مثال : $M^{\log_M^N} = N \Rightarrow M^{\log_M^N} = N^{\log_M^M} = N^1 = N$

$e^{Ln 8} = 8$

۸) $\log_y^x = \dfrac{m}{n} \;\Rightarrow\; x^n = y^m$

مثال : $\log_y^x = \dfrac{2}{3} \;\Rightarrow\; x^3 = y^2$

۹) فرمول تغییر مبنا : $\log_b^a = \dfrac{\log_c^a}{\log_c^b}$

۱۰) $\log_b^a = \dfrac{\log_c^a}{\log_c^b} \Rightarrow \log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$

مثال : $\log_3^2 \times \log_4^3 \times \log_5^4 \times \log_6^5 = \log_6^2$

۱۱) $\log_b^a \times \log_a^b = 1 \Rightarrow \log_b^a = \dfrac{1}{\log_a^b}$

۱۲) $\log_d \log_c \log_b \log_a x = e \Rightarrow x = a^{b^{c^{d^e}}}$

مثال : $\log_{1000} \log_5 \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 2^{5^{1000^0}} \Rightarrow x = 2^{5^1} \Rightarrow x = 32$

$* \; 2^{81} = 2^{3^4} \neq \left(2^3\right)^4 = 2^{12}$

مهم مثال : $\log_{\sqrt[7]{5}} \log_{\sqrt[5]{3}} \log_{\sqrt[3]{3}} \log_2 x = 7 \Rightarrow x = 2^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[5]{3}^{\sqrt[7]{5}^{7}}}} = 2^3 = 8$

مثال : حاصل هریک از عبارت های زیر را به دست آورید :

۱) $\log_{\sqrt[3]{x}}^{x^2} + \log_{y^{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{y}} = \log_{x^{\frac{1}{3}}}^{x^2} + \log_{y^{-3}}^{y^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{\frac{1}{3}} \log_x^x + \dfrac{\frac{1}{2}}{-3} \log_y^y = 6 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{35}{6}$

۲)

$$\log_x^{\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}} = \log_x^{x^{\frac{22}{27}}} = \frac{22}{27}$$

$\sqrt[۲۷]{x^{۱۸} \cdot x^{۳} \cdot x^{۱}} = \sqrt[۲۷]{x^{۲۲}} \Rightarrow \log_x x^{\frac{۲۲}{۲۷}} = \frac{۲۲}{۲۷}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x\times x^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt[3]{x^2 \times x^{\frac{4}{9}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{22}{9}}} = x^{\frac{22}{27}} \Rightarrow \log_x^{x^{\frac{22}{27}}} = \frac{22}{27}$$

۳) $\log_{\sqrt[n]{xyz}}^{x} + \log_{\sqrt[n]{xyz}}^{y} + \log_{\sqrt[n]{xyz}}^{z} = \log_{\sqrt[n]{xyz}}^{xyz} = \log_{(xyz)^{\frac{1}{n}}}^{xyz} = \frac{1}{\frac{1}{n}} \log_{xyz}^{xyz} = n\log_{xyz}^{xyz} = n$

۴) $10^{-1+\log^3} = 10^{-1} \times 10^{\log^3} = 0.1 \times 3^{\log^{10}} = 0.1 \times 3 = 0.3$

۵) $3^{2-\log_3^8} = \frac{3^2}{3^{\log_3^8}} = \frac{3^2}{8^{\log_3^3}} = \frac{9}{8}$

۶) $\log_{(n+1)^3}^{\frac{1}{2}} + \log_{(n+1)^3}^{\frac{2}{3}} + \log_{(n+1)^3}^{\frac{3}{4}} + \ldots + \log_{(n+1)^3}^{\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}} = \log_{(n+1)^3}^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}} = \log_{(n+1)^3}^{\frac{1}{(n+1)^2}} = \log_{(n+1)^3}^{(n+1)^{-2}} = \frac{-2}{3}$,

۷) $\frac{1}{\log_{20}^5} - \frac{1}{\log_4^5} = \log_5^{20} - \log_5^4 = \log_5^{\frac{20}{4}} = \log_5^5 = 1$

