به نام خدا

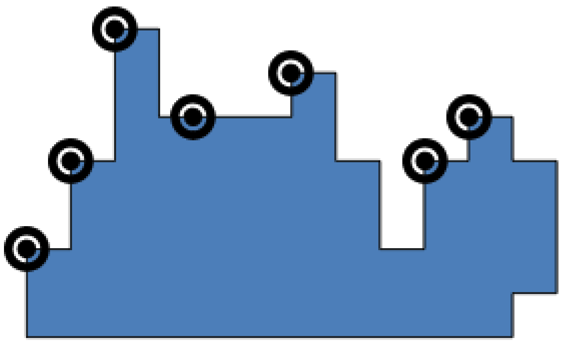
پاسخ تشریحی

مرحله اول بیستمین دوره المپیاد کامپیوتر

سال ۱۳۸۸

۱) گزینه‌ی (د) درست است.

برای پر کردن شکل، باید نقاط مشکی نیز پر شوند. ولی هیچ دو نقطه‌ای از آنها نمی‌تواند در یک دستمال قرار گیرد. در نتیجه حداقل ۷ دستمال لازم است. از طرفی روشی وجود دارد که می‌توان با ۷ دستمال تمام شکل را پر کرد. پس در مجموع ۷ دستمال لازم و کافی است.



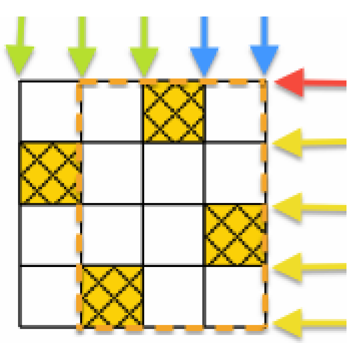
۲) پاسخ درست در میان گزینه‌ها نیست.
برای هرکدام از چوب‌کبریت‌ها فرض می‌کنیم که رنگ شده باشد و تعداد حالاتی را می‌توان چوب‌کبریت دوم را انتخاب کرد بدست می‌آوریم. در نهایت چون هر حالت را دو بار شمردیم جواب را بر دو تقسیم می‌کنیم.

برای هر ۴ چوب کبریت وسطی ۶ حالت انتخاب و برای هر ۸ چوب کبریت محیطی ۸ حالت داریم که در کل می‌شود ۲۴+۶۴. پس جواب مساله برابر نصف این عدد یعنی ۴۴ خواهد بود که در گزینه‌ها نیست.

۳) گزینه‌ی (ه) درست است.
در یک روش می‌توان مسأله را به چند بخش تقسیم کنیم که در هر گام تعداد مزرعه‌ها با ۱ تا ۴ معدن را شمرده و در نهایت آنها را با ضریبشان با هم جمع کنیم.

اگر از نگاهی دیگر به مسأله نگاه کنیم می‌توانیم برای هر معدن طلا تعداد مزارع مستطیلی شامل آن را بشماریم. به دلیل تقارن شکل کافی است فقط یکی از معادن را بدست آورده و در ۴ ضرب کنیم.

برای این‌کار تعداد مستطیل‌هایی را که معدن بالایی در آن قرار دارد را می خواهیم بشماریم. ۳ حالت برای بدست آوردن یکی از ضلع‌های عمودی و ۲ حالت برای انتخاب ضلع دیگر داریم که معدن در مستطیل قرار بگیرد. برای ضلع‌های افقی مستطیل هم ۱ حالت برای ضلع بالایی و ۴ حالت برای انتخاب ضلع پایینی داریم که در کل برابر است با ۳×۲×۱×۴ که ۲۴ حالت می شود.. حال چون ۴ معدن داریم تعداد کل برابر ۲۴×۴ یعنی ۹۶ می‌باشد.



۴) گزینه‌ی (ب) درست است.

