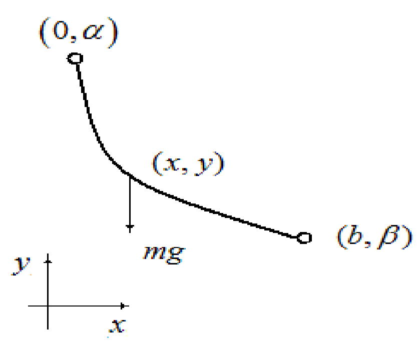
مقدمه

در این بخش به اصول و مقدمات حساب جامع تغییرات می‌پردازیم و سپس نتایج و کاربرد آن در کنترل بهینه بیان می کنیم. باید دقت شود که قضایا و اصول مورد اشاره در بخش قبلی برای منظور و نظر ما در کنترل بهینه شاید لازم بوده باشد ولی کافی نیست چون متغیرهای تصمیم‌گیری برای بهگزینی تماماً متغیر مستقل بوده‌اند مثل $\underline{x}_{ss}$ و $\underline{u}_{ss}$ در حالی‌که در بهگزینی دینامیکی و کنترل بهینه آنها خود تابعی از زمان هستند یعنی با $\underline{x}(t)$ و $\underline{u}(t)$ روبرو هستیم. به عبارت روشن‌تر در کنترل بهینه بدنبال یک سیاست اعمال $\underline{u}(t)$ هستیم تا یک شاخص عملکرد را مینیمم کند. مسأله بهگزینی ما مقید به قیود فیزیکی یا همان مدل دینامیکی فرایند (فضای حالت) نیز می‌باشد؛ لذا هم در فرم متغیرها (که خود تابع زمان هستند) و هم در فرم قیود (که به شکل معادله دیفرانسیل هستند نه جبری) با مسائل بهگزینی جبری تفاوت اصولی دارند . قبل از پرداختن به اصول حساب جامع تغییرات (آنالیز فانکشنال‌ها یا تابع تابع‌ها) یک بحث تاریخی را پیش می‌کشیم تا ببینیم که اویلر با حل یک مسأله خاص بهگزینی دینامیکی چگونه علم بشری را لااقل در زمینه ریاضی و مهندسی (کنترل) شکوفا نمود. لازم به ذکرست که خدمتی که اویلر به جامعه علمی کرد محدود به دو زمینه فوق‌الذکر نیست بلکه مثلاً انیشتن از نتایج او برای تعمیم مسأله نسبیت خاص (به نسبیت عام) نیز استفاده کرده است.

مسأله برنولی (مینیمم زمان)

یکی از برادران برنولی در سال ۱۶۹۶ میلادی مسأله زیر را عنوان یا طرح نمود و ریاضی دانان (نه ریاضی خوانان) را به چالش طلبید:



شکل ۱

فرض کنید بین دو نقطه یک منحنی به شکل زیر قرار دارد مختصات دو نقطه به ترتیب بالایی $(0,\alpha)$ و (b,β) پایینی است. حال اگر یک ذره به جرم m از نقطه بالایی تحت شتاب جاذبه روی منحنی به صورت بدون اصطکاک حرکت

(سقوط) کند ساختار یا فرم منحنی مزبور باید چه باشد تا این مسیر را در کمترین زمان طی کند؟ آیا قسمتی از تابع سینوسی است یا قسمتی از یک چند جمله ای درجه ۲ یا . . . ؟ !

نکته: این مسأله به زبان یونانی معروف است به Brachistochrone یعنی کمترین زمان.

نکته: به روح سؤال توجه کنید دنبال یک متغیر مثل y می‌گردیم که خود تابع متغیر دیگری مثل x است یعنی جواب بهگزینی ما خود یک تابع است! بعبارتی به آنالیز فانکشنال‌ها وارد خواهیم شد.

فرمولاسیون مسأله

یک زمان دیفرانسیلی در نظر بگیرید مثل dt رابطه مدت زمان با سرعت و مسافت را بنویسید:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{v(x,y)} \tag{1}$$

$$v(x,y) = \sqrt{v_o^2 + 2g(\alpha - y)} \tag{2}$$

اگر dt ها را جمع کنیم آنگاه تابع هدف ما به شکل انتگرال زیر در می‌آید (و کمی بازآرایی):

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v} = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2a(\alpha - y)}} .dx = T\left(y(x)\right) \tag{3}$$

دقت کنید که T (تابع هدف) یک فانکشنال از y است یعنی نمی‌گوییم یک تابع (فانکشن) از y است چون y خود تابع x است. اگر مسأله را به زبان ریاضی بازگویی کنیم:

مطلوبست قیافه $y(x)$ یعنی تابعیت y با x بطوریکه تابع هدف T مینیمم شود[1].

