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۰	-۱
$-\frac{۱۱}{٤}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱	۳

$$\frac{۹}{٤}X_1 + \frac{۱}{۲}X_2 + X_3 = \frac{۳٦}{۵} \quad \Rightarrow \quad X_3 = \frac{۳٦}{۵} - \frac{۹}{٤}X_1 - \frac{۱}{۲}X_2$$

$$-\frac{۲۳}{٤}X_1 + \frac{۱}{۲}X_2 + X_4 = -1 \quad \Rightarrow \quad X_4 = -1 + \frac{۲۳}{٤}X_1 - \frac{۱}{۲}X_2$$

$$\frac{۹}{٤}X_1 + \frac{۱}{۲}X_2 + X_5 = ۳ \quad \Rightarrow \quad X_5 = ۳ + \frac{۱۱}{٤}X_1 + \frac{۱}{۲}X_2$$

۲) مسئله زیر را با استفاده از روش هندسی حل کنید .

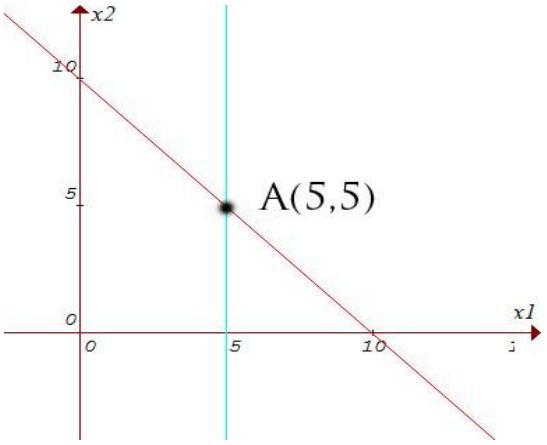
$$\text{Max } Z = ۵X_۱ + ۲X_۲$$

$$\text{S.t.} \quad X_۱ + X_۲ \le ۱۰ \implies X_۱ + X_۲ = ۱۰$$

$$X_۱ = ۵ \qquad X_۱ = ۵$$

$$X_۱ , X_۲ \ge ۰$$

$X_۱$	۱۰	۰
$X_۲$	۰	۱۰



$$\implies X_۱^* = ۵ \ , X_۲^* = ۵ , Z^* = ۳۵$$

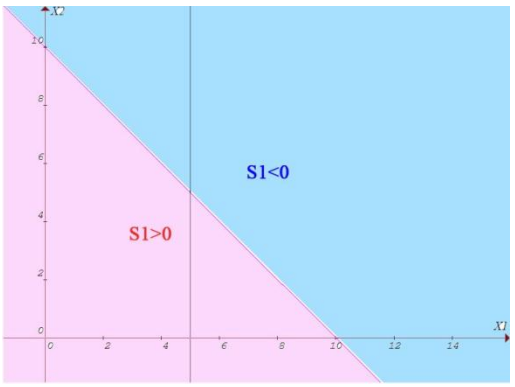
در صورتی که متغیر کمکی مربوط به محدودیت اول باشد ، به طریق هندسی ناحیه مربوط به هر یک از مجموعه محدودیت‌های زیر را مشخص کنید .

الف) $S_۱ \ge ۰$ ب) $S_۱ \le ۰$ ج) $S_۱ \le ۰$ و $X_۱ = ۵$

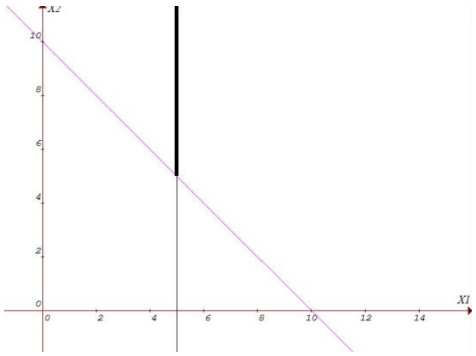
د) $S_۱ = ٤$ و $X_۱ = ۵$ ه) $S_۱ \le ۰$ و $X_۲ = ۰$ و) $S_۱ \ge ۰$ و $X_۱ = ۰$

ز) $S_۱ \ge ۰$ و $X_۱ \ge ۰$ و $X_۲ \ge ۰$

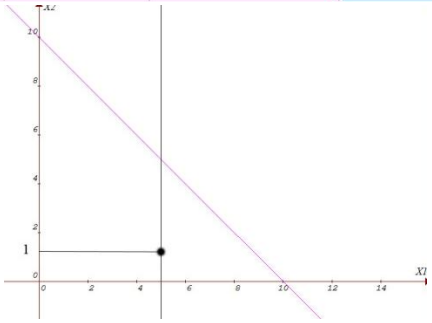
الف و ب)



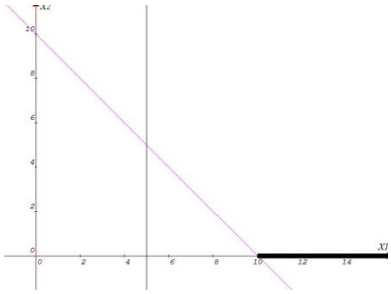
ج)



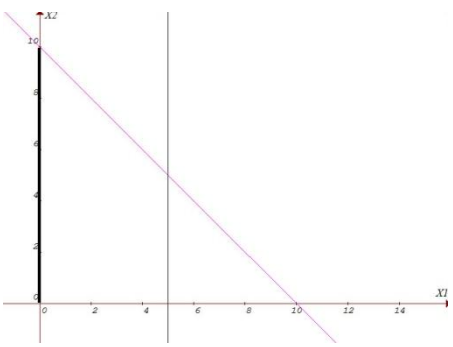
د)



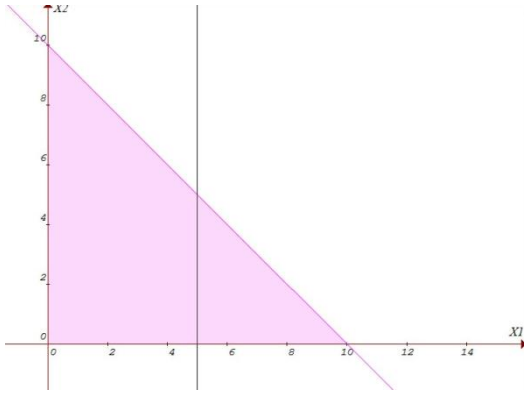
ه)



و)



ز)



۳) مسئله زیر مفروض است

$Max\ Z = ۱۵X_۱ + ۱۰X_۲$

S.t.

$۲X_۱ + ٤X_۲ \le ٤٤ \Rightarrow ۲X_۱ + ٤X_۲ = ٤٤ \Rightarrow$

$X_۱$	۰	۲۲
$X_۲$	۱۱	۰

$-X_۱ + ٤X_۲ \le ۲۰ \Rightarrow -X_۱ + ٤X_۲ = ۲۰ \Rightarrow$

$X_۱$	۰	٤
$X_۲$	۵	٦

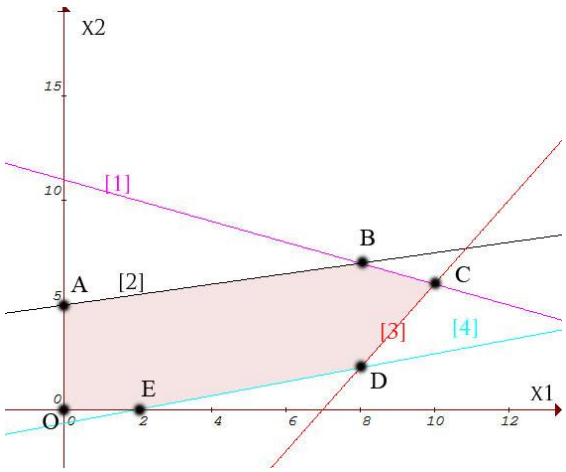
$۲X_۱ - X_۲ \le ۱٤ \Rightarrow ۲X_۱ - X_۲ = ۱٤ \Rightarrow$

$X_۱$	۷	۸
$X_۲$	۰	۲

$X_۱ - ۳X_۲ \le ۲ \Rightarrow X_۱ - ۳X_۲ = ۲ \Rightarrow$

$X_۱$	۲	۵
$X_۲$	۰	۱

$X_۱ , X_۲ \ge ۰$



الف) مسئله زیر را به روش ترسیمی حل و جواب‌های گوشه ای موجه را مشخص کنید.

ب) جدولی بسازید که در آن ، در مقابل هر جواب گوشه موجه ، معادلات معرف ، جواب اساسی موجه ، و متغیر غیر اساسی مربوط به آن مشخص شده باشد . جواب بهینه را صرفاً به کمک همین اطلاعات تعیین کنید .

