TAJROOBI

حرکت نوسانی:

حرکت دوره ای: حرکتی که در زمانهای مساوی و متوالی تکرار شود مثل گردش زمین بدور خورشید، حرکت پاندول ساعت و...

حرکت هماهنگ ساده(نوسانی): حرکت رفت و برگشت بر روی پاره خطی راست حول یک نقطه در وسط ان.(حرکت دوره ای بر روی پاره خط راست) مانند حرکت یک آونگ وقتی که زاویه انحراف آن از وضع قائم کوچکتر از ٦ درجه باشد یا حرکت وزنه ای که از فنری آویزان است.

دوره T : زمان یک نوسان کامل(مدت زمانی که متحرک از یک نقطه شروع و پس از طی تمام مسیر به ان نقطه برمی گردد)

بسامد f : تعداد نوسانات در واحد زمان

نکته : اگر تعداد نوسان n و زمان آنها t را داشته باشیم دوره و بسامد از روابط مقابل بدست می آیند $T=\frac{t}{n}$ و $f=\frac{n}{t}$ و $\boxed{f=\frac{1}{T}}$

دامنه نوسان A : بیشترین انحراف از وضع تعادل(از مرکز پاره خط)

مثال: نوسانگری بر روی پاره خطی به طول Cm؛ در هر ٥ ثانیه ٢٠ نوسان انجام می دهد.دوره بسامد و دامنه نوسانات آن چقدر است؟

حل) چون روی پاره خطی به طول Cm؛ نوسان می کند بنابراین از نقطه تعادل ٢cm منحرف می شود یعنی دامنه A=٢ cm

t = ٥ s

n = ٢٠

$$T=\frac{t}{n}=\frac{5}{20}=0/25 \quad و \quad f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0/25}=4$$

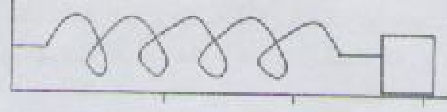
نوسانگر جرم و فنر

یادآوری: نیروی کشسانی فنر $F=-kx$ است (K ثابت فنر و X تغییر طول فنراز حالت عادی یابه عبارت دیگر میزان کشیدگی یا فشردگی فنر است و علامت منفی بیانگر این است که جهت نیروی فنر **همواره** در خلاف جهت کشیدگی یا فشردگی است یعنی اگر فنر را به سمت راست بکشیم فنر دست را به سمت چپ می کشد و برعکس)

انرژی جنبشیK: انرژی جنبشی اجسام متحرک $K=\frac{1}{2}mv^2$ است که m جرم جسم و v سرعت آن است

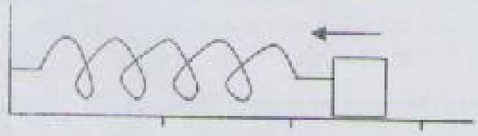
انرژی پتانسیل کشسانی فنرu: از رابطه $u=\frac{1}{2}kx^2$ بدست می اید که در آن K ثابت فنر و x میزان کشیدگی یا فشردگی فنر است

جرم m را به فنری با ثابت K می بندیم سپس آنرا روی سطح افقی و بدون اصطکاک به اندازه A از حالت تعادل فنر خارج کرده و از حال سکون رها می کنیم. چون اصطکاک نداریم انرژی مکانیکی (E=K+U) ثابت و پایسته می ماند

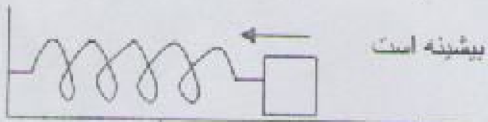


١) جسم در نقطه A ساکن است (k=٠) و فنر بیشترین حد کشیده شده است بنابراین نیروی فنر و در نتیجه شتاب ان که به سمت چپ (مرکز) است بیشینه است $F=-kA$

تمام انرژی جسم بصورت پتانسیل است $E=k+u=0+\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kA^2$

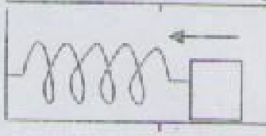


٢) جسم بر اثر کشش فنر به سمت نقطه تعادل رفته و چون جهت شتاب(نیرو) و حرکت یکسان است(هر دو منفی) حرکت آن تا نقطه تعادل **تند شونده** است



٣)در نقطه تعادل چون فنر نه کشیده و نه فشرده است بنابراین فنر هیچ نیرویی وارد نمی کند یعنی نیرو،شتاب و انرژی پتانسیل صفرند و تمام انرژی جسم بصورت جنبشی است و سرعت بیشینه است

