5) . پاسخ ضربه :

پاسخ مدار زمانی که منبع تحریک ورودی از جنس تابع ضربه باشد.

6) . پاسخ حالت ماندگار سینوسی :

پاسخ مدار زمانی که منبع تحریک ورودی از جنس تابع سینوسی باشد. معمولاً برای محاسبه این نوع پاسخ از روش فازور استفاده می کنیم.

جهت محاسبه پاسخ یک مدار مرتبه اول (R_L , R_C) یا مرتبه دوم RLC باید ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر آن مدار را بنویسیم. پاسخ این معادله دقیقاً برابر با پاسخ مدار مورد نظر ما خواهد بود.

به طور کلی پاسخ هر معادله دیفرانسیل به صورت زیر می باشد:

اگر متغیر معادله دیفرانسیل $y(t)$ باشد $\Rightarrow$ $y(t) = y_h + y_p$ → پاسخ خصوصی

$y(t)$ ← پاسخ کامل معادله ، y_h ← پاسخ همگن

پاسخ کامل مدار = پاسخ عمومی + پاسخ خصوصی

" = پاسخ حالت گذرا + پاسخ حالت ماندگار

" = پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر

در نوشتن معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار معمولاً ولتاژ خازن یا جریان سلف به عنوان متغیر معادله در نظر گرفته می شود.

نکاتی در رابطه با محاسبه شرایط اولیه حالم برودار:

حفظی تغییرناپذیر بازها

1. محاسبه ولتاژ اولیه خازن:

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

برای بدست آوردن جریان خازن باید از تابع ولتاژ خازن نسبت به زمان مشتق بگیریم، پس تابع ولتاژ خازن باید مشتق پذیر باشد. شرط لازم مشتق پذیری تابع پیوسته بودن آن است پس در حالت کلی ولتاژ خازن باید پیوسته باشد و نمی تواند جهش ناگهانی داشته باشد.

$$v(0^-) = v(0^+) = v(0) = V_0$$ ⟸ پیوسته بودن ولتاژ

اما می دانیم فقط یک استثنا وجود دارد: تابع پله با وجود ناپیوسته بودن مشتق پذیر بوده و مشتق آن برابر تابع ضربه می باشد:

اگر $i_c(t) = \delta(t)$

$$\Rightarrow v_c(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i_c(t)\,dt = \frac{1}{c}\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,dt}_{u(t)} = \frac{1}{c}u(t)$$

پس اگر جریان خازن تابع ضربه باشد، ولتاژ خازن تابع پله خواهد بود و دیگر پیوسته نخواهد بود.

$$v_c(0^-) \neq v_c(0^+)$$

2. محاسبه جریان اولیه سلف:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

برای بدست آوردن ولتاژ سلف باید از تابع جریان سلف نسبت به زمان مشتق بگیریم، پس تابع جریان سلف باید مشتق پذیر باشد. شرط لازم مشتق پذیر بودن یک تابع، پیوسته بودن آن است. پس در حالت کلی جریان سلف باید پیوسته باشد و نمی تواند جهش ناگهانی داشته باشد.

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = I_0$$ ⟸ پیوسته بودن جریان

اما می دانیم فقط یک استثنا وجود دارد: تابع پله با وجود ناپیوسته بودن مشتق پذیر بوده و مشتق آن برابر تابع ضربه می باشد.

اگر $v_L(t) = \delta(t)$

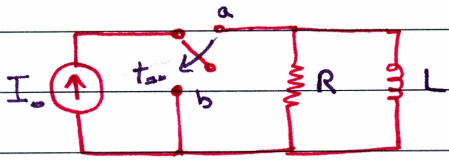
$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)\,dt = \frac{1}{L}\overbrace{\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,dt}^{u(t)} = \frac{1}{L}u(t)$$

پس اگر ولتاژ سلف تابع ضربه باشد، جریان سلف تابع پله خواهد بود و دیگر پیوسته نخواهد بود.

$$i_L(0^-) \neq i_L(0^+)$$

تحلیل مدار RL مرتبه اول.

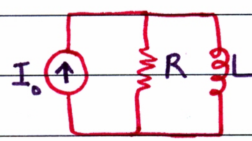
۱. محاسبه پاسخ طبیعی یا گذرا یا ورودی.



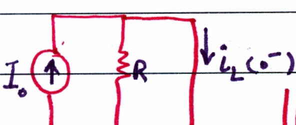
در مدار شکل فوق کلید مدت‌های طولانی قبل از $t=0$ در وضعیت a بوده و در لحظه $t=0$ به وضعیت b رفته.

ابتدا جهت محاسبه شرایط اولیه حاکم بر مدار باید وضعیت مدار را قبل از تغییر وضعیت کلید $(t<0)$ مورد بررسی قرار دهیم.

$t<0$ ⟶ کلید در وضعیت a



$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \longrightarrow \forall \text{ جریان DC } = 0$$



پس از گذشت مدت طولانی، سلف در حضور منابع DC اتصال کوتاه خواهد شد.

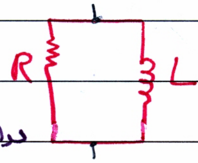
$$\Rightarrow i_L(0^-) = I_0$$

Subject:_______________ Date:_______________

چون تابع ضربه نداریم ⟸ جریان سلف پیوسته ⟸ $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_0$

سپس وضعیت مدار را بعد از تغییر وضعیت کلید بررسی می کنیم. در این حالت معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار را نوشته و با حل این معادله پاسخ مدار را بدست می آوریم.

