هندسه و استدلال

- تعریف‌ها و قضیه‌های مهم در مورد زاویه‌ها
- هم‌نهشتی مثلث‌ها

چند قضیه و تعریف مهم در مورد زاویه‌ها

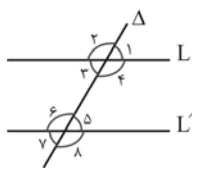
۱ اگر مجموع دو زاویه ۹۰ درجه باشد، آن دو زاویه را متمم گوییم.

۲ اگر مجموع دو زاویه ۱۸۰ درجه باشد، آن دو زاویه را مکمل گوییم.

۳ اگر دو زاویه با هم برابر باشند، متمم‌های آنها با هم و مکمل‌های آنها نیز با هم برابرند.

۴ زاویه‌های متقابل به رأس، در هر دو خط متقاطع با هم برابرند.

۵ اگر یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کند، همه‌ی زاویه‌های حاده با هم و همه‌ی زاویه‌های منفرجه با هم برابرند.

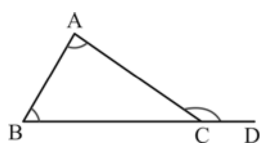


$$\begin{cases} L \parallel L' \\ \Delta \ \text{مورب} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{۱}=\hat{۳}=\hat{۵}=\hat{۷} \\ \hat{۲}=\hat{۴}=\hat{۶}=\hat{۸} \end{cases}$$

توجه کنید که عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی اگر خطی دو خط دیگر را قطع کند، بطوری که همه‌ی زاویه‌های حاده‌ی (یا همه‌ی زاویه‌های منفرجه‌ی) ایجاد شده با هم برابر باشند، آنگاه آن دو خط با هم موازیند.

۶ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۷ در هر مثلث، هر زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور به آن.



$$A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$$

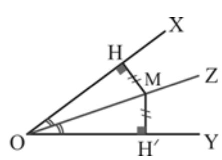
هم‌نهشتی مثلث‌ها

دو مثلث را هم‌نهشت گوییم هرگاه دقیقاً برهم منطبق شوند و یکدیگر را بپوشانند. اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، همه‌ی اجزای نظیر در آنها با هم برابر است.

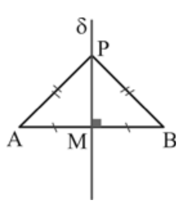
۱ دو مثلث در حالات تساوی سه ضلع (ض‌ض‌ض)، تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین (ض‌زض) و تساوی دو زاویه و ضلع بین (زض‌ز) هم‌نهشت هستند.

۲ دو مثلث قائم‌الزاویه علاوه بر حالات فوق در حالات تساوی وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه و همچنین وتر و یک زاویه‌ی حاده با هم هم‌نهشت هستند.

با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها، می‌توان دو قضیه‌ی مهم زیر را اثبات کرد:



۱ هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یعنی در شکل مقابل اگر OZ نیمساز زاویه‌ی XOY و M نقطه‌ی واقع بر آن باشد، آنگاه $MH = MH'$.
عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه، به یک فاصله باشد، آنگاه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



۲ هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی در شکل مقابل اگر δ، عمود منصف پاره‌خط AB و P نقطه‌ای واقع بر آن باشد، آنگاه $PA = PB$.
عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آنگاه روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

هندسه و استدلال

- مثلث متساوی‌الساقین
- مثلث متساوی‌الاضلاع
- متوازی‌الاضلاع

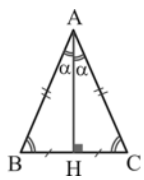
مثلث متساوی‌الساقین

مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین نامیده می‌شود، هر کدام از دو ضلع مساوی با هم را ساق و ضلع دیگر را قاعده می‌نامیم.

۱ در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبرو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.

۲ عکس قضیه‌ی (۱) نیز صحیح است، یعنی اگر در مثلثی دو زاویه‌ی مساوی وجود داشته باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است (اضلاع روبرو به زاویه‌های مساوی آن با هم برابرند).

۳ در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر قاعده، بر هم منطبقند.



