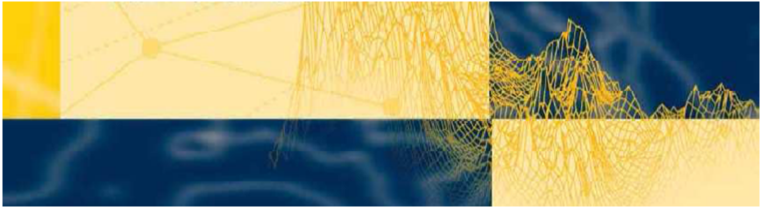


مثلث بندی دلونی

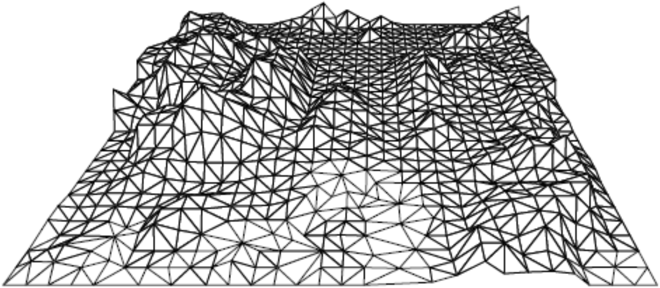
احسان جوکار

دانشگاه یزد

۱ خرداد ۱۳۹۰

- یک قطعه از سطح زمین را می توانیم به صورت یک ناحیه *terrain* نشان دهیم.
- یک *terrain* در واقع گراف یک تابع است که به هر نقطه از ناحیه یک ارتفاع را نسبت می دهد.

$$f: A \subset R^{۲} \rightarrow R$$

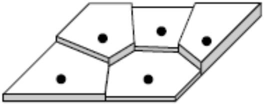


- ارتفاع همه نقاط را نداریم!
- تنها ارتفاع یک مجموعه از نقاط به نام P را داریم.

مقدمه

- ارتفاع همه نقاط را نداریم!
- تنها ارتفاع یک مجموعه از نقاط به نام P را داریم.
- ساده ترین راه برای ترسیم این سطح سه بعدی: به هر نقطه، ارتفاع نزدیک ترین نقطه از P را نسبت دهیم.

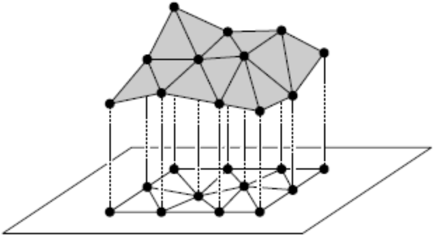
- ارتفاع همه نقاط را نداریم!
- تنها ارتفاع یک مجموعه از نقاط به نام P را داریم.
- ساده ترین راه برای ترسیم این سطح سه بعدی: به هر نقطه، ارتفاع نزدیک ترین نقطه از P را نسبت دهیم.



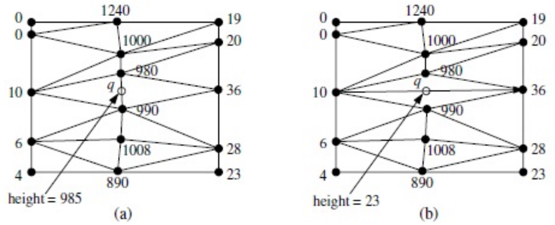
می بینیم که در این صورت یک ناحیه گسسته خواهیم داشت که چندان طبیعی نیست!

یک ایده بهتر:

- ابتدا یک مثلث بندی از P ایجاد می کنیم.
- سپس هر نقطه را تا ارتفاع آن بالا می بریم.



سوال: یک مجموعه از نقاط را چگونه مثلث بندی کنیم؟



در شکل (b) ارتفاع نقطه q توسط دو نقطه که فاصله زیادی از آن دارند تعیین شده است!

مشکل کجاست؟

- در شکل (b) نقطه q در مثلثی قرار گرفته است که ضلع های بلند و زاویه های کوچک دارد.

مشکل کجاست؟

- در شکل (b) نقطه q در مثلثی قرار گرفته است که ضلع های بلند و زاویه های کوچک دارد.

نتیجه

مثلث بندی که زاویه های کوچک دارد مطلوب نیست!

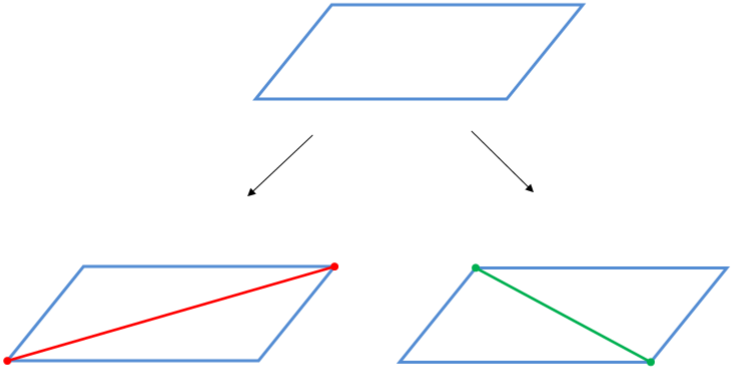
مشکل کجاست؟

- در شکل (b) نقطه q در مثلثی قرار گرفته است که ضلع های بلند و زاویه های کوچک دارد.

نتیجه

مثلث بندی که زاویه های کوچک دارد مطلوب نیست!

- در بین مثلث بندی های ممکن P، مثلث بندی که کوچکترین زاویه را ماکزیمم می کند مطلوب است.



۹.۱ مثلث بندی مجموعه نقاط مسطح

- فرض کنید $P = \{p_۱, p_۲, ..., p_n\}$ یک مجموعه از نقاط در صفحه باشد.

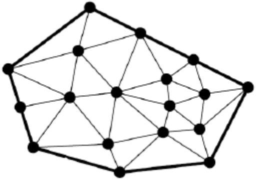
- فرض کنید $P = \{p_۱, p_۲, \ldots, p_n\}$ یک مجموعه از نقاط در صفحه باشد.

تعریف

یک زیرتقسیم مسطح ماکسیمال[۱] از P زیرتقسیمی است که اضافه کردن هر یال به آن باعث غیر مسطح شدن زیرتقسیم شود.

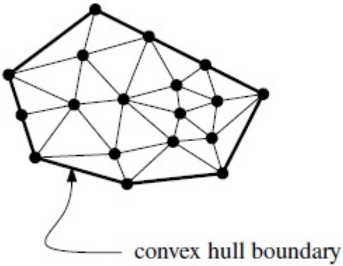
[۱] Maximal Planar Subdivision

- طبق تعریف فوق یک مثلث بندی برای P وجود دارد.



قضیه ۹.۱

فرض کنید P مجموعه ای از نقطه در صفحه باشد که بر یک خط راست واقع نیستند. و فرض کنید که k تعداد نقاطی باشد که بر کران *Convex Hull* این مجموعه نقاط واقع اند.در این صورت هر مثلث بندی، $2n-2-k$ مثلث و $3n-3-k$ یال خواهد داشت.



