

۱- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\sin n + \cos n)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sin n + \cos n)$$

۲- متریک گسسته را روی R در نظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای آن که دنباله $\{a_n\}$ در این فضای متریک به یک عدد حقیقی همگرا باشد چیست؟

۳- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در (X, d) باشد و $\{d(x_n, y_n)\}$ یک دنباله همگرا به صفر باشد در اینصورت درستی و نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) هر دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرايند.

ب) دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ واگرايند.

ج) اگر $\{x_n\}$ همگرا باشد $\{y_n\}$ نیز همگراست.

۴- مجموعه‌ی $A \subseteq R$ و تابع $f: A \rightarrow A$ مفروضند:

الف) فرض کنید a یک نقطه حدى مجموعه‌ی A باشد و به ازای هر عدد مثبت ε ، مجموعه‌ی $\{x \in A : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ متناهی باشد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

نشان دهید .

ب) فرض کنید A فشرده است و در هر نقطه حدى a از A داریم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ نشان دهید به ازای هر عدد مثبت ε ،

مجموعه‌ی $\{x \in S : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ متناهی است.

۵- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و y_1, y_2, \dots, y_p نقطه‌ی دلخواه باشند به طوری که به ازای هر $1 \leq k \leq p$ ، دنباله

$\{x_{n,k}\}$ همگرا به y_k است. ثابت کنید مجموعه‌ی $A = \{y_k, x_{n,k} \mid n \in N, 1 \leq k \leq p\}$ فشرده است.