$t \geq 0 \longrightarrow$ کلید در وضعیت b



مدار RL بدون منبع تحریک ورودی

متغیر معادله دیفرانسیل $= i_L(t)$

$$KVL: \quad v_R + v_L = 0 \Rightarrow R \times i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = 0$$

طرفین تقسیم بر L (ضریب بالاترین درجه مشتق) $\Rightarrow \frac{R}{L} i_L(t) + \frac{di_L(t)}{dt} = 0$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول همگن با ضرایب ثابت.

$$\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow S^1 \qquad i_L(t) \Rightarrow S^0$$

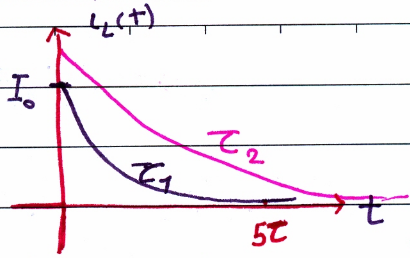
$$S + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow S = -\frac{R}{L}$$

$$i_L(t) = \underbrace{A}_{\text{ثابت}} e^{-\frac{R}{L}t}$$

از روی شرایط اولیه بدست می آید

$$t = 0 \Rightarrow i_L(0) = Ae^0 = A \Rightarrow I_0 = A$$

$$\Rightarrow i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}} \xrightarrow{\tau = \frac{L}{R_{th}}} i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

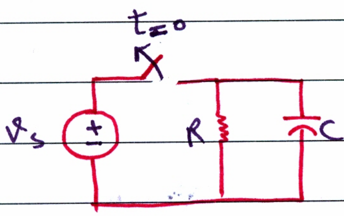


$\Rightarrow \tau_1 < \tau_2$

$t = \tau \Rightarrow i_L(\tau) = I_0 e^{-1} \Rightarrow i_L(\tau) = 0{,}36\, I_0$

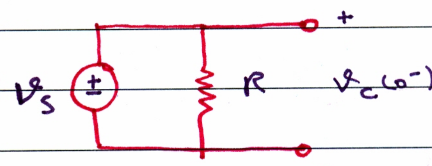
$t = 5\tau \Rightarrow i_L(5\tau) = I_0 e^{-5} \Rightarrow i_L(5\tau) = 0{,}0067\, I_0$

پاسخ طبیعی مدار RC مرتبه اول :



$t < 0 \Rightarrow$ خازن پس از مدت طولانی در حضور منابع DC مدار باز است

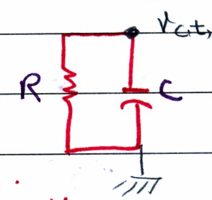
برای محاسبه شرایط اولیه



$\Rightarrow v_c(0^-) = v_s$

$v_c(0^-) = v_c(0^+) = v_s \Leftarrow$ ولتاژ خازن پیوسته است و جهش ناگهانی ندارد

$t \geq 0 \Rightarrow i_R + i_c = 0$



$$\frac{v_c(t)}{R} + C\frac{dv_c(t)}{dt} = 0$$ معادله خطی مرتبه اول همگن

طرفین تقسیم بر C می‌نماییم تا ضریب بزرگترین مرتبه مشتق برابر یک شود

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = 0$$ معادله خطی مرتبه اول همگن حاکم بر مدار RC

$$S + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow S = -\frac{1}{RC} \Rightarrow v_c(t) = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

A: از روی شرایط اولیه بدست می‌آید

$t=0 \Rightarrow v_c(0) = Ae^0 \Rightarrow A = v_c(0) = V_s$

همان $v_c(t) = V_s e^{-\frac{t}{RC}} \xrightarrow{\tau = RC}$ همان $v_c(t) = V_s e^{-t/\tau}$

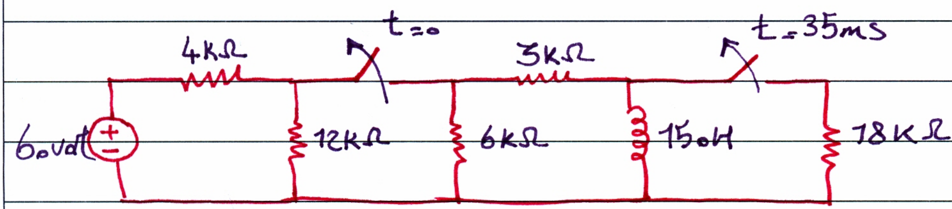
نکته: چنانچه کلید به جای لحظه‌ی $t=0$ در لحظه دلخواه دیگری مثل $t=t_0$ تغییر وضعیت دهد، پاسخ مدارها RL و RC به صورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$i_L(t) = i_L(t_0)\, e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

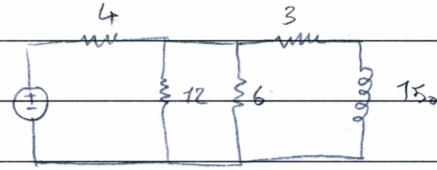
$$v_c(t) = v_c(t_0)\, e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

نکته: در مدارهایی که شامل بیش از یک کلید هستند باید مدار را در فواصل زمانی بین کلیدها نیز تحلیل کنیم. توجه داشته باشید که شرایط اولیه در هر مرحله برابر حالت نهایی مرحله قبل خواهد بود.

