کلاس ۸ و ۹

۱- شخصی اعداد صحیح ۱ تا ۹ را در یک جدول ۳×۳ مینویسد طوری که در هر سلول یک عدد و هرعدد فقط یک بار نوشته شده است. سپس ۸ حاصل جمع را اینگونه حساب می‌کند: «جمع هر سه عدد در یک سطر، جمع هر سه عدد در یک ستون، و جمع هر سه عدد در یک قطر.» آیا امکان دارد که هیچ یک از این حاصل جمع‌ها مضرب سه نباشد؟

۲- میدانیم $ABCD$ چهار ضلعی محدبی است که در آن $AD=DC\,,AC=AB$ و $\widehat{ADC}=\widehat{CAB}$ میدانیم که M و N اوساط AD و AB اند. ثابت کنید که مثلث MNC متساوی الساقین است.

۳- احمدرضا و پویا بازی زیر را انجام میدهند. (توجه کنید که احمدرضا را احمد صدا می‌کنند!)

احمد یک لیست با ۲۰۱۱ عدد صحیح مثبت می‌نویسد ولی آن را به پویا نشان نمی‌دهد. هدف پویا این است که ضرب این ۲۰۱۱ عدد را پیدا کند. برای این کار او اجازه دارد که ب.م.م و ک.م.م هر مجموعه‌ای از اعداد احمد با حداقل دو عضو را بپرسد. (به عنوان نمونه می‌تواند بپرسد: «ب.م.م عدد اول و دوم و دهم و دوهزارم لیست چیست؟» و یا: «ک.م.م همه‌ی اعداد لیست چیست؟»)

پویا میتواند به تعداد دلخواه سوال بپرسد. ولی همه‌ی پاسخ‌هایش را یکجا پس از پرسیدن تمام سوالاتش دریافت می‌کند. (احمد شخصی مهربان(!) است و می‌گوید که کدام جواب برای کدام سوال است.) سپس پویا می‌تواند هر یک از چهار عمل اصلی را روی جواب‌های احمد استفاده کند. آیا پویا می‌تواند لیستی از پرسش‌ها بنویسد که تضمین کند که ضرب اعداد احمد را بیابد؟

۴- سیدرضا لیستی از اعداد صحیح و مثبت را نوشته است. بهزاد دریافت که هر عدد در لیست و همچنین جمع هر تعداد از اعداد متمایز از لیست خالی از مربع است. (یعنی بر هیچ مربع کاملی جزیک بخش‌پذیر نیست.) حداکثر تعداد اعضای لیست سیدرضا چقدر است؟

۵- ۱۰۰۰ نقطه درون یک مربع با ضلع ۱۶ قرار دارد. ثابت کنید که یک مثلث متساوی الاضلاع با ضلع $۲\sqrt{۳}$ وجود دارد که حداقل ۱۶ نقطه از این نقاط را بپوشاند.

۶- برای هر عدد صحیح و مثبت N با $۲k$ رقم تعریف میکنیم $odd(n)$ که آن عددی k رقمی است که از کنار هم قرار دادن ارقام با جایگاه فرد N تشکیل می‌شود و $even(n)$ که آن نیز عددی k رقمی است که از کنارهم قرار دادن ارقام با جایگاه زوج N بدست می آید. ($even(۲۴۹۰۳۵)=۲۹۳\,,odd(۲۴۹۰۳۵)=۴۰۵$) ثابت کنید که هیچ عدد صحیح مثبت N را با $۲k$ رقم نمیتوان یافت که در آن رابطه روبرو برقرار باشد. $N=odd(N)\times even(N)$

کلاس ۱۰ و ۱۱

۱- ما یک عدد را عدد المپیادی می‌نامیم اگر هیچ رقم صفری نداشته باشد و حاصل جمع مربع ارقام آن یک مربع کامل باشد. برای نمونه ۱۲۲ و ۳۴ اعدادی المپیادی‌اند، در حالی که ۳۰۴ و ۱۲ نیستند. ثابت کنید عدد المپیادی با هر تعداد رقمی وجود دارد.

۲- ثابت کنید برای هر پنج ضلعی محدب $P_1P_2P_3P_4P_5$ با مساحت یک وجود دارد i,j ای که :

$S(P_iP_{i+1}P_{i+2}) \le \frac{5-\sqrt{5}}{10} \le S(P_jP_{j+1}P_{j+2})$ (توجه کنید که $P_6=P_1, P_7=P_2$ و $S(ABC)$ نمایشگر مساحت مثلث ABC است.)

۳- آیا ۲۰۱۱ عدد طبیعی مثبت $a_1<a_2<\dots<a_{2011}$ وجود دارند که به ازای هر i,j که در آن j بزرگتر است داشته باشیم:

$$(a_i,a_j)=a_j-a_i$$

۴- مثلث حاده الزاویه‌ی ABC با مرکز ارتفاعی H را درنظر بگیرید. میدانیم D محل برخورد BH و AC و همینطور E محل برخورد CH با AB باشد. دوایر محیطی مثلث‌های ADE, ABC در $F \neq A$ برخورد دارند. ثابت کنید که نیمساز زوایای BFC و BHC در نقطه ای روی خط BC برخورد می‌کنند.

۵- میدانیم که $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ اعدادی حقیقی نا منفی با حاصل جمع $\frac{2011}{2}$ می‌باشند. ثابت کنید:

$$|(a_1-a_2)(a_2-a_3)\dots(a_{2011}-a_1)| \le \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

با آرزوی موفقیت، سید رضا حسینی