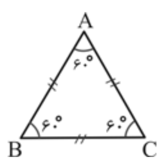
۴ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ روابط زیر برقرار است:

زوایای مجاور به ساق $\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$

زاویه‌ی روبه‌رو به قاعده $\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C}$

مثلث متساوی‌الاضلاع

مثلثی که هر سه ضلع آن با هم برابر باشند، متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود. زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع، هر سه با هم برابرند و اندازه‌ی آنها ۶۰ درجه است.
همچنین اگر هر سه زاویه‌ی مثلثی با هم برابر بودند، می‌توان نتیجه گرفت که آن مثلث متساوی‌الاضلاع است، یعنی هر سه ضلع آن مثلث با هم برابرند.



متوازی‌الاضلاع

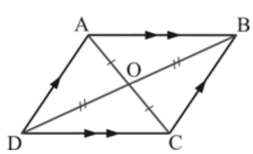
یک متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که ضلع‌های آن دو به دو با هم موازی هستند، از موازی بودن دو به دوی اضلاع، نتیجه می‌شود که در متوازی الاضلاع:

۱ ضلع‌های روبرو با هم مساویند.

۲ زاویه‌های روبرو با هم مساویند.

۳ زاویه‌های مجاور با هم مکملند.

۴ قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.



$OA = OC$ و $OB = OD$

۵ با رسم هر قطر، متوازی الاضلاع به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌شود.

$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{CDB}$ و $\overset{\Delta}{ACD} \cong \overset{\Delta}{CBA}$

۶ با رسم دو قطر، متوازی الاضلاع به چهار مثلث تقسیم می‌شود.

$\overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD}$ و $\overset{\Delta}{OAD} \cong \overset{\Delta}{OCB}$

۷ **مستطیل:** متوازی الاضلاعی است که زاویه‌های آن با هم مساوی باشند (هر چهار زاویه ۹۰ درجه هستند).
از تعریف فوق، می‌توان نتیجه گرفت که در مستطیل، طول قطرها با هم برابر است.

۸ **لوزی:** متوازی الاضلاعی است که ضلع‌های آن با هم مساوی باشند.
از تعریف فوق، می‌توان نتیجه گرفت که در لوزی، قطرها بر هم عمود بوده و همچنین نیمساز زاویه‌های لوزی هستند.

هندسه و استدلال
- تعریف‌ها و قضیه‌های مهم در مورد خم‌ها
- چندضلعی‌ها

تعریف‌ها و قضیه‌های مهم در مورد خم‌ها

① **خم مسطح:** مجموعه‌ای از نقطه‌هاست که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ، رسم کنیم.

② **خم ساده:** یک خم مسطح است که هیچ یک از نقطه‌های خود را قطع نکند، مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند.

③ **خم بسته:** اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم بسته نامیده می‌شود.

④ **قضیه‌ی خم جردن:** هر خم ساده‌ی بسته C، صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

⑤ اگر همه‌ی زاویه‌های داخلی یک چندضلعی کمتر از ۱۸۰ درجه باشند، ناحیه‌ی داخل آن چندضلعی محدب است و اگر در یک چندضلعی حداقل یک زاویه‌ی بیشتر از ۱۸۰ درجه وجود داشته باشد، ناحیه‌ی داخل آن چندضلعی محدب نیست.

⑥ یک ناحیه (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) **محدب** است اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کند، کاملاً در آن ناحیه قرار گیرد.

چندضلعی‌ها

① **چندضلعی:** یک خم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد، به طوری که نقطه‌های انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آنها روی یک خط قرار نگرفته باشند.

② تعداد قطرهای هر n ضلعی برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

③ مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب، برابر $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است، پس هر زاویه‌ی داخلی یک n ضلعی منتظم $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ است.

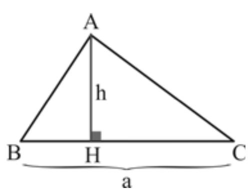
④ مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب، ۳۶۰ درجه است.

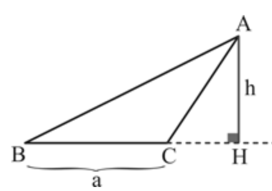
مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس
- مساحت مثلث
- مساحت چندضلعی‌ها

مساحت مثلث

مساحت مثلث قائم‌الزاویه: مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن.

مساحت مثلث در حالت کلی: مساحت هر مثلث دلخواه، برابر است با نصف حاصلضرب یک ضلع آن، در ارتفاع وارد بر آن.