Example: در مدار شکل زیر مدت‌های طولانی قبل از $t=0$ هر دو کلید بسته بوده‌اند. در لحظه $t=0$ کلید اول باز و در لحظه $t=35ms$ کلید دوم نیز باز می‌شود. جریان سلف را بدست آورید.



(1) $t<0 \Rightarrow$

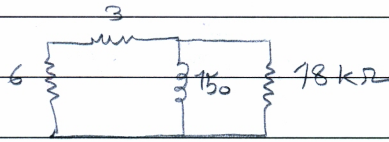


$I_0' = \frac{60}{R_{eq}} = \frac{60}{(3\|6\|12)+4} = 10.5mA$

تقسیم جریان: $i_L(0^-) = \frac{(6\|12)}{(6\|12)+3} \times I_0' = 6mA$

جریان سلف پیوسته $\Rightarrow i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 6\,mA$

② $0 < t < 35$



مدار RL بدون منبع

$i_L(t) =$ پاسخ طبیعی

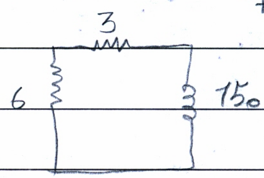
$i_L(t) = i_{1L}(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad 6mA$

$\tau = \dfrac{L}{R_{eq}} = \dfrac{150}{6k\Omega}$

$i_{1L} = 6mA \times e^{-40 \times t}$

$R_{eq} = (6+3) \parallel 18 = 6k\Omega$

③ $t \geq 35\,ms$



$i_{2L}(t) = i_L(t = 35ms)\, e^{-\frac{(t-35ms)}{\tau}}$

$\tau = \dfrac{L}{R_{eq}} = \dfrac{150}{9k\Omega} = \dfrac{1}{60}\, s$

از روی معادله

$i_L(t = 35^- ms) = i_{1L}(t = 35^-) = 6_{mA} \times e^{-40 \times 35^-} = 1{,}48 mA$

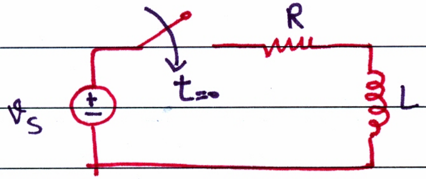
جریان سلف پیوسته $\Rightarrow i_L(t = 35^-) = i_L(t = 35^+) = i_L(t = 35) = 1{,}48$

$i_{2L}(t) = 1{,}48 \times e^{-60t + 35ms}$

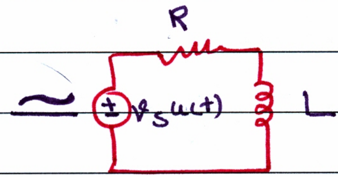
$$i_L(t) = \begin{cases} t < 0 & 6 \\ 0 < t < 35 & 6e^{-40t} \\ t \geq 35 & 1{,}48 \times e^{-60t + 35ms} \end{cases} \Rightarrow$$

$$i_L = 6_{mA}\, u(-t) + 6_{mA}\, e^{-40t}\big(u(t) - u(t-35)\big) + 1{,}48 e^{-60(t-35)} \times u(t-35)$$

فرض کنید $i_L(0^-) = I_0$:



1



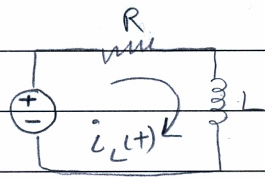
2

① $t \geq 0 \Rightarrow$ کلید بسته $\Rightarrow$ مدار RL با منبع تحریک DC

② $t \geq 0 \Rightarrow u(t) = 1 \Rightarrow$ مدار RL با منبع تحریک DC

$\Rightarrow 1 = 2$

$t \geq 0$ کلید در $\Rightarrow$



$$KVL: \quad -V_s + R \times i_L(t) + L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$\div L$ ضریب بزرگترین مرتبه مشتق $\Rightarrow$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{V_s}{L}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول غیرهمگن

$$i_L(t) = i_h + i_p$$

پاسخ همگن ← ← پاسخ خصوصی

$$i_h = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{L}{R} \qquad i_p = A_2 \rightarrow \text{عدد ثابت}$$

می‌دانیم پاسخ خصوصی یک معادله دیفرانسیل در آن معادله صدق می‌کند.

$$0 + \frac{R}{L} A_2 = \frac{V_s}{R} \Rightarrow A_2 = \frac{V_s}{R} \rightarrow \text{جواب خصوصی معادله}$$

$$i_L(t) = \underline{A_1} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_s}{R}$$

به شرایط اولیه

جریان سلف پیوسته $\Rightarrow i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = I_0$

$$t=0 \Rightarrow \underbrace{i_L(0)}_{I_0} = A_1 \times \underbrace{e^0}_{1} + \frac{V_s}{R} \Rightarrow A_1 = I_0 - \frac{V_s}{R}$$

$$\Longrightarrow A_1 = I_0 - \frac{V_s}{R}$$

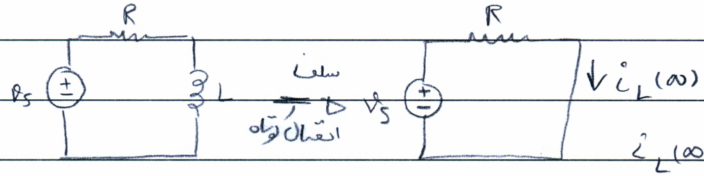
$$i_L(t) = \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_s}{R} \quad \checkmark \qquad t \geq 0$$

$$i_L(t) = \begin{cases} I_0 & t < 0 \\ \overbrace{(\underbrace{I_0}_{\text{جریان اولیه سلف}} - \frac{V_s}{R})}^{A} e^{-\frac{t}{\tau}} + \underbrace{\frac{V_s}{R}}_{B} & t \geq 0 \end{cases}$$

