

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا

به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن، چند جمله‌ای باشد.

مثال ۱: عبارتهای $\frac{mn+n^2}{5-n}$ ، $\frac{3x+\sqrt{7}}{x^2}$ ، $\frac{x^2}{1}$ ، $\frac{x}{x+3}$ ، $\frac{\sqrt{x-1}}{x+y}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $|x-2y|$ ، $\sqrt{xy}$ گویا هستند ولی عبارتهای گویا نیستند.

نکته: برای اینکه مقادیری را به دست آوریم تا به ازای آنها عبارت گویا تعریف نشده باشد مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۲: عبارتهای گویای زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

الف) $\frac{5x}{2a^2b}$ ب) $\frac{2x+3}{2x-1}$ پ) $\frac{3x}{x^2-x-12}$ ت) $\frac{5x}{x^2+4}$

مل:

به ازای $a=0$ و $b=0$ عبارت تعریف نشده است.
 $a=0$ یا $b=0 \Rightarrow a^2b=0 \Rightarrow 2a^2b=0 \Rightarrow$ مخرج (الف)
 $b=0$ یا $a=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ یا $a=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ تعریف نشده است.

این عبارت به ازای $x=\frac{1}{2}$ تعریف نشده است.
 ب) $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ تعریف نشده است.
 پ) $x^2-x-12=0 \Rightarrow (x-4)(x+3)=0 \Rightarrow x-4=0$ یا $x+3=0 \Rightarrow x=4$ یا $x=-3$
 این عبارت به ازای $x=4$ و $x=-3$ تعریف نشده است.

ت) $x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow$ توان دوم هیچ موقع منفی نمی‌شود.
 پس مخرج ریشه ندارد بنابراین این عبارت به ازای تمام مقادیر x تعریف می‌شود.

نکته: اگر حاصلضرب دو عبارت صفر شود حداقل یکی از آنها صفر است یعنی:

اگر $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$ یا $b = 0$

ساده کردن عبارتهای گویا

نکته: برای ساده کردن عبارت گویا، ابتدا صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم، سپس عامل‌های مشترک را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

مثال ۳: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{4x^2 + 8x}{12x^2 + 24x}$

ب) $\frac{8x^2y^5}{20x^2y^7}$

پ) $\frac{x^2 - 2x^2 - 3x}{x^2 + x}$

ت) $\frac{m^2 - 16}{4 - m}$

حل:

الف) $\frac{4x^2 + 8x}{12x^2 + 24x} = \frac{\cancel{4x}(x+2)}{\cancel{4x}(3x+6)} = \frac{x+2}{3x+6} = \frac{\cancel{x+2}}{3(\cancel{x+2})} = \frac{1}{3}$

ب) $\frac{8x^2y^5}{20x^2y^7} = \frac{2^3x^2y^5}{2^2 \times 5x^2y^7} = \frac{2x}{5y^2}$

پ) $\frac{x^2 - 2x^2 - 3x}{x^2 + x} = \frac{\cancel{x}(x^2 - 2x - 3)}{\cancel{x}(x+1)} = \frac{(x-3)(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}} = x-3$

ت) $\frac{m^2 - 16}{4 - m} = \frac{(m-4)(m+4)}{4 - m} = \frac{(\cancel{m-4})(m+4)}{-(\cancel{m-4})} = -(m+4)$

درس دوم: محاسبات عبارات‌های گویا

ضرب و تقسیم عبارات‌های گویا: برای به دست آوردن حاصلضرب چند کسر ابتدا کسرهای را ساده می‌کنیم بعد صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. برای به دست آوردن تقسیم دو کسر، کسر اول را نوشته و در معکوس کسر دوم ضرب می‌کنیم.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad , \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

مثال ۱: حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{fa^f}{rab^r} + \frac{la}{ab^a}$

ب) $\frac{x^r - fx - 5}{x^r - fx} \times \frac{2x - 8}{x^r + 3x + 2}$

ج) $\frac{a^r - a - 6}{2a + 6} \div \frac{a^r - f}{a + 3}$

الف) $\frac{fa^f}{rab^r} \times \frac{la}{ab^a} = \frac{rfa^fb^a}{rfa^rb^r} = \frac{r \times \cancel{f} \times \cancel{a^f} \times \cancel{b^a} \times b^r}{r \times \cancel{f} \times \cancel{a^f} \times \cancel{b^r} \times b^r} = \frac{ra^rb^r}{r}$

حل:

