

«نگاشت»

نگاشت

تابع $w = f(z)$ را یک نگاشت می‌گوییم هرگاه توسط آن، نقطه $z = x + iy$ از صفحه مختلط $(x - y)$ به نقطه $w = u + iv$ در صفحه مختلط $(u - v)$ تبدیل شود. گاهی از کلمه «تبدیل» به جای نگاشت نیز استفاده می‌شود.

نگاشت همدیس (حافظ زاویه)

هرگاه تحت نگاشت $w = f(z)$ هر زاویه به رأس z_0 از صفحه $x - y$ بدون هیچ‌گونه تغییری از نظر اندازه و جهت به زاویه‌ای به رأس $w_0 = f(z_0)$ در صفحه $u - v$ منتقل شود، آنگاه نگاشت را در نقطه $z = z_0$ همدیس می‌نامیم.
 * تذکره: برای اینکه تابع تحلیلی $w = f(z)$ همدیس باشد، باید شرط $f'(z) \neq 0$ برقرار باشد.

راهنمایی برای پاسخگویی به تست‌های نگاشت

همان‌طور که گفتیم نگاشت $w = f(z)$ ، در واقع هر نقطه در صفحه $x - y$ مانند $z = x + iy$ را به نقطه‌ای مانند $w = u + iv$ در صفحه $u - v$ تبدیل می‌کند و برای همین با جایگزینی $z = x + iy$ در $f(z)$ و همچنین قرار دادن $u + iv$ به جای w در نهایت می‌توانیم u و v را بر حسب x و y یا x و y را بر حسب u و v محاسبه کرده و با توجه به نواحی، نقاط مرزی و همچنین حدود تغییرات داده شده در صفحه $x - y$ ، تعیین کنیم که u و v چه تغییراتی می‌کنند و نشان‌دهنده چه ناحیه‌هایی در صفحه $u - v$ می‌باشند.

نکته ۱: اکثر تست‌های نگاشت با در نظر گرفتن نقطه‌ای دلخواه به جای z در ناحیه موردنظر و پیدا کردن نقطه‌ی متناظر آن (یعنی همان w) قابل پاسخگویی هستند.

نکته ۲: بررسی نقاط و یا خطوط روی مرز ناحیه داده شده در حل تست‌ها به ما کمک می‌کند. در نهایت لازم به ذکر است که ممکن است، گزینه‌ها طوری طراحی شوند که با استفاده از نکات فوق نتوان گزینه‌های غلط را حذف کرد و یا به صورت نقطه‌یابی تست را جواب داد، برای همین آشنایی با خواص هر نگاشت در حل سریع‌تر تست‌ها به ما کمک می‌کند.

نگاشت همانی $w = f(z) = z$

این تابع هر شکل را بدون تغییر منتقل می‌کند، واضح است که این نگاشت، نگاشتی همدیس است.

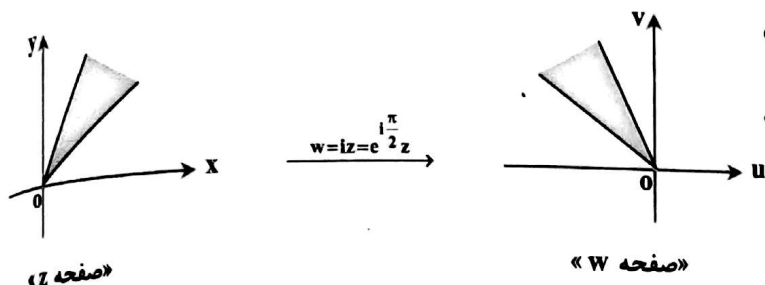
نگاشت انتقال $w = z + b$

این نگاشت که در آن $b = b_1 + ib_2$ یک عدد مختلط است هر نقطه یا شکل را در جهت بردار b و به اندازه b منتقل می‌کند. در واقع تحت این نگاشت نقطه (x, y) از صفحه $x - y$ به نقطه $(x + b_1, y + b_2)$ در صفحه $u - v$ منتقل می‌شود. واضح است این نگاشت نیز همدیس است.



نگاشت $w = az$

این نگاشت که در آن $a = re^{i\theta}$ عددی مختلط و مخالف صفر است، انبساط یا انقباضی به اندازه r و دورانی به اندازه θ در هر نقطه z که قرار است منتقل شود ایجاد می‌کند. در واقع برای رسیدن از z به $w = az$ اگر $z = r_1 e^{i\theta_1}$ تعریف شود، ابتدا طول r_1 به اندازه r (همان اندازه a) منبسط و یا منقبض می‌گردد (گر $|r| > 1$ شکل منبسط و اگر $|r| < 1$ شکل منقبض می‌شود) و سپس z را به اندازه θ (زاویه a) دوران می‌دهیم. یعنی هر نقطه در مختصات قطبی به صورت (r_1, θ_1) به نقطه‌ای به مختصات $(r, \theta + \theta_1)$ تبدیل خواهد شد. واضح است این نگاشت نیز همدیس است.



در شکل مقابل نگاشت $w = iz$ که در واقع آن را به شکل

$$w = e^{i\frac{\pi}{2}} z$$

می‌نویسیم، فقط یک دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در شکل ایجاد

کرده و در اندازه شکل هیچ تأثیری نداشته است:

مثال ۱: نیم صفحه $y > 0$ تحت نگاشت $w = (1+i)z$ بر روی کدام ناحیه نگاشته خواهد شد؟

$$u > v \quad (۴)$$

$$u + v = -1 \quad (۳)$$

$$u < v \quad (۲)$$

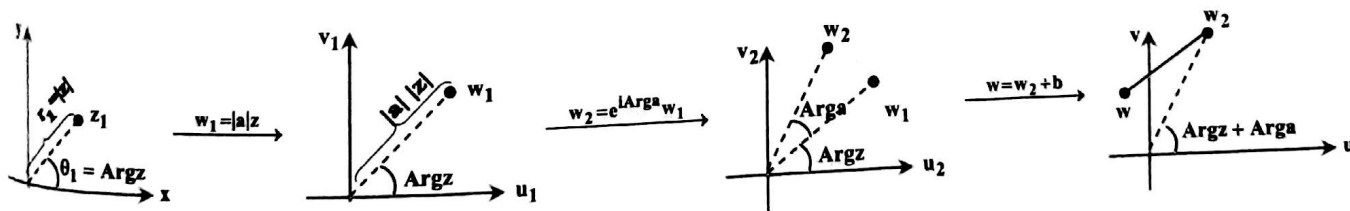
$$u + v = 1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» ☒

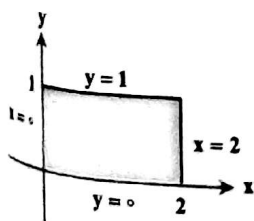
$$w = (1+i)(x+iy) = x-y+i(x+y) \Rightarrow \begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \xrightarrow{\text{چون } y > 0 \text{ است}} x-y < x < x+y \Rightarrow u < v$$