شاید مسأله مذکور قدیمی‌ترین و یا اولین مسأله‌ای باشد که حساب جامع آن موقع (آنالیز نیوتن یا لایب نیتز) دقت یا توانایی کافی برای حل آن را نداشت. علت این است که مسأله بهگزینی کلاسیک معمولاً به دنبال نقاطی می‌باشد که یک تابع (فانکشن) هدف را مینیمم (یا ماکزیمم) کند که این را در بخش قبل دیدیم (بهگزینی استاتیکی یا کلاسیک). ولی در مسأله برنولی بجای نقاط، دنبال توابعی می‌گردیم تا یک فانکشنال هدف را مینیمم یا ماکزیمم کند. لذا همان موقع نیز معلوم بود که باید یک آنالیز پیشرفته‌تر موازی با آنالیز کلاسیک توسعه داده شود تا از پس حل این تیپ مسایل برآیند. مسایل ریاضی و فیزیکی مشابهی شبیه مسأله فوق الذکر وجود دارد (نظیر مینیمم فاصله، مینیمم سطح، مینیمم زمان گذر نور یا

---

[1] – جواب مسأله سیکلوئید– Cycloid است.

مسأله اپتیک فرما و . . .)که می‌بایست از یک پشتوانه ریاضی قویتر از آنالیز کلاسیک برای حل آنها برخوردار باشند. این آنالیز پیشرفته‌تر توسط پیشگامانی مثل رویلر و لاگرانژ بنا نهاده شد و معرفی به حساب جامع تغییرات[1] شد.

حل مسأله برنولی توسط رویلر

پنجاه سال بعد از ارائه مسأله مینیمم زمان رویلر آنرا حل کرد ولی چه حل کردنی؟!. ایشان ابتدا مسأله کلی زیر را حل کرد و از نتایج آن مسأله برنولی را حساب کرد.

فرض کنید تمام توابع در کلاس $C^2[a,b]$ (یعنی در فاصله a تا b تا مشتق مرتبه دوم پیوشته باشند) که در شرایط مرزی مسأله صدق می کنند را با y نمایش دهیم. شرط لازم برای اینکه تابعی مثل y^* بیابیم که فانکشنال $J(y)$ را مینیمم کند چیست؟

دقت کنید تمام ابزار یا دانش روز اویلر فقط آنالیز کلاسیک بود یعنی کار با توابع چند متغیره، همین!. اویلر ابتدا فاصله a تا b را به $n+1$ نقطه یا فاصله تقسیم کرد:

$$a = x_\circ \prec x_1 \prec .... \prec x_{n+1} = b \tag{۴}$$

سپس مشتق y را به شکل تفاضل محدود[2] زیر تقریب زد:

$$y'(x_i) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{۵}$$

همچنین انتگرال را به شکل مستطیلی زیر تقریب زد:

$$\int_a^b g(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{n} g(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{۶}$$

برای سهولت (بدون لطمه به کلیت مسأله) فواصل را مساوی در نظر می گیریم:

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n+1} \tag{۷}$$

بدین ترتیب فانکشنال $J(y)$ را می‌توان به صورت زیر تقریب زد:

$$J = J(y) \triangleq \int_a^b f\left(x, y(x), y'(x)\right)dx \cong \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)h \tag{۸}$$

عبارت بالا (عبارت سمت راست) یک تابع n متغیره است یعنی:

$$J(y) \cong I(y_1, y_2, ..., y_n) \tag{۹}$$

[1]- Calculus of Variations
[2] - Finite Difference

بنابراین فقط n تا مجهول یا متغیر تصمیم گیری برای بهگزینی داریم (نمی گوییم $n+2$ چون $y_\circ$ همان α و y_{n+1} همان β است بعبارتی شرایط مرزی از قبل معلوم است).

در اینجا اتفاق بزرگی می‌افتد؛ کافی است مسأله بهگزینی n متغیره بالا را حل کنیم، البته بطور کلاسیک. شرط لازم آن این است که مشتقات جزئی تابع هدف (یعنی I) را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\left.\frac{\partial I}{\partial y_k}\right|_{y_k^*}=0 \quad , \quad k=1,2,\dots,n \tag{۱۰}$$

برای محاسبه $\frac{\partial I}{\partial y_k}$ برای هر k فیکس دقت کنید که فقط دو جمله از I دارای y_k هستند:

$$I\left(y_1,y_2,\dots,y_n\right)=\dots+f\left(x_{k-1},y_{k-1},\frac{y_k-y_{k-1}}{h}\right)h+f\left(x_k,y_k,\frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)h+\dots \tag{۱۱}$$

و

$$f_1\triangleq f\left(x_{k-1},y_{k-1},\frac{y_k-y_{k-1}}{h}\right) \tag{۱۲}$$

$$f_2\triangleq f\left(x_k,y_k,\frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right) \tag{۱۳}$$