طبق قضیه‌ی باقیمانده‌ی چینی اگر اعداد صحیح دو به دو نسبت به هم اول n_1 تا n_k برای دستگاه معادلات زیر وجود داشته باشند آنگاه جواب‌های x به پیمانه‌ی $N = \prod_1^k n_i$ با یکدیگر برابرند.

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{n_k} \end{aligned}$$

با این توضیح، باید ضرب اعداد اولیه بزرگتر از ۱۰۰ باشد. در غیر این‌صورت دو عدد با باقیمانده‌های یکسان یافت می‌شوند و درنتیجه تشخیص عدد ممکن نیست. چون تمامی اعداد تک‌رقمی هستند حداقل سه عدد لازم است و اعداد ۷، ۸ و ۹ ویژگی مورد نظر ما را دارند. در نتیجه پاسخ گزینه‌ی ب است.

۵) گزینه‌ی (ج) درست است.

باید اعداد را به ترتیب صعودی طی کنیم زیرا در غیر این صورت از هر عدد دقیقا یک‌بار نمی‌توانیم بگذریم و عدد تکراری خواهیم داشت. حال برای رفتن از هر عدد به عدد بعدی مستقل از اینکه در کدام راس قرار داریم (به جز رئوس ابتدا و انتها) دو راه داریم پس در کل 2^3 یعنی ۸ مسیر وجود دارد.

۶) گزینه (د) درست است.

کافی است فاصله‌ی دورترین خانه را تا خانه‌های سیاه بدست آوریم. خانه‌های سیاه به مختصات (C, C) وجود دارند که $C = 2,99$. حال اگر بخواهیم(X, Y)ای را بیابیم که $X - C$ و $Y - C$ بیشینه شوند و همه اعداد کوچکتر از ۱۰۰ باشند یکی از نقاط، نقطه‌ی $(1, 100)$ می‌باشد که برای رسیدن از هرکدام از نقاط سیاه به آن حداقل ۹۹ مرحله باید طی شود. در ضمن با ۹۹ مرحله تمامی خانه‌ها سیاه می‌شوند در نتیجه گزینه‌ی د درست است.

۷) گزینه (ب) درست است.

اگر عدد x را در مبنای دو در نظر بگیریم گام‌های اول و دوم داخل حلقه باعث می‌شوند که اگر کم‌ارزش‌ترین رقم عدد x صفر بود یکی به a اضافه شود و گام سوم باعث می‌شود که رقم کم‌ارزش عدد در مبنای دو حذف شود. این سیکل در انتها تعداد رقم‌های صفر عدد را به عنوان خروجی می‌دهد. از بین اعداد ۱ تا ۱۳۸۸ عدد 2^{10} بیشترین تعداد یعنی ۱۰ صفر در مبنای دو دارد.

۸) گزینه (ج) درست است.

۶ سوال لازم و کافی است.

مثال: فرض کنید ضرب عدد اول با اعداد سوم و چهارم را بپرسیم. همچنین ضرب عدد دوم با اعداد پنجم تا هفتم را بپرسیم و در نهایت ضرب اعداد هفتم و هشتم را نیز بپرسیم (در مجموع شش پرسش انجام داده‌ایم).

اگر چهار پرسش اول را در پرسش ششم ضرب کنیم و حاصل را P بنامیم، داریم:

$$P = {p_1}^2 \times {p_2}^2 \times p_3 \times \ldots \times p_8$$

در نتیجه اگر عدد حاصل را بر $8!$ تقسیم کنیم حاصل برابر $p_1 \times p_2$ می‌شود. حال اگر هر سه پرسش با جایگشت متفاوت را در هم ضرب کنیم ضرب دو عنصر دیگر (همانند قبلی) بدست می‌آید. بدین ترتیب می‌توان ضرب اعداد سوم و چهارم با اعداد پنجم و ششم را متوجه شد.

به همین روند می‌توان ضرب عدد اول و هفتم را فهمید. در نتیجه چون ضرب هر دوتایی از اعداد اول و ششم و هفتم را داریم می‌توان هرکدام از آنها را بدست آورد. پس چون ضرب دوتایی این اعداد را داریم هر عدد نیز به صورت مستقل بدست خواهد آمد.