- m تعداد مثلث ها
- تعداد $face$ های مثلث بندی، n_f، برابر $m + ۱$ است.
- هر مثلث سه یال و $face$ بی کران k یال دارد.
- بنابراین تعداد یال ها برابر است با

$$n_e = (۳m + k)/۲$$

- از فرمول اویلر داریم

$$n - n_e + n_f = ۲$$

- بنابراین خواهیم داشت

$$m = ۲n - ۲ - k$$

و همچنین

$$n_e = ۳n - ۳ - k$$

- T یک مثلث بندی با m مثلث و $۳m$ زاویه
- زاویه ها را به صورت صعودی مرتب می کنیم و در یک بردار قرار می دهیم

$$A(T) = (\alpha_{۱}, \alpha_{۲}, ..., \alpha_{۳m})$$

- این بردار را بردار زاویه[۲] T می نامیم که در آن برای هر j $i < j$

$$\alpha_i \leq \alpha_j$$

[۲] angle-vector

- T' یک مثلث بندی دیگر با

$$A(T') = (\alpha'_۱, \alpha'_۲, ..., \alpha'_{۳m})$$

- گوییم بردار زاویه T از بردار زاویه T' بزرگتر است هر گاه اندیسی مانند i وجود داشته باشد که

$$\alpha_i > \alpha'_i$$

و برای هر $j < i$

$$\alpha_j = \alpha'_j$$

- $A(T) > A(T')$
- ترتیب لغت نامه ای

- یک مثلث بندی T را زاویه-بهینه[۳] گوییم هر گاه به ازای هر مثلث بندی دیگر T' داشته باشیم:

$$A(T) \geq A(T')$$

- ما به دنبال مثلث بندی زاویه-بهینه هستیم چرا که برای ساخت یک *terrain* چند سطحی مناسب است.
- سوال: کدام مثلث بندی زاویه-بهینه است؟

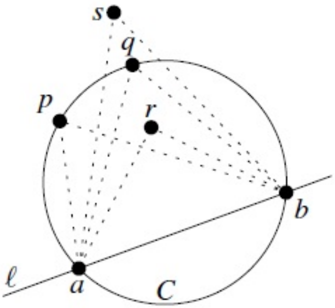
---

[۳] angle-optimal

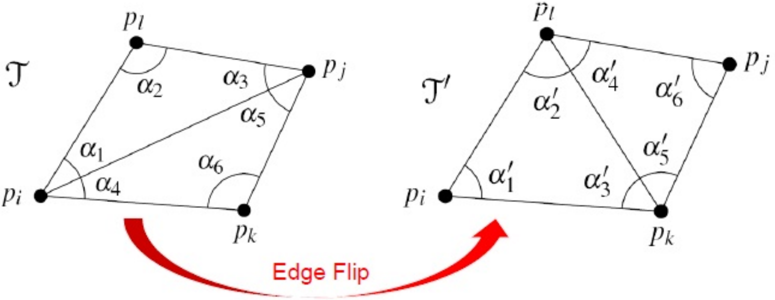
قضیه ۹.۲ (قضیه تالس)

فرض کنید C یک دایره باشد و خط ℓ دایره را در نقاط a و b قطع کند و نقاط p, q, r, s در یک سمت خط واقع شده باشند. در این صورت:

$$\measuredangle arb > \measuredangle apb = \measuredangle aqb > \measuredangle asb.$$



اگر $e = \overline{p_i p_j}$ یالی از یک مثلث بندی باشد و یالی از *face* بی کران نباشد، e با دو مثلث مجاور است. اگر این دو مثلث یک چهارضلعی محدب را بسازند، با تغییر e می توان یک مثلث بندی جدید ایجاد کرد.



- یک یال مثلث بندی T را غیرمجاز[۴] می نامیم اگر در مثلث بندی T' داشته باشیم:

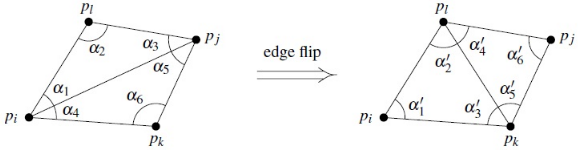
$$\min_{1 \le i \le 6} \alpha_i < \min_{1 \le i \le 6} \alpha'_i$$

[۴] illegal

- یک یال مثلث بندی T را غیرمجاز[۴] می نامیم اگر در مثلث بندی T' داشته باشیم:

$$\min_{۱\leq i\leq ۶} \alpha_i < \min_{۱\leq i\leq ۶} \alpha'_i$$

- به عبارت دیگر: یک یال غیر مجاز است اگر بتوان با *edge flip*، کوچکترین زاویه را به صورت محلی افزایش داد.



[۴] illegal

مشاهده ۹.۳

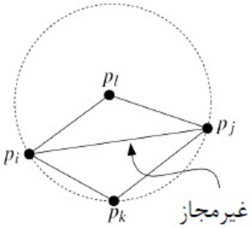
اگر یک مثلث بندی T با یال غیر مجاز e داشته باشیم و با تعویض یال e ، مثلث بندی T' ایجاد شود، آنگاه:

$$A(T') > A(T)$$

لم زیر از قضیه تالس به دست آمده است.

لم ۹.۴

اگر یال $\overline{p_ip_j}$ با دو مثلث $p_ip_jp_k$ و $p_ip_jp_l$ مجاور باشد و C دایره ای باشد که از نقاط p_i, p_j, p_k عبور می کند، آنگاه یال $\overline{p_ip_j}$ غیر مجاز است اگر و تنها اگر p_l داخل C باشد.
به علاوه، اگر چهار نقطه p_i, p_j, p_k, p_l یک چهارضلعی محدب تشکیل دهند و روی یک دایره قرار نداشته باشند، آنگاه دقیقا یکی از $\overline{p_ip_j}$ و $\overline{p_kp_l}$ غیر مجاز است.



- یک مثلث بندی را مجاز نامیم اگر یال غیر مجازی نداشته باشد.
- از مشاهده ۹.۳ می دانیم که هر مثلث بندی زاویه-بهینه یک مثلث بندی مجاز است.

- یک مثلث بندی را مجاز نامیم اگر یال غیر مجازی نداشته باشد.
- از مشاهده ۹.۳ می دانیم که هر مثلث بندی زاویه-بهینه یک مثلث بندی مجاز است.

Algorithm LEGALTRIANGULATION($\mathcal{T}$)
Input. Some triangulation $\mathcal{T}$ of a point set P.
Output. A legal triangulation of P.
1. **while** $\mathcal{T}$ contains an illegal edge $\overline{p_i p_j}$
2. **do** (* Flip $\overline{p_i p_j}$ *)
3. Let $p_i p_j p_k$ and $p_i p_j p_l$ be the two triangles adjacent to $\overline{p_i p_j}$.
4. Remove $\overline{p_i p_j}$ from $\mathcal{T}$, and add $\overline{p_k p_l}$ instead.
5. **return** $\mathcal{T}$

چرا الگوریتم متوقف می شود؟

- از مشاهده ۹.۳ می دانیم که در هر تکرار حلقه بردار زاویه افزایش می یابد.
- تعداد مثلث بندی های ممکن یک مجموعه از نقاط متناهی است.

چرا الگوریتم متوقف می شود؟

- از مشاهده ۹.۳ می دانیم که در هر تکرار حلقه بردار زاویه افزایش می یابد.
- تعداد مثلث بندی های ممکن یک مجموعه از نقاط متناهی است.