$i(0^-) = A + B$

$i(\infty) = B$

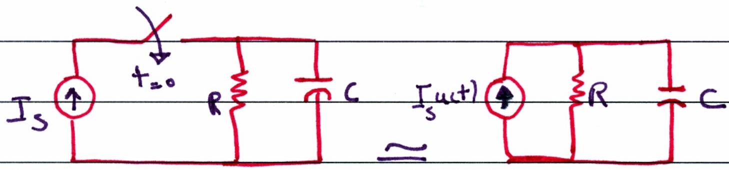
$t = \infty \Rightarrow$



$$i_L(\infty) = I_\infty = \frac{V_s}{R}$$

$$\text{پاسخ پله مدار مرتبه اول RL} = \left[\left(i_L(0) - i_L(\infty)\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty)\right] u(t)$$

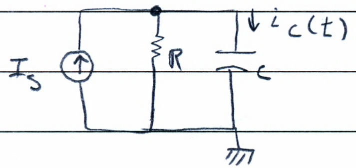
پاسخ پله مدار مرتبه اول RC



فرض کنید $V_C(0^-) = V_0$

ولتاژ خازن پیوسته است $\Rightarrow v_c(0^-) = v_c(0^+) = v_c(0) = v_0$

$t \geq 0$



$$KCL: \quad I_s = \frac{v_c(t)}{R} + C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{C}I_s$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

غیر همگن

پاسخ همگن

$$v_c(t) = v_h + v_p \Rightarrow v_h = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = RC$$

عدد ثابت

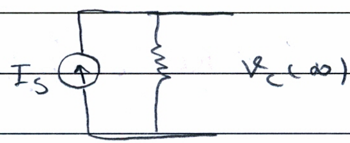
$$v_p = A_2 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{جایگذاری در}} 0 + \frac{1}{RC}A_2 = \frac{1}{C}I_s \Rightarrow \boxed{A_2 = RI_s}$$

$$v_c(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + RI_s \qquad t=0 \Rightarrow v_c(0) = A_1 + RI_s \Rightarrow A_1 = v_0 - RI_s$$

$$v_c(t) = \left[(v_0 - RI_s)e^{-\frac{t}{\tau}} + RI_s\right]u(t)$$

$t \geq 0 \qquad t = \infty$

خازن مدار باز می شود



$$v_c(t) = \left(\left[v_c(0) - v_c(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + v_c(\infty)\right)u(t)$$

$$\tau = R_{th} \cdot C$$

نکته: فرم کلی پاسخ کامل مدارهای RC یا RL مرتبه اول در حضور منابع DC یا منابعی با تابع تحریک $u(t)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$x(t) = (x_0 - x_\infty)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty)$$

در مدار RC $\Rightarrow x(t) = v_c(t)$ ، $\tau = R_{th} \cdot C$

در مدار RL $\Rightarrow x(t) = i_L(t)$ ، $\tau = \frac{L}{R_{th}}$

روش محاسبه $x(0)$:

ابتدا قبل از تغییر وضعیت کلید در مدار RC خازن را مدار باز و در مدار RL سلف را اتصال کوتاه می‌کنیم، $x(0^-)$ را بدست می‌آوریم.

از آن جایی که در حضور منابع DC ، شرط پیوستگی ولتاژ خازن و جریان سلف برقرار است می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم

$$x(0^-) = x(0^+) = x(0)$$

روش محاسبه $x(\infty)$:

برای محاسبه‌ی $x(\infty)$ ، پس از تغییر وضعیت کلید مجدداً در مدار RC خازن را مدار باز و در مدار RL سلف را اتصال کوتاه می‌کنیم و $x(\infty)$ را محاسبه می‌کنیم.

روش محاسبه‌ی ثابت زمانی :

در مدار RL : $\tau = \frac{L}{R_{th}}$ ← مقاومت تونن دیده شده از دو سر سلف

در مدار RC : $\tau = R_{th} \cdot C$ ← مقاومت تونن دیده شده از دو سر خازن

خواص سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) :

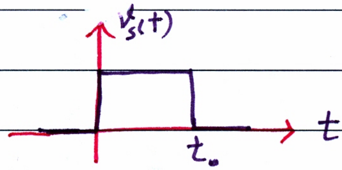
ورودی	خروجی
$x(t)$	$y(t)$
$K\,x(t)$	$K\,y(t)$

ادامه جدول صفحه قبل

$x(t-t_0)$	$y(t-t_0)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$\frac{dy(t)}{dt}$
$\int x(t)dt$	$\int y(t)dt$
$x^2(t)$ $\not\Rightarrow$	$y^2(t)$

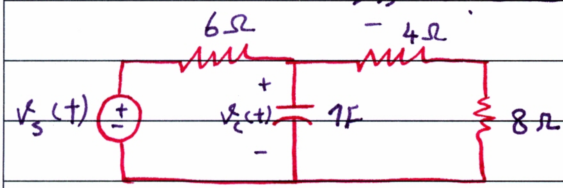
پاسخ مدار RC مرتبه اول به تابع تحریک پالس:

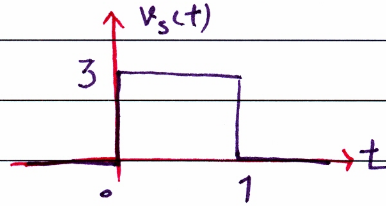
نمونه تابع پالس:



$\Rightarrow Au(t) - Au(t-t_0)$

Example: در مدار شکل زیر $v_c(t)$ را در تمام لحظات بدست آورید.