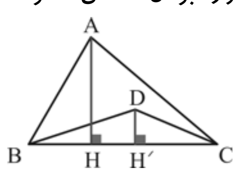


$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{۱}{۲} a . h$$

از نکته‌ی اخیر، می‌توان به سه نتیجه‌ی مهم رسید:

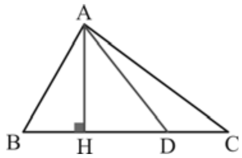
❖ **نتیجه‌ی ۱:** اگر دو مثلث دارای یک قاعده‌ی برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها، برابر است با نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن قاعده‌ی مشترک.

پس در شکل روبرو، داریم:



$$\frac{S(\overset{\Delta}{ABC})}{S(\overset{\Delta}{DBC})} = \frac{AH}{DH'}$$

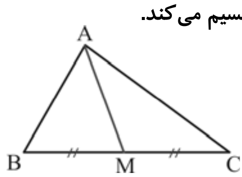
❖ **نتیجه‌ی ۲:** اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها، برابر است با نسبت قاعده‌ی نظیر آن ارتفاع مشترک.



پس در شکل روبرو، داریم:

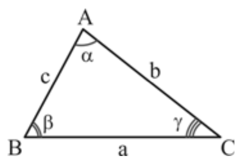
$$\frac{S(\overset{\Delta}{ABC})}{S(\overset{\Delta}{ABD})}=\frac{BC}{BD} \quad و \quad \frac{S(\overset{\Delta}{ABC})}{S(\overset{\Delta}{ACD})}=\frac{BC}{CD} \quad و \quad \frac{S(\overset{\Delta}{ABD})}{S(\overset{\Delta}{ACD})}=\frac{BD}{CD}$$

❖ **نتیجه‌ی ۳:** از قسمت قبل، می‌توان نتیجه گرفت که میانه‌ی هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.



پس در شکل روبرو، داریم:

$$S(\overset{\Delta}{ABM})=S(\overset{\Delta}{ACM})=\frac{۱}{۲}S(\overset{\Delta}{ABC})$$

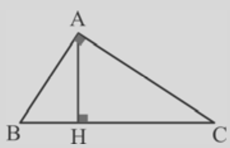


فرمول دیگری برای محاسبه‌ی مساحت مثلث در حالت کلی: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع.

پس در شکل روبرو داریم:

$$S(\overset{\Delta}{ABC})=\frac{۱}{۲}b.c.\sin\alpha=\frac{۱}{۲}c.a\sin\beta=\frac{۱}{۲}a.b.\sin\gamma$$

نکته در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصلضرب وتر، در ارتفاع وارد بر آن، برابر است با حاصلضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه، زیرا:



$$\begin{cases} ۲S(\overset{\Delta}{ABC})=AH\times BC \\ ۲S(\overset{\Delta}{ABC})=AB\times AC \end{cases} \Rightarrow \boxed{AH\times BC=AB\times AC}$$

مساحت چهارضلعی‌ها

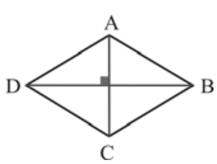
مساحت مربع: مساحت هر مربع، برابر است با مربع طول ضلع آن.

مساحت مستطیل: مساحت هر مستطیل، برابر است با حاصلضرب طول در عرض آن.

مساحت متوازی‌الاضلاع: مساحت هر متوازی‌الاضلاع، برابر است با حاصلضرب یک ضلع در ارتفاع نظیر آن ضلع.

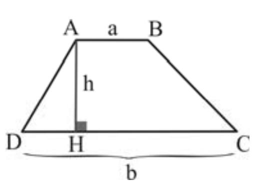
مساحت لوزی: مساحت هر لوزی، برابر است با نصف حاصلضرب قطرهای آن.

پس اگر در شکل مقابل در نظر بگیریم $AC=d$ و $BD=d'$، آنگاه:



$$S(ABCD)=\frac{۱}{۲}d.d'$$

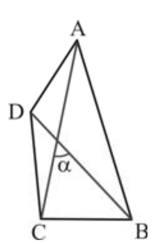
مساحت ذوزنقه: مساحت هر ذوزنقه، برابر است با نصف حاصلضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع آن.



پس در شکل مقابل، داریم:

$$S(ABCD)=\frac{۱}{۲}(a+b).h$$

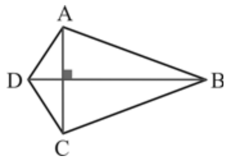
مساحت چهارضلعی‌های محدب در حالت کلی: در حالت کلی، مساحت هر چهارضلعی محدب، برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر آن، در سینوس زاویه‌ی بین آن دو قطر.