لذا بر اثر مشتق گرفتن (و استفاده از قاعده زنجیره‌ای) شرط لازم (عبارت $\frac{\partial I}{\partial y_k}$) بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial y_k}=&\frac{\partial x_{k-1}}{\partial y_k}\frac{\partial f_1}{\partial x_{k-1}}+\frac{\partial y_{k-1}}{\partial y_k}\frac{\partial f_1}{\partial y_{k-1}}+\frac{\partial\left(\frac{y_k-y_{k-1}}{h}\right)}{\partial y_k}\frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{y_k-y_{k-1}}{h}\right)}\\&+\frac{\partial x_k}{\partial y_k}\frac{\partial f_2}{\partial x_k}+\frac{\partial y_k}{\partial y_k}\frac{\partial f_2}{\partial y_k}+\frac{\partial\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)}{\partial y_k}\frac{\partial f_2}{\partial\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)}=0\end{aligned} \tag{۱۴}$$

وبا استفاده از تعاریف زیر:

$$f^*\triangleq\frac{\partial f_1}{\partial(\frac{y_k-y_{k-1}}{h})}=\frac{\partial f_1}{\partial y_k{}'} \tag{۱۵}$$

$$f^{**}\triangleq\frac{\partial f_2}{\partial y_k} \tag{۱۶}$$

$$f^{***}\triangleq\frac{\partial f_2}{\partial(\frac{y_{k+1}-y_k}{h})}=\frac{\partial f_2}{\partial(y_k{}')} \tag{۱۷}$$

و با جایگزینی و تغییر آرایش آن:

$$\frac{\partial I}{\partial y_k}=f^{**}-\frac{1}{h}(f^{***}-f^*)=0 \tag{۱۸}$$

اویلر وقتی خوب دقت کرد (یعنی h را به سمت صفر میل داد) فهمید که معادلات بالا انگار تقریب تفاضلی (جبری) معادله دیفرنسیال زیر هستند:

$$f_y\left(x,y,y'\right)-\frac{d}{dx}f_{y'}\left(x,y,y'\right)=0$$ معادله اویلر یا اویلر - لاگرانژ (۱۹)

به طوری که f انتگرال تابع هدف، f_y یعنی $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $f_{y'}$ یعنی $\frac{\partial f}{\partial y'}$.

فایده ۱: تاریخ علم بشری مشحون از این نوع رویدادهاست یعنی یک نفر یک مسأله خاص را حل می‌کند سپس بقیه آن را پر و بال می‌دهند تا بتوانند مسائل مشابه را حل کنند. درست شبیه خاصیت گندم که از هر بذر خوشه‌ها پرورده می‌شود.

فایده ۲: اصطلاح Universal Applicability در برابر Mathematical Solvability کاملاً در این مورد صدق می‌کند. شاید نمونه مجسم فلسفه تعمیم[1] باشد.

فایده ۳: در فاصله این پنجاه سال (زمان ارائه مسأله برنولی تا حل زیبای اویلر) مسایل مشابه آن نیز مطرح شد که در ذیل این بحث به مواردی که به کار ما می آید (کنترل بهینه) می‌پردازیم:

۱ . مسأله مینیمم زمان (مثلاً کاهش زمان سیکل فرایند Batch):

$$J=\int_{t_\circ}^{t_f}dt=\left(t_f-t_\circ\right) \tag{۲۰}$$

در اینجا زمانی که طول می‌کشد که سیستم را از حالت اولیه به حالت نهایی برسانیم مینیمم می‌کنیم.

۲ . مسأله کنترل نهایی (مثل حرکت بازوی روبات برای جابجا کردن یک بار):

$$J=\left(\underline{x}\left(t_f\right)-\underline{x}_{sp}\left(t_f\right)\right)^T H\left(\underline{x}\left(t_f\right)-\underline{x}_{sp}\left(t_f\right)\right) \tag{۲۱}$$

به طوری که $\underline{x}_{sp}\left(t_f\right)$ حالت نهایی مطلوب (مقرر) می‌باشد. این همان مسأله معروف حداقل‌سازی خطای نهایی می‌باشد (مینیمم آفست). ماتریس H نیز ماتریس ضرایب یا اوزان است. اگر H مثبت باشد (یعنی مثبت معین) آنگاه J نیز مثبت است. معمولاً H را قطری انتخاب می‌کنند. در حالت یک بعدی مسأله به شکل زیر تقلیل پیدا می‌کند:

$$J=h\left(x\left(t_f\right)-x_{sp}\left(t_f\right)\right)^2 \tag{۲۲}$$

۳ . مسأله حداقل تلاش کنترلی (حداقل حرکت ساقه شیر کنترل):

$$J=\int_{t_\circ}^{t_f}\left(\underline{u}^T R\underline{u}\right)dt \tag{۲۲}$$

R ماتریس اوزان می‌باشد و معمولاً قطری انتخاب می‌شود.