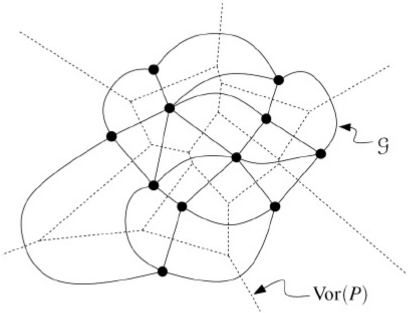
پس الگوریتم متوقف می شود.

توجه

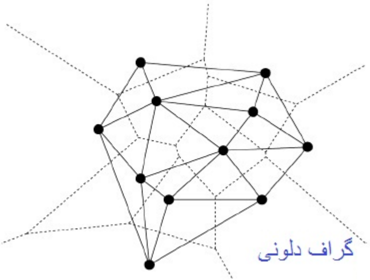
خروجی این الگوریتم یک مثلث بندی مجاز است ولی الگوریتم بسیار کندتر از آن است که مورد توجه ما باشد!

گراف همزاد[۵] دیاگرام ورونوی را در نظر بگیرید. در این گراف:

- به ازای هر سلول ورونوی یک راس قرار دارد. (همان سایت درون سلول)
- بین دو راس یال وجود دارد اگر سلول های متناظر با آنها ضلع مشترک داشته باشند.



[۵] Dual graph



ویژگی: گراف دلونی یک مجموعه از نقاط در صفحه، مسطح است (هیچ دو یالی یکدیگر را قطع نمی کنند).

قضیه ۹.۵

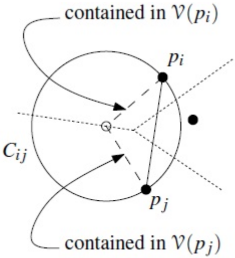
گراف دلونی یک مجموعه از نقاط در صفحه، مسطح است.

قضیه ۹.۵

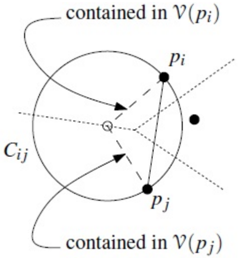
گراف دلونی یک مجموعه از نقاط در صفحه، مسطح است.

برای اثبات از ویژگی زیر (قضیه ۷.۴(ii)) استفاده می کنیم:

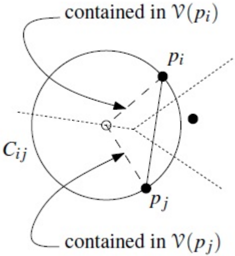
یال $\overline{p_ip_j}$ در دلونی گراف وجود دارد اگر و تنها اگر دایره C_{ij} وجود داشته باشد که نقاط p_i و p_j بر آن واقع باشند و هیچ سایت(نقطه) دیگری از P درون آن قرار نگیرد. (مرکز چنین دایره ای بر یال مشترک سلول های $\mathcal{V}(p_i)$ و $\mathcal{V}(p_j)$ واقع است.)



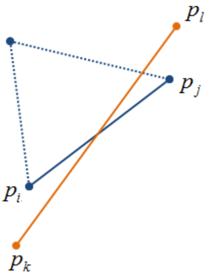
- مثلث t_{ij} را تعریف می کنیم: مثلثی که رأس هایش p_i, p_j و مرکز دایره C_{ij} است.
- دقت کنید که یالی که p_i را به مرکز دایره وصل کرده کاملا در سلول p_i واقع است.(همچنین در مورد p_j)
- اکنون فرض کنید $\overline{p_k p_l}$ یال دیگری در گراف دلونی باشد .مثلث t_{kl} و دایره C_{kl} را بطور مشابه تعریف می کنیم.
- برهان خلف: فرض کنید $\overline{p_i p_j}$ و $\overline{p_k p_l}$ یکدیگر را قطع کنند.



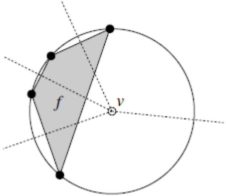
- طبق ویژگی ذکر شده، p_k و p_l باید در بیرون C_{ij} و بنابراین بیرون t_{ij} قرار داشته باشند.
- این یعنی $\overline{p_k p_l}$ باید یکی از یال های t_{ij} مجاور مرکز C_{ij} را قطع کند.
- بطور مشابه، $\overline{p_i p_j}$ باید یکی از یال های t_{kl} مجاور مرکز C_{kl} را قطع کند.



- در این صورت یکی از یال های t_{ij} مجاور مرکز C_{ij} باید یکی از یال های t_{kl} که مجاور مرکز C_{kl} است را قطع کند.
- تناقض با این واقعیت که این یال ها در سلول های مجزایی قرار دارند!



- اگر v رأسی از دیاگرام ورونوی و رأس سلول های سایت های $p_۱, p_۲, p_۳, \ldots, p_k$ باشد، آنگاه $face$ متناظر با آن در گراف دلونی دارای رأس های $p_۱, p_۲, p_۳, \ldots, p_k$ است.



- اگر هیچ چهار سایتی روی یک دایره قرار نگیرند،(مجموعه نقاط P در موقعیت کلی[۶] باشند) هر $face$ گراف دلونی یک مثلث است. این گراف را مثلث بندی دلونی می نامیم.

[۶] General Position

- اگر هیچ چهار سایتی روی یک دایره قرار نگیرند،(مجموعه نقاط P در موقعیت کلی[۶] باشند) هر *face* گراف دلونی یک مثلث است. این گراف را مثلث بندی دلونی می نامیم.

احتمال اینکه در یک توزیع پراکنده از نقاط، چهار نقطه روی یک دایره قرار گیرند کم است!

[۶] General Position

بیان قضیه ۷.۴ برای گراف دلونی:

قضیه ۹.۶

- سه نقطه p_i, p_j, p_k رأس های یک *face* از گراف دلونی هستند اگر و تنها اگر هیچ نقطه ای از P درون دایره گذرنده از نقاط p_i, p_j, p_k نباشد.
- دو نقطه p_i و p_j یک یال از گراف دلونی را تشکیل می دهند اگر و تنها اگر دایره C وجود داشته باشد که نقاط p_i و p_j برآن واقع شده باشند و هیچ نقطه دیگری از P درون آن نباشد.

بیان قضیه ۷.۴ برای گراف دلونی:

قضیه ۹.۶

- سه نقطه p_i, p_j, p_k رأس های یک *face* از گراف دلونی هستند اگر و تنها اگر هیچ نقطه ای از P درون دایره گذرنده از نقاط p_i, p_j, p_k نباشد.
- دو نقطه p_i و p_j یک یال از گراف دلونی را تشکیل می دهند اگر و تنها اگر دایره C وجود داشته باشد که نقاط p_i و p_j برآن واقع شده باشند و هیچ نقطه دیگری از P درون آن نباشد.

قضیه ۹.۷

فرض کنید T یک مثلث بندی از P باشد. در این صورت T یک مثلث بندی دلونی از P است اگر و تنها اگر دایره محیطی هر کدام از مثلث های T شامل نقطه ای از P درون خود نباشد.

- بردار زاویه مثلث بندی دلونی؟

قضیه ۹.۸

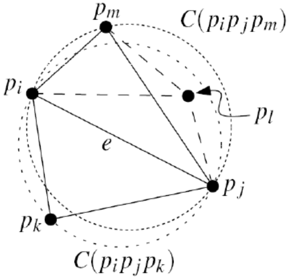
مثلث بندی T مجاز است اگر و تنها اگر T یک مثلث بندی دلونی باشد.