نگاشت خطی $w = az + b$

این نگاشت ترکیبی از دو نگاشت $w_1 = w + b$ و $w_1 = az$ می‌باشد که می‌تواند به ترتیب متوالی صورت گیرد و واضح است که نگاشتی همدیس است مطابق شکل زیر تغییرات نقطه‌ای مانند z_1 که طول شعاع حامل آن از مبدأ برابر r_1 و زاویه آن با محور x ها θ_1 است، تحت نگاشت $w = az + b$ به این صورت است که ابتدا توسط نگاشت $w_1 = |a|z$ (با فرض $|a| > 1$) فاصله شعاع از مبدأ به اندازه $r = |a|$ بیشتر می‌شود و سپس تحت نگاشت $w_2 = e^{i\text{Arg}a} w_1$ به اندازه $\theta = \text{Arg}a$ زاویه آن با محور x ها اضافه شده و نقطه از w_1 به w_2 منتقل می‌شود و در نهایت توسط نگاشت $w = w_2 + b$ نقطه به اندازه b منتقل می‌شود:



مثال ۲: ناحیه داده شده در شکل زیر توسط نگاشت $w = (1+i)z + (1-2i)$ به چه شکلی تبدیل خواهد شد؟



پاسخ: گزینه «۴» ابتدا با جایگزینی $z = x + iy$ و $w = u + iv$ سعی می‌کنیم u و v را بر حسب x و y تعیین کنیم:

$$u + iv = (1+i)(x+iy) + 1-2i \Rightarrow u + iv = x + 1 - y + i(x + y - 2)$$

پس $u = x + 1 - y$ و $v = x + y - 2$ و با توجه به مرزها داریم:

پس به جای خط $y=1$ باید خط $v=u-1$ رسم شود.

$$y=1 \Rightarrow \begin{cases} u=x+1-1=x \\ v=x+1-2=x-1 \end{cases} \Rightarrow v=u-1$$

پس به جای خط $y=0$ باید خط $v=u-3$ رسم شود.

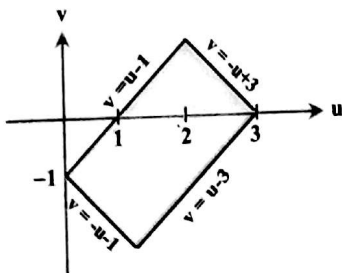
$$y=0 \Rightarrow \begin{cases} u=x+1-0=x+1 \\ v=x+0-2=x-2 \end{cases} \Rightarrow v=u-3$$

لذا به جای خط $x=0$ باید خط $v=-u-1$ رسم شود.

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} u=0+1-y=1-y \\ v=0+y-2=y-2 \end{cases} \Rightarrow v=-u-1$$

لذا به جای خط $x=2$ باید خط $v=-u+3$ رسم شود.

$$x=2 \Rightarrow \begin{cases} u=2+1-y=3-y \\ v=2+y-2=y \end{cases} \Rightarrow v=-u+3$$



حالا باید چهار خط را در صفحه $u-v$ رسم کنیم:

در واقع در این تبدیل ابتدا اندازه شکل توسط نگاشت

$$w_1 = (1+i)z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$$

می کند و سپس توسط نگاشت $w = w_1 + 1 - 2i$ شکل، به اندازه $1-2i$

انتقال می یابد.

توضیح: البته اگر این مسئله در غالب یک تست چهار گزینه ای مطرح شده بود، با توجه به اینکه نقاط و خطوط مرزی به چه نقاطی تبدیل شده اند (روش نقطه یابی) به راحتی می توانستیم بدون انجام محاسبات گزینه صحیح را انتخاب کنیم. مگر اینکه گزینه ها به طرز شدیدی با قدرت طرح شده باشد!

مثال ۳: نگاشت $w = iz + i$ نیم صفحه $x > 0$ را بر روی کدام ناحیه می نگارد؟

$$v < 1 \text{ و } u > \frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$v > \frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$v > 1 \quad (۲)$$

$$u > 1 \quad (۱)$$

☒ پاسخ: گزینه «۲»

$$w = iz + i = i(x + iy) + i = -y + i(x + 1) = u + iv$$

$$v = x + 1 \Rightarrow x = v - 1 \xrightarrow{x > 0} v - 1 > 0 \Rightarrow v > 1$$

$$w = z^2 \quad \text{نگاشت}$$

این نگاشت هر نقطه $z = re^{i\theta}$ را به نقطه $w = r^2 e^{i2\theta}$ تبدیل می کند. در واقع این نگاشت، زاویه را دو برابر کرده و اندازه را به توان ۲ می رساند این نگاشت فقط در مبدأ مختصات که مشتق آن برابر صفر است، همدیس نیست.

مثال ۴: تصویر میدان $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) > 1\}$ تحت نگاشت $w = z^2$ کدام است؟

$$\{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} w > 2\} \quad (۲)$$

$$\{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} w > 1\} \quad (۱)$$

$$\{w \in \mathbb{C}; (\operatorname{Re} w)(\operatorname{Im} w) > 1\} \quad (۴)$$

$$\{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} w > 1\} \quad (۳)$$

☒ پاسخ: گزینه «۲» اگر فرض کنیم $z = x + iy$ و $w = u + iv$ تحت نگاشت $w = z^2$ داریم:

$$w = z^2 \Rightarrow u + iv = (x + iy)^2 \Rightarrow u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$$

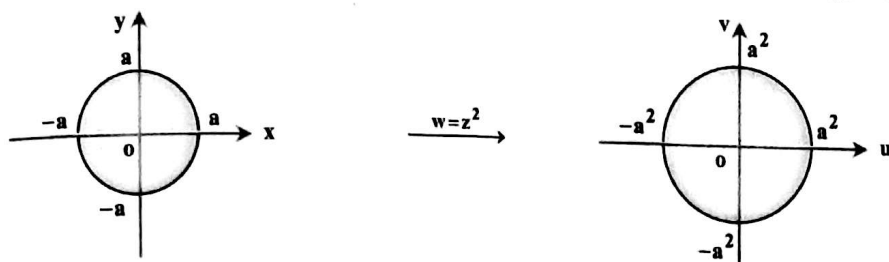
پس $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ ، از طرفی ناحیه ی داده شده در سؤال به صورت $\{xy > 1, x > 0, y > 0\}$ می باشد که ناحیه ی مرزهای آن به صورت زیر است:

$$xy > 1 \Rightarrow 2xy > 2 \Rightarrow v > 2$$



مثال ۵: تصویر دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ تحت نگاشت $w = z^2$ را بیابید.