۸) $\sqrt{3}^{\log_9^{625}} = 625^{\log_9^{\sqrt{3}}} = 625^{\log_{3^2}^{3^{\frac{1}{2}}}} = 625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$

نکته : $B \times C = 1 \Rightarrow \frac{A}{1+B} + \frac{A}{1+C} = A$

۹) $\frac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 2$

$\Rightarrow \frac{2}{1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \frac{2}{1+(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 2$

$\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 3-2 = 1$

می دانیم :

$(a+b)(b-a) = b^2 - a^2$

۱۰) $\frac{5}{1+\left(\sqrt{2}+1\right)^{567}}+\frac{5}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^{567}}=5$

$\Rightarrow \left(\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^{567}=\left(2-1\right)^{567}=1$

۱۱) $\frac{\sqrt{3}}{1+x^{m-n}}+\frac{\sqrt{3}}{1+x^{n-m}}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow x^{m-n}\times x^{n-m}=x^{m-n+n-m}=x^{0}=1$

۱۲) $\frac{8}{1+\log_5^3}+\frac{8}{1-\log_3^{\frac{1}{5}}}=\frac{8}{1+\log_5^3}+\frac{8}{1-\log_3^{5^{-1}}}=\frac{8}{1+\log_5^3}+\frac{8}{1+\log_3^5}=8$

مثال : معادلات زیر را حل کنید ؟

۱) $3^{\log_2^{\left(x^2-21\right)}}=9$

$3^{\log_2^{\left(x^2-21\right)}}=3^2 \Rightarrow \log_2^{\left(x^2-21\right)}=2 \Rightarrow x^2-21=4 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow \quad x=\pm 5$

۲) $\frac{\log^2-\log^x}{\log^3+\log^x}=1$

$\log^{\frac{2}{x}}=\log^{3x} \Rightarrow \frac{2}{x}=3x \Rightarrow x^2=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{\frac{2}{3}}$

۳) $\log^{(x-1)}+\log^{(x+1)}=1$

$\log_{10}^{\left(x^2-1\right)}=1 \Rightarrow x^2-1=10^1 \Rightarrow x^2-1=10 \Rightarrow x^2=11 \Rightarrow x=\pm\sqrt{11} \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{11}$

۴) $\log^{(x+4)} = \frac{1}{2}\log(2x+11)$

$$\log^{(x+4)} = \log^{\sqrt{2x+11}} \Rightarrow (x+4)^2 = \left(\sqrt{2x+11}\right)^2 \Rightarrow x^2+8x+16 = 2x+11 \Rightarrow x^2+6x+5=0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = \dfrac{-c}{a} = -5 \rightarrow \end{cases}$$

چون $(x+4)$ منفی شده و طرف دوم⊕، پس این جواب غ ق است.

نکته : در معادلات لگاریتمی و معادلات رادیکالی ، ریشه های به دست آمده قابل اعتماد نیستند و باید آنها را امتحان کنیم. در معادلات لگاریتمی ، ریشه های به دست آمده را در فرم اولیه معادله و در معادلات رادیکالی ، ریشه های به دست آمده را در معادله ، قبل از به توان رسیدن امتحان می کنیم.

۵) $4-\log^x = 3\sqrt{\log^x}$

$$(4-\log x)^2 = \left(3\sqrt{\log x}\right)^2 \Rightarrow 16+\log^2 x - 8\log x = 9\log x \Rightarrow \log^2 x - 17\log x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \log_{10}^x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ \log_{10}^x = 16 \Rightarrow x = 10^{16} \end{cases}$$

در طرف اول مساوی حاصل⊖می شود پس غ ق ق

۶) $4^{\log_4^{(x-3)} + \log_2^5} = 25$

$$4^{\log_4^{(x-3)}} \times 4^{\log_2^5} = 25 \Rightarrow (x-3)^{\log_4^4} \times 5^{\log_2^4} = 25 \Rightarrow (x-3)\times 5^2 = 25$$
$$\Rightarrow x-3 = 1 \Rightarrow x = 4$$