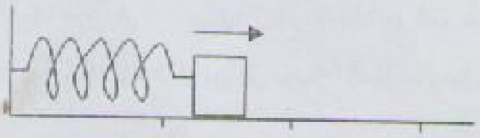
$$E=k+u=\frac{1}{2}mv^2+0=\frac{1}{2}mv^2_{Max}$$



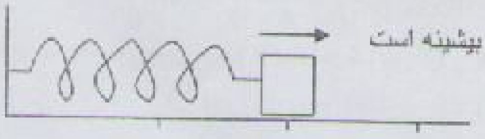
٤) با عبور از نقطه تعادل فنر فشرده شده و جسم را به سمت راست(مرکز) هل می دهد چون حرکت منفی و شتاب(نیرو) مثبت است حرکت **کند شونده** است و در A- می ایستد

٥) جسم در نقطه A- می ایستد (k=٠) و فنر بیشترین حد کشیده شده است بنابراین نیروی فنر و در نتیجه شتاب ان که به سمت راست (مرکز) است بیشینه است $F=-k(-A)=kA$

تمام انرژی جسم بصورت پتانسیل است $E=k+u=0+\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kA^2$

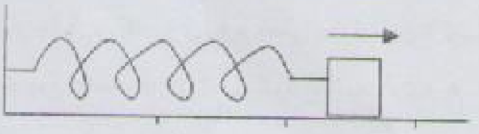


٦) جسم بر اثر رانش فنر به سمت نقطه تعادل رفته و چون جهت شتاب(نیرو) و حرکت یکسان است(هر دو مثبت) حرکت آن تا نقطه تعادل **تند شونده** است



٧) در نقطه تعادل چون فنر نه کشیده و نه فشرده است بنابراین فنر هیچ نیرویی وارد نمی کند یعنی نیرو،شتاب و انرژی پتانسیل صفرند و تمام انرژی جسم بصورت جنبشی است و سرعت بیشینه است

$$E=k+u=\frac{1}{2}mv^2+0=\frac{1}{2}mv^2_{Max}$$



٨) با عبور از نقطه تعادل فنر کشیده شده و جسم را به سمت چپ (مرکز) می کشد چون حرکت مثبت و شتاب(نیرو) منفی است حرکت **کند شونده** است و در A می ایستد

نکته: جهت نیرو و شتاب در حرکت هماهنگ ساده همواره به طرف نقطه تعادل است و هر گاه جسم به نقطه تعادل نزدیک شود حرکت آن تندشونده است.

معادله حرکت هماهنگ ساده:

به این رابطه قانون هوک می گویند $F=-kx \Rightarrow ma=-kx \Rightarrow a=-\frac{k}{m}x \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}x=-\frac{k}{m}x$

این رابطه می گوید که x تابعی دارد که با دو بار مشتق گیری نسبت به زمان ، به خود x (با یک ضریب منفی) تبدیل می شود. می دانیم توابع سینوسی این خاصیت را دارند.

معادله حرکت هماهنگ ساده به شکل $\boxed{x=A\ Sin(\omega\ t+\phi_0)}$ است که در آن x بُعد حرکت(انحراف از وضع تعادل)برحسب متر، A دامنه نوسان بر حسب متر ، $\boxed{\omega=2\pi f \Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T}}$ بسامد زاویه ای بر حسب رادین بر ثانیه و ϕ_0 فاز(مکان زاویه ای) اولیه بر حسب رادیان است به $(\omega\ t+\phi_0)$ فاز حرکت گفته می شود.

نکته: برای نوسانگر جرم و فنر $\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$ است که k ثابت فنر و m جرم وزنه است.

نکته: در هر نوسان کامل نوسانگر دو بار پاره خط نوسان و مسافت 4A را طی می کند.

مثال: نوسانگری در ۱۰ نوسان کامل خود مسافت 4cm را طی می کند .دامنه نوسانات آن چقدر است؟