۹) گزینه‌ی (ب) درست است.

۳ پرسش لازم و کافی است.

- اثبات لزوم شرط: فرض کنید بتوان با دو پرسش بتوان این‌کار را انجام داد. در صورتی که هر دو در یک سطر یا ستون باشند، حداقل دو عنصر از یک جایگشت سوال نشده‌اند و در نتیجه مسئله کامل حل نشده است. اگر این دو اشتراکی نداشته باشند، فرض کنید عدد آنها ۲ و ۶ باشند. در این حالت نمی‌توان بقیه‌ی جدول را بصورت یکتا بدست آورد. پس حداقل سه پرسش لازم است.
- اثبات کافی بودن شرط: ابتدا دو خانه از سطر اول را بپرسید. باتوجه به این دو، عدد سوم سطر بصورت یکتا مشخص می‌شود (مجموعه‌ی حالات سطرها با یکدیگر در دو عضو اشتراک ندارند). در نتیجه یک جایگشت و یکی از اعداد یکی از جایگشت‌ها مشخص می‌شود. سپس با پرسیدن یک خانه‌ی دیگر می‌توان عدد دیگر جایگشت را فهمید و در نتیجه تنها عدد باقیمانده نیز بدست می‌آید.

۱۰) گزینه (ب) درست است.

چندجمله‌ای اول را به صورت جزء به جزء در چندجمله‌ای دوم ضرب می‌کنیم و مجموع ضرایب را بررسی می‌کنیم. با ضرب کردن x^0 به تمام ضرایب x^0 تا x^{20} یک واحد اضافه می‌شود که در مجموع به تمام ضرایب ۲۱ واحد اضافه می‌شود و با ضرب کردن $-x^1$ از تمام ضرایب x^1 تا x^{21} یک واحد کم می‌شود پس در کل ۲۱ واحد از ضرایب کم می‌شود به همین روال هر دو ضریب متوالی مجموع ضرایب را ۰ نگه می‌دارند و x^{20} با ضرب شدنش در جمله‌ی دوم مجموع ضرایب را ۲۱ واحد اضافه می‌کند که باقیمانده‌ی این عدد بر ۵ برابر ۱ می‌باشد.

روش دوم: مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای را می‌توان با قرار دادن $x = 1$ در آن بدست آورد. با این‌کار دوچندجمله‌ای برابر ۱ و ۲۱ می‌شوند و در نتیجه مجموع ضرایب برابر ۲۱ است که باقیمانده‌ی این عدد بر ۵ برابر ۱ می‌باشد.

۱۱) گزینه (ه) درست است.

تعداد تک‌رقمی‌های زوج ۴ تا، دو رقمی زوج ۵×۹ تا و سه رقمی زوج ۵×۸۹ تا می‌باشد. در مجموع تعداد کل ارقام تا اینجا برابر است با:

$$4 + 45 \times 2 + 445 \times 3 = 1429$$

که ۴۱ واحد بزرگتر از ۱۳۸۸ است. ۴۱ تقسیم بر سه برابر ۱۳ و باقیمانده‌اش ۲ می‌شود. یعنی باید ۱۳ عدد زوج از بزرگترین عدد سه‌رقمی عقب بیاییم که فرمی به صورت 9** دارد و چون باقیمانده بر ۳ برابر ۲ شد و از آخر در حال پیشروی هستیم با ارزش‌ترین رقم‌اش را نگاه می‌کنیم که برابر ۹ می باشد.

۱۲) گزینه (د) درست است.

مستقل از ترتیب انتخاب گوشت‌ها با تکه گوشت اولیه‌ای که بزرگترین توان ۲اش K باشد $\mathrm{K}+1$ روز زنده می‌ماند. پس ترتیب خورده‌شدن گوشت‌ها هیچ تاثیری در تعداد روزهای زنده ماندن خرس ندارد.