ج) جدول مشابهی هم برای جواب‌های گوشه غیر موجه تهیه کنید . همچنین دستگاه‌هایی از معادلات معرف و متغیر های غیر اساسی را مشخص کنید که جوابی حاصل نمی‌کنند

$$\begin{cases} [۱]\ ۲X_۱ + ٤X_۲ = ٤٤ \\ [۲]\ -X_۱ + ٤X_۲ = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲X_۱ + ٤X_۲ = ٤٤ \\ X_۱ - ٤X_۲ = -۲۰ \end{cases}$$

$$۳X_۱ = ۲٤ \Rightarrow X_۱ = ۸ \Rightarrow X_۲ = ۷ \Rightarrow B(۸,۷) \Rightarrow Z_B = ۱۹۰$$

$$\begin{cases} [۱]\ ۲X_۱ + ٤X_۲ = ٤٤ \\ [۳]\ ۲X_۱ - X_۲ = ۱٤ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲X_۱ + ٤X_۲ = ٤٤ \\ -۲X_۱ + X_۲ = -۱٤ \end{cases}$$

$$۵X_۲ = ۳۰ \Rightarrow X_۲ = ٦ \Rightarrow X_۱ = ۱۰ \Rightarrow C(۱۰,٦) \Rightarrow Z^*_C = ۲۱۰$$

$$\begin{cases} [۳]\ ۲X_۱ - X_۲ = ۱٤ \\ [٤]\ X_۱ - ۳X_۲ = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲X_۱ - X_۲ = ۱٤ \\ -۲X_۱ + ٦X_۲ = -٤ \end{cases}$$

$$۵X_۲ = ۱۰ \Rightarrow X_۲ = ۲ \Rightarrow X_۱ = ۸ \Rightarrow D(۸,۲) \Rightarrow Z_D = ۱٤۰$$

$A(۰,۵) \Rightarrow Z_A = ۵۰$, $E(۲,۰) \Rightarrow Z_E = ۳۰$

نقطه	$X_۱ , X_۲$	معادلات معرف	متغیر های غیر اساسی	Z
O	(۰ ,۰)	$X_۱=۰$ $X_۲=۰$	$X_۱ , X_۲$	۰
A	(۰, ۵)	$X_۱=۰$ $-X_۱ + ٤X_۲=۲۰$	$X_۱ , S_۲$	۵۰
B	(۸ , ۷)	$۲X_۱ + ٤X_۲=٤٤$ $-X_۱ + ٤X_۲=۲۰$	$S_۱ , S_۲$	۱۹۰
C	(۱۰ , ٦)	$۲X_۱ + ٤X_۲=٤٤$ $۲X_۱ - X_۲=۱٤$	$S_۱ , S_۳$	۲۱۰
D	(۸ , ۲)	$X_۱ - ۳X_۲ = ۲$ $۲X_۱ - X_۲=۱٤$	$S_۳ , S_٤$	۱٤۰
E	(۲ , ۰)	$X_۲=۰$ $X_۱ - ۳X_۲ = ۲$	$X_۲ , S_٤$	۳۰

✓ هر نقطه گوشه موجه که از نقاط گوشه ای موجه مجاورش بهتر باشد ، نقطه بهینه است. بنابراین مطابق این نکته نقطه Cچون از نقاط مجاورش بهتر است ، نقطه بهینه است.

٤) مسئله زیر را به روش سیمپلکس حل کنید.

$\text{Max } Z = ٦X_۱ + ۸X_۲$ استاندارد $\text{Max } Z - ٦X_۱ - ۸X_۲ = ۰$

S.t. $٤X_۱ + X_۲ \le ۲۰$ $\Rightarrow$ $٤X_۱ + X_۲ + s_۱ = ۲۰$

$X_۱ + ٤X_۲ \le ٤۰$ $X_۱ + ٤X_۲ + s_۲ = ٤۰$

$X_۱ , X_۲ \ge ۰$ $X_۱ , X_۲ , s_۱ , s_۲ \ge ۰$

	Z	$X_۱$	$X_۲$	$s_۱$	$s_۲$	R.H.S
Z	۱	-٦	-۸	۰	۰	۰
$s_۱$	۰	٤	۱	۰	۰	۲۰
$s_۲$	۰	۱	٤	۰	۱	٤۰
Z	۱	-٤	۰	۰	۲	۸۰
$s_۱$	۰	$\frac{۱۵}{٤}$	۰	۱	$-\frac{۱}{٤}$	۱۰
$X_۲$	۰	$\frac{۱}{٤}$	۱	۰	$\frac{۱}{٤}$	۱۰
Z	۱	۰	۰	$\frac{۱٦}{۱۵}$	$\frac{۲٦}{۱۵}$	$\frac{۲۷۲}{۳}$
$X_۱$	۰	۱	۰	$\frac{٤}{۱۵}$	$-\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۸}{۳}$
$X_۲$	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{٤}{۱۵}$	$\frac{۲۸}{۳}$

۵) مسئله زیر را به روش سیمپلکس حل کنید.

$$\text{Max } Z = ٤X_١ + ٣X_٢ + ٦X_٣$$

$$\text{S.t.} \quad ٣X_١ + X_٢ + ٣X_٣ \le ٣٠$$

$$٢X_١ + ٢X_٢ + ٣X_٣ \le ٤٠$$

$$X_١, X_٢, X_٣ \ge ٠$$

استاندارد $\Longrightarrow$

$$\text{Max } Z - ٤X_١ - ٣X_٢ - ٦X_٣ = ٠$$

$$٣X_١ + X_٢ + ٣X_٣ + s_١ = ٣٠$$

$$٢X_١ + ٢X_٢ + ٣X_٣ + s_٢ = ٤٠$$

$$X_١, X_٢, X_٣, s_١, s_٢ \ge ٠$$

	Z	$X_١$	$X_٢$	$X_٣$	$s_١$	$s_٢$	R.H.S
Z	١	-٤	-٣	-٦	٠	٠	٠
$s_١$	٠	٣	١	٣	١	٠	٣٠
$s_٢$	٠	٢	٢	٣	٠	١	٤٠
Z	١	٢	-١	٠	٢	٠	٦٠
$X_٣$	٠	١	$\frac{١}{٣}$	١	$\frac{١}{٣}$	٠	١٠
$s_٢$	٠	-١	١	٠	-١	١	١٠
Z	١	١	٠	٠	١	١	٧٠
$X_٣$	٠	$\frac{٤}{٣}$	٠	١	$\frac{٢}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$	$\frac{٢٠}{٣}$
$X_٢$	٠	-١	١	٠	-١	١	١٠

$$\Longrightarrow \begin{cases} Z^* = ٧٠ \\ X^*_٢ = ١٠ \\ X^*_٣ = \frac{٢٠}{٣} \end{cases}$$

۶) مسئله زیر را به روش سیمپلکس حل کنید.

$$\text{Max } Z = ۳X_۱ + X_۲ + ۳X_۳$$

$$\text{S.t.} \quad ۲X_۱ + X_۲ + X_۳ \le ۲$$

$$X_۱ + ۲X_۲ + ۳X_۳ \le ۵$$

$$۲X_۱ + ۲X_۲ + X_۳ \le ۶$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \ge ۰$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Max } Z - ۳X_۱ - X_۲ - ۳X_۳ = ۰$$

$$۲X_۱ + X_۲ + X_۳ + s_۱ = ۲$$

$$X_۱ + ۲X_۲ + ۳X_۳ + s_۲ = ۵$$

$$۲X_۱ + ۲X_۲ + X_۳ + s_۳ = ۶$$

$$X_۱, X_۲, X_۳, s_۱, s_۲, s_۳ \ge ۰$$

	Z	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	R.H.S
Z	۱	-۳	-۱	-۳	۰	۰	۰	۰
$s_۱$	۰	۲	۱	۱	۱	۰	۰	۲
$s_۲$	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۰	۵
$s_۳$	۰	۲	۲	۱	۰	۰	۱	۶
Z	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۰	۳
$X_۱$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱
$s_۲$	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۴
$s_۳$	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۱	۴
Z	۱	۰	$\frac{۷}{۵}$	۰	$\frac{۶}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	۰	$\frac{۲۷}{۵}$
$X_۱$	۰	۱	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$
$X_۳$	۰	۰	$\frac{۳}{۵}$	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۰	$\frac{۸}{۵}$
$s_۳$	۰	۰	۱	۰	-۱	۰	۱	۴

$$\Longrightarrow \begin{cases} Z^* = \frac{۲۷}{۵} \\ X^*_۱ = \frac{۱}{۵} \\ X^*_۳ = \frac{۸}{۵} \end{cases}$$

۷) مسئله زیر را به روش سیمپلکس حل کنید.