حل: در هر نوسان ٤ دامنه طی شده و در ۱۰ نوسان 40A طی می شود.بنابراین

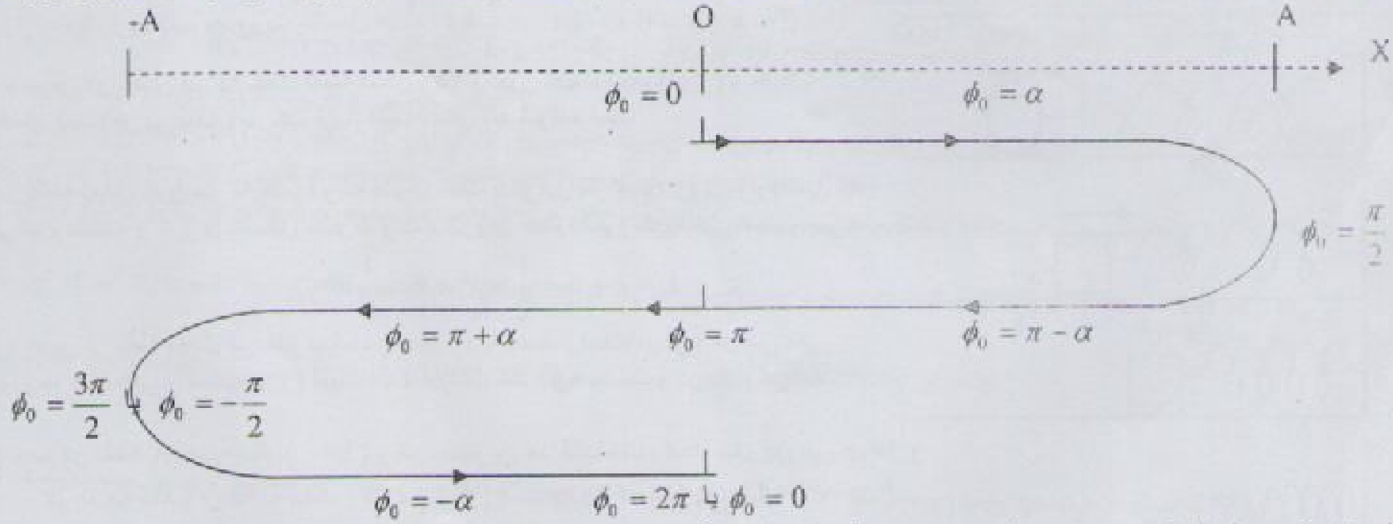
$$40A=4 \Rightarrow A=\frac{4}{40}=0/1\ cm$$

نکته: برای یافتن فاز اولیه ϕ_0 (فاز در لحظه t=0) در معادله زمان را صفر می گذاریم $\boxed{x_0=A\ Sin\phi_0}$

یافتن فاز اولیه در حالات مختلف:

برای یافتن فاز اولیه $x_0=A\ Sin\phi_0 \Rightarrow Sin\phi_0=\frac{x_0}{A}$ که مقدار $+\frac{x_0}{A}$ برای ما مشخص است و می دانیم که مربوط به کدام زاویه (α)است حال فاز اولیه را با توجه به شکل و مکان و جهت حرکت(سرعت) متحرک به روش زیر بر حسب α مشخص می کنیم.

(برای فهم بهتر مسیر های رفت و برگشت که روی خط راست هستند در شکل از هم جدا نشان داده شده اند) فاز یک نوسان کامل 2π رادیان است



مثال: متحرکی در لحظه شروع در x=-2 cm و سرعت آن منفی است.اگر در هر نوسان 16cm طی شود.فاز اولیه حرکت را حساب کنید.

حل)با صفر قرار دادن زمان در معادله حرکت داریم $x_0=A\ Sin\phi_0 \Rightarrow Sin\phi_0=\frac{x_0}{A}$ بعد اولیه x.=-2 cm را داریم نیاز به دامنه داریم می دانیم که نوسانگر در هر نوسان کامل ، دو بارپاره خط نوسان یعنی 4A را طی می کند بنابراین $4A=16 \Rightarrow A=4cm$

$Sin\phi_0=\frac{x_0}{A}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=Sin\frac{\pi}{6}$ (میدانیم که $\frac{1}{2}$ سینوس ۳۰ درجه یا $\frac{\pi}{6}$ است که آنرا α می نامیم)

با توجه به منفی بودن بعد(X)، متحرک بین O و A- قرار دارد و با توجه به منفی بودن سرعت ، نوسانگر از O به A- می رود بنابر این

$$\phi_0=\pi+\alpha \Rightarrow \pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

مثال: نوسانگری که روی پاره خطی بطول 5cm نوسان می کند در لحظه شروع در x=-2/5 cm قرار دارد.فاز اولیه حرکت چیست.؟

حل) چون دامنه 2/5cm می شود پس بعد اولیه A- و فاز اولیه $\phi_0=-\frac{\pi}{2}$ یا $\phi_0=\frac{3\pi}{2}$ می شود

$a=-\omega^2 x$ $\quad v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$

$v_0=A\omega\cos(\omega t+\phi_0)$

مثال: نوسانگری روی پاره خطی به طول ۶۰cm نوسان میکند بگونه ای که در هر ۶ ثانیه۳۶ با پاره خط نوسان طی می شود.

