باسمه تعالی

۱- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

نکته: تابع f را بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته گوییم، هر گاه تابع f در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

با توجه به نکته، تابع $f(x)$ اگر بخواهد در بازهٔ $[\sqrt{۵},k]$ پیوسته باشد، باید در $\sqrt{۵}$ از راست پیوسته و در $(\sqrt{۵},k)$ پیوسته باشد. می‌دانیم $[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است. پس $\sqrt{۵} \le k < ۳$. بنابراین k حداکثر می‌تواند عدد صحیح بعد از $\sqrt{۵}$ یعنی ۳ باشد.

۲- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

روش اول: باید داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = (۱-a+۳)[۲^+] = (۴-a)\times ۲ = ۸-۲a \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = (۱-a+۳)[۲^-] = (۴-a)\times ۱ = ۴-a \\ f(۱) = (۱-a+۳)[۲] = ۸-۲a \end{array}\right\} \Rightarrow ۸-۲a = ۴-a \Rightarrow a = ۴$$

روش دوم: تابع $g(x) = [۲x]$ در $x = ۱$ ناپیوسته و تابع $h(x) = x^۲ - ax + ۳$ پیوسته است، بنابراین تابع $f(x) = h(x)g(x)$ زمـانی در $x = ۱$ پیوسته است که داشته باشیم:

$$h(۱) = ۰ \Rightarrow ۱-a+۳ = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: دانش * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

نکته: تابع f را بر بازهٔ (a,b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a,b) پیوسته باشد.

نکته: تابع f را بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a,b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسـته باشد.

تابع $y = [x]$ بر بازهٔ $[۱,۲)$ پیوسته است؛ زیرا در تمام نقاط بازهٔ $(۱,۲)$ پیوسته است و در $x = ۱$ از سمت راست پیوسته است. پس گزینهٔ ۳ درست است.

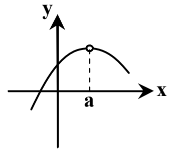
سایر گزینه‌ها نادرست هستند ؛ زیرا در گزینه‌های ۱ و ۲ تابع در $x = ۲$ از راست پیوسته نیست و در گزینهٔ ۴ نیز تـابع در $x = ۲$ پیوسـته نیست.

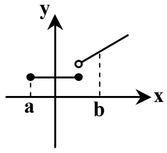
« امتیاز پرسش های موجود در بانک سوال، منحصراً متعلق به موسسه گزینه دو است. چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی، کاغذی و ...) برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی ممنوع است (حتی با ذکر منبع) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند. مدارس شرکت کننده در آزمون ها و ارزشیابی های گزینه دو می توانند صرفاً برای دانش آموزان مدرسه خود که در آزمونها ثبت نام کرده اند، از خدمات بانک سوال استفاده نمایند. »

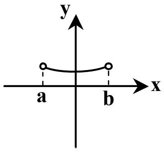
۴- پاسخ: گزینهٔ ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده ⁕ حیطه: دانش ⁕ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

اگر تابعی در نقطه‌ای از راست و چپ پیوسته باشد، یعنی در آن نقطه پیوسته است و در نتیجه حد تابع در آن نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است. بنـابراین گزینـهٔ ۴ پاسـخ است. برای سایر گزینه‌ها، مثال‌های نقض زیر را می‌توان در نظر گرفت:

گزینهٔ ۱)


گزینهٔ ۲)


گزینهٔ ۳)


۵- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط ⁕ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\text{Sin}۳x}{\sqrt{۱-\text{Cos}۳x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\text{Sin}۳x}{\sqrt{۲\text{Sin}^۲\frac{۳x}{۲}}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\text{Sin}۳x}{\sqrt{۲}\left|\text{Sin}\frac{۳x}{۲}\right|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\text{Sin}۳x}{-\sqrt{۲}\,\text{Sin}\frac{۳x}{۲}}$$

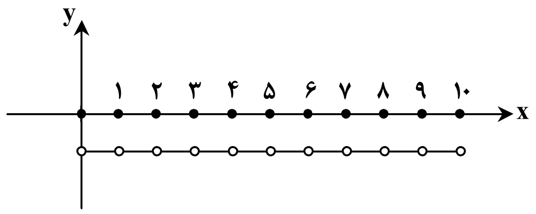
$$=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=-\frac{۲}{\sqrt{۲}}=-\sqrt{۲}\Rightarrow f(۰)=-\sqrt{۲}$$