اثبات:

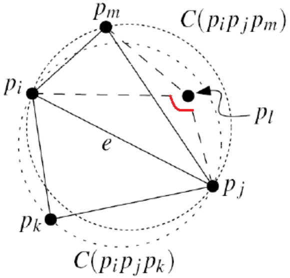
واضح است که هر مثلث بندی دلونی مجاز است.(چرا؟)

برای اثبات در جهت عکس، از برهان خلف استفاده می کنیم.

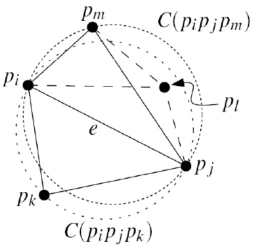
- فرض کنید T یک مثلث بندی مجاز باشد که دلونی نیست.
- طبق قضیه ۹.۶ این یعنی یک مثلث $p_ip_jp_k$ وجود دارد که دایره محیطی $C(p_ip_jp_k)$ شامل نقطه ای مانند p_l درون خود است.
- فرض کنید $e = \overline{p_ip_j}$ یالی از $p_ip_jp_l$ باشد که بین مثلث $p_ip_jp_l$ و $p_ip_jp_k$ مشترک است.
- به ازای همه جفت های $(p_ip_jp_k, p_l)$ در T ، آن جفتی را انتخاب می کنیم که در آن زاویه $\measuredangle p_ip_lp_j$ بیشینه باشد.



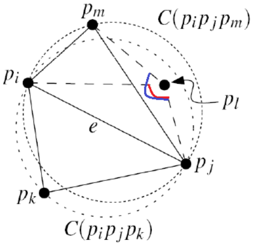
- فرض کنید T یک مثلث بندی مجاز باشد که دلونی نیست.
- طبق قضیه ۹.۶ این یعنی یک مثلث $p_ip_jp_k$ وجود دارد که دایره محیطی $C(p_ip_jp_k)$ شامل نقطه ای مانند p_l درون خود است.
- فرض کنید $e = \overline{p_ip_j}$ یالی از $p_ip_jp_l$ باشد که بین مثلث $p_ip_jp_l$ و $p_ip_jp_k$ مشترک است.
- به ازای همه جفت های $(p_ip_jp_k, p_l)$ در T ، آن جفتی را انتخاب می کنیم که در آن زاویه $\measuredangle p_ip_lp_j$ بیشینه باشد.



- اکنون مثلث $p_ip_jp_m$ در همسایگی $p_ip_jp_k$ با یال مشترک e را در نظر بگیرید.
- e مجاز است پس طبق لم ۹.۴ نقطه p_m درون دایره $C(p_ip_jp_k)$ واقع نمی شود.
- دایره محیطی $C(p_ip_jp_m)$ شامل آن بخشی از $C(p_ip_jp_k)$ است که توسط e از $p_ip_jp_k$ جدا می شود. پس $p_l \in C(p_ip_jp_m)$.
- فرض کنید $\overline{p_jp_m}$ یالی از $p_ip_jp_m$ باشد که بین مثلث $p_ip_jp_m$ و $p_jp_mp_l$ مشترک است.
- ولی اکنون طبق قضیه تالس داریم $\measuredangle p_ip_lp_j > \measuredangle p_jp_lp_m$ که با تعریف جفت $(p_ip_jp_k, p_l)$ تناقض دارد!

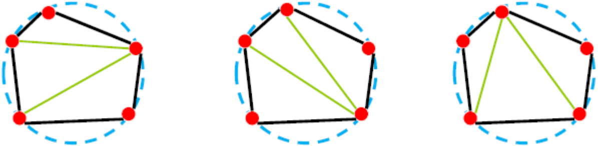


- اکنون مثلث $p_ip_jp_m$ در همسایگی $p_ip_jp_k$ با یال مشترک e را در نظر بگیرید.
- e مجاز است پس طبق لم ۹.۴ نقطه p_m درون دایره $C(p_ip_jp_k)$ واقع نمی شود.
- دایره محیطی $C(p_ip_jp_m)$ شامل آن بخشی از $C(p_ip_jp_k)$ است که توسط e از $p_ip_jp_k$ جدا می شود. پس $p_l \in C(p_ip_jp_m)$.
- فرض کنید $\overline{p_jp_m}$ یالی از $p_ip_jp_m$ باشد که بین مثلث $p_ip_jp_m$ و $p_jp_mp_l$ مشترک است.
- ولی اکنون طبق قضیه تالس داریم $\measuredangle p_ip_lp_j > \measuredangle p_jp_lp_m$ که با تعریف جفت $(p_ip_jp_k, p_l)$ تناقض دارد!



- اگر نقاط در موقعیت کلی باشند، آنگاه گراف دلونی یک مثلث بندی است و مثلث بندی دلونی یکتاست.

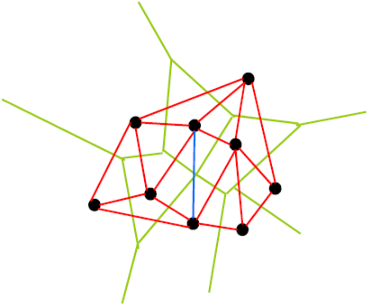
- اگر نقاط در موقعیت کلی باشند، آنگاه گراف دلونی یک مثلث بندی است و مثلث بندی دلونی یکتاست.
- در غیر این صورت می توان گراف دلونی را به یک مثلث بندی تبدیل کرد و همه مثلث بندی های این گراف دارای کوچکترین زاویه مساوی هستند.



قضیه ۹.۹

هر مثلث بندی زاویه-بهینه از P یک مثلث بندی دلونی است. به علاوه، هر مثلث بندی دلونی از P کوچکترین زاویه را ماکزیمم می کند.

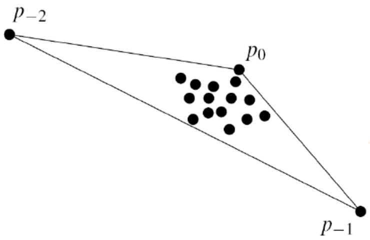
روش اول:



۱. ساختن دیاگرام ورونوی
۲. تولید گراف همزاد دیاگرام ورونوی
۳. مثلث بندی $face$ هایی که مثلث نیستند.

روش مستقیم: الگوریتم افزایشی تصادفی[۷]

- ابتدا دو نقطه $p_{-۱}$ و $p_{-۲}$ را به مجموعه نقاط اضافه می کنیم.
- مجموعه $P \cup \{p_{-۱}, p_{-۲}\}$ را مثلث بندی می کنیم.
- در انتهای الگوریتم نقاط $p_{-۱}$ و $p_{-۲}$ و همه یال های متصل به آن ها را حذف می کنیم تا مثلث بندی P به دست آید.