اگر در لحظه شروع در فاصله $15\sqrt{2}\ cm$ سمت راست مبدا و در حال نزدیک شدن به ان باشد.

الف)معادله حرکت آنرا بنویسید. ب)در t=۰/۵ s متحرک در کجا قرار دارد؟

حل) معادله حرکت هماهنگ ساده به صورت $\boxed{x = A\ Sin(\omega\ t+\phi_0)}$ است که باید A ، ω و ϕ_0 را تعیین کنیم

چون پاره خط نوسان دو برابر دامنه است بنابراین A=۳۰ cm=۰/۳ m .

چون در t=۶ s تعداد n=۱۸ نوسان انجام می شود $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi\frac{n}{t} = 2\pi\frac{18}{6} = 6\pi \quad rad/s$

با صفر قرار دادن زمان در معادله حرکت داریم $x_0 = A\ Sin\phi_0 \Rightarrow Sin\phi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{15\sqrt{2}}{30} = \frac{\sqrt{2}}{2} = Sin\frac{\pi}{4}$

با توجه به مثبت بودن بعد(X)، متحرک بین O و A قرار دارد و با توجه جهت حرکت ان $\phi_0 = \pi - \alpha$

$$\phi_0 = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \phi_0 = \frac{3\pi}{4}$$

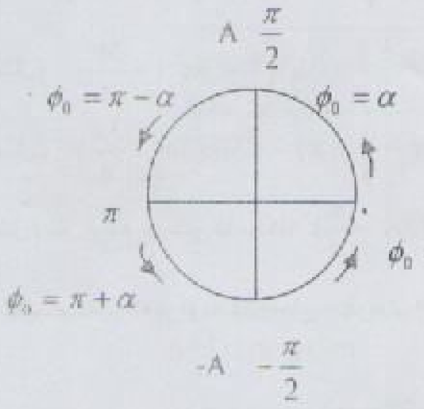
بنابراین معادله نوسان می شود $x = A\ Sin(\omega\ t+\phi_0) \Rightarrow x = 0/3\ Sin(6\pi\ t + \frac{3\pi}{4})$

ب) برای بدست آوردن مکان در یک زمان کافی است در معادله حرکت زمان را جایگذاری کنیم.

$$x = 0/3\ Sin(6\pi\ t + \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow x = 0/3\ Sin(6\pi \times 0/5 + \frac{3\pi}{4}) = 0/3Sin(3\pi + \frac{3\pi}{4}) = 0/3Sin(\pi + \frac{3\pi}{4}) = -0/3Sin(\frac{3\pi}{4})$$

$$\Rightarrow x = -0/3Sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = -0/3Sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{3\sqrt{2}}{20}\ m$$

دایره مرجع:



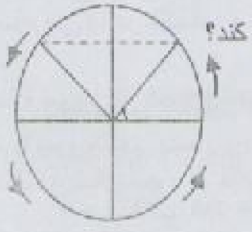
اگر متحرکی با سرعت ثابت روی دایره ای به شعاع A بچرخد سایه آن روی محور سینوسها حرکت نوسانی دارد.

مثال: فاز اولیه برای نوسانگری که در لحظه شروع در X=-۰/۵A وسرعت آن کند شونده بوده چیست؟

حل) چون بعد منفی است (بین O و A-) در نیمه پایین دایره و چون سرعت کند شونده است یعنی از مبدا دورمی شود(از O به A-) میرود که مطابق شکل در ربع سوم قرار می گیرد. در این رابطه منفی نمیگذاریم

$$x_0 = A\ Sin\phi_0 \Rightarrow Sin\phi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{0/5A}{A} = \frac{1}{2} = Sin\frac{\pi}{6}$$

چون ربع سوم است $\phi_0 = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \phi_0 = \frac{7\pi}{6}$



مثال: معادله نوسانگری بصورت $x = 2Sin(\pi t + \frac{5\pi}{6})$ در چه زمانی متحرک برای بار دوم از $x = \sqrt{3}$ عبور می کند؟

حل) برای آنکه متحرک در $x = \sqrt{3}$ قرار گیرد باید فاز حرکت باید $\frac{\pi}{3}$ شود زیرا

$$x = A\ Sin\phi \Rightarrow Sin\phi = \frac{x}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} = Sin\frac{\pi}{3}$$