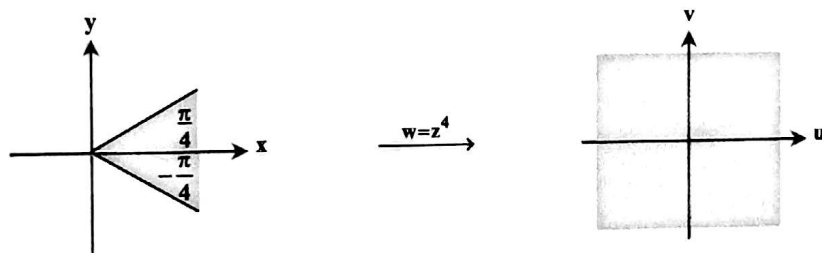
پاسخ: معادله دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ در مختصات قطبی به صورت $z = ae^{i\theta}$ می‌باشد و چون نگاشت $w = z^2$ ، زاویه را دو برابر و همچنین اندازه را به توان ۲ می‌رساند، لذا $w = a^2 e^{i2\theta}$ خواهد بود، یعنی معادله دایره‌ای به صورت $u^2 + v^2 = a^2$ ، به عبارت دیگر تحت این نگاشت دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a در صفحه (x, y) به دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a^2 در صفحه (u, v) تبدیل می‌شود.



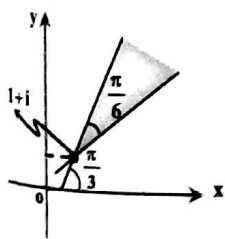
نکته ۳: خطوط $x = c$ توسط این نگاشت به سهمی‌های $v^2 = -4c^2(u - c^2)$ و خطوط $y = d$ به سهمی‌های $v^2 = 4d^2(u + d^2)$ تبدیل می‌شوند.

نگاشت $w = z^n$

این نگاشت که در آن n یک عدد طبیعی و بزرگتر از یک است، طول هر نقطه مانند z را به توان n می‌رساند و آرگومان آن را نیز n برابر می‌کند. توسط این نگاشت نقاط $-\frac{\pi}{n} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{n}$ به نقاط $-\pi \leq \text{Arg}(w) \leq \pi$ تبدیل می‌گردند در واقع توسط این نگاشت زاویه اشکال بازتر می‌گردد. قابل ذکر است که نگاشت $w = z^2$ حالت خاصی از این نگاشت می‌باشد و مانند نگاشت z^2 این نگاشت نیز در مبدأ مختصات هم‌دیس نیست. به مثال مقابل دقت کنید:



مثال ۶: نگاشتی که ناحیه داده شده در شکل زیر را به کل نیم‌صفحه بالایی بنگارد، کدام است؟



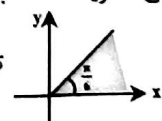
(۱) $w = [z - (1+i)]^2$

(۲) $w = [z - (1+i)]^6$

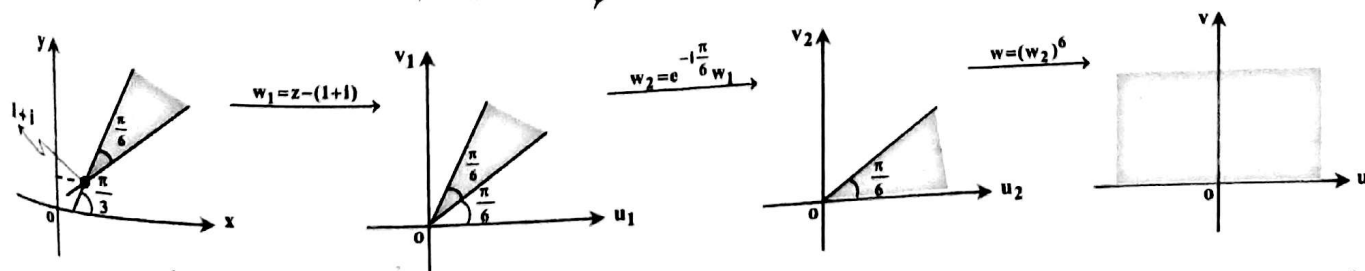
(۳) $w = -[z - (1+i)]^2$

(۴) $w = -[z - (1+i)]^6$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه توسط نگاشت $w = z^n$ ، ناحیه $0 \leq \text{Arg} z < \frac{\pi}{n}$ بر روی نیم‌صفحه بالایی نگاشته می‌شود. ابتدا باید ناحیه را به صورت



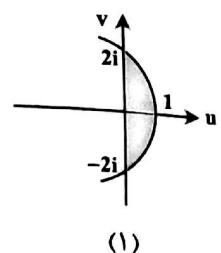
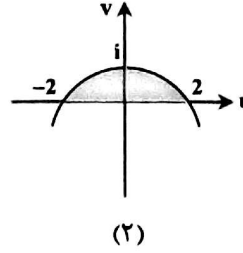
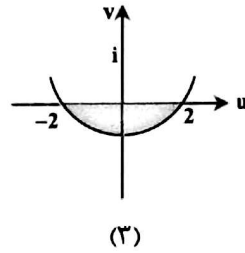
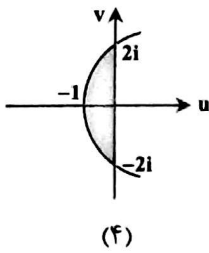
تبدیل کنیم و سپس با نگاشت $w = z^6$ این ناحیه را به کل نیم‌صفحه فوقانی بنگاریم. برای این کار ابتدا شکل داده شده را با نگاشت $w_1 = z - (1+i)$ انتقال می‌دهیم و سپس با نگاشت $w_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} w_1$ به اندازه $-\frac{\pi}{6}$ دوران می‌دهیم.



$$w = (w_2)^6 = (e^{-i\frac{\pi}{6}})^6 [z - (1+i)]^6 = e^{-i\pi} [z - (1+i)]^6 = -[z - (1+i)]^6$$

دقت کنید در نهایت w به صورت مقابل محاسبه شد:

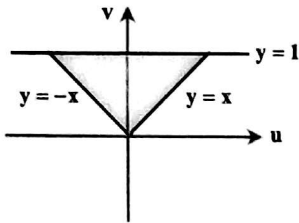
مثال ۷: تابع $w = z^2$ ناحیه مثلثی بین خطوط $y = 1$ و $y = \pm x$ را به کدام ناحیه تبدیل می‌کند؟



پاسخ: گزینه «۴» ✓

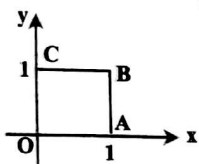
با توجه به نگاشت $w = z^2$ داریم:

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$



تصویر خط $y = 1$ تحت نگاشت w با توجه به روابط به دست آمده برای u و v به صورت $u = x^2 - 1$ و $v = 2x$ است که آن را می‌توان به صورت $v^2 = 4(u + 1)$ نوشت که یک سهمی افقی با رأس $(-1, 0)$ است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. همین‌جا پاسخ به تست تمام است ولی برای تمرین بیشتر بررسی‌های بیشتر را نیز انجام می‌دهیم: برای خط $y = x$ ، $u = 0$ و $v = 2x^2$ و برای خط $y = -x$ ، به صورت $v = -2x^2$ و در نتیجه تصویر خط $y = \pm x$ به صورت پاره‌خط $u = 0$ و $-2 \leq v \leq 2$ است. (دقت کنید $-2x^2 \leq v \leq 2x^2$ و چون $0 < x < 1$ ، لذا $-2 \leq v \leq 2$ به دست آمد).