۴ . مسأله تعقیب (مثل تغقیب یک هدف متحرک توسط موشک)

[1] - Generalization

$$J=\int_{t_\circ}^{t_f}\left[\left(\underline{x}(t)-\underline{x}_{sp}(t)\right)^T Q\left(\underline{x}(t)-\underline{x}_{sp}(t)\right)\right]dt \qquad (۲۳)$$

اگر اندازه عمل کنترلی محدود نباشد (مثلاً بگوییم شیر کنترل هیچ وقت اشباع نمی‌شود) شاخص عملکرد بالا معقول است ولی در عمل اینطور نیست و محدودیت روی اعمال کنترل داریم لذا J را به شکل زیر بهبود می‌دهیم:

$$J=\int_{t_\circ}^{t_f}\left[\underline{x}(t)-\underline{x}_{sp}(t)\right]^T Q\left(\underline{x}(t)-\underline{x}_{sp}(t)\right)dt+\int_{t_\circ}^{t_f}\left(\underline{u}^T(t)R\underline{u}(t)\right)dt \qquad (۲۴)$$

در برخی مسایل بخاطر طبیعت فرایند (مدل فضای حالت) معلوم نیست که آیا $\underline{x}(t)$ (نهایتاً به $\underline{x}_{sp}(t)$ می‌رسد یا خیر لذا شاخص J را به شکل زیر بهبود می‌دهند (یک ترم دیگر برای هر چه نزدیکتر شدن $\underline{x}(t_f)$ به $\underline{x}_{sp}(t_f)$ اضافه می‌کنند).

$$J=\left(\underline{x}(t_f)-\underline{x}_{sp}(t_f)\right)^T H\left(\underline{x}(t_f)-\underline{x}_{sp}(t_f)\right)+\int_{t_\circ}^{t_f}\left(\underline{x}(t)-\underline{x}_{sp}(t)\right)^T Q\left(\underline{x}(t)-\underline{x}_{sp}(t)\right)dt+\int_{t_\circ}^{t_f}\underline{u}^T(t)R\,\underline{u}(t)\,dt \qquad (۲۵)$$

محض یادآوری: جواب مسأله بهگزینی $\underline{u}^{opt.}(t)$ است نه $\underline{u}_{ss}$ یعنی دنبال یک تابعیت زمانی $\underline{u}$ یا سیاست اعمال $\underline{u}$ هستیم تا J مینیمم شود.

۵. مسأله رگولاتور (مهم‌ترین و رایج‌ترین کنترل مدرن یک فرایند):

یک حالت از مسأله تعقیب مسأله رگولاسیون است یعنی مقدار مقرر، مقدار ثابتی باشد. یعنی $\underline{x}_{sp}(t)=C'$ باشد یعنی سیاست اعمال $\underline{u}$ بر اساس حفظ سیستم در یک نقطه خاص عملکرد باشد:

$$J=\left(\underline{x}(t_f)-\underline{c}'\right)^T H\left(\underline{x}(t_f)-\underline{c}'\right)+\int_{t_\circ}^{t_f}\left(\underline{x}(t)-\underline{c}'\right)^T Q\left(\underline{x}(t)-\underline{c}'\right)dt+\int_{t_\circ}^{t_f}\underline{u}^T(t)R\underline{u}(t)\,dt \qquad (۲۶)$$

در ادامه به مقدمات ریاضی و تعاریف تئوری حساب جامع تغییرات می‌پردازیم. این همان پروبال دادن به تکنیک اویلر (با استفاده از تفاضل محدود و حساب جامع کلاسیک) می‌باشد و به تعبیر دیگر می‌خواهیم بطور آکادمیک و استاندارد شرط اویلر (یا اویلر- لاگرانژ) را در متن و بطن نظریه جدید آنالیز (حساب جامع تغییرات) اثبات کنیم.

تعاریف و مقدمات ریاضی حساب جامع تغییرات

قبل از شروع بحث، لازمست مسیر راه و انتخاب موضع و مطلب روشن گردد. به‌طور کلی چهار مسیر سیستمیک و سیستماتیک برای فرمولاسیون کنترل بهینه قابل تصور است. یک مسیر، رویکرو اویلری می‌باشد که در مقام ثبوت بوده و بیشتر به‌شکل شگرد می‌ماند تا تبیین یک چارچوب برای تحلیل مسائل بهگزینی دینامیکی. مسیر دیگر در ساختار و اصول موضوعه فضای برداری و هندسه دیفرنسیالی می گنجد. بهره گیری تفصیلی از قضیه گرین، مشخصه اصلی این مسیر اثباتی می‌باشد. مسیر سوم، توسط آنالیز کلاسیک پشتیبانی شده و تحت نام تئوری اغتشاش (Perturbation theory) فرموله می‌شود. مسیر آخر که مطمح این جزوه می‌باشد، استفاده از حساب جامع تغییرات یا فانکشنال‌هاست که اولاً در مقام اثبات بوده و ثانیاً توسط آنالیز مدرن پشتیبانی می‌شود.