با توجه به فاز اولیه متحرک در لحظه شروع در ربع دوم و بعد از $\pi - \frac{\pi}{3}$ قرار داشته بنابراین پس از گذشتن از 2π برای بار اول و در ربع دوم برای بار دوم به $x = \sqrt{3}$ می رسد. این فاز برابر $3\pi - \frac{\pi}{3}$ است . بنابراین

$$\varphi = 3\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow (\pi t + \frac{5\pi}{6}) = 3\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{11}{6}\quad s$$

یادآوری ریاضی:

برای محاسبه نسبتهای مثلثاتی زوایای بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ (۹۰ درجه) ابتدا صورت را به کمک نزدیکترین مضرب مخرج ساده کرده و بصورت مجموعی از مضارب $\frac{\pi}{2}$ با π و یک زاویه کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ می نویسیم و از قوانین زیر استفاده می کنیم

مثال: $$Sin\frac{50\pi}{6} = Sin(\frac{48\pi + 2\pi}{6}) = Sin(8\pi + \frac{\pi}{3})$$

۱)مضربهای فرد π به خود π تبدیل و مضربهای زوج آن به صفر تبدیل می شوند.(مضربهای زوج π حذف می شوند)

مثال: $Sin(3\pi - \frac{\pi}{4}) = Sin(\pi - \frac{\pi}{4})$ و $Sin(6\pi - \frac{\pi}{4}) = Sin(0 - \frac{\pi}{4}) = Sin(-\frac{\pi}{4})$

۲) فقط مضربهای فرد $\frac{\pi}{2}$ نسبت مثلثاتی را عوض می کنند(سینوس را با کسینوس و برعکس)

مثال: $Sin(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = Cos(\frac{\pi}{4})$ و $Cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = Sin(\frac{\pi}{4})$

۳) با توجه به ربع مثلثاتی که انتهای زاویه در آن قرار می گیرد علامت را تعیین می کنیم(ربع اول همه مثبت، ربع دوم فقط سینوس مثبت، ربع سوم همه منفی و ربع چهارم فقط کسینوس مثبت)

مثال: $Sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = -Cos(\frac{\pi}{4})$ این زاویه قبل از $\frac{3\pi}{2}$ (۲۷۰ درجه) یعنی در ربع سوم قرار دارد بنابر این سینوس زاویه منفی است

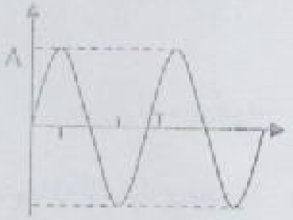
نکته: تابع حرکت $x = A\ Sin(\omega t + \phi_0)$ است اگر این تابع بصورت $x = A\ Cos(\omega t + \phi_0)$ یا $x = -A\ Sin(\omega t + \phi_0)$ داده شده باشد

برای تبدیل تابع کسینوس به سینوس مقدار $\frac{\pi}{2}$ و برای تبدیل منفی سینوس به مثبت سینوس مقدار π را به فاز آن اضافه می کنیم.

مثال) $$x = 0/3\ Cos(6\pi t + \frac{3\pi}{4}) = 0/3\ Sin(6\pi t + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = 0/3\ Sin(6\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

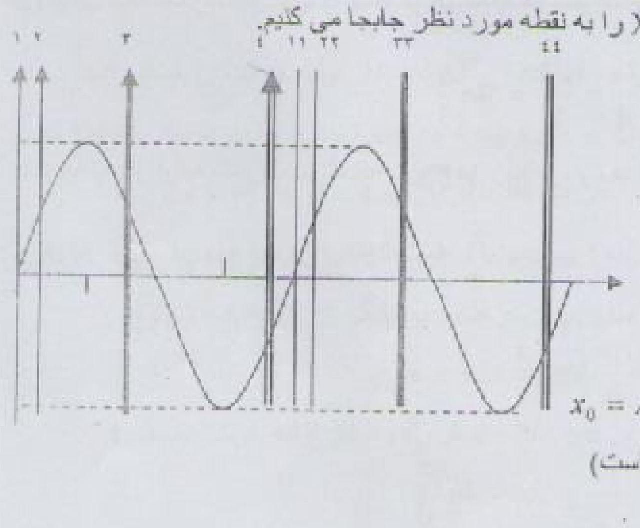
مثال) $$x = -2Sin(3\pi t - \frac{\pi}{4}) = 2Sin(3\pi t - \frac{\pi}{4} + \pi) = 2Sin(3\pi t + \frac{3\pi}{4})$$