مثال ۸: ناحیه‌ی نشان داده شده در شکل زیر تحت نگاشت $w = z^2$ به ناحیه‌ی D' تبدیل می‌شود، مساحت D' چقدر است؟



$$\frac{8}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{11}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{11}{12} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۲» ✓ ابتدا نگاشت $w = z^2$ را به شکل مقابل می‌نویسیم:

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم هر چهار خط به چه ناحیه‌هایی تبدیل خواهند شد.

ابتدا OA را بررسی می‌کنیم که $y = 0$ و $0 \leq x \leq 1$ را می‌توان برای آن نوشت، لذا داریم: $0 \leq u \leq 1$ ، $v = 0$.

تبدیل AB تحت این نگاشت، با توجه به $x = 1$ ، لذا داریم:

$$\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \Rightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4}$$

تبدیل BC تحت این نگاشت، با توجه به $y = 1$ برابر است با:

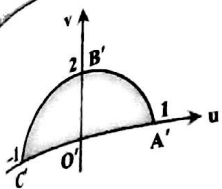
$$\begin{cases} v = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow u = \frac{v^2}{4} - 1$$

تبدیل CO، با توجه به $x = 0$ برابر است با:

$$\begin{cases} u = -y^2 \\ v = 0 \end{cases} \xrightarrow{0 \leq y \leq 1} -1 \leq -y^2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq u \leq 0$$

از چهار رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم: $-1 \leq u \leq 1$ و دو منحنی قرینه‌ی یکدیگر (نسبت به محور v) به شکل زیر داریم:

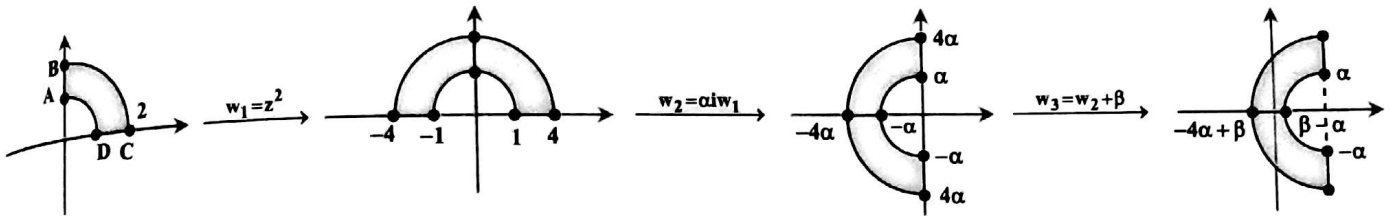
$$u = \frac{v^2}{4} - 1, u = 1 - \frac{v^2}{4}$$



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{v^2}{4}) dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{v^2}{4}) dv = \left[v - \frac{v^3}{12} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{16}{12} = \frac{\pi}{3}$$

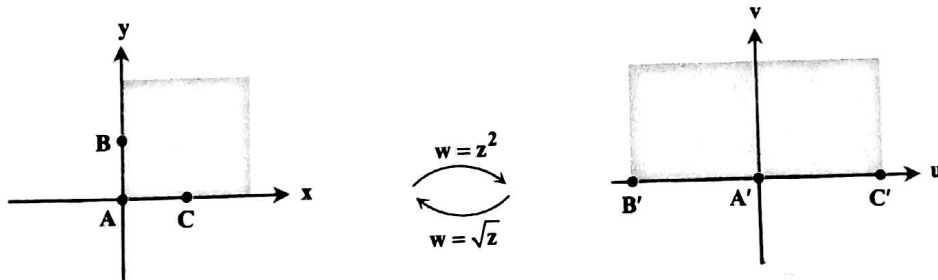
دقت کنید نقطه‌ی برخورد منحنی $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ یا $u = \frac{v^2}{4}$ با محور v به ازای $u = 0$ ، برابر $v = 2$ به دست می‌آید که در بازه‌ی انتگرال‌گیری لحاظ شد.

مثال ۹: تصویر میدان $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2; 0 \leq \text{Arg} z \leq \frac{\pi}{4}\}$ تحت نگاشت $w = \alpha iz^2 + \beta$ را بیابید. ($\alpha > 1, \beta > 0$)



نگاشت $\sqrt[n]{z}$

این نگاشت که در آن n عددی طبیعی و مخالف یک می‌باشد هر نقطه با مختصات (r, θ) را به نقطه‌ای به مختصات $(\sqrt[n]{r}, \frac{\theta + 2k\pi}{n})$ تبدیل می‌کند اما در این کتاب $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ و در نتیجه شاخه اصلی در نظر گرفته می‌شود. ملاحظه می‌شود که این نگاشت، عکس نگاشت z^n می‌باشد و توسط آن ناحیه $-\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$ به نقاط $-\frac{\pi}{n} \leq \text{Arg}(w) \leq \frac{\pi}{n}$ تبدیل می‌شوند.



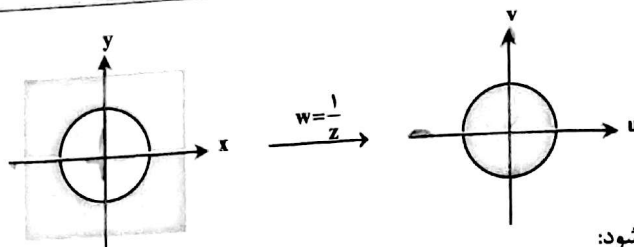
نگاشت $w = \frac{1}{z}$

این نگاشت نقطه $z = re^{i\theta}$ را به نقطه $w = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ تبدیل می‌کند و به غیر از مبدأ مختصات در بقیه نقاط همدیس است. این نگاشت در واقع فاصله نقطه از مبدأ را عکس و زاویه را تغییر علامت می‌دهد. و همواره توسط آن نقاط خارج دایره واحد ($|z| = 1$) به نقاط ناصفر داخل این دایره نگاشته می‌شوند؛ برعکس. اما نقاط روی دایره واحد به روی دایره واحد تصویر خواهند شد. در صورتی که نقطه $w = u + iv$ تصویر نقطه ناصفر $z = x + iy$ تحت تبدیل $w = \frac{1}{z}$ باشد، آنگاه روابط زیر را داریم:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \times \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv} = \frac{1}{u + iv} \times \frac{u - iv}{u - iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2}$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad , \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad , \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$



توسط این نگاشت تبدیل‌های زیر انجام می‌شود:

- (۱) هر خط غیر گذرنده از مبدأ به دایره‌ای تبدیل می‌شود که از مبدأ عبور و هر خط گذرنده از مبدأ به خطی که از مبدأ عبور می‌کند، تبدیل می‌شود.
 (۲) هر دایره غیر گذرنده از مبدأ را به دایره‌ای تبدیل می‌کند که از مبدأ عبور می‌کند و هر دایره گذرنده از مبدأ را به خطی تبدیل می‌کند که از مبدأ عبور نمی‌کند.