« امتیاز پرسش های موجود در بانک سوال، منحصراً متعلق به موسسه گزینه دو است. چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی، کاغذی و ...) برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی ممنوع است (حتی با ذکر منبع) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند. مدارس شرکت کننده در آزمون ها و ارزشیابی های گزینه دو می توانند صرفاً برای دانش آموزان مدرسه خود که در آزمونها ثبت نام کرده اند، از خدمات بانک سوال استفاده نمایند. »

۶- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده ⁕ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

ابتدا تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را در سمت راست مبدأ مختصات رسم می‌کنیم:



$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in Z \\ -۱ & x\notin Z \end{cases}$$

مطابق شکل تابع $f(x)$ در نقاط صحیح ناپیوسته است و در خود نقطهٔ صفر نیز پیوستگی راست نـدارد. پـس در بـازهٔ $[۰,۳)$ دارای نقـاط ناپیوستگی $x=۰,۱,۲$ است. بنابراین $a=۳$ است.

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط ⁕ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

در تمامی نقاط از $f(x) \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}, x=-\frac{\pi}{۲}$ در R پیوسته باشد.

$$f(x) \text{ در } x=\frac{\pi}{۲} \text{ پیوسته باشد} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \operatorname{Cos} x=۰ \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} a\operatorname{Sin}x+b=a+b \quad \Rightarrow a+b=۰ \\ f(\frac{\pi}{۲})=۰ \end{cases}$$

$$f(x) \text{ در } x=-\frac{\pi}{۲} \text{ پیوسته باشد} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^+} a\operatorname{Sin}x+b=-a+b \\ \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^-} -۲\operatorname{Sin}x=۲ \quad \Rightarrow -a+b=۲ \\ f(-\frac{\pi}{۲})=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۲ \end{cases} \Rightarrow a=-۱, b=۱$$

« امتیاز پرسش های موجود در بانک سوال، منحصراً متعلق به موسسه گزینه دو است. چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی، کاغذی و ...) برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی ممنوع است (حتی با ذکر منبع) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند. مدارس شرکت کننده در آزمون ها و ارزشیابی های گزینه دو می توانند صرفاً برای دانش آموزان مدرسه خود که در آزمونها ثبت نام کرده اند، از خدمات بانک سوال استفاده نمایند. »

۸- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار ⁎ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^{2}+[x]}{ax^{3}+a}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^{2}+[(-1)^+]}{a(x^{3}+1)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^{2}-1}{a(x^{3}+1)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x-1)(x+1)}{a(x+1)(x^{2}-x+1)}=\frac{-2}{a(3)}=\frac{-2}{3a}$$

$$f(-1)=b$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{|x|-x^{2}}{|x+1|}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{-x-x^{2}}{-x-1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{-x\cancel{(1+x)}}{-\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to(-1)^-} x=-1$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=f(-1)\ \Rightarrow\ \frac{-2}{3a}=b=-1\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow\ a+b=-\frac{1}{3}$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار ⁎ حیطه: کاربرد ⁎ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

نکته: f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

برای پیوسته بودن باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع در $x=1$ با هم برابر باشند، پس داریم:

$$\begin{cases}f(1)=a-b(-1)+2=a+b+2\\ \lim_{x\to1^+} f(x)=a-b(-2)+2=a+2b+2\\ \lim_{x\to1^-} f(x)=0-b(-1)+1=b+1\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}a+b+2=b+1\\ a+2b+2=b+1\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}$$

بنابراین: $b-a=1$.

« امتیاز پرسش های موجود در بانک سوال، منحصراً متعلق به موسسه گزینه دو است. چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی، کاغذی و ...) برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی ممنوع است (حتی با ذکر منبع) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند. مدارس شرکت کننده در آزمون ها و ارزشیابی های گزینه دو می توانند صرفاً برای دانش آموزان مدرسه خود که در آزمونها ثبت نام کرده اند، از خدمات بانک سوال استفاده نمایند. »

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❊ حیطه: کاربرد ❊ حسابان ۱(فصل ۵◀درس ۵)**

نکته: f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

نکته: تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

نکته: تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

در تابع $f(x)$ می‌دانیم $f(۰)=۱$. حد راست و چپ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x+[x]}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۰}{x}=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{[x]}{x+[x]}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-۱}{x-۱}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

بنابراین فقط حد چپ تابع با مقدار تابع در $x=۰$ برابر است و تابع در $x=۰$ فقط دارای پیوستگی چپ است.