تعریف یک فانکشنال

فانکشنال نمونه J یک قانون یا نگاشت است که هر تابع مثل $x(t)$ (با دامنه تعریف x) را به یک عدد حقیقی یگانه متناظر می‌سازد. با تعریف تابع کلاسیک مقایسه کنید: فانکشن نمونه x یک قانون یا نگاشت است که هر متغیر مثل t (با دامنه تعریف T) را به یک عدد حقیقی یگانه متناظر می‌سازد. مثلاً $x(t)=t^2$ قانونی است که هر t را از T انتخاب کنیم به عددی در x متناظر می کند. اسم قانون را مربع می گوییم چون کارش مربع کردن متغیر مستقل است تا متغیر تابع را بدهد. تابعیت J با $x(t)$ بصورت فانکشن (تابع) است ولی تابعیت آن با t بصورت فانکشنال (تابع تابع) است. فانکشنال ها با متغیرشان (یعنی $x(t)$)رابطه خطی با هم دارند:

$$\begin{cases} J\left(\alpha \underline{x}(t)\right)=\alpha J\left(\underline{x}(t)\right) & (۲۷) \\ J\left(\underline{x}^{I}(t)+\underline{x}^{II}(t)\right)=J\left(\underline{x}^{I}(t)\right)+J\left(\underline{x}^{II}(t)\right) & (۲۸) \end{cases}$$

تعریف تغییر[1] یک فانکشنال

برای خواص اکسترممی یک فانکشنال درست مثل نظریه کلاسیک (خواص اکسترممی یک فانکشن) نیازمند تعریف تغییر هستیم:

$$\Delta J=J\left(\underline{x}+\delta\underline{x}\right)-J\left(\underline{x}\right)=\Delta J\left(\underline{x},\delta\underline{x}\right) \qquad (۲۹)$$

---

[1] - Increment

دقت کنید $\delta \underline{x}$ خود تابع زمان است و موسوم به واریاسیون تابع $\underline{x}$ است .

تعریف اولین واریاسیون یک فانکشنال

اگر همان بحث سری تیلور را تعمیم دهیم درست مثل اولین واریاسیون یک فانکشن می‌توانیم اولین واریاسیون یک فانکشنال را تعریف کنیم:

اگر فانکشنال را بسط دهیم تغییر یک فانکشنال را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\Delta J(\underline{x},\delta\underline{x}) = \delta J(\underline{x},\delta\underline{x}) + g(\underline{x},\delta\underline{x})\|\delta\underline{x}\| \tag{۳۰}$$

حالا اگر ترم‌های بعدی یعنی $g(\underline{x},\delta\underline{x})$ را صفر فرض کنیم یعنی:

$$\lim_{\|\delta\underline{x}\|\to 0} g(\underline{x},\delta\underline{x}) = 0 \tag{۳۱}$$

آنگاه J روی $\underline{x}$ مشتق‌پذیر بوده و موسوم به اولین واریاسیون فانکشنال J روی تابع $\underline{X}(t)$ می‌باشد.

تعریف اکسترمم فانکشنال‌ها

یک فانکشنال مثل J با دامنه $\aleph$ (یعنی تابع $\underline{x}$ که متغیر فانکشنال J است دارای برد است) یک اکسترمم نسبی در $\underline{x}^*$ است اگر وجود داشته باشد یک ε مثبت برای همه توابع ممکن $\underline{x}$ (در $\aleph$) در همسایگی $\underline{x}^*$ (یعنی $\|\underline{x}-\underline{x}^*\| \prec \varepsilon$) به طوری که J ها هم‌علامت باشند بعبارت دیگر اگر مثبت باشد:

$$\Delta J = J(\underline{x}) - J(\underline{x}^*) \geq 0 \tag{۳۲}$$

آنگاه $J(\underline{x}^*)$ یک مینیمم نسبی در $\underline{x}^*$ است و اگر ΔJ منفی باشد:

$$\Delta J = J(\underline{x}) - J(\underline{x}^*) \leq 0 \tag{۳۳}$$

آنگاه $J(\underline{x}^*)$ یک ماکزیمم نسبی در $\underline{x}^*$ است.

تعریف اکسترمم مطلق مشابه بحث اکسترمم فانکشن ها موقعی است که بحث بالا برای همه $\aleph$ باشد نه الزاماً در یک همسایگی محدود.