پس اگر در شکل روبرو، در نظر بگیریم $AC=d$ و $BD=d'$، داریم:

$$S(ABCD)=\frac{۱}{۲}d.d'.\sin\alpha$$

از نکته‌ی اخیر، می‌توان به یک نتیجه‌ی مهم رسید:



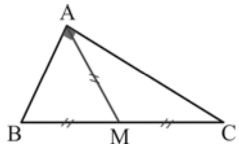
❖ **نتیجه:** مساحت هر چهارضلعی محدبی که قطرهای آن بر هم عمودند، برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر.

پس اگر در شکل روبرو در نظر بگیریم $AC = d$ و $BD = d'$، داریم:

$$S(ABCD) = \frac{۱}{۲} d . d'$$

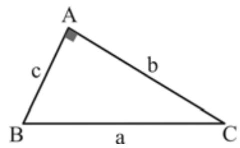
مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس — **چند قضیه‌ی مهم در مثلث‌های قائم‌الزاویه**

چند قضیه‌ی مهم در مثلث‌های قائم‌الزاویه



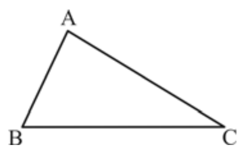
قضیه‌ی ۱– در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه‌ی وارد بر وتر، نصف طول وتر است.

پس در شکل روبرو داریم $AM = \frac{۱}{۲} BC$، یا به بیان دیگر $AM = BM = CM$.



قضیه‌ی ۲ (قضیه‌ی فیثاغورس)– در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول بزرگترین ضلع (ضلع روبرو به زاویه‌ی قائمه) برابر است با مجموع مربعات طول‌های دو ضلع دیگر.

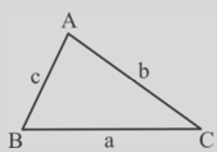
پس در شکل روبرو داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲$.



قضیه‌ی ۳ (عکس قضیه‌ی فیثاغورس)– اگر در مثلث ABC، رابطه‌ی $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ بین اضلاع برقرار باشد، زاویه‌ی A، قائمه است.

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

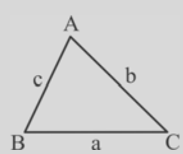
نکته



طبق قضیه‌ی فیثاغورس اگر مربع طول یک ضلع از مثلثی، برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، زاویه‌ی روبرو به آن ضلع، قائمه است.

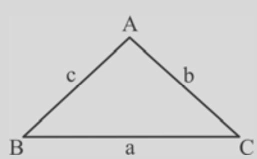
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

دو حالت زیر را نیز می‌توان در نظر گرفت:



۱ اگر مربع طول یک ضلع از مثلثی، کمتر از مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، زاویه‌ی روبرو به آن ضلع، کمتر از قائمه (حاده) است.

$$a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$$



۲ اگر مربع طول یک ضلع از مثلثی، بیشتر از مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، زاویه‌ی روبرو به آن ضلع، بیشتر از قائمه (منفرجه) است.

$$a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$$

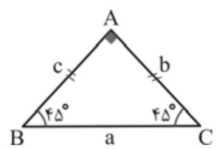
مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس

- خواص برخی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی خاص
- خواص ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه

خواص برخی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی خاص

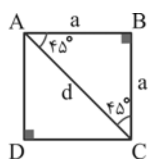
مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی حاده‌ی ۴۵ درجه: اینگونه مثلث‌ها، هم قائم‌الزاویه هستند و هم متساوی‌الساقین و در آنها طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه با هم برابر و هر دو $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر طول وتر هستندیا به بیان دیگر، طول وتر آنها $\sqrt{۲}$ برابر طول هر ضلع زاویه‌ی قائمه است.

پس در شکل بالا، روابط زیر برقرار است:



$$\begin{cases} b = c = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a \\ a = \sqrt{۲}\,b = \sqrt{۲}\,c \end{cases}$$

➢ **تذکر:** چون با رسم هر قطر مربع، آن مربع به دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین تقسیم می‌شود، پس طول قطر مربعی به‌طول ضلع a، برابر است با $d = \sqrt{۲}\,a$؛ یا به بیان دیگر، طول ضلع مربعی به‌طول قطر d برابر است با $a = \frac{\sqrt{۲}}{۲}d$.