$Max\ Z = ٤X_١ + ٢X_٢$

S.t. $X_١ \le ٧$

$X_٢ \le ٥$

$-٨X_١ + ٤X_٢ \le ١٠$

$X_١ \ge ٠$, $X_٢$ آزاد در علامت

$\Rightarrow$

$Max\ Z = ٤X_١ + ٢x'_٢ - ٢x''_٢$

$X_١ \le ٧$

$x'_٢ - x''_٢ \le ٥$

$-٨X_١ + ٤x'_٢ - ٤x''_٢ \le ١٠$

$X_١, x'_٢, x''_٢ \ge ٠$

$\Rightarrow$

$Max\ Z - ٤X_١ - ٢x'_٢ + ٢x''_٢ = ٠$

$X_١ + s_١ = ٧$

$x'_٢ - x''_٢ + s_٢ = ٥$

$-٨X_١ + ٤x'_٢ - ٤x''_٢ + s_٣ = ١٠$

$X_١, x'_٢, x''_٢, s_١, s_٢, s_٣ \ge ٠$

	Z	$X_١$	$x'_٢$	$x''_٢$	$s_١$	$s_٢$	$s_٣$	R.H.S
Z	١	-٤	-٢	٢	٠	٠	٠	٠
$s_١$	٠	١	٠	٠	١	٠	٠	٧
$s_٢$	٠	٠	١	-١	٠	١	٠	٥
$s_٣$	٠	-٨	٤	-٤	٠	٠	١	١٠
Z	١	٠	-٢	٢	٤	٠	٠	٢٨
$X_١$	٠	١	٠	٠	١	٠	٠	٧
$s_٢$	٠	٠	١	-١	٠	١	٠	٥
$s_٣$	٠	٠	٤	-٤	٨	٠	١	٦٦
Z	١	٠	٠	٠	٤	٢	٠	٣٨
$X_١$	٠	١	٠	٠	١	٠	٠	٧
$x'_٢$	٠	٠	١	-١	٠	١	٠	٥
$s_٣$	٠	٠	٠	٠	٨	-٤	١	٤٦

$\Rightarrow$
$Z^* = ٣٨$
$X^*_١ = ٧$
$X^*_٢ = x'_٢ - x''_٢ = ٥-٠ = ٥$

۸) مسئله زیر را به روش M بزرگ حل کنید .

$\text{Min } Z = ۲X_۱ + X_۲$

S.t. $X_۱ + X_۲ \le ۱۰۰$

$X_۲ \le ۷۰$

$X_۱ \le ۲۰$

$X_۱, X_۲ \ge ۰$

استاندارد $\Rightarrow$

$\text{Max } -Z + ۲X_۱ + X_۲ + MR = ۰$

$X_۱ + X_۲ + s_۱ = ۱۰۰$

$X_۲ + s_۲ = ۷۰$

$X_۱ - s_۳ + R = ۲۰$

$X_۱, X_۲, s_۱, s_۲, s_۳, R \ge ۰$

	Z	$X_۱$	$X_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	R	R.H.S
Z	-۱	۲	۱	۰	۰	۰	M	۰
$s_۱$	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱۰۰
$s_۲$	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۷۰
R	۰	۱	۰	۰	۰	-۱	۱	۲۰
Z	-۱	-M+۲	۱	۰	۰	M	۰	-۲۰M
$s_۱$	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱۰۰
$s_۲$	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۷۰
R	۰	۱	۰	۰	۰	-۱	۱	۲۰
Z	-۱	۰	۱	۰	۰	۲	M-۲	-٤۰
$s_۱$	۰	۰	۱	۱	۰	۱	-۱	۸۰
$s_۲$	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۷۰
$X_۱$	۰	۱	۰	۰	۰	-۱	۱	۲۰

$$\Rightarrow \begin{cases} Z^* = ٤۰ \\ X^*_۱ = ۲۰ \end{cases}$$

۹) مسئله زیر را به روش M بزرگ حل کنید .

$$\text{Max } Z = ٤X_١ - ٢X_٢ + ٢X_٣$$

$$\text{S.t.} \quad X_١ - ٣X_٢ \le ٣$$

$$٢X_١ - X_٢ + X_٣ \le ١٠$$

$$٣X_١ + ٤X_٢ + X_٣ \ge ٢٤$$

$$X_١ - X_٣ \ge ٢$$

$$X_١, X_٢, X_٣ \ge ٠$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Max } Z - ٤X_١ + ٢X_٢ - ٢X_٣ + MR_١ + MR_٢ = ٠$$

$$X_١ - ٣X_٢ + S_١ = ٣$$

$$٢X_١ - X_٢ + X_٣ + S_٢ = ١٠$$

$$٣X_١ + ٤X_٢ + X_٣ - S_٣ + R_١ = ٢٤$$

$$X_١ - X_٣ - S_٤ + R_٢ = ٢$$

$$X_١, X_٢, X_٣, S_١, S_٢, S_٣, S_٤, R_١, R_٢ \ge ٠$$

	Z	$X_١$	$X_٢$	$X_٣$	$S_١$	$S_٢$	$S_٣$	$S_٤$	$R_١$	$R_٢$	R.H.S
Z	١	-٤	٢	-٢	٠	٠	٠	٠	M	M	٠
$S_١$	٠	١	-٣	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٣
$S_٢$	٠	٢	-١	١	٠	١	٠	٠	٠	٠	١٠
$R_١$	٠	٣	٤	١	٠	٠	-١	٠	١	٠	٢٤
$R_٢$	٠	١	٠	-١	٠	٠	٠	-١	٠	١	٢
Z	١	-٤M-٤	-٤M+٢	-٢	٠	٠	M	M	٠	٠	-٢٦M
$S_١$	٠	١	-٣	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٣
$S_٢$	٠	٢	-١	١	٠	١	٠	٠	٠	٠	١٠
$R_١$	٠	٣	٤	١	٠	٠	-١	٠	١	٠	٢٤
$R_٢$	٠	١	٠	-١	٠	٠	٠	-١	٠	١	٢
Z	١	٠	-٤M+٢	-٤M-٦	٠	٠	M	-٣M-٤	٠	٤M+٤	-١٨M+٨
$S_١$	٠	٠	-٣	١	١	٠	٠	١	٠	-١	١
$S_٢$	٠	٠	-١	٣	٠	١	٠	٢	٠	-٢	٦
$R_١$	٠	٠	٤	٤	٠	٠	-١	٣	١	-٣	١٨
$X_١$	٠	١	٠	-١	٠	٠	٠	-١	٠	١	٢

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	R_1	R_2	R.H.S
Z	۱	۰	-۱۶M-۱۶	۰	٤M+٦	۰	M	M+۲	۰	-۲	-۱٤M+۱٤
X_3	۰	۰	-۳	۱	۱	۰	۰	۱	۰	-۱	۱
S_2	۰	۰	۸	۰	-۳	۱	۰	-۱	۰	۱	۳
R_1	۰	۰	۱٦	۰	-٤	۰	-۱	-۱	۱	۱	۱٤
X_1	۰	۱	-۳	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۳
Z	۱	۰	۰	۰	-۲M	۲M+۲	M	-M	۰	۲M	-۸M+۲۰
X_3	۰	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	۰	$\frac{۵}{۸}$	۰	$-\frac{۵}{۸}$	$\frac{۱۷}{۸}$
X_2	۰	۰	۰	۰	$-\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	۰	$-\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$
R_1	۰	۰	۱	۰	۲	-۲	-۱	۱	۱	-۱	۸
X_1	۰	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	۰	$-\frac{۳}{۸}$	۰	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳۳}{۸}$
Z	۱	۰	۰	۰	۰	۲	۰	۰	M	M	۲۰
X_3	۰	۰	۰	۱	۰	$\frac{۱}{٤}$	$-\frac{۱}{۱٦}$	$\frac{۱۱}{۱٦}$	$\frac{۱}{۱٦}$	$-\frac{۱۱}{۱٦}$	$\frac{۲۱}{۸}$
X_2	۰	۰	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{٤}$	$-\frac{۳}{۱٦}$	$\frac{۱}{۱٦}$	$\frac{۳}{۱٦}$	$-\frac{۱}{۱٦}$	$\frac{۱۵}{۸}$
S_1	۰	۰	۰	۰	۱	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	٤
X_1	۰	۱	۰	۰	۰	$\frac{۱}{٤}$	$-\frac{۱}{۱٦}$	$-\frac{۵}{۱٦}$	$\frac{۱}{۱٦}$	$\frac{۵}{۱٦}$	$\frac{۳۷}{۸}$

$$\begin{cases} Z^* = ۳۸ \\ X^*_1 = \frac{۳۷}{۸} \\ X^*_2 = \frac{۱۵}{۸} \\ X^*_3 = \frac{۲۱}{۸} \end{cases}$$

۱۰) مسئله زیر را به روش M بزرگ حل کنید .