۷) $\log_3^x+\log_{\sqrt{3}}^x+\log_{\sqrt[3]{3}}^x=12$

$\log_3^x+\log_{3^{\frac{1}{2}}}^x+\log_{3^{\frac{1}{3}}}^x=12 \Rightarrow \log_3^x+2\log_3^x+3\log_3^x=12 \Rightarrow 6\log_3^x=12 \Rightarrow \ x=9$

۸) $3^{\log x}=54-x^{\log 3}$

$3^{\log x}=54-3^{\log x} \Rightarrow 2\times 3^{\log x}=54 \Rightarrow 3^{\log x}=27=3^3 \Rightarrow \log_{10}^x=3$

$\Rightarrow \ x=10^3=1000$

۹) $x^{\log_5^x}=625$

$\log_5^{\left(x^{\log_5^x}\right)}=\log_5^{625} \Rightarrow \log_5^x\times\log_5^x=4\log_5^5 \Rightarrow \left(\log_5^x\right)^2=4 \Rightarrow \log_5^x=\pm 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_5^x=2 \Rightarrow \ x=5^2=25 \\ \log_5^x=-2 \Rightarrow \ x=\dfrac{1}{25} \end{cases}$$

۱۰) $\log_{\sqrt[7]{5}}\log_{\sqrt[5]{2}}\log_{\sqrt{3}}x=7$

$x=\sqrt{3}^{\sqrt[5]{2}^{\sqrt[7]{5}^{7}}} \ \Rightarrow \ x=3$

مثال : هرگاه $f(x)=\log(1-x)$ و $f(z)=f(x)-f(y)$ باشد ، حاصل $y+z-x$ کدام است ؟

$f(z)=f(x)-f(y)$

$\Rightarrow \log(1-z)=\log(1-x)-\log(1-y) \Rightarrow \log(1-z)=\log\dfrac{1-x}{1-y} \Rightarrow 1-z=\dfrac{1-x}{1-y}$

$\Rightarrow 1-y-z+yz=1-x \Rightarrow y+z-x=yz$

6

مثال : هرگاه $\log 2 = x$ و $\log 3 = y$ باشد ، در این صورت $\log_5^{12}$ چقدر است ؟

$$\log_5^{12} = \frac{\log^{12}}{\log^5} = \frac{\log^{2^2 \times 3}}{\log^{\frac{10}{2}}} = \frac{\log^{2^2} + \log^3}{\log^{10} - \log^2} = \frac{2\log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{2 \times x + y}{1 - x} = \frac{2x + y}{1 - x}$$

مثال : اگر $\log a = 0.75$ و $\log b = 0.125$ باشد ، در این صورت چه رابطه ای بین a,b برقرار است ؟

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{0.75}{0.125} \Rightarrow \log_b^a = \frac{750}{125} = \frac{30}{5} = 6 \Rightarrow \log_b^a = 6 \Rightarrow \boxed{a = b^6}$$

مثال : اگر $\log_x^a = 2$, $\log_y^a = 3$, $\log_z^a = 6$ باشد ، حاصل $\log_{xyz}^a$ کدام است ؟

$$\log_{xyz}^a = \frac{1}{\log_a^{xyz}} = \frac{1}{\log_a^x + \log_a^y + \log_a^z} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 1$$

☑ تست : جواب معادله $\log(4 - x) = \log(6 - x) - \log x$ کدام است ؟

۱) ۰ و ۱ ☐ ۲) ۲ و ۳ ☑ ۳) ۴ و ۵ ☐ ۴) ۵ و ۶ ☐

⇦ بدون حل گزینه ۲ صحیح می باشد ، زیرا گزینه های اول و سوم و چهارم عدد لگاریتم را صفر می کنند.

