مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

① تعریف. یک مجموعهٔ A را شمارای نامتناهی گوییم هرگاه $A \sim \mathbb{N}$.

A را شمارا گوییم هرگاه متناهی باشد یا شمارای نامتناهی باشد.

② مثال. $\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}_e$ و $\mathbb{N}_0$ شمارای نامتناهی هستند.

③ قضیه. فرض کنید $X \sim \mathbb{N}$ و $Y \subseteq X$ نامتناهی. دراینصورت $Y \sim \mathbb{N}$

اثبات. فرض کنید $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ (توجه کنید که چون X شمارای نامتناهی است می‌توان عناصر آن را به این شکل نوشت.)

حال فرض کنید n_1 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_1} \in Y$. فرض کنید n_2 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_2} \in X - \{x_{n_1}\}$. به همین صورت به صورت استقرایی n_k را تعریف کنید.

داریم $Y = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}$. تابع

$$f : \mathbb{N} \to Y$$
$$f(k) = x_{n_k}$$

تناظری یک به یک است.

④ قضیه. الف) اگر A_1, A_2 دو مجموعهٔ شمارای نامتناهی باشند آنگاه $A \cup B$ شمارای نامتناهی است.

ب) به طور کلی‌تر اگر $A_1, \dots, A_n$ شمارای نامتناهی باشند، آنگاه $A_1 \cup \dots \cup A_n$ شمارای نامتناهی است.

توجیه قضیه. الف)

$$\begin{cases} a_1 \; a_2 \; a_3 \dots \\ b_1 \; b_2 \; b_3 \dots \end{cases}$$

$$\to a_1 \, b_1 \, a_2 \, b_2 \dots$$

نتیجه. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

⑤ قضیه. $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\sim\mathbb{N}$

اثبات. اثبات اول تابع $\begin{cases} f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N} \\ f(j,k)=2^j 3^k \end{cases}$ را درنظر بگیرید.

این تابع یک به یک است. (ولی پوشا نیست). داریم $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\sim f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\subseteq\mathbb{N}$.

$f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbb{N}$ است، پس $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\sim\mathbb{N}$

پس $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\sim\mathbb{N}$.

اثبات دوم. $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ یک به یک و پوشاست.
$g(k,n)=2^{k-1}(2n-1)$

⑥ قضیه. اگر $\{A_i : i\in\mathbb{N}\}$ یک خانوادهٔ مجزا از مجموعه‌های شمارای نامتناهی باشد، آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ شمارای نامتناهی است.

اثبات. به ازای هر i داریم $A_i\sim\mathbb{N}\sim(\mathbb{N}\times\{i\})$. فرض کنید $f_i : A_i\sim\mathbb{N}\times\{i\}$ حال تعریف کنید
$f:\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$f(a)=f_i(a)$ اگر $a\in A_i$

اولاً f خوش تعریف است، یعنی به ازای هر $a\in\bigcup A_i$، $f(a)$ بطور منحصر به فرد تعیین می‌شود. این به دلیل آن است که اعضای خانواده مجزا هستند. ضمناً f یک به یک است زیرا اگر $f(a)=f(a')$ آنگاه لزوماً $a,a'\in A_i$، به ازای یک i منحصر به فرد و بنابراین $f(a)=f_i(a)$ و $f(a')=f_i(a')$. پس بنابر تناظر یک به یک بودن f_i، $a=a'$.

به علاوه f پوشا است، زیرا اگر $(k,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ آنگاه چون f_i پوشا است، $a\in A_i$ وجود دارد به طوری که $f_i(a)=(k,i)$. پس $f(a)=(k,i)$.

۷) نکته. می‌توان اثبات تصویری زیر را برای برهان قضیه در نظر گرفت. (روش قطری)

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \cdots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \cdots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \cdots \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

۸) مثال. $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است.

حل. هر عدد گویای مثبت a را می‌توان به طور منحصر به فرد به شکل $a=\frac{p}{q}$ نوشت بطوریکه p,q گویا هستند و $(p,q)=1$. پس

$f: \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ یک به یک است.

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=(p,q)$$

پس $\mathbb{Q}^+$ شمارا است. به همین ترتیب $\mathbb{Q}^-$ شماراست.

و بنابراین $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ شماراست.

۹) قضیه. هر مجموعهٔ نامتناهی، زیرمجموعه‌ای شمارای نامتناهی دارد.

اثبات. فرض کنید X مجموعه‌ای نامتناهی باشد. $a_1\in X$ و $a_2\in X-\{a_1\}$ و ... را انتخاب کنید. قرار دهید $Y=\{a_1,a_2,\dots\}$. داریم $Y\subseteq X$ و $Y\sim\mathbb{N}$

۱۰) قضیه. بازهٔ $(0,1)$ ناشمارا است.

اثبات. هر عدد در این بازه را می‌توان به طور منحصر به فردی به شکل $0/a_1a_2a_3\cdots$ نوشت.

حال به برهان خلف عمل کنید و فرض کنید $f:\mathbb{N}\xrightarrow{\text{پوشا}}(0,1)$، جایی که

$$f(1)=0/a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\cdots$$
$$f(2)=0/a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\cdots$$
$$f(3)=0/a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\cdots$$
$$\vdots$$

حال قرار دهید $a=0/a'_{11}a'_{22}a'_{33}\cdots$. خواهیم داشت $a\notin \mathrm{Im}\, f$، تناقض!

جاییکه $a'_{ii}\neq a_{ii}$

(۱۱) نتیجه. $\mathbb{R}$ ناشمارا است.

اثبات.

$$\mathbb{R} \sim (0,1)$$

(۱۲) تمرین. مجموعهٔ همهٔ اعداد گنگ ناشمارا است.

(۱۳) تمرین. اگر $A \subseteq B$ و B ناشمارا باشد، آنگاه A ناشمارا است.