$$\text{Max } Z = ٤X_١ + ٣X_٢ + ٧X_٣$$

$$\text{S.t.} \quad ٢X_١ + X_٢ + ٣X_٣ \le ١٢٠ \quad \Longrightarrow \quad ٢X_١ + X_٢ + ٣X_٣ + s_١ = ١٢٠$$

$$X_١ + ٣X_٢ + ٢X_٣ = ١٢٠ \qquad X_١ + ٣X_٢ + ٢X_٣ + R = ١٢٠$$

$$X_١, X_٢, X_٣ \ge ٠ \qquad X_١, X_٢, X_٣, s_١, R \ge ٠$$

$$\text{Max } Z - ٤X_١ - ٣X_٢ - ٧X_٣ + MR = ٠$$

	Z	$X_١$	$X_٢$	$X_٣$	$s_١$	R	R.H.S
Z	١	-٤	-٣	-٧	٠	M	٠
$s_١$	٠	٢	١	٣	١	٠	١٢٠
R	٠	١	٣	٢	٠	١	١٢٠
Z	١	-M-٤	-٣M-٣	-٢M-٧	٠	٠	-١٢٠M
$s_١$	٠	٢	١	٣	١	٠	١٢٠
R	٠	١	٣	٢	٠	١	١٢٠
Z	١	-٣	٠	-٥	٠	٠	١٢٠
$s_١$	٠	$\frac{٥}{٣}$	٠	$\frac{٧}{٣}$	١	$-\frac{١}{٣}$	٨٠
$X_٢$	٠	$\frac{١}{٣}$	١	$\frac{٢}{٣}$	٠	$\frac{١}{٣}$	٤٠
Z	١	$\frac{٤}{٧}$	٠	٠	$\frac{١٥}{٧}$	$-\frac{٥}{٧}$	$\frac{٢٠٤٠}{٧}$
$X_٣$	٠	$\frac{٥}{٧}$	٠	١	$\frac{٣}{٧}$	$-\frac{١}{٧}$	$\frac{٢٤٠}{٧}$
$X_٢$	٠	$-\frac{١}{٧}$	١	٠	$-\frac{٢}{٧}$	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{١٢٠}{٧}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Z^* = \frac{٢٠٤٠}{٧} = ٢٩١,٤٢ \\ X^*_٢ = \frac{١٢٠}{٧} = ١٧,١٤ \\ X^*_٣ = \frac{٢٤٠}{٧} = ٣٤,٢٨ \end{cases}$$

۱۱) مسئله زیر را به روش M بزرگ حل کنید .

$\text{Min } Z = ۲۰X_۱ + ۱۵X_۲$

S.t.

$۲X_۱ + X_۲ \geq ۵$

$-۳X_۱ + ۲X_۲ \leq ۳$

$X_۱ + X_۲ \geq ۳$

$X_۱ , X_۲ \geq ۰$

$\Rightarrow$

$\text{Max } -Z + ۲۰X_۱ + ۱۵X_۲ + MR_۱ + MR_۲ = ۰$

$۲X_۱ + X_۲ - s_۱ + R_۱ = ۵$

$-۳X_۱ + ۲X_۲ + s_۲ = ۳$

$X_۱ + X_۲ - s_۳ + R_۲ = ۳$

$X_۱ , X_۲ , s_۱ , s_۲ , s_۳ , R_۱ , R_۲ \geq ۰$

	Z	$X_۱$	$X_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	$R_۱$	$R_۲$	R.H.S
Z	-۱	۲۰	۱۵	۰	۰	۰	M	M	۰
$R_۱$	۰	۲	۱	-۱	۰	۰	۱	۰	۵
$s_۱$	۰	-۳	۲	۰	۱	۰	۰	۰	۳
$R_۲$	۰	۱	۱	۰	۰	-۱	۰	۱	۳
Z	-۱	-۳M+۲۰	-۲M+۱۵	M	۰	M	۰	۰	-۸M
$R_۱$	۰	۲	۱	-۱	۰	۰	۱	۰	۵
$s_۱$	۰	-۳	۲	۰	۱	۰	۰	۰	۳
$R_۲$	۰	۱	۱	۰	۰	-۱	۰	۱	۳
Z	-۱	۰	$-\frac{۱}{۲}M+۵$	$-\frac{۱}{۲}M+۱۰$	۰	M	$\frac{۳}{۲}M-۱۰$	۰	$-\frac{۱}{۲}M-۵۰$
$X_۱$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۵}{۲}$
$s_۱$	۰	۰	$\frac{۷}{۲}$	$-\frac{۳}{۲}$	۱	۷	$\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۲۱}{۲}$
$R_۲$	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$
Z	-۱	۰	۰	۵	۰	۱۰	M-۵	M-۱۰	-۵۵
$X_۱$	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۲
$s_۱$	۰	۰	۰	-۵	۱	۷	۵	-۷	۷
$X_۲$	۰	۰	۱	۱	۰	-۲	-۱	۲	۱

$\Rightarrow$ $Z^* = ۵۵$, $X^*_۱ = ۲$, $X^*_۲ = ۱$

۱۲) مسئله زیر را به روش M بزرگ حل کنید .

$$\text{Max } Z = ۲X_۱ + ۳X_۲ - ۵X_۳ \qquad \text{Max } Z - ۲X_۱ - ۳X_۲ + ۵X_۳ + MR_۱ + MR_۲ = ۰$$

$$\text{S.t.} \quad X_۱ + X_۲ + X_۳ = ۷ \quad \Longrightarrow \quad X_۱ + X_۲ + X_۳ + R_۱ = ۷$$

$$۲X_۱ - ۵X_۲ + X_۳ \geq ۱۰ \qquad ۲X_۱ - ۵X_۲ + X_۳ - s + R_۲ = ۱۰$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \geq ۰ \qquad X_۱, X_۲, X_۳, s, R_۱, R_۲ \geq ۰$$

	Z	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	s	$R_۱$	$R_۲$	R.H.S
Z	۱	-۲	-۳	۵	۰	M	M	۰
$R_۱$	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۷
$R_۲$	۰	۲	-۵	۱	-۱	۰	۱	۱۰
Z	۱	-۳M-۲	٤M-۳	-۲M+۵	M	۰	۰	-۱۷M
$R_۱$	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۷
$R_۲$	۰	۲	-۵	۱	-۱	۰	۱	۱۰
Z	۱	۰	$-\frac{۷}{۲}$M-۸	$-\frac{۱}{۲}$M+٦	$-\frac{۱}{۲}$M-۱	۰	۰	-۲M+۱۰
$R_۱$	۰	۰	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۲
$X_۱$	۰	۱	$-\frac{۵}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۵
Z	۱	۰	۰	$\frac{۵۰}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$M+\frac{۱٦}{۷}$	$-\frac{۱}{۲}$M-$\frac{۸}{۷}$	$\frac{۱۰۲}{۷}$
$X_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۲}{۷}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤}{۷}$
$X_۱$	۰	۱	۰	$\frac{٦}{۷}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{۵}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤۵}{۷}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Z^* = \frac{۱۰۲}{۷} = ۱٤,۵۷ \\ X^*_۱ = \frac{٤۵}{۷} = ٦,٤۲ \\ X^*_۲ = \frac{٤}{۷} = ۰,۵۷ \end{cases}$$

۱۳) مسئله زیر را به روش دو مرحله ای حل کنید .

$$\text{Max } Z = ۵X_۱ - ۶X_۲ - ۷X_۳$$

$$\text{S.t.} \quad X_۱ + ۵X_۲ - ۳X_۳ \geq ۱۵$$

$$۵X_۱ - ۶X_۲ + ۱۰X_۳ \leq ۲۰$$

$$X_۱ + X_۲ + X_۳ = ۵$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \geq ۰$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Max } Z = ۵X_۱ - ۶X_۲ - ۷X_۳$$

$$\text{Min } W = R_۱ + R_۲$$

$$X_۱ + ۵X_۲ - ۳X_۳ - s_۱ + R_۱ = ۱۵$$

$$۵X_۱ - ۶X_۲ + ۱۰X_۳ + s_۲ = ۲۰$$

$$X_۱ + X_۲ + X_۳ + R_۲ = ۵$$

$$X_۱, X_۲, X_۳, s_۱, s_۲, R_۱, R_۲ \geq ۰$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Max } Z = ۵X_۱ - ۶X_۲ - ۷X_۳$$

$$\text{Max } -W + R_۱ + R_۲ = ۰$$

$$X_۱ + ۵X_۲ - ۳X_۳ - s_۱ + R_۱ = ۱۵$$

$$۵X_۱ - ۶X_۲ + ۱۰X_۳ + s_۲ = ۲۰$$

$$X_۱ + X_۲ + X_۳ + R_۲ = ۵$$

	W	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$s_۱$	$s_۲$	$R_۱$	$R_۲$	R.H.S
W	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰
$R_۱$	۰	۱	۵	-۳	-۱	۰	۱	۰	۱۵
$s_۲$	۰	۵	-۶	۱۰	۰	۱	۰	۰	۲۰
$R_۲$	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۵
W	-۱	-۲	-۶	۲	۱	۰	۰	۰	۲۰
$R_۱$	۰	۱	۵	-۳	-۱	۰	۱	۰	۱۵
$s_۲$	۰	۵	-۶	۱۰	۰	۱	۰	۰	۲۰
$R_۲$	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۵
W	-۱	$-\frac{۴}{۵}$	۰	$-\frac{۸}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$-\frac{۶}{۵}$	۰	-۲
$X_۲$	۰	$\frac{۱}{۵}$	۱	$-\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	۰	۳
$s_۲$	۰	$\frac{۳۱}{۵}$	۰	$\frac{۳۲}{۵}$	$-\frac{۶}{۵}$	۱	$-\frac{۶}{۵}$	۰	۳۸
$R_۲$	۰	$\frac{۴}{۵}$	۰	$\frac{۸}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	۱	۲
W	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	-۱	۱	۰
$X_۲$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{۱۱}{۴۰}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱۵}{۴}$
$s_۲$	۰	۳	۰	۰	-۲	۱	-۲	-۴	۳۰
$X_۳$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	$\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۵}{۸}$	$\frac{۵}{۴}$