مثال) فاز اولیه حرکتی با معادله $x = -Sin(3\pi t - \frac{\pi}{4})$ چیست؟ ابتدا آنرا بصورت معادله حرکت سینوسی استاندارد درآورده و فاز آنرا تعیین می کنیم. میدانیم که برای تبدیل منفی سینوس به مثبت سینوس مقدار π را به فاز آن اضافه می کنیم. $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$



رسم نمودار:
می دانیم که نمودارهای سینوسی شکلی مانند نمودار مقابل دارند که در یک دوره T تکرار می شود.
نمودار سینوسی را در یک دوره رسم می کنیم روی این نمودار باید چند چیز را مشخص کنیم

یکی اینکه نمودار از کجا($x_0 = A\ Sin\phi_0$) و به کدام سمت (بالا یا پایین) شروع می شود(اگر ϕ_0 در ربع اول و چهارم باشد رو به بالا و اگر در ربع دوم یا سوم مثلثاتی باشد رو به پایین شروع می شود) برای این کار محور X را به نقطه مورد نظر جابجا می کنیم.



بطور مثال در شکل محور X ها بترتیب برای فازهای اولیه

۱) $\phi_0 = 0$ ۲) $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ ۳) $\phi_0 = \frac{4\pi}{6}$ ۴) $\phi_0 = \frac{11\pi}{6}$

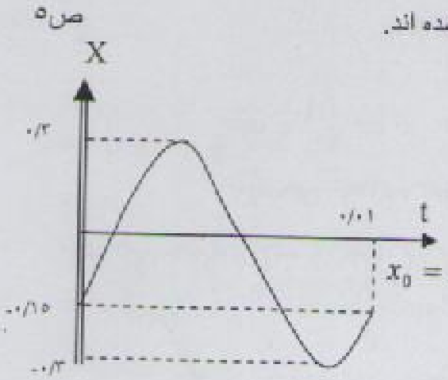
نشان داده شده است در هرحالت نقطه شروع نمودار عبارت است از

۱) $x_0 = A\ Sin\phi_0 = 0$ ۲) $x_0 = A\ Sin\phi_0 = \frac{A}{2}$

۳) $x_0 = A\ Sin\phi_0 = \frac{A}{2}$

۴) $x_0 = A\ Sin\phi_0 = A\ Sin\frac{11\pi}{6} = A\ Sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = A\ Sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{A}{2}$

نقطه پایان تابع را نیز(که اولین نقطه نمودار با همان X اولیه و همان جهت اولیه است) مشخص می کنیم.



این کار روی نمودار مقابل برای چهار فاز داده شده به ترتیب با خطهای ۱۱و۲۲و۳۳و۴۴ مشخص شده اند.
روی محور زمان باید برای این نقطه (پایان نمودار)مقدار T (دوره) نوشته شود.
مقادیر ماکزیمم و مینیمم بعد روی محور X نیز مشخص میشوند.

در شکل روبرو نمودار $x = 0/3\ Sin(200\pi\ t + \frac{11\pi}{6})$ به کمک نمودار چهارم شکل بالا(ازمحور ۴ تا خط ۴۴) رسم شده است.نقطه شروع

$$x_0 = A\ Sin\phi_0 = 0/3Sin\frac{7\pi}{6} = 0/3Sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = 0/3Sin(-\frac{\pi}{6}) = 0/3\times(-\frac{1}{2}) = -0/15$$

چون فاز اولیه در ربع چهارم مثلثاتی است نمودار رو به بالا شروع میشود.

با توجه به معادله حرکت $\omega = 200\pi$ در نتیجه $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0/01$

سرعت و شتاب در حرکت هماهنگ ساده:

می دانیم که سرعت مشتق اول مکان نسبت به زمان و شتاب مشتق دوم آن است با مشتق گیری از معادله حرکت بدست می آوریم

سرعت $\boxed{v = A\omega\ Cos(\omega\ t + \phi_0)}$ و شتاب $\boxed{a = -A\omega^2 Sin(\omega\ t + \phi_0)}$ که در نتیجه $\boxed{a = -\omega^2 x}$

نکته: توابع شامل نسبت سینوس (کسینوس) زمانی بیشینه می شوند که مقدارسینوس (کسینوس) یک شود بنابر این برای سرعت در نقطه تعادل داریم $\boxed{v_o = v_{Max} = A\omega}$ و برای شتاب در نقطه A داریم $\boxed{a = a_{Max} = -A\omega^2}$ و برای شتاب در نقطه -A داریم $\boxed{a = a_{Max} = A\omega^2}$