[۷] Randomized Incremental Approach

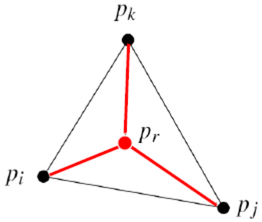
- p_0 بالاترین نقطه در P است.
- اولین مثلث: $p_0 p_{-1} p_{-2}$

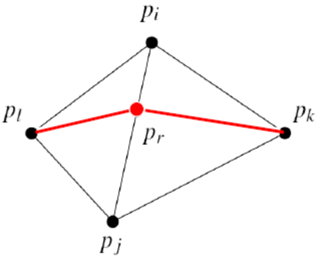
- p_0 بالاترین نقطه در P است.
- اولین مثلث: $p_0 p_{-1} p_{-2}$

توجه!

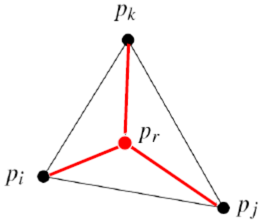
این دو نقطه باید:
۱) در فاصله به اندازه کافی دور باشند.
۲) مثلث بندی را از بین نبرند یعنی بر هیچ دایره گذرنده از سه نقطه واقع نشده باشند.

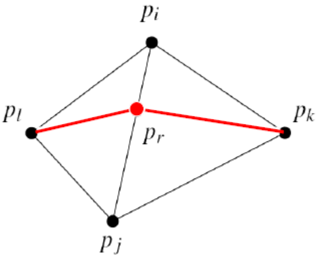
- نقاط با ترتیب تصادفی اضافه می شوند.
- در هر مرحله مثلث بندی دلونی محاسبه می شود.
- در هنگام اضافه کردن نقطه p_r:
  - تعیین مثلث شامل p_r
  - اضافه کردن یال ها





- نقاط با ترتیب تصادفی اضافه می شوند.
- در هر مرحله مثلث بندی دلونی محاسبه می شود.
- در هنگام اضافه کردن نقطه p_r:
  - تعیین مثلث شامل p_r
  - اضافه کردن یال ها





- توجه: ممکن است برخی از یال های قبلی غیرمجاز شوند!

Algorithm DELAUNAYTRIANGULATION(P)
Input. A set P of $n+1$ points in the plane.
Output. A Delaunay triangulation of P.

1. Let p_0 be the lexicographically highest point of P, that is, the rightmost among the points with largest y-coordinate.
2. Let p_{-1} and p_{-2} be two points in $\mathbb{R}^2$ sufficiently far away and such that P is contained in the triangle $p_0p_{-1}p_{-2}$.
3. Initialize $\mathcal{T}$ as the triangulation consisting of the single triangle $p_0p_{-1}p_{-2}$.
4. Compute a random permutation $p_1, p_2, \ldots, p_n$ of $P \setminus \{p_0\}$.
5. **for** $r \leftarrow 1$ **to** n
6.   **do** (* Insert p_r into $\mathcal{T}$: *)
7.   Find a triangle $p_ip_jp_k \in \mathcal{T}$ containing p_r.
8.   **if** p_r lies in the interior of the triangle $p_ip_jp_k$
9.   **then** Add edges from p_r to the three vertices of $p_ip_jp_k$, thereby splitting $p_ip_jp_k$ into three triangles.
10.   LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_ip_j}, \mathcal{T}$)
11.   LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_jp_k}, \mathcal{T}$)
12.   LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_kp_i}, \mathcal{T}$)
13.   **else** (* p_r lies on an edge of $p_ip_jp_k$, say the edge $\overline{p_ip_j}$ *)

۹.۳ ساختن مثلث بندی دلونی

if p_r lies in the interior of the triangle $p_ip_jp_k$

then Add edges from p_r to the three vertices of $p_ip_jp_k$, thereby splitting $p_ip_jp_k$ into three triangles.

LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_ip_j}, \mathcal{T}$)

LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_jp_k}, \mathcal{T}$)

LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_kp_i}, \mathcal{T}$)

else (* p_r lies on an edge of $p_ip_jp_k$, say the edge $\overline{p_ip_j}$ *)

Add edges from p_r to p_k and to the third vertex p_l of the other triangle that is incident to $\overline{p_ip_j}$, thereby splitting the two triangles incident to $\overline{p_ip_j}$ into four triangles.

LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_ip_l}, \mathcal{T}$)

LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_lp_j}, \mathcal{T}$)

LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_jp_k}, \mathcal{T}$)

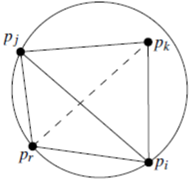
LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_kp_i}, \mathcal{T}$)

Discard p_{-1} and p_{-2} with all their incident edges from $\mathcal{T}$.

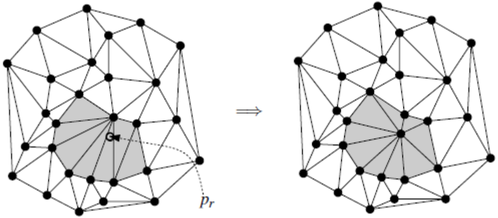
return $\mathcal{T}$

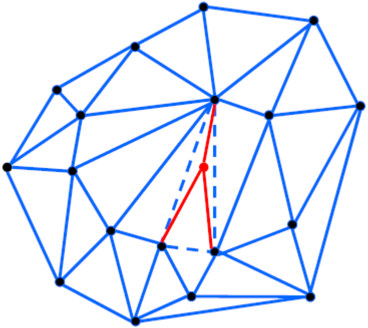
- سوال: کدام یال ها ممکن است با اضافه شدن p_r دیگر مجاز نباشند؟
- مثلث بندی در هر مرحله مجاز است پس فقط یال های مثلث هایی که تغییر کرده اند ممکن است غیرمجاز شوند.

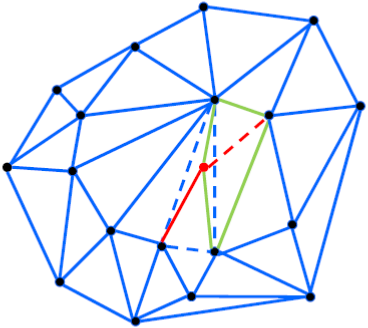
LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_i p_j}, \mathcal{T}$)
1. (∗ The point being inserted is p_r, and $\overline{p_i p_j}$ is the edge of $\mathcal{T}$ that may need to be flipped. ∗)
2. **if** $\overline{p_i p_j}$ is illegal
3. **then** Let $p_i p_j p_k$ be the triangle adjacent to $p_r p_i p_j$ along $\overline{p_i p_j}$.
4. (∗ Flip $\overline{p_i p_j}$: ∗) Replace $\overline{p_i p_j}$ with $\overline{p_r p_k}$.
5. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_i p_k}, \mathcal{T}$)
6. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_k p_j}, \mathcal{T}$)

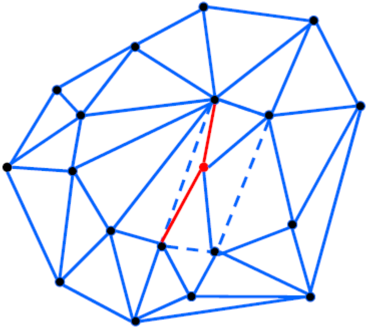


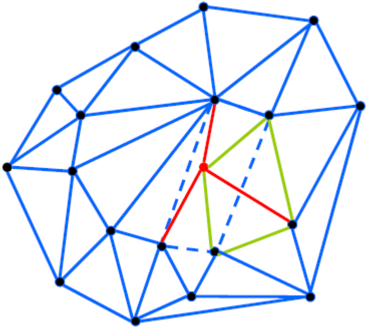
تمام یال های جدیدی که با اضافه شدن p_r ایجاد می شوند، مجاور p_r هستند.