روش حل اول:

① $t<0 \rightarrow v_s(t)=0 \Rightarrow$ چون منبع تحریکی قبل از $t=0$ نیست $\Rightarrow v_c(0^-)=0$

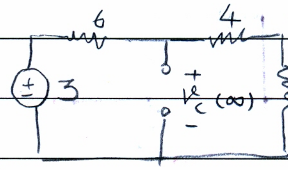
چون انرژی از منبع تحریک ضربه نیست $\Rightarrow$ شرط پیوستگی ولتاژ خازن برقرار است $\Rightarrow v_c(0^-)=v_c(0^+)=v_c(0)=0$

② $0<t<1 \rightarrow v_s(t)=3\,\text{volt} \Rightarrow$ مدار RC مرتبه اول با حضور منبع DC داریم

فرم کلی پاسخ $v_c(t) = (v_c(0)-v_c(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} + v_c(\infty)$

$v_c(0)=0 \qquad \boxed{v_c(\infty) = \frac{(4+8)}{(4+8)+6}\times 3 = 2\,\text{volt}}$

از قانون تقسیم ولتاژ

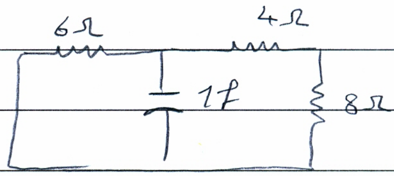


$\tau = R_{th}\cdot C \xrightarrow{R_{th}=(4+8)\parallel 6=4\Omega \text{ (از دید خازن)}} \tau = 4\times 1 = 4\,s$

Subject:________________ Date:________________

✓ $0 \leq t < 1 \Rightarrow v_c(t) = (0-2)e^{-\frac{1}{4}(t)} + 2$

** $v_c(t) = (1-e^{-\frac{1}{4}t}) \times 2$



(3) $t \geq 1 \longrightarrow v_s(t) = 1$

مدار RC بدون منبع تحریک داریم ← پاسخ طبیعی یا همان

فرم کلی پاسخ طبیعی یا همان جواب مدار RC مرتبه 1 : $v_c(t) = v_c(t_0 = 1)\, e^{-\frac{(t-1)}{\tau}}$

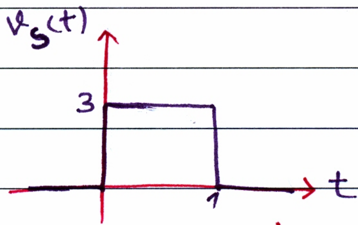
** در حوالی $t = 1^- \Rightarrow v_c(1^-) = (1 - e^{-\frac{1}{4}\times 1}) \times 2 = \boxed{0.46}$

چون تابع ضربه نداریم : $v_c(1^-) = v_c(1^+) = v_c = \boxed{0.46}$

$\tau = R_{th} \times C = (4+8) \parallel 6 \times 1F = 4s$

$\Longrightarrow v_c(t) = 0.46\, e^{-\frac{(t-1)}{4}}$ ✓ $t \geq 1$

جواب نهایی : $\begin{cases} 0 & t < 0 \\ (1-e^{-\frac{t}{4}}) \times 2 & 0 \leq t < 1 \\ 0.46\, e^{-\frac{(t-1)}{4}} & t \geq 1 \end{cases}$



روش حل دوم :

$v_s(t) = 3u(t) - 3u(t-1)$

$v_s(t) = 3(u(t) - u(t-1))$

ورودی	خروجی
$u(t)$	$v_c(t)$
$u(t-1)$	$v_c(t-1)$
$u(t) - u(t-1)$	$v_c(t) - v_c(t-1)$
$3(u(t) - u(t-1))$	$3(v_c(t) - v_c(t-1))$

ابتدا پاسخ مدار را به ورودی $u(t)$ بدست می‌آوریم :

فرم کلی پاسخ مدار RC مرتبه اول به منبع DC

$$v_c(t) = \left(v_c(0) - v(\infty)\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + v(\infty)$$

1) $0 > t \Rightarrow u(t) = 0 \longrightarrow$ یعنی منبع تحریک نداریم $\longrightarrow v_c(0^-) = 0$

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = v_c(0) = 0$$

2) $$v_c(\infty) = \frac{(4\Omega + 8\Omega)}{(4\Omega + 8\Omega) + 6\Omega} \times 1 = \frac{2}{3}$$

3) $$\tau = R_{th} \cdot C = \left[(4\Omega + 8\Omega) \parallel 6\Omega\right] \times 1f = 4s$$

$$t \geq 0 \Rightarrow v_c(t) = \left(0 - \frac{2}{3}\right) e^{-\frac{t}{4}} + \frac{2}{3} \longrightarrow v_c(t) = \left[2\left(1 - e^{-t/4}\right)\right] u(t)$$

پاسخ نهایی : $v_c(t) = 3\left[\frac{2}{3}\left(1 - e^{-t/4}\right) u(t) - \frac{2}{3}\left(1 - e^{-\frac{(t-1)}{4}}\right) u(t-1)\right]$

پاسخ ضربه : پاسخ حالت صفر مدارهای RC , RL مرتبه اول .