	Z	X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	R.H.S
Z	۱	-۵	٦	۷	۰	۰	۰
X_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{٤}{۱۵}$
s_2	۰	۳	۰	۰	-۲	۱	۳۰
X_3	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	$\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{۵}{٤}$
Z	۱	$-\frac{۲۳}{۲}$	۰	۰	$-\frac{۱}{۸}$	۰	$-\frac{۱۲۵}{٤}$
X_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{۱۵}{٤}$
s_2	۰	۳	۰	۰	-۲	۱	۳۰
X_3	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	$\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{۵}{٤}$
Z	۱	۰	۰	۲۳	$\frac{۱۱}{٤}$	۰	$-\frac{۵}{۲}$
X_2	۰	۰	۱	-۱	$-\frac{۱}{٤}$	۰	$\frac{۵}{۲}$
s_2	۰	۰	۰	-٦	$\frac{۱۱}{٤}$	۱	$\frac{٤۵}{۲}$
X_1	۰	۱	۰	۲	$\frac{۱}{٤}$	۰	$\frac{۵}{۲}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z^* = -\frac{۵}{۲} \\ X^*_1 = \frac{۵}{۲} \\ X^*_2 = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

۱٤) مسئله زیر را به روش دو مرحله ای حل کنید .

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2 \qquad \text{Max } Z = X_1 + X_2 \qquad \text{Max } Z - X_1 - X_2 = ۰$$

$$\text{Min } W = R \qquad \text{Min } -W + R = ۰$$

$$\text{S.t.} \quad ۳X_1 + ۲X_2 \le ۲۰ \qquad ۳X_1 + ۲X_2 + s_1 = ۲۰ \qquad ۳X_1 + ۲X_2 + s_1 = ۲۰$$

$$۲X_1 + ۳X_2 \le ۲۰ \quad \Rightarrow \quad ۲X_1 + ۳X_2 + s_2 = ۲۰ \quad \Rightarrow \quad ۲X_1 + ۳X_2 + s_2 = ۲۰$$

$$X_1 + ۲۰X_2 \ge ۲ \qquad X_1 + ۲۰X_2 - s_3 + R = ۲ \qquad X_1 + ۲۰X_2 - s_3 + R = ۲$$

$$X_1, X_2 \ge ۰ \qquad X_1, X_2, s_1, s_2, s_3, R \ge ۰ \qquad X_1, X_2, s_1, s_2, s_3, R \ge ۰$$

	W	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	R	R.H.S
W	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰
s_1	۰	۳	۲	۱	۰	۰	۰	۲۰
s_2	۰	۲	۳	۰	۱	۰	۰	۲۰
R	۰	۱	۲	۰	۰	-۱	۱	۲
W	-۱	-۱	-۲	۰	۰	۱	۰	-۲
s_1	۰	۳	۲	۱	۰	۰	۰	۲۰
s_2	۰	۲	۳	۰	۱	۰	۰	۲۰
R	۰	۱	۲	۰	۰	-۱	۱	۲
W	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰
s_1	۰	۲	۰	۱	۰	۱	-۱	۱۸
s_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	$-\frac{۳}{۲}$	۱۷
X_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱

	Z	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	R.H.S
Z	۱	-۱	-۱	۰	۰	۰	۰
s_1	۰	۲	۰	۱	۰	۱	۱۸
s_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	۱۷
X_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۱
Z	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۱
s_1	۰	۲	۰	۱	۰	۱	۱۸
s_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	۱۷
X_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۱

Z	۱	۰	۱	۰	۰	-۱	۲
$s_۱$	۰	۰	-٤	۱	۰	۳	۱٤
$s_۲$	۰	۰	-۱	۰	۱	۲	۱٦
$X_۱$	۰	۱	۲	۰	۰	-۱	۲
Z	۱	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	$\frac{۲۰}{۳}$
$s_۳$	۰	۰	$-\frac{٤}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۱	$\frac{۱٤}{۳}$
$s_۲$	۰	۰	$\frac{۵}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	۱	۰	$\frac{۲۰}{۳}$
$X_۱$	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	$\frac{۲۰}{۳}$
Z	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۰	۸
$s_۳$	۰	۰	۰	$\frac{۱۳}{۱۵}$	$\frac{٤}{۵}$	۱	۱۰
$X_۲$	۰	۰	۱	$-\frac{۲}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	۰	٤
$X_۱$	۰	۱	۰	$\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	۰	٤

$$\Rightarrow \begin{cases} Z^* = ۸ \\ X^*_۱ = ٤ \\ X^*_۲ = ٤ \end{cases}$$

۱۵) مسئله زیر را به روش دو مرحله ای حل کنید .

$$\text{Min } Z = -X_۱ + ۲X_۲ - ۳X_۳$$

$$\text{S.t.} \quad X_۱ + X_۲ + X_۳ = ٦$$

$$-X_۱ + X_۲ + ۲X_۳ = ٤$$

$$۲X_۲ + ۳X_۳ = ۱۰$$

$$X_۳ \le ۲$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \ge ۰$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Min } Z = -X_۱ + ۲X_۲ - ۳X_۳$$

$$\text{Min } W = R_۱ + R_۲ + R_۳$$

$$X_۱ + X_۲ + X_۳ + R_۱ = ٦$$

$$-X_۱ + X_۲ + ۲X_۳ + R_۲ = ٤$$

$$۲X_۲ + ۳X_۳ + R_۳ = ۱۰$$

$$X_۳ + s_۱ = ۲$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Max } -Z \; -X_۱ + ۲X_۲ - ۳X_۳ = ۰$$

$$\text{Max } -W \; R_۱ + R_۲ + R_۳ = ۰$$

$$X_۱ + X_۲ + X_۳ + R_۱ = ٦$$

$$-X_۱ + X_۲ + ۲X_۳ + R_۲ = ٤$$

$$۲X_۲ + ۳X_۳ + R_۳ = ۱۰$$

$$X_۳ + s_۱ = ۲$$

$$X_۱, X_۲, X_۳, s_۱, R_۱, R_۲, R_۳ \ge ۰$$

	W	X_1	X_2	X_3	s_1	R_1	R_2	R_3	R.H.S
W	-۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	٦
R_2	۰	-۱	۱	۲	۰	۰	۱	۰	٤
R_3	۰	۰	۲	۳	۰	۰	۰	۱	۱۰
s_1	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۲
W	-۱	۰	-٤	-٦	۰	۰	۰	۰	-۲۰
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	٦
R_2	۰	-۱	۱	۲	۰	۰	۱	۰	٤
R_3	۰	۰	۲	۳	۰	۰	۰	۱	۱۰
s_1	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۲
W	۰	۰	-٤	۰	٦	۰	۰	۰	-۸
R_1	-۱	۱	۱	۰	-۱	۱	۰	۰	٤
R_2	۰	-۱	۱	۰	-۲	۰	۱	۰	۰
R_3	۰	۰	۲	۰	-۳	۰	۰	۱	٤
X_3	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۲
W	۰	-٤	۰	۰	-۲	۰	٤	۰	-۸
R_1	-۱	۲	۰	۰	۱	۱	-۱	۰	٤
X_2	۰	-۱	۱	۰	-۲	۰	۱	۰	۰
R_3	۰	۲	۰	۰	۱	۰	-۲	۱	٤
X_3	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۲
W	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۰
R_1	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	-۱	۰
X_2	۰	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
X_1	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	$\frac{۱}{۲}$	۲
X_3	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۲

	Z	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	R.H.S
Z	-۱	-۱	۲	-۳	۰	۰
$X_۱$	۰	۰	۱	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۲
$X_۲$	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
$X_۳$	۰	۰	۰	۱	۱	۲
Z	-۱	۰	۰	۰	$\frac{۱۳}{۲}$	٤
$X_۱$	۰	۰	۱	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۲
$X_۲$	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
$X_۳$	۰	۰	۰	۱	۱	۲

$$\Longrightarrow \begin{cases} Z^* = ٤ \\ X^*_۱ = ۲ \\ X^*_۲ = ۲ \\ X^*_۳ = ۲ \end{cases}$$

۱٦) مسئله زیر را به روش دو مرحله ای حل کنید .