تعریف حدی دقیق‌تر، نیازمند نوشتن روابط فانکشنالی و به تعبیر دیگر همان روابط کلاسیک است. بهر حال جهت اختصار و همچنین کاربردی بودن مسائل از ذکر آنها خودداری می‌کنیم و فقط به کلاس خاصی از فانکشنال‌ها می‌پردازیم که به کار ما می‌آید و آنهم فانکشنال‌های انتگرالی و باز هم محدودتر فانکشنال‌های انتگرالی تک متغیره یعنی تابعِ تابع t).

شرط لازم اکسترمم برای فانکشنال های انتگرالی تک متغیّره (شرط اویلر-لاگرانژ)

فرض کنید فانکشنال ذیل به فرم انتگرالی (تک متغیره یا تک انتگرال) زیر تعریف شده باشد:

$$J=\int_{t_\circ}^{t_f} F\left(\underline{x}(t),\underline{\dot{x}}(t)\right)dt \tag{۳۴}$$

بطوریکه $t_\circ$ و t_f معلوم هستند و F معروف به انتگران است. با استفاده از تعریف واریاسیون اول J می توان نشان داد که اولین واریاسیون یعنی δJ به شکل زیر است:

$$\delta J=\int_{t_\circ}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\delta\underline{x}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta\underline{x}\right)dt \tag{۳۵}$$

شرط لازم برای اکسترمم (با استفاده از تعریف حد)

$$\delta J=0\Rightarrow\int_{t_\circ}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\delta\underline{x}+\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}\delta\underline{\dot{x}}\right)dt=0 \tag{۳۶}$$

دقت شود واریاسیون های $\delta\underline{x}$ و $\delta\underline{\dot{x}}$ مستقل نیستند، چون هر تغییر در $\underline{x}$ منجر به تغییر در مشتق آن نیز می شود لذا برای حذف $\delta\underline{\dot{x}}$ از انتگرال جزء به جزء استفاده می کنیم:

$$\int_{t_\circ}^{t_f}\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}\delta\underline{\dot{x}}dt=\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}\delta\underline{x}\Big|_{t_\circ}^{t_f}-\int_{t_\circ}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)\delta\underline{x}dt \tag{۳۷}$$

با جاگذاری عبارت فوق در شرط لازم اکسترمم:

$$0=\int_{t_\circ}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)\right]\delta\underline{x}dt+\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}\delta\underline{x}\Big|_{t_\circ}^{t_f} \tag{۳۸}$$

برای اینکه عبارت بالا همیشه صفر باشد باید هر دو عبارت سمت راست صفر باشند:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}\delta\underline{x}=0 \quad at\ t=t_\circ\ and\ t=t_f & (۳۹)\\[2ex] \displaystyle\int_{t_\circ}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)\right]\delta\underline{x}\,dt=0 & (۴۰)\end{cases}$$

چون $\delta\underline{x}$ نمایش تغییر است پس هم آزاد به تغییر کردن است و هم نامقید، پس در عبارت اول باید $\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}$ در حالات حدی (یعنی شرایط مرزی) صفر باشد (بعداً بطور مفصل راجع به شرایط مرزی صحبت می کنیم). عبارت دوم یعنی عبارت انتگرال نیز زمانی همیشه صفر است که انتگران آن صفر باشد:

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)=0 \qquad \text{شرط اویلر-لاگرانژ} \tag{۴۱}$$

(۴۲) شرط Transversality (درصورتی که $\underline{x}$ در مرزها فیکس نشده باشند.) $\dfrac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}=0 \quad at \;\; t=t_\circ \;\; and \;\; t=t_f$

برای جایگزینی این مسأله و نقش انتزاعی آن در ذهن در جدول (۱) فقط لیستی از انواع تعاریف فانکشنال ها همراه با شرط لازم آنها (معادله اویلر)و البته بدون اثبات درج شده است:

جدول ۱

فانکشنال	شرط اویلر- لاگرانژ	ملاحظات / توضیحات
$\int_a^b f\left(x,y(x),y'(x)\right)dx$	$f_y-\dfrac{d}{dx}f_{y'}=0$	همین مسأله خودمان
$\int_a^b f\left(x,y(x),y'(x),y''(x)\right)dx$	$f_y-\dfrac{d}{dx}f_{y'}+\dfrac{d^2}{dx^2}f_{y''}=0$	خود گویای همه چیز است
$\int_a^b f\left(x,y(x),z(x),y'(x),z'(x)\right)dx$	$\begin{cases} f_y-\dfrac{d}{dx}f_{y'}=0 \\ f_x-\dfrac{d}{dz}f_{z'}=0\end{cases}$	یک متغیر مستقل (یعنی x) و دو تابع نامعلوم
$\int\int_\Omega f\left(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y)\right)dxdy$	$f_u-\dfrac{d}{dx}f_{u_x}-\dfrac{d}{dx}f_{u_y}=0$	فانکشنال دو متغیره
$\int\int_\Omega f\left(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}\right)dxdy$	$f_u-\dfrac{\partial}{\partial x}f_{u_x}-\dfrac{\partial}{\partial y}f_{u_y}+\ldots=0$	خود گویای همه چیز است

۱. منظور از f_y همان $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $f_{\dot{y}}$ همان $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}}$ می‌باشد.