ب) $\frac{x^r - fx - 5}{x^r - fx} \times \frac{2x - 8}{x^r + 3x + 2} = \frac{(x-5)(x+1)}{x(x-4)} \times \frac{2(x-4)}{(x+2)(x+1)} = \frac{2(x-5)}{x(x+2)}$

ج) $\frac{a^r - a - 6}{2a + 6} \div \frac{a^r - f}{a + 3} = \frac{a^r - a - 6}{2a + 6} \times \frac{a + 3}{a^r - f} = \frac{(a-3)(a+3)}{2(a+3)} \times \frac{a+3}{(a-2)(a+3)} = \frac{a-3}{2(a-2)}$

جمع و تفریق عبارات‌های گویا

نکته‌ها: * برای به دست آوردن جمع و تفریق عبارات‌های گویا، ابتدا هر عبارت را در صورت امکان ساده می‌کنیم، سپس همانند جمع و تفریق کسرها عمل می‌کنیم یعنی ابتدا کسرهای را هم مخرج کرده و یکی از مخرج‌ها را نوشته و حاصل را می‌یابیم.
* مخرج مشترک برابر است با حاصل ضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان.

مثال ۲: حاصل عبارات‌های مقابل را به دست آورید:

الف) $\frac{a^r}{a-b} + \frac{b^r}{b-a}$ ب) $\frac{x^r - 20}{x^r - f} + \frac{2x - f}{2x + f}$

حل:

الف) $\frac{a^r}{a-b} + \frac{b^r}{b-a} = \frac{a^r}{a-b} + \frac{b^r}{-(a-b)} = \frac{a^r}{a-b} - \frac{b^r}{a-b} = \frac{a^r - b^r}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = a+b$

ب) $\frac{x^r - 20}{x^r - f} + \frac{2x - f}{2x + f} = \frac{x^r - 20}{(x-2)(x+2)} + \frac{2(x-2)}{2(x+2)} = \frac{x^r - 20}{(x-2)(x+2)} + \frac{2(x-2)(x-2)}{2(x+2)(x-2)} = \frac{(x^r - 20) + (x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$= \frac{x^r - 20 + x^r - 2x - 2x + 4}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^r - 4x - 16}{(x-2)(x+2)} = \frac{2(x^r - 2x - 8)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2(x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-8}{x-2}$

$$\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$$

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$$

مثال ۳: حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

حل: ابتدا صورت را به یک کسر و مخرج را نیز به یک کسر تبدیل می‌کنیم. برای این منظور یکبار در صورت و یک بار در مخرج، مخرج

مشترک می‌گیریم.

$$\frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{yx - y^2 - x^2 - xy}{x^2 - xy + yx + y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{-(y^2 + x^2)}{x^2 + y^2} = -1$$

مثال ۴: دو عبارت گویا بنویسید که تفریق شان $\frac{2x+1}{x-2}$ شود.

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x-2}$$

حل:

مثال ۵: محیط شکل زیر را برحسب x به دست آورید.

$$\frac{x}{x+1}$$

حل:

$$\text{محیط مستطیل} = 2(\text{عرض} + \text{طول}) = 2\left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right) = 2\left(\frac{x(x+2) + 1(x+1)}{(x+1)(x+2)}\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{x^2 + 2x + x + 1}{(x+1)(x+2)}\right) = 2\left(\frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x+2)}\right) = \frac{2x^2 + 6x + 2}{(x+1)(x+2)}$$

درس سوم: تقسیم چند جمله‌ای‌ها

تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر به سه حالت زیر انجام می‌شود:

۱- تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای ۲- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای ۳- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای

نکته: برای تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای، از قوانین ساده کردن کسرها استفاده می‌کنیم یعنی ضرایب با هم و متغیرهای هم‌نام با هم ساده می‌شوند.

مثال ۱: تقسیم $\frac{-21x^4y^5z^2}{28x^2y^6}$ را انجام دهید.

$$\frac{-3 \times 7 \times x^4 y^5 z^2}{4 \times 7 \times x^2 y^6} = \frac{-3x^2z^2}{4y}$$

حل:

نکته: برای تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای، ابتدا کسر را تفکیک می‌کنیم طبق الگوی زیر:

$$\frac{a+b+c}{d} \xrightarrow{\text{تفکیک}} \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

بعد ساده می‌کنیم.

الف) $\frac{2x^2 - 5x^2 - 8x}{4x^2}$

ب) $\frac{2fa^2b - 2c + 3abc}{3a^2c}$

مثال ۲: تقسیم‌های روبه‌رو را انجام دهید.

حل: ابتدا کسرها را تفکیک می‌کنیم.