انرژی مکانیکی نوسانگر جرم و فنر:

با صرفنظر از اصطکاک انرژی مکانیکی (E=K+U) ثابت و پایسته می ماند یعنی مقدار آن در نقطه Aو-A ($E = \frac{1}{2}kA^2$) با نقطه تعادل($E = \frac{1}{2}mv_{Max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$) و تمام نقاط دیگر ($E = k + u$) برابر است و فقط شکل آن تغییر می کند

$$\boxed{E = k + u \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{Max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2}$$

نکته: با استفاده از پایستگی انرژی **سرعت نوسانگر در مکان x** از رابطه زیر بدست می آید

$$\boxed{v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

تمرین: با استفاده از رابطه بالا سرعت را برا ی نقطه تعادل (x=۰) و دامنه ها ($x = \pm A$)حساب کنید

مثال) دامنه نوسان نوسانگری ۲۰cm و در لحظه شروع با سرعت ۱۲ m/s- از نقطه تعادل می گذرد.

الف) معادله حرکت نوسانگری را بنویسید ب) متحرک در $t = 0/8\pi\ s$ چه سرعتی دارد؟ ج) متحرک در $x = 10cm$ چه سرعتی دارد؟

A=۲۰cm=۰/۲m

حل) برای نوشتن معادله حرکت به دامنه، بسامد زاویه ای و فاز اولیه نیاز داریم.

سرعت در نقطه تعادل بیشینه است. $v_o = v_{Max} = A\omega = 12 \Rightarrow \omega = \frac{12}{A} = \frac{12}{0/2} = 60\ rad/s$

چون سرعت در نقطه تعادل منفی است فاز اولیه با توجه به دایره مرجع $\phi_0 = \pi$

معادله حرکت می شود $x = A\ Sin(\omega\ t + \phi_0) \Rightarrow x = 0/2\ Sin(60\ t + \pi)$

ب)برای یافتن سرعت متحرک در یک زمان($t = 0/8\pi\ s$) از معادله سرعت – زمان استفاده می کنیم
برای یافتن معادله سرعت – زمان از معادله حرکت مشتق می گیریم.(یا در معادله $v = A\omega\ Cos(\omega\ t + \phi_0)$ جایگذاری می کنیم)

$$v = A\omega\ Cos(\omega\ t + \phi_0) = 0/2 \times 60Cos(60t + \pi) = 12Cos(60t + \pi)$$

با جایگذاری زمان

$$v = 12Cos(60t + \pi) = 12Cos(60 \times 0/8\pi + \pi) = 12Cos(48\pi + \pi) = 12Cos\pi = -12\ m/s$$

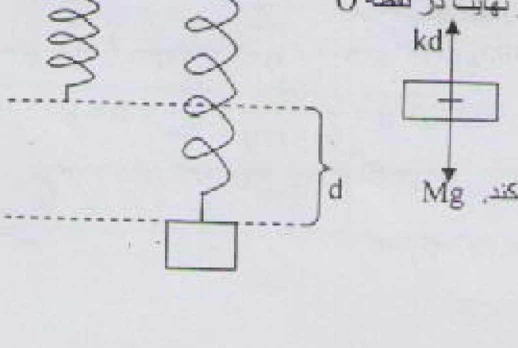
ج) برای یافتن سرعت در یک مکان از پایستگی انرژی $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ استفاده می کنیم

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 60\sqrt{0/2^2 - 0/1^2} = \pm 6\sqrt{3}\ m/s$$

نوسان جرم و فنر در راستای قائم:

اگر مکان انتهای فنر در حالت عادی O' باشد وقتی وزنه را به آن ببندیم و رها کنیم در نهایت در نقطه O (نقطه تعادل جرم و فنر)که به اندازه d پایین تر از نقطه O' است متوقف می شود

در این حالت $kd - mg = 0 \Rightarrow kd = mg \Rightarrow \boxed{d = \frac{mg}{k}}$



وقتی جسم به نوسان در آید حول این نقطه(O) با بسامد $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{d}}}$ نوسان می کند.