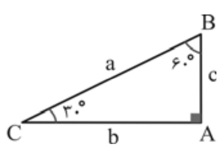
مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی حاده‌ی ۳۰ درجه: زاویه‌ی حاده‌ی دیگر این مثلث‌ها ۶۰ درجه است و در آنها:

۱- ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه (مجاور زاویه‌ی ۶۰ درجه)، نصف وتر است.

۲- ضلع روبرو به زاویه‌ی ۶۰ درجه (مجاور زاویه‌ی ۳۰ درجه)، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر وتر است.

۳- ضلع روبرو به زاویه‌ی ۶۰ درجه، $\sqrt{۳}$ برابر طول ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه است.

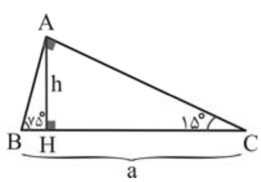
پس در شکل بالا، روابط زیر برقرار است:



$$\begin{cases} c = \frac{۱}{۲}a \ , \ b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \\ b = \sqrt{۳}\,c \end{cases}$$

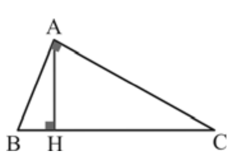
مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی حاده‌ی ۱۵ درجه: زاویه‌ی حاده‌ی دیگر این مثلث‌ها ۷۵ درجه است. در اینگونه مثلث‌ها، طول ارتفاع وارد بر وتر، یک چهارم طول وتر است.

پس در شکل مقابل، داریم: $h = \frac{۱}{۴}a$.



خواص ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه

اگر مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\hat{A} = ۹۰$ و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، آنگاه سه رابطه‌ی زیر برقرار است:



۱ $AH^{۲} = BH \times CH$

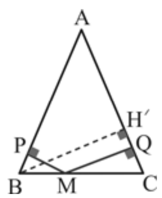
۲ $AB^{۲} = BH \times BC$

۳ $AC^{۲} = CH \times BC$

مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس | **محاسبه‌ی طول ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الساقین برحسب اضلاع آن**

محاسبه‌ی طول ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الساقین برحسب اضلاع آن

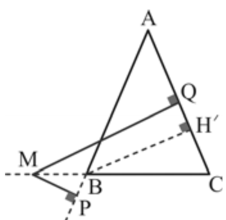
برای محاسبه‌ی طول ارتفاع وارد بر قاعده، می‌دانیم که ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد. با توجه به این موضوع و قضیه‌ی فیثاغورس می‌توان ارتفاع را تعیین کرد. برای محاسبه‌ی ارتفاع وارد بر ساق، کافی است مساحت مثلث را از دو طریق «قاعده و ارتفاع وارد بر آن» و «ساق و ارتفاع وارد بر آن» به‌دست آورد و آنها را مساوی هم قرار دهیم.



➢ **تذکر ۱:** مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر با ارتفاع وارد بر ساق است.

پس در شکل مقابل، داریم:

$$MP + MQ = BH'$$



➢ **تذکر ۲:** قدر مطلق تفاضل هر نقطه روی امتداد قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر با ارتفاع وارد بر ساق است.

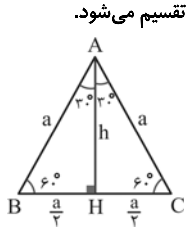
پس در شکل مقابل، داریم:

$$|MQ - MP| = BH'$$

مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس | **ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع** | **ویژگی‌های شش ضلعی منتظم** | **هشت ضلعی منتظم محاط در مربع**

ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع

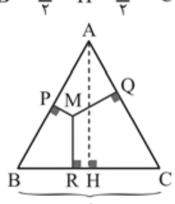
با رسم هر کدام از ارتفاع‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع، آن مثلث، به دو مثلث قائم‌الزاویه مساوی با زاویه‌ی حاده‌ی ۳۰ درجه تقسیم می‌شود.



اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a در نظر بگیریم، آنگاه:

۱. طول ارتفاع این مثلث، برابر با $h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

۲. مساحت این مثلث، برابر با $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است.

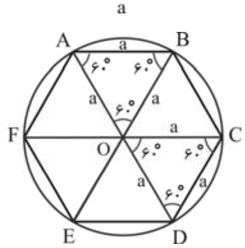


➢ **تذکر :** مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع مثلث، برابر با ارتفاع مثلث است.