الف) $\frac{2x^2}{4x^2} - \frac{5x^2}{4x^2} - \frac{8x}{4x^2} = \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{4} - \frac{2}{x}$

ب) $\frac{2fa^2b}{3a^2c} - \frac{2c}{3a^2c} + \frac{3abc}{3a^2c} = \frac{2a^2b}{c} - \frac{2}{3a^2} + \frac{b}{a}$

نکته: در تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای، ابتدا هر دو چند جمله‌ای (مقسوم و مقسوم‌علیه) را برحسب توان‌های x از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم (استاندارد می‌کنیم). سپس اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم‌علیه تقسیم کرده و خارج قسمت را مشخص می‌کنیم. خارج قسمت به دست آمده را در تک تک جملات مقسوم‌علیه ضرب کرده و از مقسوم کم می‌کنیم این باقی‌مانده را بر مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم این روش را تا زمانی ادامه می‌دهیم که باقی‌مانده صفر شود یا درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه کوچکتر شود.

مثال ۳: تقسیم‌های زیر را انجام دهید. خارج قسمت و باقی‌مانده را بیابید.

الف) $\frac{x^2 - 7x + 13}{x - 2}$

ب) $\frac{2 - x}{16x - 19x^2 + 6x^3 - 4}$

حل: الف) در این سوال مقسوم و مقسوم‌علیه مرتب شده می‌باشند.

$$\begin{array}{r} x^2 - 7x + 13 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{1x^2 - 2x} \\ -4x + 13 \\ \underline{4x - 8} \\ 21 \end{array}$$

خارج قسمت

باقی‌مانده

مراحل یافتن خارج قسمت

$$\frac{x^2}{x} = x$$

$$\frac{-4x}{x} = -4$$

ب) ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را مرتب می کنیم.

$$\begin{array}{r} \text{مرتب} \\ 16x^3 - 19x^2 + 6x^2 - 4 \rightarrow 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \\ \text{مرتب} \\ 2 - x \rightarrow -x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \quad | \quad -x + 2 \\ \underline{\pm 6x^3 \mp 12x^2} \\ -7x^2 + 16x - 4 \\ \underline{\mp 7x^2 \pm 14x} \\ 2x - 4 \\ \underline{\pm 2x \mp 4} \\ 0 \end{array}$$

خارج قسمت

باقی مانده

مراحل یافتن خارج قسمت

$$\begin{aligned} \frac{6x^3}{-x} &= -6x^2 \\ -\frac{7x^2}{-x} &= 7x \\ \frac{2x}{-x} &= -2 \end{aligned}$$

نکته ها: * در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای وقتی باقی مانده صفر شود می گوئیم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

* برای بدست آوردن باقی مانده بدون انجام تقسیم، در تقسیم چند جمله ای درجه ۱ ابتدا مقسوم علیه را برابر صفر قرار می دهیم، مقدار x به دست آمده را در مقسوم جایگذاری می کنیم، عدد حاصل همان باقیمانده تقسیم می باشد. یعنی باقیمانده تقسیم $P(X)$ بر $ax - b$ برابر است با $P\left(\frac{b}{a}\right)$

رابطه تقسیم

در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای همواره رابطه زیر برقرار است:

باقی مانده = مقسوم - خارج قسمت × مقسوم علیه

مثال ۴: اگر در تقسیمی باقی مانده عدد ۶ خارج قسمت $-2x^2 - x - 2$ و مقسوم علیه $-x + 1$ آن گاه مقسوم را بیابید.

باقی مانده = مقسوم - خارج قسمت × مقسوم علیه

حل:

$$\Rightarrow \text{مقسوم} = (-x + 1)(-2x^2 - x - 2) + 6 = 2x^3 + x^2 + 2x - 2x^2 - x - 2 + 6$$

$$\text{مقسوم} = 2x^3 - x^2 + x + 4$$

نکته: درجه چند جمله ای باقی مانده همواره از درجه ی مقسوم علیه کوچکتر است

مثال ۵: بدون انجام تقسیم باقی مانده تقسیم $3x^2 + 7x^2 - 3x + 5$ را بر $2x + 2$ به دست آورید.

حل: ابتدا مقسوم علیه را برابر صفر قرار می دهیم:

$$2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

اکنون در مقسوم به جای x عدد -1 را می گذاریم، عدد حاصل باقی مانده می باشد.

$$\text{باقی مانده} = 3(-1)^2 + 7(-1)^2 - 3(-1) + 5 = 3(1) + 7(1) + 3 + 5 = 18$$