☑ تست : جواب معادله $\log_x^{(x+2)} = \log_x^{(4-x)} + 1$ کدام است ؟

۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☑ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴ ☐

⇦ گزینه های اول و چهارم غلط هستند زیرا با تعریف لگاریتم متناقض اند پس گزینه دوم و سوم را بررسی می نماییم ، اکنون گزینه دوم را امتحان می کنیم :

$x = 2 \Rightarrow \log_2^4 = \log_2^2 + 1 \Rightarrow 2 = 1 + 1$

مثال : اگر x, y دو عدد مثبت و مخالف ۱ باشند $(x > 0, y > 0, x \neq 1)$ و $\log_y^x + \log_x^y = 2$ باشد ، در این صورت حاصل « $\log_y^x - \log_x^y$ » کدام است ؟

$$\log_y^x = t \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow \frac{t^2+1}{t} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{t^2+1-2t}{t} = 0 \xrightarrow{\times t} t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_y^x - \log_x^y = 1 - 1 = 0$$

مثال : اگر $\log_2^{\sin x} = A$ باشد ، حاصل $\log_2^{(1-\cos 2x)}$ کدام است ؟

فرمول مثلثاتی : $\begin{cases} 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \\ 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \end{cases}$

$$\Rightarrow \log_2^{(1-\cos 2x)} = \log_2^{(2\sin^2 x)} = \log_2^2 + \log_2^{\sin^2 x}$$
$$\Rightarrow 1 + 2\log_2^{\sin x} = 1 + 2A$$

مثال : اگر معادله $x^2 - (1 + \log a)x + \log a = 0$ ، دارای ریشه مضاعف باشد ، در این صورت مقدار a چقدر است ؟

مجموع ضرایب = ۰ $\Rightarrow 1 - 1 - \log a + \log a = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \log a \end{cases} \xrightarrow{x'=x''} x' = x'' \Rightarrow \log_{10}^{a} = 1 \Rightarrow a = 10$$

مثال : اگر $\log x = y$ باشد ، حاصل $x^{\log z}$ کدام است ؟

$$x^{\log z} = z^{\log x} = z^{y}$$

مثال : حاصل عبارت $\log_6^2 + \log_6^{18} - \log_x^{\sqrt[3]{x}}$ ، $(1 \neq x > 0)$.

$$\Rightarrow \log_6^{36} - \log_x^{x^{\frac{1}{3}}} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

مثال : اگر $\log \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \log xy$ باشد ، حاصل $x^2 + y^2$ کدام است ؟

$$\log \frac{x-y}{2} = \log \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x-y}{2} = \sqrt{xy} \Rightarrow x - y = 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x-y)^2 = \left(2\sqrt{xy}\right)^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 4xy \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 6xy$$

مثال : اگر x, y دو عدد مثبت و مخالف یک و نابرابر باشند $(x > 0, y > 0, x \neq y, x, y \neq 1)$ ، حاصل عبارت زیر با فرض $\log_y^x = \log_x^y$ کدام است ؟

$$\log_y^{x^m} + \log_x^{y^n} = m \log_y^x + n \log_x^y = -m - n$$
$$\longrightarrow \log_y^x = \log_y^x \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} \log_y^x = \log_x^y = 1 \\ \log_y^x = \log_x^y = -1 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

● اعداد « ۱+ » و « ۱- » با برعکس خود برابرند.

✍ لگاریتم

➢ تعریف

$$\begin{cases} a^b = c \Rightarrow \log_a^c = b \\ c > 0 \ \wedge \ a > 0 \ \wedge \ a \neq 1 \end{cases}$$

a : مبنای لگاریتم ، b : مقدار لگاریتم ، c : عدد لگاریتم

$2^3 = 8 \Rightarrow \log_2^8 = 3$ $\qquad$ $5^3 = 125 \Rightarrow \log_5^{125} = 3$

$3^5 = 243 \Rightarrow \log_3^{243} = 5$ $\qquad$ $\log_6^x = 2 \Rightarrow x = 6^2 \Rightarrow x = 36$

➢ خواص لگاریتم

۱) $\log_n^n = 1 \qquad (n \neq 1 \ , \ n > 0)$

۲) $\log_n^1 = 0 \qquad (n \neq 1 \ , \ n > 0)$

۳) $\log_C^{A \times B} = \log_C^A + \log_C^B$

۴) $\log_C^{\frac{A}{B}} = \log_C^A - \log_C^B$

۵) $\log_B^{A^n} = n \log_B^A \qquad , \qquad \log_{B^m}^A = \dfrac{1}{m} \log_B^A$