مثال ۱۰: خط $x=1$ و $y=1$ توسط نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به ترتیب بر روی کدام دایره‌ها نگاشته می‌شوند؟

- (۱) دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{4}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{4}$ ، دایره‌ای به مرکز $(0, \frac{1}{4})$ و شعاع $\frac{1}{4}$
 (۲) دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{4}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{4}$ ، دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{4}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{4}$
 (۳) دایره‌ای به مرکز $(0, \frac{1}{4})$ و شعاع $\frac{1}{4}$ ، دایره‌ای به مرکز $(0, -\frac{1}{4})$ و شعاع $\frac{1}{4}$
 (۴) دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{4}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{4}$ ، دایره‌ای به مرکز $(0, -\frac{1}{4})$ و شعاع $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \Rightarrow 1 = \frac{u}{u^2 + v^2} \Rightarrow u^2 + v^2 - u = 0 \Rightarrow (u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{v}{u^2 + v^2} \Rightarrow 1 = -\frac{v}{u^2 + v^2} \Rightarrow u^2 + v^2 + v = 0 \Rightarrow u^2 + (v + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

مثال ۱۱: تصویر خط $y = x + \frac{1}{4}$ به وسیله نگاشت $w = \frac{1}{z}$ کدام است؟

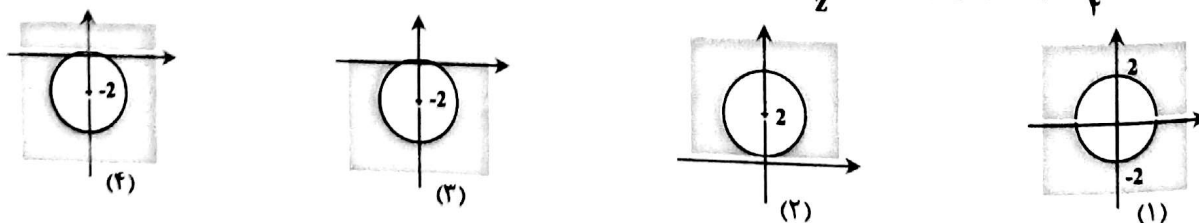
- (۱) خطی که از مبدأ می‌گذرد. (۲) خطی که از مبدأ نمی‌گذرد. (۳) دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد. (۴) دایره‌ای که از مبدأ نمی‌گذرد.

پاسخ: گزینه «۳»

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} + \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{2u + u^2 + v^2}{4(u^2 + v^2)} \Rightarrow u^2 + v^2 + 2u + 2v = 0$$

معادله فوق دایره‌ای است که از مبدأ عبور می‌کند. البته با توجه به نکات فوق چون خط از مبدأ عبور نمی‌کند به دایره‌ای تبدیل می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند.

مثال ۱۲: تصویر ناحیه $0 < y < \frac{1}{4}$ به وسیله تبدیل $w = \frac{1}{z}$ کدام ناحیه است؟



پاسخ: گزینه «۳»

$$0 < y < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < -\frac{v}{u^2 + v^2} < \frac{1}{4} \Rightarrow u^2 + v^2 + 4v > 0 \Rightarrow u^2 + (v + 2)^2 > 4$$

با توجه به نکات فوق، چون خط از مبدأ عبور نمی‌کند معادله بالا به دایره‌ای تبدیل می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند. ناحیه مزبور خارج دایره‌ای به مرکز $(0, -2)$ و شعاع ۲ می‌باشد. از طرفی چون $y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$ و $y > 0$ می‌باشد پس $v < 0$ لذا گزینه (۳) جواب است.

مثال ۱۳: ناحیه $0 \leq \theta \leq \pi$ تحت تبدیل $w = -\frac{i}{\sqrt{z}}$ کدام است؟

(۴) ربع چهارم

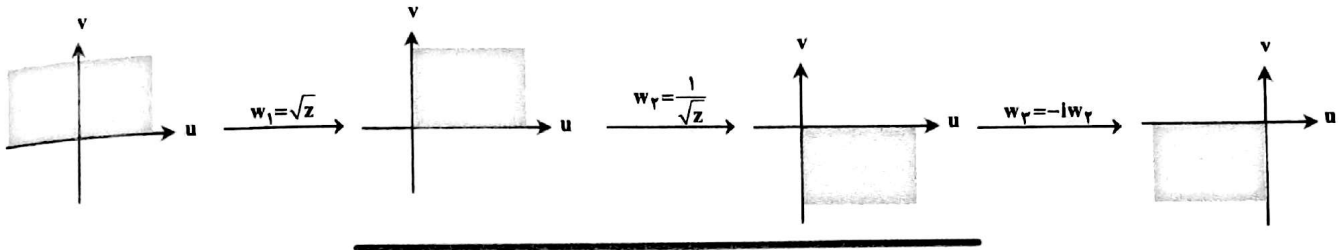
(۳) ربع دوم و سوم

(۲) ربع دوم

(۱) ربع سوم

✓ پاسخ: گزینه «۱» توسط نگاشت $w_1 = \sqrt{z}$ ناحیه $0 \leq \theta \leq \pi$ به ناحیه $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ تبدیل خواهد شد و می‌دانیم توسط نگاشت ربع $w_2 = \frac{1}{w_1}$

اول بر روی ربع چهارم نگاشته می‌شود و در نهایت توسط نگاشت $w_3 = -iw_2$ شکل به اندازه 90° دوران خواهد کرد.



مثال ۱۴: نقش ناحیه زاویه‌ای $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ با تبدیل $w = -\frac{i}{z^2}$ عبارتست از:

$$\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi \quad (۴)$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۲» ناحیه $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ تحت نگاشت $w_1 = z^2$ به ناحیه $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ تبدیل می‌شود و نگاشت $w_2 = \frac{1}{z^2}$ این ناحیه را به ربع

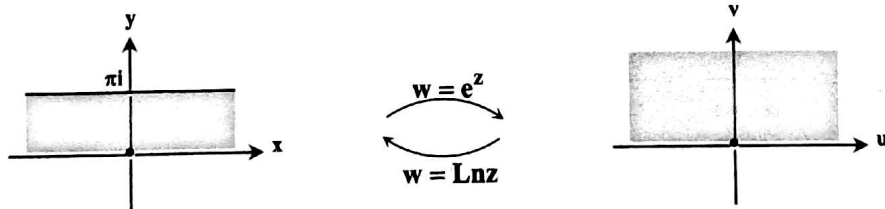
چهارم می‌نگارد و در نهایت $w_3 = -iw_2$ ناحیه را 90° دوران می‌دهد. پس ناحیه $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ جواب است.