پس در شکل مقابل داریم:

$$MP + MQ + MR = AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

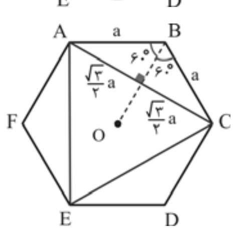
ویژگی‌های شش ضلعی منتظم



۱. اگر مرکز دایره‌ی گذرنده از رأس‌های شش ضلعی منتظم را به رأس‌های آن وصل کنیم، شش مثلث متساوی‌الاضلاع مساوی ایجاد می‌شود، پس مساحت شش ضلعی منتظم به‌طول ضلع a، برابر $S = ۶\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}\right) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$ است.

۲. هر یک از زاویه‌های داخلی شش ضلعی منتظم، ۱۲۰ درجه است.

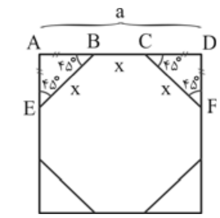
۳. طول قطرهای بزرگ شش ضلعی منتظم به‌طول ضلع a (AD، BE و CF در شکل بالا) برابر با ۲a است.



۴. طول قطرهای کوچک شش ضلعی منتظم به‌طول ضلع a (AC، CE و EA در شکل روبرو) برابر $\sqrt{۳}\,a$ است.

هشت‌ضلعی منتظم محاط در مربع

مطابق شکل، اگر رأس‌های یک هشت ضلعی منتظم به‌طول ضلع x روی محیط مربعی به‌طول ضلع a قرار داشته باشند، می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} AB = CD = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x \\ AD = AB + BC + CD \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x + x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}x \Rightarrow \boxed{a = (\sqrt{۲}+۱)x} \end{cases}$$

یا

$$\boxed{x = (\sqrt{۲}-۱)a}$$

تشابه
- نسبت و تناسب
- قضیه‌ی تالس و نتیجه‌های آن
- تشابه

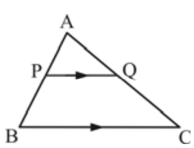
نسبت و تناسب

تساوی بین دو نسبت، تناسب نامیده می‌شود، از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، می‌توان به نتایج زیر که کاربرد زیادی در حل مسائل این قسمت دارند، رسید:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ ad = bc & ۳)\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}\ ,\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ ۲)\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c} & ۴)\ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}\ ,\ \frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c} \end{cases}$$

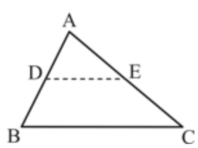
- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$، آنگاه $\frac{a+c+e}{b+d+f} = k$.
- در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$، b میانگین (واسطه‌ی) هندسی دو جمله‌ی کناری a و c نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه‌ی $b^۲ = ac$ به‌دست می‌آید.

قضیه‌ی تالس



اگر خطی که موازی با یکی از ضلع‌های یک مثلث است، دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند. پس در شکل مقابل، چون $PQ \parallel BC$، طبق قضیه‌ی تالس $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.

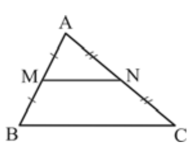
نتیجه‌های مهم قضیه‌ی تالس



❖ **نتیجه‌ی ۱ (عکس قضیه‌ی تالس):** اگر در مثلث ABC، دو نقطه‌ی D و E به‌ترتیب روی دو ضلع AB و AC، طوری انتخاب شوند که $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$، آنگاه $DE \parallel BC$.

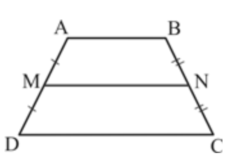
❖ **نتیجه‌ی ۲ :** با توجه به شکل بالا که در آن $DE \parallel BC$، می‌توان نوشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



❖ **نتیجه‌ی ۳ :** اگر وسط‌های دو ضلع مثلثی را به‌هم وصل کنیم، پاره‌خطی حاصل می‌شود که با ضلع سوم موازی است و طول آن، نصف طول ضلع سوم است.

پس در شکل مقابل اگر $AM = BM$ و $AN = NC$، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $MN \parallel BC$ و $MN = \frac{۱}{۲}BC$.



❖ **نتیجه‌ی ۴ :** در هر ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند، با قاعده‌ها موازی بوده و طول آن برابر با میانگین طول قاعده‌هاست.