۶) $\log_{B^m}^{A^n} = \dfrac{n}{m} \log_B^A$

مثال : $\log_y^x = \log_{y^n}^{x^n} = \log_{\sqrt[n]{y}}^{\sqrt[n]{x}} = \log_{y^{\frac{1}{n}}}^{x^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{n} \times n \log_y^x$

۷) $A^{\log_C^B} = B^{\log_C^A}$

➢ **نامعادلات لگاریتمی**

$I)\ \log_a^x > \log_a^y \xrightarrow{a>1} x > y$

$II)\ \log_a^x > \log_a^y \xrightarrow{0<a<1} 0 < x < y$

مثال :

1) $\log^{(3-4x)} \geq 1$

$\Rightarrow \log_{10}^{(3-4x)} \geq \log_{10}^{10} \Rightarrow 3-4x \geq 10 \Rightarrow 4x \leq -7 \Rightarrow \ x \leq \frac{-7}{4}$

2) $\log_{\frac{2}{3}}^{(1-4x)} > 0$

$\Rightarrow \log_{\frac{2}{3}}^{(1-4x)} > \log_{\frac{2}{3}}^{1} \xrightarrow{0<\frac{2}{3}<1} 0 < 1-4x < 1 \Rightarrow -1 < -4x < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} > x > 0 \Rightarrow \ 0 < x < \frac{1}{4}$

➢ مفسر و مانتیس

اگر عددی به صورت توان صحیح « ۱۰ » باشد ، در این صورت لگاریتم آن عدد در مبنای « ۱۰ » مقداری صحیح است ، ولی چنان چه عدد به صورت توان صحیح « ۱۰ » نباشد ، لگاریتم آن عدد در مبنای « ۱۰ » از دو جزء تشکیل شده است :

الف) قسمت صحیح موسوم به مفسر ؛ $A=10^k \ (k \in Z)$

ب) قسمت اعشاری موسوم به مانتیس ؛

$\log A = k \in Z$

$\log A = n/xyzt$

$xyzt$: مانتیس n: مفسر

➢ طریقه به دست آوردن مفسر لگاریتم اعداد در مبنای ۱۰ ؛

۱. اگر عدد بزرگتر از واحد باشد (۱ < عدد) ، در این صورت مفسر لگاریتم آن در مبنای ۱۰ مقداری مثبت است که از لحاظ مقدار عددی برابر است با تعداد ارقام صحیح آن عدد منهای یک :

مثال :

$\log 35 = 1/...$

$\log 781.12345 = 2/...$

$\log 576.13 = 2/...$

$\log 11384.125 = 4/...$

$\log 2.879 = 0/...$

۲. اگر عدد بین « ۰ » و « ۱ » باشد (۱ > عدد > ۰) ، در این صورت مفسر لگاریتم آن در مبنای ۱۰ مقداری منفی است که از لحاظ مقدار عددی برابر است با تعداد صفرهای قبل و بعد از ممیز در آن عدد تا اولین رقم غیر از صفر عدد :

مثال :

$\log 0.01005 = \bar{2}/...$
$\log 0.0035 = \bar{3}/...$
$\log 0.40007 = \bar{1}/...$
$\log 0.000101 = \bar{4}/...$

مثال : حاصل عبارت زیر را حساب کنید :

$$[\log 21.3] + [\log 0.0012] = 1 + (-3) = -2$$

نکته : براکت لگاریتم = مفسر لگاریتم

مثال : حاصل $[\log_2^{500}]$ چقدر است ؟

$256 < 500 < 512$
$2^8 < 500 < 2^9$
$\Rightarrow 500 = 2^{8/...} \Rightarrow \log_2^{500} = 8/... \Rightarrow [\log_2^{500}] = 8$

مثال : اگر $\log 2 = 0.3010$ باشد ، عدد 25^{25} چند رقمی است ؟

$\log 5 = \log\frac{10}{2} = 1 - \log 2 = 1 - 0.301 = 0.699$
$\Rightarrow \log(25)^{25} = 25\log 25 = 25\log 5^2 = 50\log 5 = (50)\times(0.699)$
$\Rightarrow 50\log 5 = 34.950$

تعداد ارقام = مفسر + ۱ ← سی و پنج رقمی است.