نگاشت $w = e^z$

با استفاده از فرم قطبی داریم:

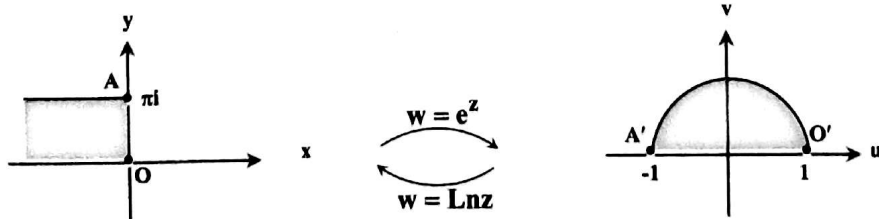
$$w = e^z = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow \begin{cases} r = e^x \\ \theta = y \end{cases}$$

این نگاشت، خط $x = a$ را بر روی دایره‌ای به شعاع $r = e^a$ و خط $y = c$ را به نیم‌خطی که با جهت مثبت محور x ها زاویه c می‌سازد، تبدیل می‌کند که محدوده تغییرات این خط با توجه به حدود تغییرات x تعیین می‌شود. واضح است که این نگاشت، همدیس است. به دو مثال زیر توجه کنید:



برای مثال در ناحیه فوق داریم:

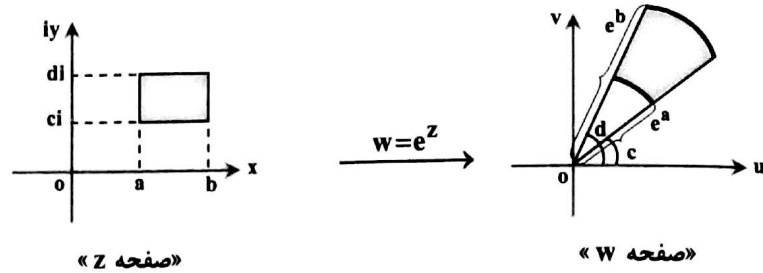
$$\begin{cases} -\infty < x < \infty \Rightarrow e^{-\infty} < e^x < e^{+\infty} \Rightarrow 0 < e^x < +\infty \Rightarrow 0 < r < \infty \\ 0 < y < \pi \Rightarrow 0 < \theta < \pi \end{cases}$$



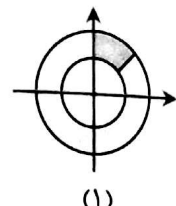
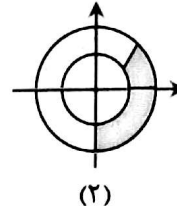
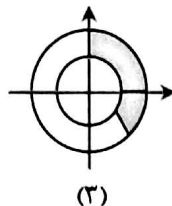
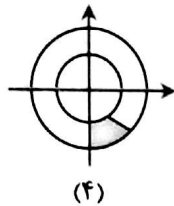
و همچنین در ناحیه بالا داریم:

$$\begin{cases} -\infty < x < 0 \Rightarrow e^{-\infty} < e^x < e^0 \Rightarrow 0 < r < 1 \\ 0 < y < \pi \Rightarrow 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

به طور کلی تحت این نگاشت ناحیه $\{(x,y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ به ناحیه $\{(r,\theta); e^a \leq r \leq e^b, c \leq \theta \leq d\}$ نگاشته می‌شود، به شکل زیر نگاه کنید:



مثال ۱۵: تبدیل یافته ناحیه $D = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ تحت نگاشت $w = e^z$ کدام است؟



پاسخ: گزینه «۱» ✓

$$\left. \begin{matrix} r = e^x \\ \varphi = y \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow e^1 \leq r \leq e^2, \quad \frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۶: نگاشت $f(z) = e^z$ ناحیه $D = \{(x,y) : x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$ را بر روی کدامیک از نواحی زیر می‌نگارد؟

$$\{(u,v) | u^2 + v^2 \leq 1, v \geq 0\} \quad (۲)$$

$$\{(u,v) | u^2 + v^2 \geq 1, u \geq 0\} \quad (۱)$$

$$\{(u,v) | u^2 + v^2 \geq 1, v \geq 0\} \quad (۴)$$

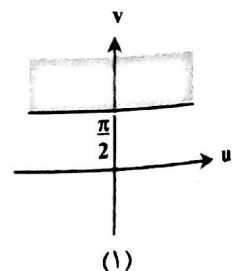
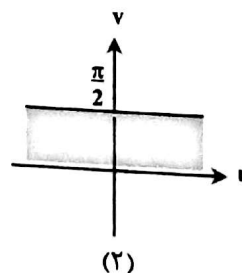
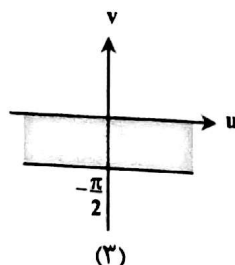
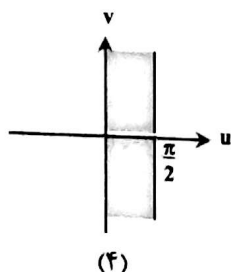
$$\{(u,v) | u^2 + v^2 \leq 1, u \leq 0\} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۲» ✓ خط $x = 0$ بر روی دایره‌ای به شعاع $r = e^0 = 1$ نگاشته می‌شود، لذا ناحیه $-\infty < x < 0$ داخل دایره $r \leq 1$ نگاشته می‌شود، از طرفی چون $0 \leq y \leq \pi$ لذا نیم‌دایره بالائی جواب است.

نگاشت $w = \text{Ln} z$

این نگاشت، عکس نگاشت $w = e^z$ می‌باشد و دایره به شعاع e^a را پاره‌خط قائم و شعاع‌های آنها را به خطوط افقی تبدیل می‌کند.

مثال ۱۷: تصویر مجموعه نقاط $y \geq 0$ و $x > 1$ توسط شاخه اصلی تابع $\text{Ln}(z-1)$ کدام ناحیه از صفحه w خواهد بود؟

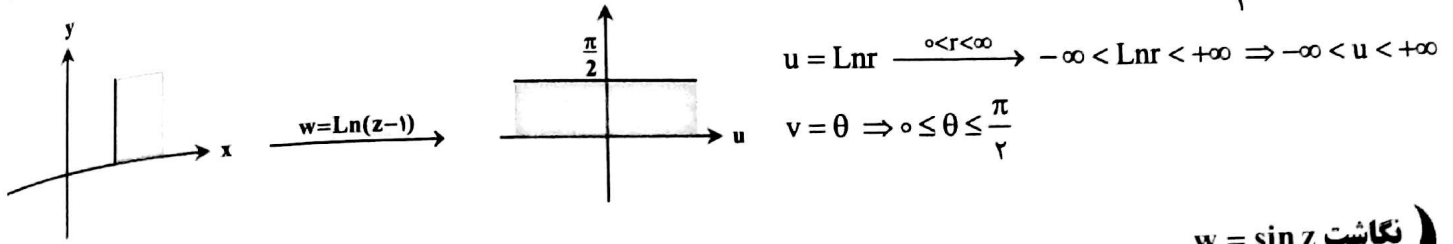


پاسخ: گزینه «۲» ✓

$$W = \text{Ln}(z-1) = \text{Ln}[(x-1) + iy] = \text{Ln}r + i\theta \Rightarrow u + iv = \text{Ln}r + i\theta \Rightarrow u = \text{Ln}r, v = \theta$$

$$r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad \theta = \text{Arctg} \frac{y}{x-1}$$

با توجه به تغییرات $x > 1$ و $y \geq 0$ ، تغییرات r بین صفر تا ∞ خواهد بود ($0 < r < \infty$) از طرفی چون $0 \leq y < \infty$ لذا $\text{Arctg} \frac{y}{x-1}$ بین صفر تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می کند، یعنی $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ می باشد.