$$\text{Max } Z = X_۱ + ۵X_۲ + ۳X_۳$$

$$\text{S.t.} \quad X_۱ + ۲X_۲ + X_۳ = ۳$$

$$۲X_۲ - X_۳ = ٤$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \geq ۰$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Max } Z - X_۱ - ۵X_۲ - ۳X_۳ = ۰$$

$$\text{Min } W = R_۱ + R_۲$$

$$X_۱ + ۲X_۲ + X_۳ + R_۱ = ۳$$

$$۲X_۲ - X_۳ + R_۲ = ٤$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Max } Z - X_۱ - ۵X_۲ - ۳X_۳ = ۰$$

$$\text{Max } -W + R_۱ + R_۲ = ۰$$

$$X_۱ + ۲X_۲ + X_۳ + R_۱ = ۳$$

$$۲X_۲ - X_۳ + R_۲ = ٤$$

$$X_۱, X_۲, X_۳, R_۱, R_۲ \geq ۰$$

	W	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$R_۱$	$R_۲$	R.H.S
W	-۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
$R_۱$	۰	۱	۲	۱	۱	۰	۳
$R_۲$	۰	۰	۲	-۱	۰	۱	٤
W	-۱	-۱	-٤	۰	۰	۰	-۷
$R_۱$	۰	۱	۲	۱	۱	۰	۳
$R_۲$	۰	۰	۲	-۱	۰	۱	٤
W	-۱	۱	۰	۲	۲	۰	-۱
$X_۲$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۳}{۲}$
$R_۲$	۰	-۱	۰	-۲	-۱	۱	۱

✓ مسئله فاقد منطقه موجه می‌باشد

۱۷) مسئله زیر را به روش دو مرحله ای حل کنید .

$$\text{Min } Z = X_۱ + X_۲ + X_۳ \qquad \text{Min } -Z = -X_۱ - X_۲ - X_۳ \qquad \text{Max } -Z + X_۱ + X_۲ + X_۳ = ۰$$

$$\text{Min } W = R_۱ + R_۲ \qquad \text{Max } -W + R_۱ + R_۲ = ۰$$

$$\text{S.t.} \quad ۲X_۱ - X_۲ + X_۳ = ۲ \quad \Longrightarrow \quad ۲X_۱ - X_۲ + X_۳ + R_۱ = ۲ \quad \Longrightarrow \quad ۲X_۱ - X_۲ + X_۳ + R_۱ = ۲$$

$$٤X_۱ + X_۲ + X_۳ = ٦ \qquad ٤X_۱ + X_۲ + X_۳ + R_۲ = ٦ \qquad ٤X_۱ + X_۲ + X_۳ + R_۲ = ٦$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \geq ۰ \qquad X_۱, X_۲, X_۳, R_۱, R_۲ \geq ۰$$

	W	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	R.H.S
W	-۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
R_1	۰	۲	-۱	۱	۱	۰	۲
R_2	۰	٤	۱	۱	۰	۱	٦
W	-۱	-٦	۰	-۲	۰	۰	-۸
R_1	۰	۲	-۱	۱	۱	۰	۲
R_2	۰	٤	۱	۱	۰	۱	٦
W	-۱	۰	-۳	۱	۳	۰	-۲
X_1	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱
R_2	۰	۰	۳	-۱	-۲	۱	۲
W	-۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
X_1	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{٤}{۳}$
X_2	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$

	Z	X_1	X_2	X_3	R.H.S
Z	-۱	۱	۱	۱	۰
X_1	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{٤}{۳}$
X_2	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$
Z	-۱	۰	۰	۱	-۲
X_1	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{٤}{۳}$
X_2	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow$ $Z^*= ۲$, $X^*_1=\frac{٤}{۳}$, $X^*_2=\frac{۲}{۳}$

۱۸) مسئله زیر را به روش دو مرحله ای ، روش M بزرگ و روش ترسیمی حل و جداول سیمپلکس دو روش اول را با هم و با روش ترسیمی مقایسه کنید

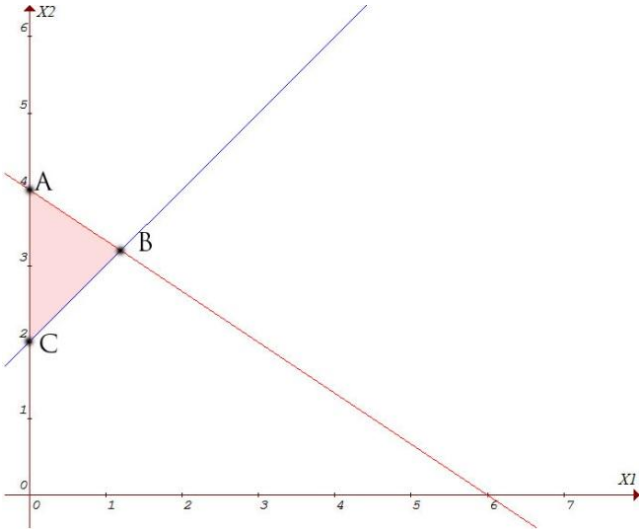
$\text{Min } Z = X_1 + 2X_2$

S.t. $4X_1 + 6X_2 \leq 24 \Rightarrow 4X_1 + 6X_2 = 24 \Rightarrow$

$-2X_1 + 2X_2 \geq 4 \Rightarrow -2X_1 + 2X_2 = 4 \Rightarrow$

$X_1, X_2 \geq 0$

X_1	0	6
X_2	4	0
X_1	0	1
X_2	2	3



$$\begin{cases} [1]\ 4X_1 + 6X_2 = 24 \\ [2]\ -2X_1 + 2X_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X_1 + 6X_2 = 24 \\ -4X_1 + 4X_2 = 8 \end{cases}$$

$$10X_2 = 32 \Rightarrow X_2 = 3{,}2 \Rightarrow X_1 = 1{,}2$$

$A(0, 4) \Rightarrow Z_A = 8$, $B(1.2, 3{,}2) \Rightarrow Z_B = 7{,}6$, $A(0, 2) \Rightarrow Z_A = 4$,

$\text{Min } Z = X_1 + 2X_2$ $\quad$ $\text{Max } -Z + X_1 + 2X_2 + MR = 0$

S.t. $4X_1 + 6X_2 \leq 24 \Rightarrow 4X_1 + 6X_2 + s_1 = 24$

$-2X_1 + 2X_2 \geq 4 \Rightarrow -2X_1 + 2X_2 - s_2 + R = 4$

$X_1, X_2 \geq 0$ $\quad$ $X_1, X_2, S_1, S_2, R \geq 0$

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R	R.H.S
Z	-1	1	2	0	0	M	0
S_1	0	4	6	1	1	0	24
R	0	-2	2	0	-1	1	4
Z	-1	2M+1	-2M+2	0	M	0	-4M
S_1	0	4	6	1	1	0	24
R	0	-2	2	0	-1	1	4
Z	-1	3	0	0	1	-1	-4
S_1	0	10	0	1	4	-3	12
X_2	0	-1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

$\text{Min } Z = X_1 + 2X_2$ $\qquad$ $\text{Max } -Z + X_1 + 2X_2 = 0$

$\text{Min } W = R$ $\qquad$ $\text{Max } -W + R = 0$

S.t. $\quad 4X_1 + 6X_2 \leq 24 \quad \Longrightarrow \quad 4X_1 + 6X_2 + s_1 = 24$

$-2X_1 + 2X_2 \geq 4 \qquad -2X_1 + 2X_2 - s_2 + R = 4$

$X_1, X_2 \geq 0 \qquad X_1, X_2, S_1, S_2, R \geq 0$

	W	X_1	X_2	S_1	S_2	R	R.H.S
W	-1	0	0	0	0	1	0
S_1	0	4	6	1	1	0	24
R	0	-2	2	0	-1	1	4
W	-1	2	-2	0	1	0	-4
S_1	0	4	6	1	1	0	24
R	0	-2	2	0	-1	1	4
W	-1	0	0	0	0	1	0
S_1	0	10	0	1	4	-3	12
X_2	0	-1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	-1	1	2	0	0	0
S_1	0	10	0	1	4	12
X_2	0	-1	1	0	$-\frac{1}{2}$	2
Z	-1	3	0	0	1	-4
S_1	0	10	0	1	4	12
X_2	0	-1	1	0	$-\frac{1}{2}$	2

$\Longrightarrow \qquad Z^* = 4 \qquad , \qquad X^*_2 = 2$

۱۹) مسئله ۱٦ را مجدداً در نظر بگیرید . متغیر مصنوعی مربوط به محدودیت دوم را با R نمایش دهید و آن را با استفاده از R و $X_۳$ به عنوان یک جواب ابتدایی حل کنید.

