

چون در این دل برق مهر دوست جست اندر آن دل دوستی می دان که هست
هیچ عاشق خود نباشد وصل جو که نه معشوقش بود جویای او
در دل تو مهر حق چون گشته نو هست حق را بی گمان مهری به تو

مولانا

آزمون تئوری دوم

پنج شنبه ، ۱۶ آذر - زمان : ۳ ساعت

پرسش نخست :

الف) ثابت کنید : (۱۰ امتیاز)

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

ب) آیا می توان اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ را طوری دور دایره قرار داد ، به طوری که هیچ دو عدد مجاوری بر ۳ یا ۵ یا ۷ بخش پذیر نباشند ؟ (اگر می توان یک مثال ارائه کنید در غیر این صورت ثابت کنید این کار ممکن نیست) (۱۰ امتیاز)

ج) ثابت کنید در هر درخت حداقل Δ تا راس درجه ۱ دارد . (۱۰ امتیاز)

پرسش دوم : توپ های رنگی

جعبه ای حاوی توپ های قرمز و سبز و آبی و سفید ، روی هم ۱۱۱ تا است . می دانیم درمیان هر ۱۰۰ تا از آنها همواره توپ هایی از هر ۴ رنگ موجود اند . کوچکترین عدد N را بیابید که در میان هر N تایی از توپ های جعبه همواره توپ هایی از دست کم سه رنگ گوناگون وجود داشته باشد . (۳۰ امتیاز)

پرسش سوم : جدول خفن

به ازای هر $n \geq 2$ ، کوچکترین عدد k را بیابید که ، هر مجموعه ی حداقل k عضوی از خانه های جدول $n \times n$ ، یک زیر مجموعه ی ناتهی S وجود داشته باشد به طوری که در هر سطر و ستون جدول ، تعداد زوجی خانه متعلق به S وجود داشته باشد . (۴۰ امتیاز)

موفق و سربلند باشید