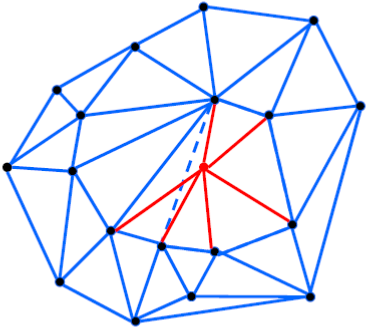


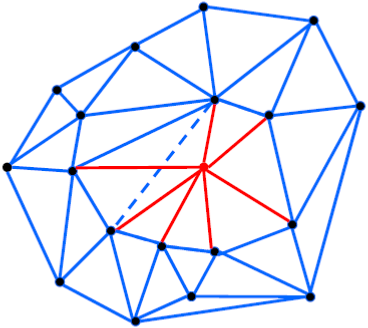


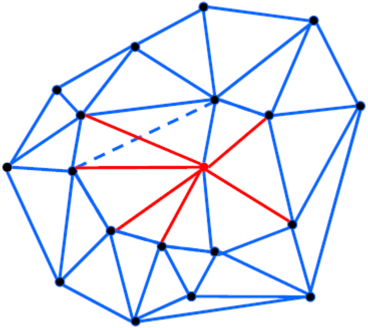


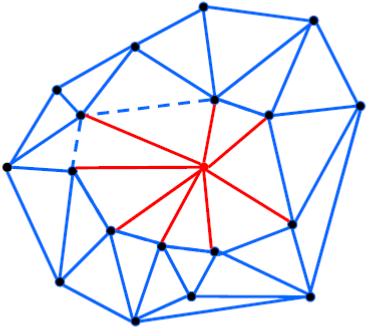


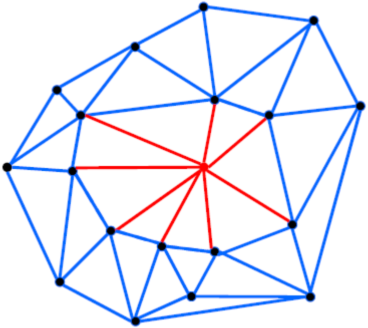










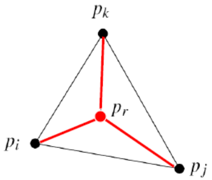


لم ۹.۱۰

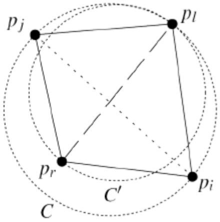
تمام یال های جدیدی که با اضافه شدن p_r ایجاد می شوند، در گراف دلونی هستند.

اثبات:

- از آنجا که $p_i p_j p_k$ یک مثلث از مثلث بندی دلونی است، دایره محیطی آن (C)شامل هیچ نقطه ای مانند p_t با r $t<$ درون خود نیست.
- با کوچک کردن C می توانیم دایره C' گذرنده از نقاط p_i, p_r را به دست آوریم.
- $C' \subset C$ پس C' شامل هیچ نقطه ای نیست و این یعنی $\overline{p_r p_i}$ یالی از گراف دلونی است.



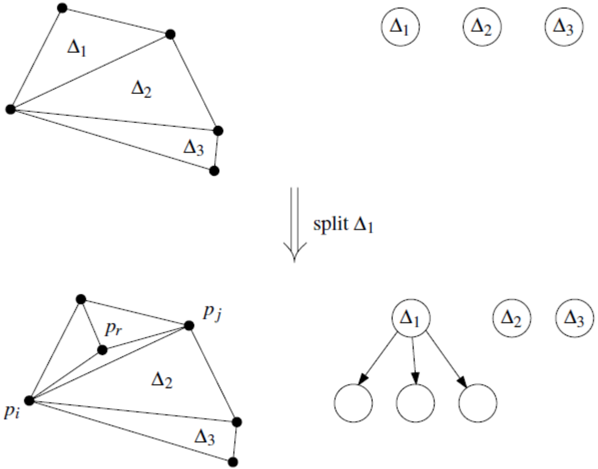
- در edge flip، همیشه یالی مانند $\overline{p_ip_j}$ از مثلث $p_ip_jp_l$ با یال $\overline{p_rp_l}$ مجاور p_r جایگزین می شود.
- از آنجا که $p_ip_jp_l$ یک مثلث دلونی بوده و چون دایره محیطی اش (C) شامل p_r است - در غیر این صورت $\overline{p_ip_j}$ غیرمجاز نخواهد بود-
- می توانیم دایره محیطی را کوچک کنیم تا به یک دایره خالی C' گذرنده از p_r, p_l برسیم.



۹.۳ ساختن مثلث بندی دلونی

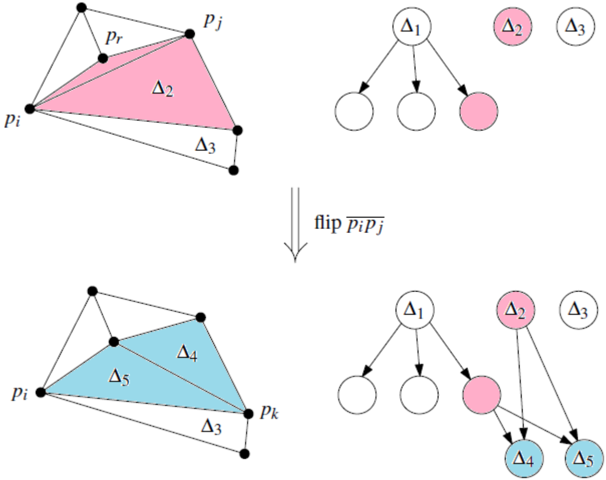
- چگونه تشخیص دهیم که نقطه جدید درون کدام مثلث است؟

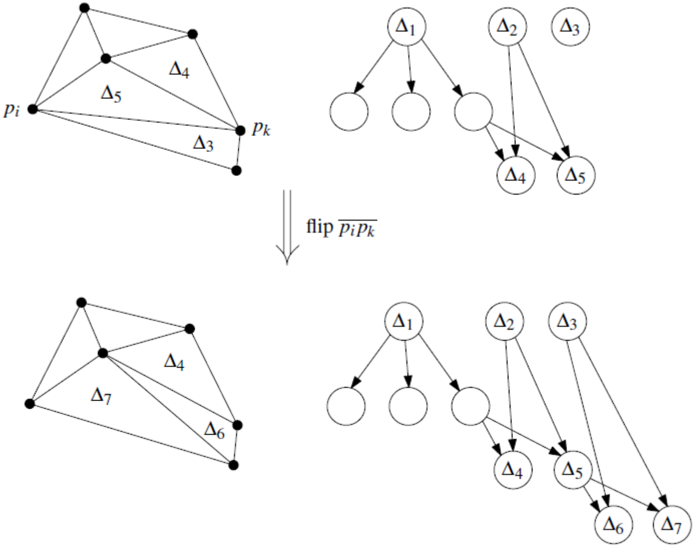
- چگونه تشخیص دهیم که نقطه جدید درون کدام مثلث است؟
- همزمان با ساخت مثلث بندی، یک ساختمان داده برای مکان یابی نقطه $\mathcal{D}$ که یک گراف جهت دار بدون دور است، را می سازیم.
- هر گره متناظر با یک مثلث است.
- گره های داخلی متناظر با مثلث هایی هستند که در مراحل قبل از بین رفته اند.