۲. برای کلی بودن مسأله متغیر مستقل نهایی را با x (بجای x)نمایش می دهیم و اگر تابعی نسبت به آن مشتق پذیر بود با علامت Prime بجای Dot نمایش می دهیم، به‌عبارتی y' یعنی $\dfrac{dy}{dx}$)

مثال (۱) برای شرط اویلر: فانکشنال زیر را در نظر بگیرید و شرط لازم اکسترمم را بنویسید و در صورت امکان فرم بسته جواب بهگزین را بیابید.

$$\begin{cases} J=\int_0^1\left(x^2+\dot{x}^2\right)dt \\ x(0)=0, \quad x(1)=1\end{cases}$$

حل: اگر شرط اویلر را برای انتگران بنویسیم:

(م-۱) $$2x-\frac{d}{dt}\left(2\dot{x}\right)=0$$

(م-۲) $$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}-x=0$$

حل آنالیتیک:

(م-۳) $$x(t)=A\sinh(t)+B\cosh(t)$$

شرط Transversality می‌گوید δx در مرزها باید صفر باشد به‌شرطی‌که $\delta \underline{x}$ آزاد باشد تا تغییر کند، ولی چون مقادیر $\underline{x}$ در مرزها داده شده‌اند، لذا از همان شرائط مرزی برای تعیین و استفاده می‌کنیم: $\boxed{x(t)=\dfrac{\sinh(t)}{\sinh(1)}}$

ترجمه: اگر حالت x(t) مسیر فوق را طی کند آنگاه تابع هدف J اکسترمم می شود (مینیمم یا ماکزیمم می شود).

شرط Transversality

همانطور که دیدیم شرط لازم اکسترمم بودن یک فانکشنال شامل دو دسته معادله (معمولاً دیفرانسیل) می‌باشد: یکی معروف به شرط اویلر و دیگری شرط Transversality (یا مرزی). حال بسته به اینکه در صورت مسأله راجع به شرایط مرزی چه صحبتی شده باشد ترکیب های متنوعی (همراه با شرایط اویلر)خواهیم داشت:

۱- حالت نهایی فیکس - زمان نهایی آزاد:

اگر در مسأله بهگزینی فانکشنال، زمان نهایی معلوم نباشد ولی حالت آن معلوم باشد می توان ثابت کرد که شرایط لازم برای اکسترمم بودن یا ابزار ریاضی لازم برای حل مسأله شامل چهار عبارت زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}}\right)=0 \qquad \text{(شرط اویلر)} \qquad (۴۳)$$

نکته: از از رابطه (۴۳) برای حل معادله استفاده می‌کنیم و گرنه جزء شرایط لازم نیست بلکه معلوم خود مسأله است.

$$\underline{x}(t_f)=\underline{x}_f \qquad \text{(شرط نهایی)} \qquad (۴۴)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}}(t_\circ)\,\delta \underline{x}(t_\circ)=0 \qquad \text{(شرط مرزی یا اولیه)} \qquad (۴۵)$$

$$F(t_f)-\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}}(t_f)\,\dot{\underline{x}}(t_f)=0 \qquad \text{(شرط مرزی یا نهایی)} \qquad (۴۶)$$

۲- حالت نهایی آزاد - زمان نهایی آزاد:

در برخی مسائل دیگر نه تنها زمان نهایی فیکس نشده است بلکه حالت نهایی نیز تابع هیچ قیدی نیست. می‌توان اثبات کرد که مجموعه روابط ریاضی برای این حالت به شکل زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}}\right)=0 \qquad \text{(شرط اویلر)} \qquad (۴۷)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}}(t_\circ)\,\delta \underline{x}(t_\circ)=0 \qquad \text{(شرط مرزی یا اولیه)} \qquad (۴۸)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}(t_f)\delta \underline{x}_f + \left(F(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}(t_f)\underline{\dot{x}}(t_f)\right)\delta t_f = 0$$ (شرط مرزی یا نهایی) (۴۹)

اگر δt_f و $\delta \underline{x}_f$ مستقل باشند آنگاه شرط مرزی نهایی به شکل دو عبارت زیر در می آید:

$$\frac{\partial F}{d\underline{\dot{x}}}(t_f)\delta \underline{x}_f = 0 \qquad (۵۰)$$

$$\left(F(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}(t_f)\underline{\dot{x}}(t_f)\right)\delta t_f = 0 \qquad (۵۱)$$

نکته: همین مباحث را می توان برای حالاتی که انتگرال تکه‌تکه پیوسته باشد نیز مطرح نمود که منجر به نتایج Weierstrass می‌شود و از حوصله این مقال خارج است.