که منظور ما از حالت صفر این است که شرایط مدار در لحظه $t = 0^-$ مساوی صفر است

یعنی : $i_L(0^-) = 0$ $\quad$ $v_c(0^-) = 0$

اما از آنجایی که تابع تحریک مدار ضربه می‌باشد پس شرط پیوستگی ولتاژ خازن و جریان سلف برقرار نمی‌باشد :

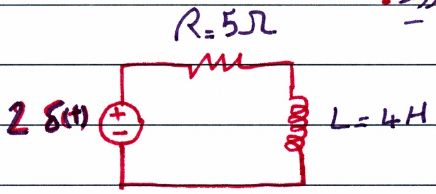
$$v_c(0^+) \neq v_c(0^-) \qquad i_L(0^+) \neq i_L(0^-)$$

برای محاسبه‌ی پاسخ ضربه باید مقادیر ولتاژ اولیه خازن یا جریان اولیه سلف را در لحظه $t = 0^+$ بدست آوریم

برای محاسبه‌ی پاسخ ضربه‌ی مدار دو روش وجود دارد 1/ . روش مستقیم 2/ . روش استفاده از پاسخ پله

Subject:________________ Date:________________

Example : در مدار شکل زیر i_L را تحلیل کرده و پاسخ حالت صفر را بدست آورید.



$i_L(0^-)=0$

$$KVL:\quad -2\delta(t)+5\times i_L(t)+4\frac{di_L(t)}{dt}=0 \xrightarrow[\text{مشتق}]{\div\ \text{ضریب بزرگترین مرتبه}}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{5}{4}i_L(t)=\frac{1}{2}\delta(t) \quad \star$$

این معادله پاسخ خصوصی ندارد و فقط شامل پاسخ همگن می باشد

$$\forall t\geq 0 \Rightarrow \delta(t)=0 \Rightarrow \frac{di_L(t)}{dt}+\frac{5}{4}i_L(t)=0$$

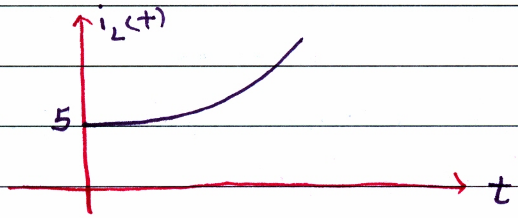
$$S+\frac{5}{4}=0 \rightarrow S=-\frac{5}{4}$$

فرم کلی پاسخ : $i_L(t)=Ae^{-\frac{5}{4}t} \quad \forall t>0$

A از روی شرایط اولیه (یعنی $i_L(0^+)$) محاسبه می شود.

$\star$ از طرفین معادله دیفرانسیل در بازه 0^- تا 0^+ انتگرال می گیریم:

$$\int_{0^-}^{0^+}\frac{di_L(t)}{dt}dt+\frac{5}{4}\int_{0^-}^{0^+}i_L(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt$$



$i_L(0^-)\neq i_L(0^+)$

نکته: انتگرال هر تابعی (سطح زیر منحنی هر تابعی) در بازه $t=0^-$, $t=0^+$ همیشه مساوی صفر است غیر از تابع ضربه و مشتقات آن.

می دانیم:

$$\begin{cases}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt=1\\ f(t)\,\delta(t)=f(0)\,\delta(t)\end{cases}$$

$$\left(i_L(0^+) - i_L(0^-)\right) + \cancel{\tfrac{5}{4}\times 0} = \frac{1}{2}$$

$$i_L(0^+) = \frac{1}{2} + i_L(0^-) \xrightarrow{i_L(0^-)=0} i_L(0^+) = 1/2$$

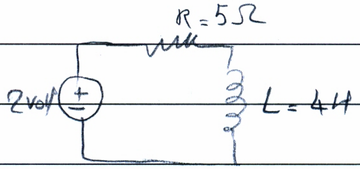
در فرم کلی پاسخ $\quad t=0 \longrightarrow i_L(0) = A\times e^0 \Rightarrow A = 1/2 \longrightarrow i_L(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{4}t} \quad \forall t>0$

$$\hookrightarrow i_L(t) = \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{5}{4}t}\right)u(t)$$

حل به روش استفاده از پاسخ پله

ابتدا به جای منبع تحریک ضربه ، منبع تحریک را از نوع پله در نظر می‌گیریم و پاسخ پله را بدست می‌آوریم ، در صورتی که مدارها از نوع LTI باشند می‌توانیم بگوییم پاسخ ضربه برابر است با مشتق پاسخ پله :

مدار LTI	ورودی		خروجی
	$u(t)$	$\longrightarrow$	پاسخ پله
	$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$	$\longrightarrow$	مشتق پاسخ پله



$t<0$ حالت صفر $\Rightarrow i_L(0^-) = 0$

چون منبع تحریک ضربه نداریم ، شرط پیوستگی جریان سلف برقرار است $\Rightarrow i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 0$

$t \geq 0 \longrightarrow u(t) = 1 \Rightarrow 2u(t) = 2 \Rightarrow$ مدار RL با منبع تحریک DC داریم:

فرم کلی پاسخ کامل مدار RL در حضور منابع DC

$$i_L(t) = \left(i_L(0) - i_L(\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty)$$

$i_L(0) = 0$ (در بالا بدست آوردیم)