۲۰) مسئله زیر را حل و در صورت داشتن حالت خاص ، آن را مشخص کنید.

$$\text{Max } Z = ۲X_۱ + ۳X_۲ \qquad \text{Max } Z - ۲X_۱ - ۳X_۲ + MR = ۰$$

$$\text{S.t.} \quad X_۱ + X_۲ \geq ۳ \quad \Longrightarrow \quad X_۱ + X_۲ - S_۱ + R = ۳$$

$$X_۱ - ۲X_۲ \leq ٤ \qquad X_۱ - ۲X_۲ + S_۲ = ٤$$

$$X_۱, X_۲ \geq ۰ \qquad X_۱, X_۲, S_۱, S_۲, R \geq ۰$$

	Z	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R	R.H.S
Z	۱	-۲	-۳	۰	۰	M	۰
R	۰	۱	۱	-۱	۰	۱	۳
$S_۲$	۰	۱	-۲	۰	۱	۰	٤
Z	۱	-M-۲	-M-۳	M	۰	۰	-۳M
R	۰	۱	۱	-۱	۰	۱	۳
$S_۲$	۰	۱	-۲	۰	۱	۰	٤
Z	۱	۱	۰	-۳	۰	M+۳	۹
$X_۲$	۰	۱	۱	-۱	۰	۱	۳
$S_۲$	۰	۳	۰	-۲	۱	۲	۱۰

دارای حالت منطقه موجه نامحدود و جواب بهینه نامحدود

۲۱) مسئله زیر را به روش سیمپلکس حل کنید.

$\text{Max } Z = ۳X_۱ + ۲X_۲ + X_۳$ $\quad X_۱ = x_۱' - x_۱''$ $\quad \text{Max } Z = ۳x_۱' - ۳x_۱'' + ۲X_۲ + X_۳$

S.t. $\quad ۲X_۱ + ۵X_۲ + ۳X_۳ \le ۱۲$ $\quad \Rightarrow$ $\quad ۲x_۱' - ۲x_۱'' + ۵X_۲ + ۳X_۳ + S_۱ = ۱۲$

$۶X_۱ + ۸X_۲ \le ۲۲$ $\quad ۶x_۱' - ۶x_۱'' + ۸X_۲ + S_۲ = ۲۲$

$X_۱$ آزاد در علامت, $X_۲, X_۳ \ge ۰$ $\quad x_۱', x_۱'', X_۲, X_۳ \ge ۰$

	Z	$x_۱'$	$x_۱''$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	۱	-۳	۳	-۲	-۱	۰	۰	۰
$S_۱$	۰	۲	-۲	۵	۱	۱	۰	۱۲
$S_۲$	۰	۶	-۶	۸	۰	۰	۱	۲۲
Z	۱	۰	۰	۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱۱
$S_۱$	۰	۰	۰	$\frac{۷}{۳}$	۱	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۴}{۳}$
$x_۱'$	۰	۱	-۱	$\frac{۴}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱۱}{۳}$
Z	۱	۰	۰	$\frac{۱۳}{۳}$	۰	۱	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۴۷}{۳}$
$X_۳$	۰	۰	۰	$\frac{۷}{۳}$	۱	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۴}{۳}$
$x_۱'$	۰	۱	-۱	$\frac{۴}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱۱}{۳}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z^* = ۴ \\ X^*_۳ = \frac{۱۴}{۳} \\ X^*_۱ = x_۱' - x_۱'' = \frac{۱۱}{۳} - ۰ = \frac{۱۱}{۳} \end{cases}$$

۲۲)مسئله زیر را به روش سیمپلکس حل و در صورت وجود حالت خاص ، آن را مشخص کنید .

$Max\ Z = 4X_1 - 2X_2 + 6X_3$

$S.t. \quad 2X_1 + X_2 + 3X_3 = 36$

$5X_1 - X_3 \le 2$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

$\Longrightarrow$

$Max\ Z - 4X_1 + 2X_2 - 6X_3 + MR = 0$

$2X_1 + X_2 + 3X_3 + R = 36$

$5X_1 - X_3 + S = 2$

$X_1, X_2, X_3, S, R \ge 0$

	Z	X_1	X_2	X_3	S	R	R.H.S
Z	۱	-٤	۲	-٦	۰	M	۰
R	۰	۲	۱	۳	۰	۱	۳٦
S	۰	۵	۰	-۱	۱	۰	۲
Z	۱	-۲M-٤	-M+۲	-۳M-٦	۰	۰	-۳٦M
R	۰	۲	۱	۳	۰	۱	۳٦
S	۰	۵	۰	-۱	۱	۰	۲
Z	۱	۰	٤	۰	۰	M+۲	۷۲
X_3	۰	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۱	$\frac{۱}{۳}$	۱۲
S	۰	$\frac{۱۷}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	۱٤

✓ مسئله دارای حالت خاص جواب بهینه چندگانه می‌باشد .

۲۳) مسئله زیر را به روش سیمپلکس حل و در صورت وجود حالت خاص ، آن را مشخص کنید .

$$\text{Max } Z = ۳X_۱ + ٦X_۲ \qquad \text{Max } Z - ۳X_۱ - ٦X_۲ = ۰$$

$$\text{S.t.} \quad -X_۱ + ۲X_۲ \le ۱۲ \quad \Longrightarrow \quad -X_۱ + ۲X_۲ + s_۱ = ۱۲$$

$$۲X_۱ + ٤X_۲ \le ۱٤ \qquad ۲X_۱ + ٤X_۲ + s_۲ = ۱٤$$

$$X_۱ , X_۲ \ge ۰ \qquad X_۱ , X_۲ , s_۱ , s_۲ \ge ۰$$

	Z	$X_۱$	$X_۲$	$s_۱$	$s_۲$	R.H.S
Z	۱	-۳	-٦	۰	۰	۰
$s_۱$	۰	-۱	۲	۱	۰	۱۲
$s_۲$	۰	۲	٤	۰	۱	۱٤
Z	۱	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۲۱
$s_۱$	۰	-۲	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	٥
$X_۲$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{٤}$	$\frac{۷}{۲}$

✓ مسئله دارای حالت خاص جواب بهینه چندگانه می‌باشد .

۲٤) مسئله زیر را در نظر بگیرید .

$$\text{Max } Z = 3X_1 + X_2$$

$$\text{S.t.} \quad X_1 + 2X_2 \le 5$$

$$X_1 + X_2 - X_3 \le 2$$

$$7X_1 + 3X_2 - 5X_3 \le 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Max } Z = 3X_1 + X_2$$

$$X_1 + 2X_2 + s_1 = 5$$

$$X_1 + X_2 - X_3 + s_2 = 2$$

$$7X_1 + 3X_2 - 5X_3 + s_3 = 20$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

نشان دهید که این مسئله دارای جواب بهینه تبهگن است.

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	۱	-۳	-۱	۰	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۰	۱	۰	۰	۵
S_2	۰	۱	۱	-۱	۰	۱	۰	۲
S_3	۰	۷	۳	-۵	۰	۰	۱	۲۰
Z	۱	۰	۲	-۳	۰	۳	۰	٦
S_1	۰	۰	۱	۱	۱	-۱	۰	۳
X_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۱	۰	۲
S_3	۰	۰	-٤	۲	۰	-۷	۱	٦
Z	۱	۰	۵	۰	۳	۰	۰	۱۵
X_3	۰	۰	۱	۱	۱	-۱	۰	۳
X_1	۰	۱	۲	۰	۱	۰	۰	۵
S_3	۰	۰	-٦	۰	-۲	-۵	۱	۰

صفر شدن مقدار S۳ در جدول آخر نشان دهنده تباهیدگی دائم مسئله می‌باشد.

$$\Longrightarrow \qquad Z^* = ۱۵ \quad , \quad X^*_1 = ۵ \quad , \quad X^*_3 = ۳$$

۲۵) مسئله زیر را در نظر بگیرید .

$$\text{Max } Z = ۳X_۱ + ۲X_۲ + ۳X_۳ \qquad \text{Max } Z - ۳X_۱ - ۲X_۲ - ۳X_۳ + MR = ۰$$

$$\text{S.t.} \quad ۲X_۱ + X_۲ + X_۳ \leq ۲ \quad \Longrightarrow \quad ۲X_۱ + X_۲ + X_۳ + S_۱ = ۲$$

$$۳X_۱ + ٤X_۲ + ۲X_۳ \geq ۸ \qquad ۳X_۱ + ٤X_۲ + ۲X_۳ - S_۲ + R = ۸$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \geq ۰ \qquad X_۱, X_۲, X_۳, S_۱, S_۲, R \geq ۰$$

با استفاده از روش M بزرگ نشان دهید که جواب بهینه شامل یک متغیر مصنوعی اساسی است که مقدار آن صفر است . از آنجا نتیجه بگیرید که یک جواب اساسی موجه بهینه وجود دارد

	Z	$X_۱$	$X_۱$	$X_۱$	$S_۱$	$S_۱$	R	R.H.S
Z	۱	-۳	-۲	-۳	۰	۰	M	۰
$S_۱$	۰	۲	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R	۰	۳	٤	۲	۰	-۱	۱	۸
Z	۱	-۳M-۳	-٤M-۲	-۲M-۳	۰	M	۰	-۸M
$S_۱$	۰	۲	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R	۰	۳	٤	۲	۰	-۱	۱	۸
Z	۱	۵M+۱	۰	۲M-۱	٤M+٤	۵M+٤	۰	٤
$X_۲$	۰	۲	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R	۰	-۵	۰	-۲	-٤	-۱	۱	۰

$$\begin{cases} Z^* = ٤ \\ X^*_۲ = ۲ \end{cases}$$

۲۶)مسئله زیر یک مسئله برنامه ریزی خطی است که به روش M بزرگ حل شده است . اگر این مسئله به روش دو مرحله ای حل شود ، جداول مربوط به مرحله اول را با استفاده از حل ارائه شده در زیر بنویسید .