شمارش را اینگونه انجام می‌دهیم: ۸۸ تکه گوشت اولیه داریم، به علاوه‌ی $\left\lfloor\frac{88}{2}\right\rfloor$ که تعداد گوشت‌های مضرب ۲ هستند که نصف آنها در ابتدا خورده و نصف آنها باقیمانده، به علاوه‌ی $\left\lfloor\frac{88}{4}\right\rfloor$ که تعداد گوشت‌های مضرب ۴ هستند که دوبار نصف شده‌اند و هنوز باقیمانده‌اند و به همین ترتیب تا تمامی گوشت‌ها تمام شوند که در نهایت برابر است با:

$$88+44+22+11+5+2+1=173$$

۱۳) گزینه (ه) درست است.

مجموع اعداد ۱ تا ۹ برابر ۴۵ است. حال اگر بخواهیم مجموع سطرها برابر شوند جمع اعداد هر سطر باید ۱۵ شود. عددی که در گوشه‌ی بالا سمت چپ قرار می‌گیرد هم در یک سطر و هم یک ستون و هم یک قطر شمرده می‌شود که هیچکدام از خانه‌هایشان جز همین خانه با یکدیگر اشتراک ندارند که در کل ۶ خانه هستند. اگر بخواهیم بیشینه‌ی جمع دوبدوی این ۶ خانه‌ی متفاوت کمینه شود به هرگونه که این ۶ خانه را پر کنیم مجموع کمینه‌ی ۳ جفت، ۷ می شود که چون مجموع هر سطر یا ستون یا قطر برابر ۱۵ می باشد تنها عددی که نمی‌تواند در جایگاه گفته شده قرار گیرد ۹ می‌باشد که جمعش با ۷ بیشتر از ۱۵ است.

۶	۱	
	۲	۳
۵		۴

۱۴) گزینه (ه) درست است.

مجموع جریان در بین شهرها برای ایجاد پایداری باید صفر باشد. پس مجموع قدرت شهرها باید صفر شود و در نتیجه به پیمانه‌ی ۱۱ هم صفر خواهد شد. مجموع چهار شهر اولیه به پیمانه‌ی ۱۱ برابر ۹ می‌باشد. پس شهر آخر قدرت‌اش به پیمانه ۱۱ باید برابر ۹- یا ۲ باشد که مجموع صفر شود که از بین گزینه‌ها فقط ۹۰۰۰ باقی مانده‌اش بر ۱۱ برابر ۲ است.

۱۵) گزینه (ه) درست است.

در شلیک اول به احتمال $\frac{3}{7}$ می‌میرد و به احتمال $\frac{4}{7}$ زنده می‌ماند. حال چون پیاپی شلیک کرده است، خشاب یکی به جلو رفته است و ۳ گلوله و ۶ جای گلوله مانده و احتمال زنده ماندنش در شلیک دوم برابر $\frac{3}{6}$ می‌باشد. پس احتمال کل زنده ماندنش در این دو شلیک برابر $\frac{3}{6}\times\frac{4}{7}$ یعنی $\frac{2}{7}$ می‌باشد.

۱۶) گزینه (الف) درست است.

به ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم:

10000010 Not $\rightarrow$ 10000011 Shift $\rightarrow$ 11000001 Shift

$\rightarrow$ 11100000 Not $\rightarrow$ 11100001 Shift $\rightarrow$ 11110000

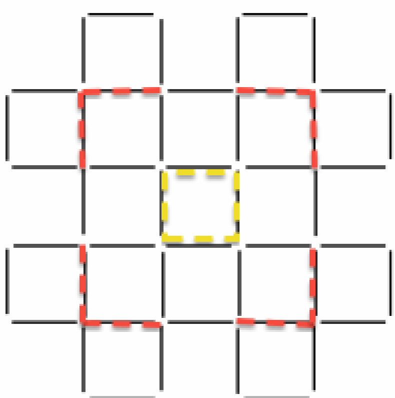
با ۵ بار انجام عملیات به خواسته‌ی خود رسیدیم و گزینه‌ی کمتر از آن هم وجود ندارد.