$i_L(\infty) \xrightarrow[\text{در حضور منابع DC اتصال کوتاه می‌شود}]{\text{سلف پس از } \infty \text{ زمان}} i_L(\infty) = 2/5$

$\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{4}{5}$

$\forall t \geq 0 \quad i_L(t) = (0 - \frac{2}{5}) e^{-5/4 t} + \frac{2}{5} = (1 - e^{-5/4 t}) \times 2/5$

$i_L(t) = \left[\frac{2}{5} (1 - e^{-5/4 t}) \right] u(t)$

پاسخ پله

پاسخ ضربه = مشتق پاسخ پله = $\frac{d}{dt}(i_L(t))$

$= \left((-\frac{2}{5})(-\frac{5}{4}) e^{-\frac{5}{4}(t)} \right) u(t) + \underbrace{\delta(t) \left[\frac{2}{5} \left[1 - e^{-5/4 t} \right] \right]}$

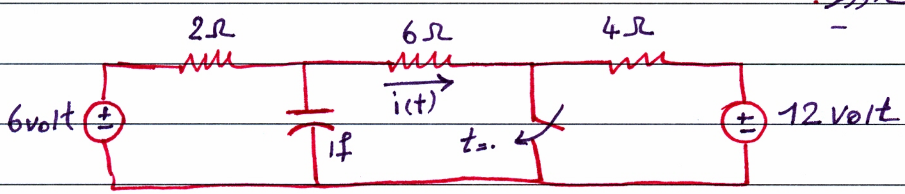
می‌دانیم $\delta(t) \cdot f(0) = \delta(t) f(t)$

$= (\frac{1}{2} e^{-5/4 t}) u(t) +$

$f(0) = 0$ در اینجا $\Rightarrow \delta(t) \times f(0) = 0$

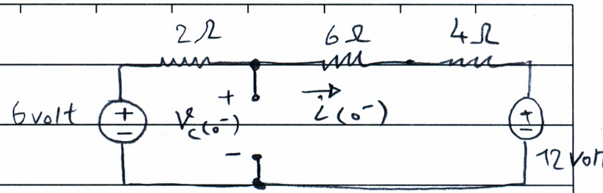
$i_L(t) = (\frac{1}{2} e^{-5/4 t}) u(t) + 0$

Example: در مدار شکل زیر کلید برای مدت‌های طولانی قبل از $t=0$ باز بوده و در لحظه $t=0$ بسته می‌شود. $i(t)$ را در تمامی لحظات بدست آورید.



① $t < 0 \longrightarrow$ کلید باز: خازن پس

از دید ولتاژی در حضور منابع DC مدار باز می‌شود



$$KVL: \; -6 + (2\Omega + 6\Omega + 4\Omega)\, i(0^-) + 12 = 0$$

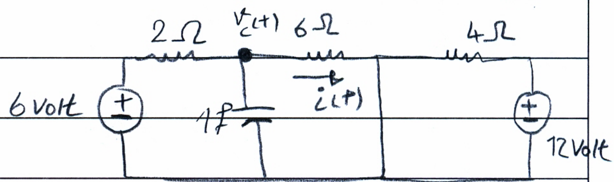
$$\longrightarrow i(0^-) = -1/2$$

$v_c(0^-) = ?$ $\qquad 6 - v_c(0^-) = 2 \times \underset{-1/2}{i(0^-)} \Rightarrow v_c(0^-) = 7\,\text{volt}$

چون انرژی از منابع ضربه وجود ندارد شرط پیوستگی ولتاژ خازن برقرار است:

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = v_c(0) = 7\,\text{volt}$$

$$i(0^+) = i(0^-) = i(0) = -1/2\,A$$



② $t \geq 0 \longrightarrow$ کلید بسته می‌شود

$\longrightarrow$ مدار RC مرتبه اول در حضور منابع DC

می‌دانیم: $\quad i(t) = \dfrac{v_c(t) - 0}{6} = 1/6\, v_c(t)$

1 حل به روش نوشتن معادله دیفرانسیل

$$KCL\,(v_c(t)): \; \frac{v_c(t) - 6}{2} + \frac{v_c(t) - 0}{6} + 1\frac{dv_c(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{2}{3} v_c(t) = 3$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول غیرهمگن

$$v_c(t) = \text{پاسخ همگن} + \text{پاسخ خصوصی}$$

پاسخ طبیعی $\Rightarrow \dfrac{dv_c(t)}{dt} + \dfrac{2}{3} v_c(t) = 0$

$s + 2/3 = 0 \longrightarrow s = -2/3 \longrightarrow$ پاسخ طبیعی $\Rightarrow v_c(t) = A_1 e^{-2/3\, t}$

پاسخ خصوصی : $v_p = A_2$

جایگذاری $v_p = A_2$ در معادله دیفرانسیل اصلی:

$$0 + \frac{2}{3} A_2 = 3 \rightarrow A_2 = \frac{9}{2}$$

پاسخ کامل : $v_c(t) = A_1 e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{9}{2} \qquad \forall t \geq 0$

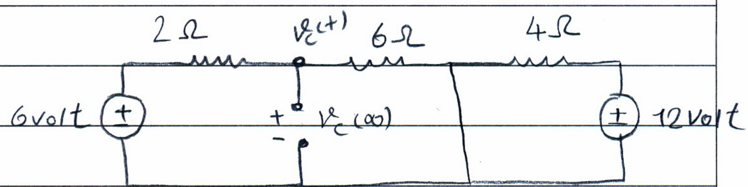
$$t = 0 \Rightarrow \underbrace{v_c(0^+)}_{7} = A_1 \overbrace{\cancel{e^0}}^{1} + \frac{9}{2} \longrightarrow A_1 = 7 - \frac{9}{2} = 5/2$$

$$v_c(t) = \left(\frac{5}{2} e^{-2/3\, t} + \frac{9}{2}\right) u(t) \qquad i_t = \frac{1}{6} \times v_c(t)$$