نگاشت $w = \sin z$

این نگاشت در تمام صفحه z یک به یک نیست و لذا z را به نوار $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ محدود می کنیم، از آنجا که $f'(z) = \cos z$ در نقاط $z = \pm \frac{\pi}{2}$ برابر صفر است، لذا این نگاشت در این دو نقطه همبسی نیست در صورتی که $w = u + iv$ تصویر نقطه ناصفر $z = x + iy$ تحت تبدیل $w = \sin z$ باشد، آنگاه داریم:

$$w = u + iv = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$u = \sin x \cosh y \quad \text{و} \quad v = \cos x \sinh y$$

اگر $x \neq 0$ و $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$ آنگاه نقش هر خط ثابت $x = c$ یک هذلولی با معادله زیر است:

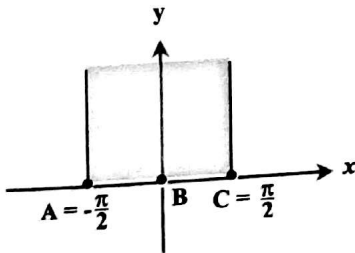
$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$$

اگر $0 < c < \frac{\pi}{2}$ آنگاه خط $x = c$ به شاخه سمت راست هذلولی و اگر $-\frac{\pi}{2} < c < 0$ آنگاه خط $x = c$ به شاخه سمت چپ هذلولی تبدیل می شود.

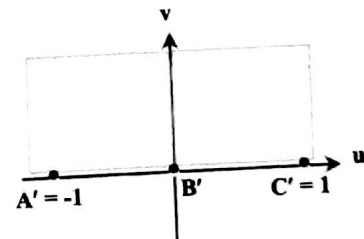
اگر $x = \pm \frac{\pi}{2}$ آنگاه $u = \pm \cosh y$ و $v = 0$ و خطوط قائم $x = \pm \frac{\pi}{2}$ بر روی قطعات $-1 \leq u \leq 1$ و $u \geq 1$ و $u \leq -1$ نگاشته می شوند.

و اگر $y \neq 0$ آنگاه نقش هر خط ثابت $y = c$ یک بیضی با معادله زیر است:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$$



$$w = \sin z$$



مثال ۱۸: هرگاه $z = x + iy$ و $w = u + iv$ ، آنگاه تحت نگاشت $w = \sin z$ خط $x = \frac{\pi}{4}$ به کدامیک از منحنی های زیر تبدیل خواهد شد؟

$$u^2 - v^2 = \frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$u^2 - v^2 = \frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» ☒

$$\frac{u^2}{\sin^2(\frac{\pi}{4})} - \frac{v^2}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} = 1 \Rightarrow 2u^2 - 2v^2 = 1 \Rightarrow u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$$

نگاشت $w = \cos z$

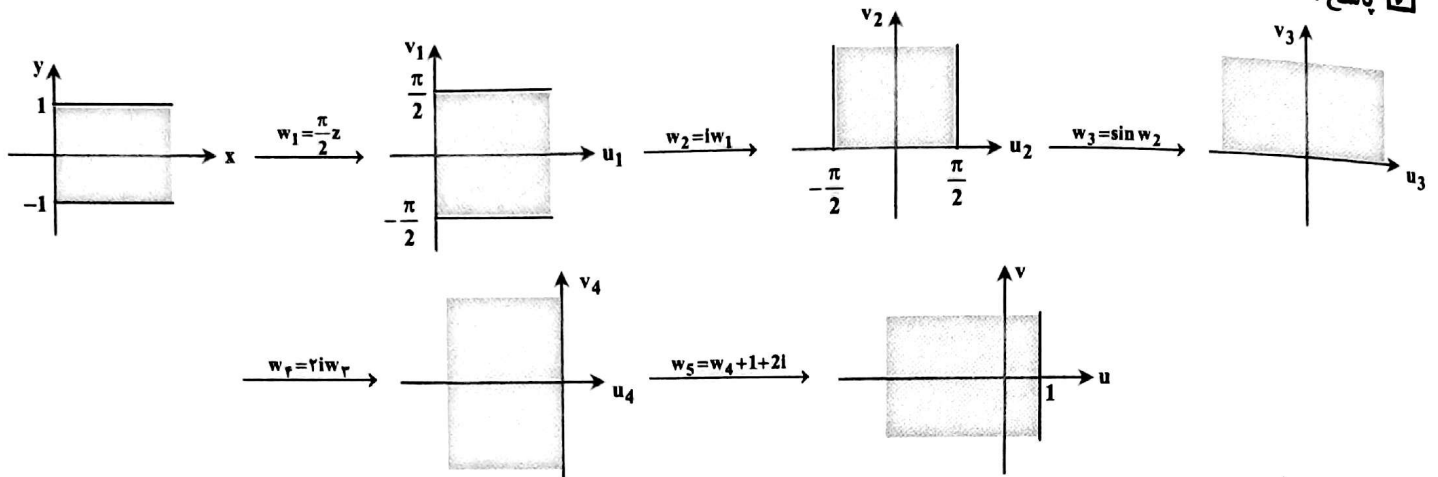
با توجه به اینکه $w = \cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$ لذا مشاهده می شود که نگاشت $w = \cos z$ از روی $w = \sin z$ بعد از انتقال z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ واحد به سمت راست حاصل می شود.

نگاشت $w = \sinh z$

با توجه به رابطه $w = \sinh z = -i \sin iz$ برای رسیدن نقش z به کمک تبدیل $w = \sinh z$ ، ابتدا از دوران $z_1 = iz$ و سپس از نگاشت $z_2 = \sin z_1$ و در نهایت از دوران $w = -iz_2$ استفاده می‌کنیم. به همین ترتیب برای تبدیل $w = \cosh z = \cos iz$ این رویه اجرا می‌شود.

مثال ۱۹: تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ی $D: \{z \mid 0 \leq \operatorname{Re} z < +\infty, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$ تحت تبدیل $w = -2 \sinh(\frac{\pi}{2} z) + 1 + 2i$ را بدست آورید.

پاسخ: ☒



نگاشت $w = z + \frac{1}{z}$

نگاشت فوق که به نگاشت ژوکوفسکی معروف است و در آیرودینامیک بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، به جز نقاط $z = \pm 1$ در تمام نقاط همدیس است. این نقاط به ترتیب با $w = 2$ و $w = -2$ متناظر می‌باشند.