۱۷) گزینه (الف) درست است.

این الگوریتم تا زمانی که $A[i]$ برابر i نشده است تمام اعضای آرایه را در گام‌های اول تا سوم به صورت دوری (به دلیل متفاوت بودن همه اعداد با شماره‌ی خانه‌هایشان) بر روی $A[i]$ قرار می‌دهد تا برابر i شود و در گام‌های چهارم و پنجم به سراغ خانه‌ی بعدی می‌رود و همین کار را تکرار می‌کند تا به آخرین خانه برسد و سپس آرایه را چاپ می‌کند که باعث می‌شود به ازای هر $1 \leq i \leq 8$ تساوی $A[i] = i$ برقرار شود. بنابرین آرایه به صورت $\langle 1, 2, \dots, 8 \rangle$ مرتب شده می‌باشد.

۱۸) گزینه (ج) درست است.

برای دیده نشدن ۸ مربع محیطی برای هرکدام برداشتن حداقل یک چوب لازم است که بهتر است آن را از ضلعی که به سمت داخل شکل است برداریم تا مربع‌های داخلی هم خراب شوند. حال از شکل فقط ۵ مربع وسطی باقیمانده‌اند که برای خراب کردن آنها هم برداشتن ۴ چوب کبریت لازم است که در مجموع ۱۲ چوب کبریت باید برداشت.



۱۹) گزینه (ب) درست است.

اگر آرایه صفر غالب باشد حداکثر ۱۰٪ آن یعنی ۱۰۰ تا یک و اگر ۱-غالب باشد حداکثر ۱۰۰ تا صفر دارد. حال چون می‌دانیم آرایه یا ۰-غالب است و یا ۱-غالب اگر در بررسی‌مان از هرکدام از صفرها یا یک‌ها بیشتر از ۱۰۰ تا داشته باشیم می‌توانیم با قطعیت بگوییم که آن غالب است. پس در بدترین شرایط ۱۰۰+۱۰۰+۱ یعنی ۲۰۱ بررسی لازم داریم.

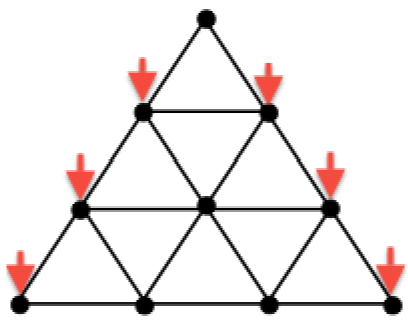
۲۰) گزینه (ج) درست است.

توجه داشته باشید که مثلث متساوی‌الاضلاع می‌تواند به هر طول ضلعی و هر زاویه‌ای تشکیل شود و لزومی ندارد که موازی خطوط باشد.

می‌دانیم از هر مثلث به طول یک در گوشه‌های مثلث بزرگ، یک نقطه نباید انتخاب شود. در نتیجه جواب حداکثر ۷ خواهد بود.

ثابت می‌کنیم جواب برابر ۷ نیز نمی‌تواند باشد: فرض کنید ۷ نقطه انتخاب کرده‌ایم. طبق فرض بالا نقطه‌ی وسط مثلث انتخاب شده است. حال ۶ نقطه‌ی اطراف آن را در نظر بگیرید. اگر ۴ نقطه در بین آنها انتخاب شده باشد دو نقطه یافت می‌شود که مجاور باشند و با نقطه‌ی وسط تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند. پس حداکثر ۳ نقطه از بین آنها انتخاب شده است. حال از ۳ نقطه‌ی گوشه نیز باید حداکثر دو نقطه انتخاب شود. در نتیجه حداکثر ۶ نقطه انتخاب شد.

برای ۶ نقطه نیز مثال زیر وجود دارد:



۲۱) گزینه (الف) درست است.