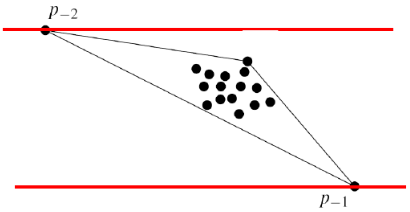


Δ_1
Δ_2
Δ_3
Δ_1
Δ_2
Δ_3
split Δ_1
p_j
p_r
Δ_2
p_i
Δ_3
Δ_1
Δ_2
Δ_3

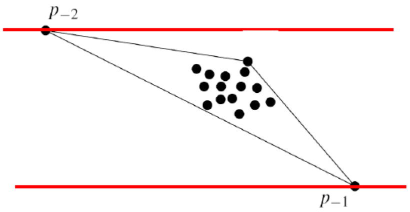
۹.۳ ساختن مثلث بندی دلونی




p_i
p_k
Δ_4
Δ_5
Δ_3
Δ_1
Δ_2
Δ_3
Δ_4
Δ_5
flip $\overline{p_i p_k}$
Δ_4
Δ_7
Δ_6
Δ_1
Δ_2
Δ_3
Δ_4
Δ_5
Δ_6
Δ_7



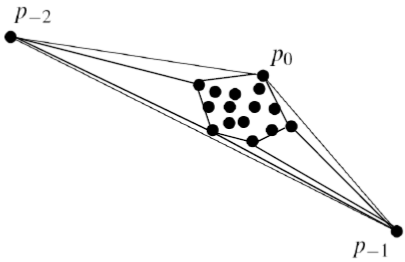
- فرض کنید خط $\ell_{-۱}$ پایین تر و خط $\ell_{-۲}$ بالاتر از همه نقاط P قرار داشته باشد.
- نقطه $p_{-۱}$ را روی $\ell_{-۱}$ و به اندازه کافی در سمت راستP، طوری انتخاب می کنیم که خارج هر دایره ای باشد که از سه نقطه P عبور می کند.



- فرض کنید خط $\ell_{-۱}$ پایین تر و خط $\ell_{-۲}$ بالاتر از همه نقاط P قرار داشته باشد.
- نقطه $p_{-۱}$ را روی $\ell_{-۱}$ و به اندازه کافی در سمت راستP، طوری انتخاب می کنیم که خارج هر دایره ای باشد که از سه نقطه P عبور می کند.
- نقطه $p_{-۲}$ را در سمت چپ خط $\ell_{-۲}$ طوری انتخاب می کنیم که خارج هر دایره ای باشد که از سه نقطه $P \cup \{p_{-۱}\}$ عبور می کند.

مثلث بندی دلونی $\{p_{-۱}, p_{-۲}\} \cup P$ تشکیل شده از:

- مثلث بندی دلونی P
- یال هایی که $p_{-۱}$ را به همه رأس های سمت راست Convex Hull مجموعه P متصل می کنند
- یال هایی که $p_{-۲}$ را به همه رأس های سمت چپ Convex Hull مجموعه P متصل می کنند
- یال $\overline{p_{-۱}p_{-۲}}$
- توجه: بالاترین و پایین ترین نقطه P هم به $p_{-۱}$ و هم به $p_{-۲}$ متصل است.



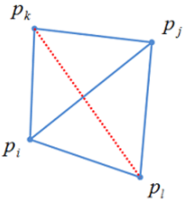
نحوه برخورد با نقاط p_{-1} و p_{-2} در هنگام بررسی مجاز بودن یال؟

- فرض کنید $\overline{p_i p_j}$ یالی باشد که باید بررسی شود و p_k, p_l دو رأس دیگر باشند(در صورت وجود):
  - اگر $\overline{p_i p_j}$ یالی از مثلث $p_0 p_{-1} p_{-2}$ باشد همیشه مجاز است.
  - اگر اندیس های i, j, k, l هیچکدام منفی نباشند، بررسی به صورت معمول انجام می شود.
  - در بقیه ی حالات، $\overline{p_i p_j}$ مجاز است اگر و تنها اگر:

$$\min(k, l) < \min(i, j)$$

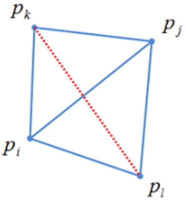
$$\overline{p_ip_j} \text{ is legal} \iff \min(k,l) < \min(i,j)$$

- می دانیم که حداکثر یکی از اندیس های i, j منفی است.
- از طرف دیگر، یا p_k و یا p_l نقطه p_r است که به تازگی اضافه کرده ایم پس حداکثر یکی از اندیس های k, l منفی است.
- اگر تنها یکی از چهار اندیس منفی باشد، می دانیم که این نقطه خارج از دایره ای است که از سه نقطه دیگر می گذرد.
  - اگر i یا j منفی باشد و بقیه مثبت
  - اگر k یا l منفی باشد و بقیه مثبت



$$\overline{p_i p_j} \text{ is legal} \iff \min(k,l) < \min(i,j)$$

- اگر هم $\min(i,j)$ و هم $\min(k,l)$ منفی باشند
  - اگر $\min(i,j) = -۲$ و $\min(k,l) = -۱$
  - اگر $\min(i,j) = -۱$ و $\min(k,l) = -۲$



تحلیل الگوریتم:

مسئله اساسی در تحلیل این الگوریتم، بررسی تعداد مثلث هایی است که در طول روند الگوریتم ایجاد و حذف می شوند.

تحلیل الگوریتم:

مسئله اساسی در تحلیل این الگوریتم، بررسی تعداد مثلث هایی است که در طول روند الگوریتم ایجاد و حذف می شوند.

ابتدا معرفی چند نماد:

$$P_r = \{p_1, \ldots, p_r\}$$

$$\mathcal{D}g_r = \mathcal{D}g(\{p_{-2}, p_{-1}, p_0\} \cup P_r)$$

لم ۹.۱۱

تعداد مورد انتظار مثلث های ایجاد شده توسط الگوریتم، حداکثر $۹n + ۱$ است.

- در rامین تکرار الگوریتم، هنگام اضافه کردن p_r، ابتدا یک مثلث را به سه مثلث تبدیل و سه یال جدید در $\mathcal{D}g_r$ ایجاد می کنیم.
- علاوه بر این، هر تعویض یال نیز دو مثلث جدید ایجاد کرده و همچنین باعث می شود که یک یال $\mathcal{D}g_r$ مجاور p_r شود.
- یعنی اگر پس از اضافه کردن p_r، k یال از $\mathcal{D}g_r$ مجاور p_r باشند،
- تعداد مثلث های جدید ایجاد شده حداکثر برابر خواهد بود با :

$$۲(k - ۳) + ۳ = ۲k - ۳$$

$$k = deg(p_r, \mathcal{D}g_r)$$

- طبق قضیه ۷.۳ ، $\mathcal{D}g_r$ حداکثر ۶ − (۳ + r)۳ یال دارد.
- ۳ تا از این یال ها متعلق به مثلث $p_{-۲}p_{-۱}p_۰$ هستند،
- بنابراین ، مجموع درجات رأس های دنباله P_r کمتر است از

$$۲[۳(r+۳)-۹]=۶r$$

- و این یعنی درجه مورد انتظار یک نقطه تصادفی از P_r حداکثر ۶ است.