پس در شکل روبرو، اگر M و N وسط‌های ساق‌های ذوزنقه‌ی ABCD باشند، آنگاه $MN \parallel AB, CD$ و $MN = \frac{AB+CD}{۲}$.

تعریف تشابه در حالت کلی

دو چندضلعی را زمانی متشابه گویند که در آنها زاویه‌های نظیر با هم برابر بوده و اضلاع نظیر با هم متناسب باشند. به نسبت اضلاع نظیر در دو چندضلعی متشابه، نسبت تشابه گفته و معمولاً آن را با k نشان می‌دهند.

حالت‌های تشابه دو مثلث

دو مثلث در سه حالت با هم متشابهند:

حالت ۱ **تساوی زاویه‌ها:** اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابهند.

حالت ۲ **تناسب دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین:** اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آن دو مثلث متشابهند.

حالت ۳ **تناسب سه ضلع:** اگر سه ضلع از یک مثلث، با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابهند.

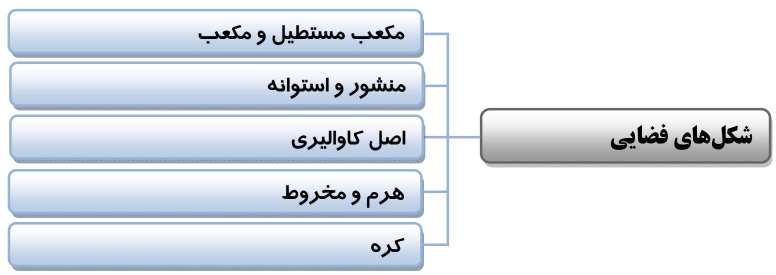
پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه

در هر دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌ها، نیمسازها و ارتفاع‌های متناظر، برابر نسبت تشابه است.

نسبت محیط‌ها و مساحت‌ها در دو چند ضلعی‌متشابه

۱ در هر دو چندضلعی متشابه (در نتیجه، دو مثلث متشابه)، نسبت محیط‌ها، برابر با نسبت تشابه است.

۲ در هر دو چندضلعی متشابه (در نتیجه، دو مثلث متشابه)، نسبت مساحت‌ها، برابر با مجذور نسبت تشابه است.

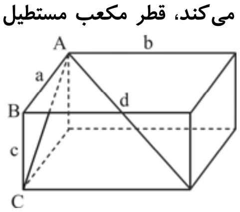


تعریف چند وجهی: بخشی از فضا که از همه طرف محدود به صفحه است، شکلی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی گویند.

مکعب مستطیل

یک شش وجهی است که همه‌ی وجه‌های آن مستطیل هستند. وجه‌های روبرو در مکعب مستطیل، مستطیل‌های موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یال‌های آن بر وجه‌ها عمود هستند، مکعب مستطیل ۸ رأس و ۱۲ یال دارد.

در هر مکعب مستطیل، پاره‌خطی که دو رأس متقابل (دو رأس که در یک وجه قرار ندارند) را به هم وصل می‌کند، قطر مکعب مستطیل نامیده می‌شود.



۱ حجم مکعب مستطیل : $V = abc$

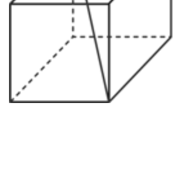
۲ طول قطر مکعب مستطیل : $d = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$

۳ مساحت کل مکعب مستطیل : $S = ۲(ab + bc + ca)$

برای به‌دست آوردن طول قطر هر وجه مکعب مستطیل از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کنید مثلاً در شکل بالا برای به‌دست آوردن طول AC که قطر یکی از وجه‌های مکعب مستطیل است، با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، داریم: $AC = \sqrt{a^۲ + c^۲}$.

مکعب

مکعب مستطیلی است که طول همه‌ی یال‌های آن با هم برابر است.



۱ حجم هر مکعب به‌طول یال a، برابر $V = a^۳$ است.

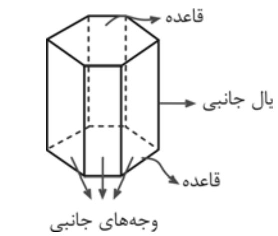
۲ طول قطر هر کدام از وجه‌های مکعب به طول یال a، برابر $\sqrt{۲}\,a$ است.

۳ طول هر قطر مکعب به طول یال a برابر $d = \sqrt{۳}\,a$ است.

۴ مساحت کل هر مکعب به طول یال a برابر $۶a^۲$ و مساحت جانبی آن $۴a^۲$ است.