مثال: وزنه ای به جرم ۱۰۰ گرم را به فنری با ثابت ۵۰نیوتن بر سانتیمتر بسته و بدون افزایش طول فنر از همانجا رها می کنیم.دامنه نوسان چقدر است؟

حل) چون رها شده بنابراین سرعت اولیه نداشته و در نقطه A (یا A-) قرار داشته است . فاصله این نقطه تا نقطه تعادل دامنه است که مطابق شکل (صفحه قبل)همان d است. بنابراین

$$A = d = \frac{mg}{k} = \frac{0/1\times 10}{50} = 0/02\ Cm$$

مثال: وزنه ای به جرم ۰/۵Kg را به فنری به ثابت ۵۰ نیوتن بر متر بسته و از همانجا ۱۲cm پایین کشیده و رها می کنیم.دامنه و بسامد نوسان چقدر است؟ معادله حرکت آن را بنویسید.

حل) $d = \frac{mg}{k} = \frac{0/5\times 10}{50} = 0/1\ m = 10\ Cm$ فاصله نقطه ای که رها می شود تا نقطه تعادل همان دامنه است. وقتی جسم را ۱۲cm پایین میکشیم(با ۱۰cm پایین آمدن به نقطه تعادل می رسیم) ۲cm از نقطه تعادل پایین رفته ایم پس A=۲ cm

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0/5}} = 10\ \frac{rad}{s}$$

برای نوشتن معادله حرکت کافیست فاز اولیه را بدانیم.اگر نقطه شروع را که دامنه در زیر نقطه تعادل است A- بگیریم $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$

و معادله حرکت ان میشود

$$x = A\ Sin(\omega\ t+\phi_0) \Rightarrow \qquad x = 0/02\ Sin(10\ t-\frac{\pi}{2})$$

نکته: اگر دو فنر را به صورت متوالی به هم ببندیم(یک سر دو فنر به هم متصل باشد).ثابت آن از رابطه $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ و اگر موازی ببندیم از رابطه $k = k_1 + k_2$ بدست می آید.(فنرهای موازی یک سر آنها به جسم بسته شده و سر دیگر آنها ثابت است)

نکته: اگر فنری با ثابت k را به n قسمت مساویْ تقسیم کنیم ثابت هر قطعه برابر nk می شود

مثال: دو فنر با ثابتهای ۶۰۰و ۳۰۰ نیوتن بر کیلوگرم را به انتهای یکدیگر بسته و وزنه ۵ نیوتنی را به آن می آویزیم و آنرا به نوسان در می آوریم .دوره نوسانات آن را حساب کنید.

حل) چون دو فنر متوالی بسته شده اند ثابت آن ۲۰۰ می شود

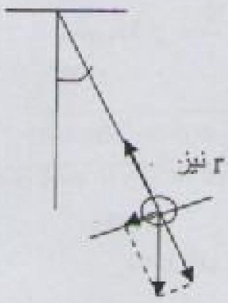
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{600} + \frac{1}{300} = \frac{3}{600} \Rightarrow k = 200\ \ N/kg$$

چون وزن ۵ نیوتن است جرم وزنه ۰/۵ Kg است

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0/5}} = \sqrt{400} = 20 rad/s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} = 0/314 s$$

نوسان آونگ ساده (با زاویه انحراف کوچکتر از ۶ درجه):



با رسم نیروها ی وارد بر آونگ می بینیم که $-mg\ Sin\theta$ به جرم شتاب می دهد(علامت منفی مانند فنر بدلیل آن است که این نیرو بازگرداننده است و جرم را به نقطه تعادل برمی گرداند)

میدانیم که برای زوایای کوچکتر از ۶ درجه اندازه زاویه بر حسب رادیان با سینوس زاویه برابر است $Sin\theta \approx \theta$

و اندازه زاویه بر حسب رادیان نیز از رابطه $\theta = \frac{s}{r} = \frac{x}{l}$ بدست می آید کهS طول کمان روبرو به زاویه(اینجاx) و r نیز شعاع دایره(در اینجا L) است.

بنابراین داریم

$$-mg\ \ Sin\theta = ma \Rightarrow -mg\theta = ma \Rightarrow -mg\frac{x}{l} = ma$$

این رابطه قانون هوک است

$$a = -\frac{g}{l}x \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{g}{l}x$$

بنابراین معادله این نوسان معادله ای سینوسی با بسامد زاویه ای $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$ است که فقط به شتاب گرانش زمین و طول آونگ بستگی دارد.

مثال: در جایی که شتاب گرانشی ۹/۹ m/s² است.طول پاندول ساعت چقدر باشد تا دقیق کار کند؟(دوره آن یک ثانیه باشد)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} \Rightarrow l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{1\times 9/9}{4(3/14)^2} \approx 0/2510\ \ m = 25/10\ \ cm$$