در ابتدا با ۳ مقایسه‌ی دوبدوی اعداد، سه عدد بزرگتر و سه عدد کوچکتر را تشخیص می‌دهیم و آنها را از هم جدا می‌کنیم. حال از بین ۳ عدد بزرگتر با دو مقایسه بزرگترین و از بین ۳ عدد کوچکتر نیز با دو مقایسه کوچکترین را پیدا می‌کنیم که در مجموع با ۷ مقایسه به هدف‌مان رسیدیم که کوچکترین عدد در بین گزینه‌ها است.

۲۲) گزینه (ج) درست است.

می‌دانیم عدد ۲ کوچکترین عدد در بین اعداد است، در نتیجه همواره عنصر کوچکتر است. بدین ترتیب از مرحله‌ی اول به بعد همواره در جایگاه‌های زوج باقی خواهد ماند و همواره دو خانه نسبت به قبل عقب‌تر خواهد رفت. در مرحله‌ی اول در خانه‌ی ششم قرار دارد و باتوجه به اینکه ۱۳۸۸ باقیمانده‌اش بر ۳ برابر با ۲ است در آخرین مرحله در خانه‌ی چهارم قرار می‌گیرد (هر سه مرحله به جایگاه قبلیش برمی‌گردد).

۲۳) گزینه (ب) درست است.

دنباله‌ی اول قابل تولید نیست. زیرا باید از قطار ۱۰ تا قطار ۵ وارد پارکینگ شوند و قطار ۵ خارج شود و سپس قطارهای ۴ تا ۱ وارد پارکینگ شوند و از آن طرف ۱ تا ۳ خارج شوند. ولی قطار ۴ هنوز خارج نشده است و قطار ۶ نمی‌تواند قبل از آن به خروجی رود.

دنباله‌ی دوم قابل تولید نیست زیرا قطار شماره‌ی ۴ ندارد و دوتا ۹ دارد.

دنباله‌ی سوم هم قابل تولید نیست. زیرا باید قطارهای ۱۰ تا ۲ به ترتیب وارد پارکینگ بشوند و سپس قطار ۲ خارج شود ولی بعد از آن قطار شماره ۹ نمی‌تواند خارج شود.

دنباله‌ی چهارم قابل تولید است. ابتدا قطارهای ۱۰ تا ۴ وارد پارکینگ می‌شوند. سپس قطار ۴ خارج می‌شود و قطارهای ۳ و ۲ وارد می‌شوند و قطار ۲ و ۳ خارج می‌شوند و بعد از آن قطار ۵ تا ۷ که از قبل در پارکینگ بودند خارج خواهند شد و بعد از آن قطار ۱ وارد و خارج می‌شود و در نهایت هم قطارهای ۸ تا ۱۰ خارج می‌شوند.

۲۴) گزینه‌ی (الف) درست است.

گراف جایگشت متناسب با عملگرها را می‌کشیم و مکان‌هایی را که ۲ را بتوان به آنجا منتقل کرد می‌یابیم. اعداد طلایی برابر ۲ و ۳ و ۵ می‌باشند که با هم یک دور را تشکیل داده‌اند.

۲۵) گزینه‌ی (د) درست است.

برای اینکه فاصله‌اش از نقطه A بیشتر از ۳ واحد شود یا باید بیشتر از ۵ حرکت راست رفته باشد یا باید بیشتر از ۵ حرکت چپ رفته باشد. در واقع احتمال حالاتی را که ۶ یا ۷ یا صفر یا یک بار راست رفته را باید بدست آوریم تا احتمال کل را حساب کنیم.

احتمال صفر بار راست رفتن = $\frac{1}{128}$

احتمال یک بار راست رفتن = $\binom{7}{1} \times \frac{1}{128}$

احتمال شش بار راست رفتن = $\binom{7}{6} \times \frac{1}{128}$

احتمال هفت بار راست رفتن = $\frac{1}{128}$

که در مجموع برابر $\frac{16}{128}$ یا $\frac{1}{8}$ می باشد.