اکسترمم مقید (قید تساوی)

اکثر مسایل ما (کنترل بهینه) مینیمم‌سازی یک فانکشنال انتگرالی است که مقید به قیود تساوی از نوع دیفرانسیلی می‌باشد (همان فضای حالت یا مدل دینامیکی فرایند). لذا تمامی مباحث گذشته عملاً مقدمه‌ای بر همین بحث بوده است . جهت اختصار فقط به همین نکته اکتفا می‌کنیم که درست مثل بهگزینی کلاسیک (بهگزینی استاتیکی) برای لحاظ کردن قیود تساوی سعی می‌کنیم تابع هدف را به گونه ای بازآرایی یا تعریف مجدد کنیم که مسأله در قالب اکسترمم نامقید بگنجد، یعنی در اینجا نیز همان تعریف لاگرانژین را مجدداً در پیش رو داریم:

اگر بخواهیم فانکشنال J (در زیر) را

$$J = J\left(\underline{x}(t)\right) = \int_{t_\circ}^{t_f} F\left(t, \underline{x}, \underline{\dot{x}}\right)dt \qquad (۵۲)$$

تحت قیود m تا معادله دیفرانسیل (قیود مساوی):

$$\underline{\Lambda}\left(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t\right) = \underline{0} \qquad (۵۳)$$

مینیمم (ماگزیمم) کنیم شرایط لازم عبارتند از: (تابع هدف لاگرانژین را به صورت $L = F + \underline{\lambda}^T \underline{\Lambda}$ تعریف کنید).

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right) = 0$$ (معادلات اویلر-لانگرانژ) (۵۴)

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}(t_\circ)\right)^T \delta \underline{x}(t_\circ) = 0$$ (شرایط مرزی – اولیه) (۵۵)

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}(t_f)\right)^T \delta \underline{x}_f + \left(L(t_f) - \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}(t_f)\right)^T \underline{\dot{x}}(t_f)\right)\delta t_f = 0$$ (شرایط مرزی-نهایی) (۵۶)

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = 0 \quad or \quad \Lambda\left(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t\right) = 0$$ (معادلات برآمده از قیود تساوی) (۵۷)

مثال (۲): اکسترمم فانکشنال زیر را بیابید.

$$J\left(\underline{x},t\right)=\int_0^1\left(\dot{x}_1^{\,2}+t^2\right)dt$$

تحت قید:

$$x_1^2-\dot{x}_2=0$$

و با شرایط مرزی:

$$x_1\left(0\right)=0\ ,\ x_2\left(0\right)=0$$
$$x_1\left(1\right)=0\ ,\ x_2\left(1\right)=2$$

حل:

لانگرازین را تعریف می کنیم:

$$L=\dot{x}_1^2+t^2+\lambda_1\left(x_1^2-\dot{x}_2\right) \qquad \text{(م-۱)}$$

دقت شود چون یک معادله دیفرنسیال (یک قید) داشتیم، سایز $\underline{\lambda}$، یک می‌باشد.

شرط اویلر-لانگرانژ:

$$\frac{d}{dt}\dot{x}_1-\lambda_1x_1=0 \qquad \text{(م-۲)}$$

جاگذاری در معادله بالا:

$$\frac{d}{dt}\lambda_1=0\rightarrow Solution\rightarrow\boxed{\lambda_1=-c^2} \qquad \text{(م-۳)}$$

$$\rightarrow\frac{d^2x_1}{dt^2}+c^2x_1=0\rightarrow Solution\rightarrow x_1\left(t\right)=A\sin\left(ct\right)+B\cos\left(ct\right) \qquad \text{(م-۴)}$$

$$x_1(0)=x_1(1)=0\rightarrow\boxed{x_1\left(t\right)=A\sin\left(n\pi t\right),n=1,2,...} \qquad \text{(م-۵)}$$

برای اینکه از شرایط مرزی x_2 نیز استفاده کنیم، از عبارت قید تساوی (معادله دیفرنسیال) که x_1 را به x_2 مربوط می کند، استفاده می کنیم، یعنی فرم انتگرالی آنرا بنویسیم:

$$x_2\left(1\right)-x_2\left(0\right)=A^2\int_0^1\sin^2\left(n\pi t\right)dt \qquad \text{(م-۶)}$$

$$\rightarrow B.C.\ on\ x_2A=\pm2 \qquad \text{(م-۷)}$$

$$\rightarrow\boxed{x_2\left(t\right)=\pm2\sin\left(n\pi t\right),n=1,2,...} \qquad \text{(م-۸)}$$