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❊ حسابان ۱(فصل ۵◀درس ۵)**

باید تابع در نقاط مرزی یعنی $x=۱$ و $x=-۱$ پیوسته باشد پس:

$$x=۱ \;: a+b=۱[۱^-] \Rightarrow a+b=۰$$
$$x=-۱ : -a+b=-۱[(-۱)^+]=-۱(-۱)=۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۱ \end{cases} \qquad a=-\frac{۱}{۲}\;\; b=\frac{۱}{۲}$$

$$x=۳ \to y=ax+b=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}(۳)+\frac{۱}{۲}=-۱$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ **مشخصات سؤال: ساده ❊ حیطه: دانش ❊ حسابان ۱(فصل ۵◀درس ۵)**

نکته: f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱) تابع در $x=۲$ دارای حد و پیوسته است. ✖

۲) تابع در $x=۲$ نه حد دارد و نه پیوسته است. ✖

۳) تابع در $x=۲$ حد دارد ولی پیوسته نیست. ✓

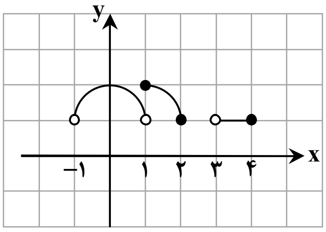
۴) تابع در $x=۲$ نه حد دارد و نه پیوسته است. ✖

« امتیاز پرسش های موجود در بانک سوال، منحصراً متعلق به موسسه گزینه دو است. چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی، کاغذی و ...) برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی ممنوع است (حتی با ذکر منبع) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند. مدارس شرکت کننده در آزمون ها و ارزشیابی های گزینه دو می توانند صرفاً برای دانش آموزان مدرسه خود که در آزمونها ثبت نام کرده اند، از خدمات بانک سوال استفاده نمایند. »

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده ❋ حیطه: دانش ❋ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

نکته: تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع $f(x)$ در هر نقطه از بازهٔ (a,b) پیوسته، در $x=a$ از راست و در $x=b$ از چپ پیوسته باشد.



با توجه به نکتهٔ بالا، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[۱,۲]$ پیوسته است؛ زیرا در بازهٔ $(۱,۲)$ پیوسته، در $x=۱$ از راست و در $x=۲$ از چپ پیوسته است. بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

دقت کنید که تابع $f(x)$ در همهٔ نقاط بازهٔ $[۱,۲]$ پیوسته نیست، زیرا در $x=۱$ فقط از راست و در $x=۲$ فقط از چپ پیوسته است.

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ حیطه: دانش ❋ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

نکته: f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

ابتدا حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۰$ پیدا می‌کنیم:

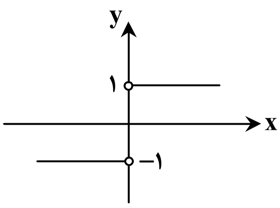
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{۳x^۲+x}{a|x|}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x(۳x+۱)}{-ax}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{۳x+۱}{-a}=\dfrac{-۱}{a}\\ f(۰)=b\\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(۲\operatorname{Cos}x-\operatorname{Sin}x)=۲\operatorname{Cos}۰-\operatorname{Sin}۰=۲\times ۱-۰=۲\end{cases}\Rightarrow \dfrac{-۱}{a}=b=۲\Rightarrow b=۲ \text{ و } a=-\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow a+b=\dfrac{۳}{۲}$$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده ❋ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۵)

ابتدا به نمودار تابع f دقت کنید:

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$



با توجه به نمودار تنها گزینهٔ ۳ پاسخ است. دقت کنید که تابع f در $x=۰$ تعریف نشده و در این نقطه نه از راست پیوستگی دارد و نه از چپ، بنابراین گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ نادرست هستند.

« امتیاز پرسش های موجود در بانک سوال، منحصراً متعلق به موسسه گزینه دو است. چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی، کاغذی و ...) برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی ممنوع است (حتی با ذکر منبع) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند. مدارس شرکت کننده در آزمون ها و ارزشیابی های گزینه دو می توانند صرفاً برای دانش آموزان مدرسه خود که در آزمونها ثبت نام کرده اند، از خدمات بانک سوال استفاده نمایند. »