	Z	X_1	X_2	X_3	s	R_1	R_2	R.H.S
Z	۱	-۲	-۳	۵	۰	M	M	۰
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۷
R_2	۰	۲	-۵	۱	-۱	۰	۱	۱۰
Z	۱	-۳M-۲	٤M-۳	-۲M+۵	M	۰	۰	-۱۷M
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۷
R_2	۰	۲	-۵	۱	-۱	۰	۱	۱۰
Z	۱	۰	$-\frac{۷}{۲}$M-۸	$-\frac{۱}{۲}$M+٦	$-\frac{۱}{۲}$M-۱	۰	۰	-۲M+۱۰
R_1	۰	۰	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۲
X_1	۰	۱	$-\frac{۵}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۵
Z	۱	۰	۰	$\frac{۵۰}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$M+\frac{۱٦}{۷}$	$-\frac{۱}{۲}$M-$\frac{۸}{۷}$	$\frac{۱۰۲}{۷}$
X_2	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۲}{۷}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤}{۷}$
X_1	۰	۱	۰	$\frac{٦}{۷}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{۵}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤۵}{۷}$

	W	X_1	X_2	X_3	s	R_1	R_2	R.H.S
W	-۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۷
R_2	۰	۲	-۵	۱	-۱	۰	۱	۱۰
W	-۱	-۳	٤	-۲	۱	۰	۰	-۱۷
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۷
R_2	۰	۲	-۵	۱	-۱	۰	۱	۱۰
W	-۱	۰	$-\frac{۷}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۳}{۲}$	-۲
R_1	۰	۰	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۲
X_1	۰	۱	$-\frac{۵}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۵
W	-۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰
X_2	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۲}{۷}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤}{۷}$
X_1	۰	۱	۰	$\frac{٦}{۷}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{۵}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤۵}{۷}$

	Z	X_1	X_2	X_3	s	R.H.S
Z	۱	-۲	-۳	۵	۰	۰
X_2	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤}{۷}$
X_1	۰	۱	۰	$\frac{٦}{۷}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤٥}{۷}$
Z	۱	۰	۰	$\frac{٥۰}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱۰۲}{۷}$
X_2	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤}{۷}$
X_1	۰	۱	۰	$\frac{٦}{۷}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{٤٥}{۷}$

۲۷) مسئله زیر را با حذف متغیرهایی که دارای حد بالایی هستند ، حل کنید.

$$\text{Max } Z = ۷X_1 + ۵X_2$$

S.t.

$$٤X_1 + ۳X_2 \leq ۲٤۰۰$$

$$X_1 + \frac{۱}{۲} X_2 \leq ۷۵۰$$

$$X_1 - X_2 \geq ۰$$

$$X_1 \geq ۱۰۰$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq ۰$$

راهنمایی : تغییر متغیر های زیر را برای حل اعمال کنید

$$y_2 = X_2 - X_1 \qquad \text{و} \qquad y_1 = X_1 - ۱۰۰$$

۲۸) مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Max } Z = ۲X_۱ - ۳X_۲ - ۶X_۳ + ۵X_٤ \qquad \text{Max } Z - ۲X_۱ + ۳X_۲ + ۶X_۳ - ۵X_٤ = ۰$$

$$\text{S.t.} \quad ۸X_۱ + ٤X_۲ + ۲X_۳ + ۶X_٤ \le ۲٤۰ \quad \Longrightarrow \quad ۸X_۱ + ٤X_۲ + ۲X_۳ + ۶X_٤ + S = ۲٤۰$$

$$X_۱, X_۲, X_۳, X_٤ \ge ۰ \qquad X_۱, X_۲, X_۳, X_٤, S \ge ۰$$

الف) مسئله را بدون استفاده از روش سیمپلکس حل کنید.(راهنمایی : چون مسئله یک محدودیت دارد ، یک متغیر اساسی خواهد داشت .)

ب) درستی روش بند الف را با حل مجدد مسئله به روش سیمپلکس بررسی کنید.

✓ پاسخ الف) چون مسئله به محدودیت دارد ، یک متغیر اساسی خواهد داشت.

بنابراین تنها یک متغیر است که می‌توان مقداری غیر از صفر را اختیار کند

از آنجا که مسئله به دنبال حداکثر کردن Z است ، مقادیر متغیرهای $X_۲$ و $X_۳$ به خاطر ضرایب منفی در تابع هدف(همچنین ضریب مثبت در محدودیت) ، صفر خواهند بود.

در صورتی که $X_۱$ متغیر اساسی ما باشد مقدار $X_٤$ باید صفر شود، که در این صورت طبق معادله محدودیت $X_۱$ مقدار ۳۰ را اختیار می‌کند که در این صورت Z= ٦۰ خواهد بود.

$$۸X_۱ + \cancel{٤X_۲}^{0} + \cancel{۲X_۳}^{0} + \cancel{۶X_٤}^{0} + \cancel{S}^{0} = ۲٤۰ \Rightarrow X_۱ = ۳۰$$

اما در صورتی که $X_٤$ متغیر اساسی ما باشد مقدار $X_۱$ باید صفر شود ، که در این صورت طبق معادله محدودیت $X_٤$ حداکثر می‌تواند مقدار ٤۰ را اختیار کند که در این صورت Z=۲۰۰ خواهد بود .

$$\cancel{۸X_۱}^{0} + \cancel{٤X_۲}^{0} + \cancel{۲X_۳}^{0} + ۶X_٤ + \cancel{S}^{0} = ۲٤۰ \Rightarrow X_٤ = ٤۰$$

بنابراین جواب بهینه در نقطه ای است که :

$Z^* = ٦۰$

$X_۱ = ۰$

$X_۲ = ۰$

$X_۳ = ۰$

$X_٤ = ٤۰$

	Z	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$X_٤$	S	R.H.S
Z	۱	-۲	۳	٦	-٥	۰	۰
S	۰	۸	٤	۲	٦	۱	۲٤۰
Z	۱	۲	$\frac{۱۹}{۳}$	$\frac{۲۳}{۳}$	۰	$\frac{٥}{٦}$	۲۰۰
$X_٤$	۰	$\frac{٤}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	$\frac{۱}{٦}$	٤۰

۲۹) مسئله زیر را در نظر بگیرید .

$$Max\ Z = c_۱X_۱ + c_۲X_۲$$

$$S.t. \quad a_{۱۱}X_۱ + a_{۱۲}X_۲ \le b_۱$$

$$a_{۲۱}X_۱ + a_{۲۲}X_۲ \le b_۲$$

$$X_۱, X_۲ \ge ۰$$

که در آن $۱ \le c_۱ \le ۳$, $٤ \le c_۲ \le ٦$, $-۱ \le a_{۱۱} \le ۳$, $۲ \le a_{۱۲} \le ٥$, $۲ \le a_{۲۱} \le ٥$, $٤ \le a_{۲۲} \le ٦$, $۸ \le b_۱ \le ۱۲$, $۱۰ \le b_۲ \le ۱٤$ قرار دارند . حد های بالا و پایین را برای مقدار بهینه Z پیدا کنید . (راهنمایی : منطقه موجه کوچک‌تر مقدار Z کمتری را ارائه می‌دهد .)

برای بدست آوردن بیشترین منطقه موجه می‌بایست اعداد سمت راست (منابع) بیشترین مقدار و ضرایب فنی (ضرایب متغیر های تصمیم در محدودیت‌ها) کمترین مقدار انتخاب شود یعنی:

$$Max\ Z = ۳X_۱ + ٦X_۲$$

$$S.t. \quad -X_۱ + ۲X_۲ \le ۱۲ \qquad \Rightarrow Z^* = ۲۱$$

$$۲X_۱ + ٤X_۲ \le ۱٤$$

و برای بدست آوردن کوچک‌ترین منطقه موجه می‌بایست اعداد سمت راست کمترین مقدار و ضرایب فنی بیشترین مقدار انتخاب شود یعنی:

$$Max\ Z = X_۱ + ٤X_۲$$

$$S.t. \quad ۳X_۱ + ٥X_۲ \le ۸ \qquad \Rightarrow Z^* = ٦,٦۷$$

$$٥X_۱ + ٦X_۲ \le ۱۰$$

در صورت وجود هر گونه اشتباه علمی یا تایپی لطفاً آن را به نویسندگان این حل‌المسائل اطلاع دهید تا در نسخه های بعدی اصلاح شوند.

با تشکر

رضا محمدیان (۰۹۳۶۶۳۹۶۳۵۹) (Reza.Mohammadianbo۷@Gmail.com)

امیر مزیکی (۰۹۱۹۰۸۶۶۰۰۴) (Amir.Mazyaki۱@yahoo.com)