منشور

یک چندوجهی است که دو وجه آن هم‌نهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع باشند.



۱ ارتفاع منشور، پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.

۲ اگر یال‌های جانبی، بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن را یک منشور قائم و در غیر این صورت آن را منشور مایل می‌نامند.

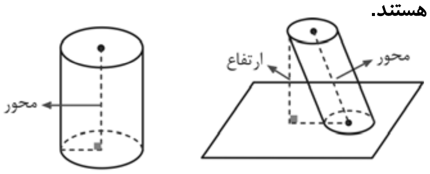
۳ مساحت جانبی هر منشور **قائم**، برابر است با محیط قاعده ضربدر ارتفاع.

۴ مساحت کل منشور برابر است با مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده.

۵ حجم هر منشور برابر است با مساحت قاعده ضربدر ارتفاع.

استوانه

شکلی فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چند ضلعی، دو دایره‌ی هم‌نهشت هستند.



استوانه‌ی قائم   استوانه‌ی مایل

۱ در استوانه‌ی قائم، محور استوانه (پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را با به‌هم وصل می‌کند) همان ارتفاع منشور است.

۲ مساحت جانبی هر استوانه‌ی **قائم** به شعاع قاعده‌ی $\mathbf{R}$ و ارتفاع $\mathbf{h}$، برابر $2\pi Rh$ است.

۳ مساحت کل هر استوانه برابر مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده است، یعنی مساحت کل هر استوانه‌ی قائم به شعاع قاعده‌ی $\mathbf{R}$ و ارتفاع $\mathbf{h}$ برابر $2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h+R)$ است.

۴ حجم هر استوانه به شعاع قاعده‌ی $\mathbf{R}$ و ارتفاع $\mathbf{h}$ برابر $V = \pi R^2 h$ است.

اصل کاوالیری

۱- اصل کاوالیری در مورد مساحت‌ها

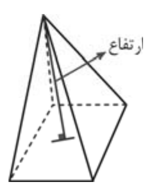
فرض می‌کنیم قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند. اگر هر خطی به موازات قاعده‌های دو شکل در آنها قطعاتی با طول‌های مساوی ایجاد کند، آنگاه مساحت‌های دو شکل با هم مساوی است.

۲- اصل کاوالیری در مورد حجم‌ها

دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل، دارای مساحت برابر باشند، آنگاه حجم‌های این دو شکل فضایی برابر با هم برابر است.

هرم

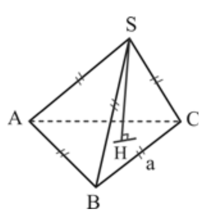
یک چندوجهی است که همه‌ی وجه‌های آن به جز یکی در یک رأس مشترک‌اند.



۱ **ارتفاع هرم:** پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.

۲ اگر قاعده‌ی یک هرم چندضلعی منتظم بوده و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، آن را **هرم منتظم** می‌نامیم.

۳ حجم هرمی به مساحت قاعده‌ی $\mathbf{S}$ و ارتفاع $\mathbf{h}$ برابر $V = \frac{1}{3}S.h$ است.



۴ هرم منتظم مثلث‌القاعده‌ای که هر چهار وجه آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همنهشت باشند، چهار وجهی منتظم نامیده می‌شود. طول ارتفاع چهار وجهی منتظم به‌طول یال $\mathbf{a}$، برابر با $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ است.

پس در شکل مقابل $SH = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

مخروط

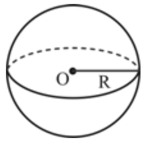
شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به جای چندضلعی، دایره است.

۱ پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره قاعده وصل می‌کند، محور مخروط نام دارد.اگر محور بر صفحه‌ی قاعده عمود باشد، مخروط قائم و در غیر این صورت مایل نامیده می‌شود.

۲ حجم یک مخروط به شعاع قاعده‌ی $\mathbf{R}$ و ارتفاع $\mathbf{h}$ برابر $V = \frac{1}{3} \times$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع $= \frac{1}{3}\pi R^2 h$ است.

کره

مجموعه نقاطی از فضا است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز، به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت شعاع کره نامیده می‌شود.



۱ حجم کره‌ای به شعاع R برابر $V = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ است.

۲ مساحت کره‌ای به شعاع R برابر $S = ۴\pi R^{۲}$ است.