- پس خواهیم داشت:

$$E[\text{r تعداد مثلث های ایجاد شده در مرحله}] \leq E[۲k - ۳]$$
$$= ۲E[k] - ۳$$
$$\leq ۲ * ۶ - ۳ = ۹$$

در مجموع n مرحله، حداکثر $۹n + ۱$ مثلث خواهیم داشت.

قضیه ۹.۱۲

مثلث بندی دلونی را می توان در زمان مورد انتظار $\mathcal{O}(n \log n)$ و با استفاده از حافظه مورد انتظار $\mathcal{O}(n)$ انجام داد.

- در مورد حافظه، با توجه به اینکه در ساختمان داده $\mathcal{D}$، هر گره متناظر با یک مثلث ایجاد شده توسط الگوریتم بود و با توجه به لم قبل، $\mathcal{O}(n)$ اثبات می شود.

قضیه ۹.۱۲

مثلث بندی دلونی را می توان در زمان مورد انتظار $\mathcal{O}(n\log n)$ و با استفاده از حافظه مورد انتظار $\mathcal{O}(n)$ انجام داد.

- در مورد حافظه، با توجه به اینکه در ساختمان داده $\mathcal{D}$، هر گره متناظر با یک مثلث ایجاد شده توسط الگوریتم بود و با توجه به لم قبل، $\mathcal{O}(n)$ اثبات می شود.
- در مورد زمان اجرا، بدون در نظر گرفتن مرحله تعیین مکان نقطه(خط۷)، زمان هزینه شده توسط الگوریتم با تعداد مثلث های ایجاد شده متناسب است یعنی $\mathcal{O}(n)$

- در مورد مرحله *point location* :
- فرض کنید $T(i)$ هزینه جستجو در گراف، در هنگام اضافه کردن نقطه p_i باشد.
- این هزینه را به هر مثلث موجود در مسیر جستجو شارژ می کنیم.
- یعنی به جای محاسبه $\sum_{i=۱}^{n} T(i)$ می توانیم مجموع تعداد دفعات شارژ مثلث ها را حساب کنیم.

$$\sum_{i=۱}^{n} T(i) = \sum_{\Delta} card(\Delta) = \sum_{\Delta} card(K(\Delta))$$

$K(\Delta)$: دایره محیطی مثلث Δ

لم ۹.۱۳

اگر P یک مجموعه نقاط در موقعیت کلی باشد، آنگاه

$$\sum_{\Delta} card(K(\Delta)) = \mathcal{O}(n \log n)$$

که جمع، روی همه مثلث های دلونی Δ است که توسط الگوریتم ایجاد می شوند.

اثبات:

T_r : مجموعه مثلث های $\mathcal{D}g_r$

$T_r \setminus T_{r-۱}$: مجموعه مثلث های دلونی ایجاد شده در مرحله r

$$\sum_{r=۱}^{n} \Big(\sum_{\Delta \in T_r \setminus T_{r-۱}} card(K(\Delta)) \Big)$$

$k(P_r, q)$: تعداد مثلث های $\Delta \in T_r$ که $q \in K(\Delta)$

$k(P_r, q, p_r)$: تعداد مثلث های $\Delta \in T_r$ که $q \in K(\Delta)$ و همچنین p_r مجاور Δ باشد.

$$\sum_{\Delta \in T_r \setminus T_{r-۱}} card(K(\Delta)) = \sum_{q \in P \setminus P_r} k(P_r, q, p_r) \qquad (*)$$

احتمال اینکه یک مثلث $\Delta \in T_r$ مجاور یک نقطه تصادفی $p \in P_r^*$ باشد، حداکثر برابر $(\frac{۳}{r})$ است.
پس

$$E[k(P_r, q, p_r)] \leq \frac{۳k(P_r, q)}{r}$$

با جمع این مقادیر به ازای همه نقاط $q \in P \setminus P_r$ و با استفاده از رابطه $(*)$ داریم :

$$E[\sum_{\Delta \in T_r \setminus T_{r-۱}} card(K(\Delta))] \leq \frac{۳}{r} \sum_{q \in P \setminus P_r} k(P_r, q) \qquad (**)$$

احتمال اینکه هر کدام از نقاط $q \in P \setminus P_r$ به عنوان $p_{r+۱}$ ظاهر شود برابر است، پس:

$$E[k(P_r, p_{r+۱})] = \frac{۱}{n-r} \sum_{q \in P \setminus P_r} k(p_r, q)$$

با جاگذاری این مقدار در (**) :

احتمال اینکه هر کدام از نقاط $q \in P \setminus P_r$ به عنوان p_{r+1} ظاهر شود برابر است، پس:

$$E[k(P_r, p_{r+1})] = \frac{1}{n-r} \sum_{q \in P \setminus P_r} k(p_r, q)$$

با جاگذاری این مقدار در $(**)$:

$$E[\sum_{\Delta \in T_r \setminus T_{r-1}} card(K(\Delta))] \quad \leq \quad 3(\frac{n-r}{r}) E[k(P_r, p_{r+1})]$$

$k(P_r, p_{r+1})$ تعداد مثلث هایی از T_r است که $K(\Delta) \in p_{r+1}$. که طبق قضیه ۹.۶ (i) این مثلث ها دقیقا همان مثلث هایی هستند که با اضافه شدن p_{r+1} حذف می شوند، پس داریم:

$$E[\sum_{\Delta \in T_r \setminus T_{r-1}} card(K(\Delta))] \leq ۳(\frac{n-r}{r}) E[card(T_r \setminus T_{r+1})]$$

$k(P_r, p_{r+1})$ تعداد مثلث هایی از T_r است که $p_{r+1} \in K(\Delta)$. که طبق قضیه ۹.۶ (i) این مثلث ها دقیقا همان مثلث هایی هستند که با اضافه شدن p_{r+1} حذف می شوند، پس داریم:

$$E[\sum_{\Delta \in T_r \setminus T_{r-1}} card(K(\Delta))] \quad \leq \quad 3(\frac{n-r}{r})E[card(T_r \setminus T_{r+1})]$$

تعداد مثلث هایی که با اضافه شدن نقطه p_{r+1} حذف می شوند دقیقا ۲ تا از تعداد مثلث هایی که با اضافه شدن p_{r+1} ایجاد می شوند کمتر است، پس:

$$E[\sum_{\Delta \in T_r \setminus T_{r-1}} card(K(\Delta))] \quad \leq \quad 3(\frac{n-r}{r})(E[card(T_{r+1} \setminus T_r)] - 2)$$

اکنون میدانیم که تعداد مثلث هایی که با اضافه شدن $p_{r+۱}$ ایجاد می شوند با تعداد یال های مجاور $p_{r+۱}$ در $T_{r+۱}$ یکی است.
و می دانیم که تعداد مورد انتظار چنین یال هایی حداکثر ۶ است. پس نتیجه می گیریم که:

$$E[\sum_{\Delta \in T_r \setminus T_{r-۱}} card(K(\Delta))] \leq ۱۲(\frac{n-r}{r})$$

که با جمع روی r لم را ثابت می کند.