اگر فرض کنیم $z = re^{i\theta}$ آنگاه $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ و همچنین با در نظر گرفتن $w = u + iv$ داریم:

$$w = z + \frac{1}{z} \Rightarrow u + iv = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow u + iv = (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\sin\theta \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} u &= (r + \frac{1}{r})\cos\theta \\ v &= (r - \frac{1}{r})\sin\theta \end{aligned}$$

با به توان ۲ رساندن طرفین روابط بالا و کم کردن دو رابطه از هم داریم:

$$\begin{cases} u^2 = (r + \frac{1}{r})^2 \cos^2\theta \\ v^2 = (r - \frac{1}{r})^2 \sin^2\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = (r^2 + \frac{1}{r^2} + 2) - (r^2 + \frac{1}{r^2} - 2) \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 4$$

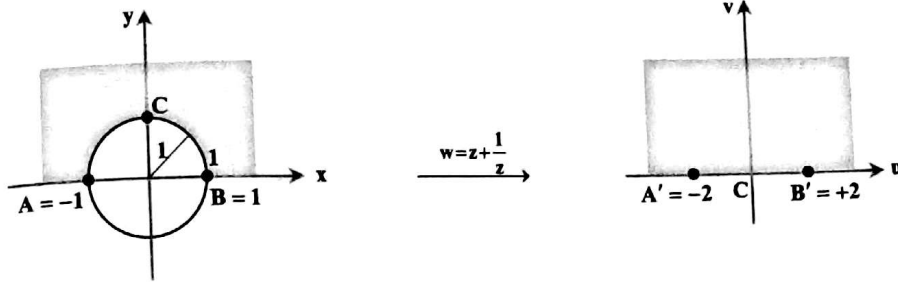
یعنی توسط این نگاشت، تمام خطوط شعاعی با زاویه θ به قسمتی از هذلولی با معادله فوق تبدیل می‌شوند. لازم به توضیح است اگر $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد، رابطه‌ی فوق قسمتی از خط $u = 0$ و اگر $\theta = k\pi$ ، رابطه فوق قسمتی از خط $v = 0$ می‌شود. به همین ترتیب اگر طرفین روابط به دست آمده برای u و v را به توان ۲ رسانده و با هم جمع کنیم، داریم:

$$\frac{u^2}{(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{v^2}{(r - \frac{1}{r})^2} = 1$$

یعنی تمام دایره‌هایی به شعاع r تحت این نگاشت به روی یک بیضی با معادله فوق نگاشته می‌شوند. و در حالت خاصی که $r = 1$ ، آنگاه دایره به ناحیه $\{ -2 \leq u \leq 2, v = 0 \}$ تبدیل می‌شود. یعنی پاره‌خطی که دو نقطه $u = 2$ و $u = -2$ را به هم وصل می‌کند.



نکته ۴: ناحیه بیرون دایره یک که در نیم صفحه فوقانی قرار دارد، توسط این نگاشت به ناحیه $\text{Im } w > 0$ (یعنی نیم صفحه فوقانی در صفحه w) تبدیل می شود.



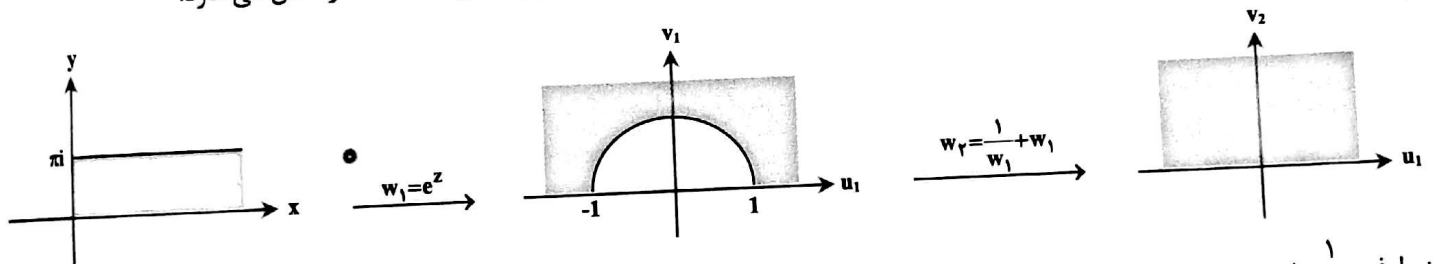
نکته ۵: نگاشت ژوکوفسکی، داخل دایره واحد را به کل صفحه مختلط و دایره $|z| = R$ (با $R \neq 1$) را به یک بیضی می نگارد.

مثال ۲۰: تابع $w = z \cosh z$ قلمرو $\text{Re } z > 0$ و $0 < \text{Im } z < \pi$ را به روی چه قلمرویی در صفحه w می نگارد؟

پاسخ: گزینه «۲» ☒
 $\text{Re}(w) > 0$ (۱) $\text{Im}(w) > 0$ (۲) $\text{Re}(w) < 0$ (۳) $\text{Im}(w) < 0$ (۴)

$$w = z \cosh z = z \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right) = e^z + \frac{1}{e^z}$$

با فرض $w_1 = e^z$ می دانیم این نگاشت ناحیه $\text{Re } z > 0$ و $0 < \text{Im } z < \pi$ را به بیرون نیم دایره نشان داده شده در شکل می نگارد.



از طرفی $w = w_1 + \frac{1}{w_1}$ یک نگاشت ژوکوفسکی می باشد با توجه به تعریف این نگاشت ناحیه ایجاد شده به نیمه صفحه بالائی یعنی ناحیه $\text{Im } w > 0$ نگاشته می شود.

مثال ۲۱: ناحیه $1 < |z| < 2$ تحت نگاشت $w = z + \frac{1}{z}$ به کدام ناحیه تبدیل می شود؟

(۱) درون و روی بیضی به کانون های ± 2 غیر از خط واصل آن ها
 (۲) فقط درون بیضی به کانون ها ± 2 غیر از خط واصل آن ها
 (۳) درون و روی بیضی به کانون های ± 2 با خط واصل آن ها
 (۴) فقط درون بیضی به کانون های ± 2 با خط واصل آن ها

پاسخ: گزینه «۲» ☒ با توجه به معادله به دست آمده اگر $r = 1$ در این صورت $v = 0$ و $-2 \leq u \leq 2$ و اگر $r = 2$ معادله زیر را داریم:

$$\frac{u^2}{(2 + \frac{1}{2})^2} + \frac{v^2}{(2 - \frac{1}{2})^2} = 1 \Rightarrow \frac{u^2}{\frac{25}{4}} + \frac{v^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

با توجه به معادله کلی بیضی که به فرم $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ می باشد، در این مسئله $a^2 = \frac{25}{4}$ و $b^2 = \frac{9}{4}$ و کانون های آن مطابق رابطه زیر حساب می شود:

$$c = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} = \pm \sqrt{\frac{16}{4}} = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

لذا تصویر $|z| = 2$ بیضی به کانون های ± 2 می باشد، اما دقت کنید علامت تساوی در ناحیه $1 < |z| < 2$ وجود ندارد ($r \neq 1$, $r \neq 2$) پس روی بیضی جزء ناحیه نیست از طرفی خط واصل دو کانون نیز جزء ناحیه نیست.