انتگرال

انتگرال ← مفهوم پادمشتق یا انتگرال نامعین
انتگرال ← مفهوم انتگرال معین
} ارتباط اینها

پادمشتق (انتگرال نامعین):

عمل برعکس مشتق‌گیری می‌باشد:

$$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \boxed{?}' = \cos x$$

$$(x^4)' = 4x^3 \Rightarrow \boxed{??}' = 4x^3$$

به وضوح پاسخ سؤال اول $\sin x$ و پاسخ سؤال دوم x^4 می‌باشد از تابع‌داری زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int \cos x\, dx = ? = \sin x + c$$

$$\int 4x^3\, dx = ?? = x^4 + c$$

← به مقدار c توجه نشود.

تابع‌داری:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

- $\int$: علامت انتگرال
- $f(x)$: انتگرالده
- dx : بیان انتگرال
- $F(x)$: پادمشتق
- c : ثابت انتگرال‌گیری
- $F(x) + c$: پادمشتق کلی

مثال: پاسخ انتگرال‌های زیر را بنویسید.

* $\int \sec^2 x\,dx \overset{!}{=} \int (1+tg^2 x)\,dx =$

$tg\ x + c$

* $\int e^x\,dx =$

$e^x + c$

* $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx =$

$\sqrt{x} + c$

* $\int x^3\,dx =$

$\frac{x^4}{4} + c$

* $\int -8x^3\,dx =$

$\frac{-8x^4}{4} + c$

Scanned by CamScanner

چگونه انتگرال بگیریم:

توجه: به عنوان اشخاصی که تازه شروع به انتگرال گیری کرده اید، حتماً برای هر مسئله همواره از ابتدایی ترین روش شروع کنید و در صورتی که پاسخ را نیافتید به سراغ روشهای دیگر بروید.

الف) استفاده از جدول انتگرال:

$f \longrightarrow \int f$	$f \longrightarrow \int f$
$0 \longrightarrow c$	$\cos x \longrightarrow \sin x$
$c \longrightarrow cx$	$\sin x \longrightarrow -\cos x$
$x^n \xrightarrow[n\neq -1]{} \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \longrightarrow \operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow 2\sqrt{x}$	$1+\operatorname{ctg}^2 x = \csc^2 x \longrightarrow -\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{x} = x^{-1} \longrightarrow \ln\lvert x\rvert$ (توجه)	$\sec x \cdot \operatorname{tg} x \longrightarrow \sec x$
$e^x \longrightarrow e^x$	$\csc x \cdot \operatorname{ctg} x \longrightarrow -\csc x$
$a^x \longrightarrow \frac{a^x}{\ln a}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \arcsin x \overset{\text{یا}}{\neq} -\arccos x$
	$\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \operatorname{arc\,tg} x \overset{\text{یا}}{\neq} -\operatorname{arc\,ctg} x$

توجه: در جدول بالا برای $\operatorname{tg} x$، $\operatorname{ctg} x$، $\sec x$، $\csc x$، $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ فرمولی ارائه نشده است که این موارد در روشهای بعدی بحث خواهند شد.

نکته: برای برخی از انتگرالدهها می بایست آنرا تغییر شکل داد تا به فرمهای جدول تبدیل شوند.

Scanned by CamScanner

مثال:

* $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$

* $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$

* $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$

* $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$

* $\int x^{-\frac{5}{4}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} = -4x^{-\frac{1}{4}}$

* $\int x^{\pi} dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}$

* $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} dx = \int x^{-\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} x^{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3}$

* ~~$\int tg^2 x\, dx = \int 1 + 1 + tg^2 x$~~

* $\int \frac{x}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

Scanned by CamScanner

ب) استفاده از قوانین انتگرال‌گیری:

$$\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$$

$$\int cf\,dx = c\int f\,dx$$

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| \quad \text{(مخرج)}$$

معروف: «انتگرال مشتق مخرج در صورت»

$$\text{if } \int f(x)\,dx = F(x)+c \Rightarrow \int f(mx+b)\,dx = \frac{F(mx+b)}{m}+c$$

معروف: «انتگرال ترکیب تابع با خط»

توجه: برای ضرب یا تقسیم قواعد زیر تا در ستیز و نباید استفاده شوند:

$$\int (f \times g)\,dx = \int f\,dx \times \int g\,dx$$

$$\int \frac{f}{g}\,dx = \frac{\int f\,dx}{\int g(x)}$$

(دلیل حمایت‌زدن:)

ج) درصورتی که ضرب یا تقسیم داشته باشیم (که با روش‌های قبل حل نشوند)، درصورت امکان آن را ساده می‌کنیم تا به فرم‌های موجود در جدول تبدیل شوند و سپس آن را حل می‌کنیم. (اگر این چنین نشد در روش‌های بعدی به بحث روی آن خواهیم پرداخت.)