2 حل با استفاده از فرمول کلی مدارهای RC مرتبه اول در حضور منابع DC:

$$\forall t \geq 0 \qquad v_c(t) = \left(v_c(0) - v_c(\infty)\right) e^{-t/\tau} + v_c(\infty)$$

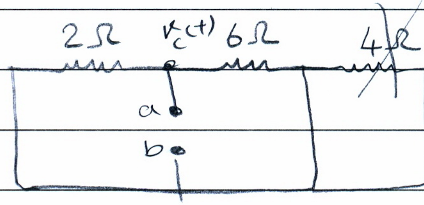
$v_c(0) = 7$ volt



خازن مدار باز می‌شود

$$\hookrightarrow v_c(\infty) = \frac{6\Omega}{6\Omega + 2\Omega} \times 6 = \frac{9}{2}$$

با قانون تقسیم ولتاژ



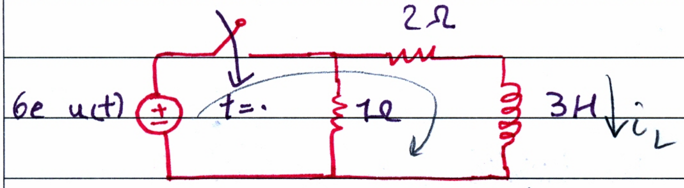
$$\tau = R_{th} \cdot C$$

از دید خازن

$$R_{th} = 2\Omega \parallel 6\Omega \rightarrow \tau = (2\Omega \parallel 6\Omega) \times 1f = \frac{3}{2}$$

$$v_c(t) = \left(7 - \tfrac{9}{2}\right) \times e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{9}{2} \Rightarrow v_c(t) = \left(\frac{5}{2} \times e^{-2/3\,t} + \frac{9}{2}\right) u(t)$$

Example:



① $t<0 \rightarrow$ کلید باز $\rightarrow i_L(0^-) = 0$

به علت عدم وجود تابع ضربه شرط پیوستگی صدق می‌کند $\quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = i_L(0) = 0$

② $t \geq 0 \Rightarrow u(t) = 1$ و کلید بسته می‌شود $\quad KVL: -6e^{-2t} + 2i_L(t) + 3\dfrac{di_L(t)}{dt} = 0$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{2}{3} i_L(t) = 2e^{-2t}$$ معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن

پاسخ کامل $i_L(t) =$ پاسخ طبیعی $+$ پاسخ خصوصی

پاسخ طبیعی $\rightarrow S + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow S = -2/3$

فرم کل پاسخ طبیعی $i_L(t) = A_1 e^{-2/3\,t}$

فرم کلی پاسخ خصوصی $i_p(t) = A_2 e^{-2t}$

جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل اصلی: $-2A_2 \cancel{e^{-2t}} + \frac{2}{3} A_2 \cancel{e^{-2t}} = 2\cancel{e^{-2t}}$

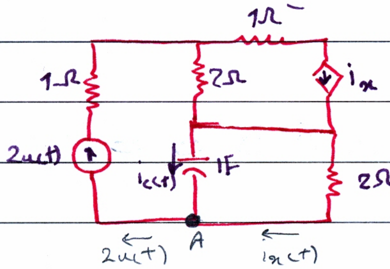
$$-2A_2 + \frac{2}{3}A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = -\frac{3}{2}$$

$\forall t \geq 0$ پاسخ کامل $\quad i_L(t) = A_1 e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{3}{2} e^{-2t}$

$$t = 0 \rightarrow \underbrace{i_L(0)}_{} = A_1 \cancel{e^0}^{\,1} - \frac{3}{2} \cancel{e^0}^{\,1} \Rightarrow A_1 = \frac{3}{2}$$

$$i_L(t) = \left(\frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{3}{2} e^{-2t}\right) u(t)$$

Example: مدار شکل زیر را تحلیل کرده و ولتاژ خازن را در تمام لحظات بدست آورید.



$t < 0 \rightarrow u(t) = 0 \Rightarrow$ منبع جریان مستقل $= 0$

از آنجایی که با صفر شدن منابع جریان مستقل، هیچ منبع تولید دیگری در مدار وجود ندارد پس $v_C(0^-) = 0$

از آن جایی که انرژی ضربه در مدار دیده نمی‌شود پس: $\quad v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_C(0) = 0$

$t \geq 0 \rightarrow u(t) = 1$

① استفاده از روش مستقیم نوشتن معادله دیفرانسیل و حل آن:

برابر با ولتاژ دو سر مقاومت 2Ω

$v_C(t) = 2 i_x \quad (I)$

$$KCL(A): i_C(t) + i_x = 2u(t) \rightarrow i_x = 2u(t) - i_C(t) \quad (II)$$

جایگذاری معادله (II) در (I):

$$v_C(t) = 4u(t) - 2\, i_C(t) \quad \left(i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}\right)$$

درجات ناپیوستگی

مشتقات ضربه

ضربه

پله

پیوستگی

$$2\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 4u(t)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{2} = 2u(t)$$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیر همگن