Scanned by CamScanner

مثال: انتگرال بگیرید:

* $\int (x^{49} - 5x^{24} + 20x^{9} - 10)\,dx$

$= \frac{x^{50}}{50} - 5\frac{x^{25}}{25} + 20\frac{x^{10}}{10} - 10x + C$ = ساده شود

* $\int \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + 3x^{5/4} + x^{-2} + \frac{1}{x^5}\right)dx$ → x^{-5} انتگرال

$= \frac{2}{3}\frac{x^{5/2}}{5/2} + 3\frac{x^{13/4}}{13/4} + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-4}}{-4}$

$= \frac{4}{15}x^{5/2} + \frac{12}{13}x^{13/4} - x^{-1} - \frac{1}{4}x^{-4}$

* $\int 3x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx$

$= \int 3x^2 + x^{-2} - 2\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x^{-2/5}\,dx$

$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} - 2(2\sqrt{x}) + 3\frac{x^{-2/5}}{-2/5}$ = ساده شود

* $\int 8\sin x + 4\sec^2 x\,dx$

$= -\cos x + 4\,tg\,x$

Scanned by CamScanner

* $\int tg^2 x\, dx$

$= \int -1 + 1 + tg^2 x\, dx = \int -1\, dx + \int 1 + tg^2 x\, dx$

$= -x + tg\, x$

* $\int (1-x^3)(1+x^3)\, dx$

توجه کنید که نوشتن $\int dx \times \int (1+x^3) \times \int (1-x^3)$ کاملاً غلط است.

ساده کردن / انتگرال داده $\int 1 - x^6\, dx$

انتگرال گیری $x - \frac{x^7}{7}$

* $\int \frac{x^5 - x^4 + x + 1}{x^3}\, dx =$

توجه کنید که نوشتن انتگرال صورت بر انتگرال مخرج غلط است.

ساده کردن / انتگرال داده $\int \frac{x^5}{x^3} - \frac{x^4}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\, dx$

$= \int x^2 - 1 + x^{-2} + x^{-3} = \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2}$

* $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$

ساده کردن $\int (x+1)\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

Scanned by CamScanner

$$* \int \cos(\pi x + \sqrt{2})\, dx$$

یادآوری

می‌دانیم که ① $\int \cos X\, dX = \sin X$ ،

② $\pi x + \sqrt{2}$ نسبت به x خطی با شیب $m = \pi$ است؛

پس طبق فرمول ترکیب تابع با خط:

$$\int F(x)\, dx = F(x) \Rightarrow \int f(mx+b) = \frac{F(mx+b)}{m}$$

$$\text{پاسخ سؤال ۷} = \frac{\sin(\pi x + \sqrt{2})}{\pi}$$

$$* \int (3x-9)^5\, dx$$

یک روش پرکار به توان رساندن و بسط دادن عبارت و سپس انتگرال‌گیری است.

روش راحت‌تر استفاده از فرمول ترکیب تابع با خط است؛ لذا:

$$\text{پاسخ سؤال ۸} = \frac{(3x-9)^6}{6 \times 3}$$

Scanned by CamScanner

یادآوری (چند فرمول مثلثاتی که بردن در انتگرال):

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ✓

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ×

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

مثال: $\int \cos^2 x\,dx$ در جدول نیست و حالت از ضرب می‌باشد

$\overset{\text{ساده}}{\underset{\text{نرین}}{=}} \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}$

Scanned by CamScanner

تمرین:

$$\int \frac{-\alpha}{\sqrt{\gamma x+\gamma}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{\Sigma} x^{\Sigma} + \frac{\gamma}{x^{\gamma}} - \Lambda \sec x \, tg\, x \, dx$$

$$\int (1-\omega)(1+\omega)(1+\omega^{\gamma})\, d\omega$$

$$\int \frac{x^{\gamma}-1}{x-1}\, dx$$

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

$$\int \frac{1+\sin^{\gamma} x}{1+\sin x}\, dx$$

$$\int \frac{\cos \gamma x}{\cos^{\gamma} x \sin^{\gamma} x}\, dx$$

Scanned by CamScanner