۱

بازه و مجموعه

فصل ۱

بازه و مجموعه

مجموعه‌های زیر از مهم‌ترین مجموعه‌های اعداد هستند که با آن‌ها سر و کار داریم:

$\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\dots\}$: مجموعهٔ اعداد حسابی

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی

$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\}$: مجموعهٔ اعداد گویا

$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$: مجموعه اعداد صحیح

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$: مجموعهٔ اعداد حقیقی

$\mathbb{Q}'=\{a \mid a\notin\mathbb{Q}\}$: مجموعه اعداد گنگ

رابطه‌های زیر بین مجموعه‌های بالا برقرار است:

$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$$

نمادهای $\mathbb{Z}^+$، $\mathbb{Z}^-$، $\mathbb{Q}^+$، $\mathbb{Q}^-$، $\mathbb{R}^+$، $\mathbb{R}^-$ و ... را نیز می‌توان به کار برد. مثلاً $\mathbb{Z}^-$ یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح منفی. همچنین $\mathbb{Q}^+$ یعنی مجموعهٔ اعداد گویای مثبت و ... .

برخی از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی که بسیار کاربرد دارند، بازه‌ها هستند. اگر $a<b$، انواع بازه‌ها را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

(a,b) بازهٔ باز $=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$

$[a,b]$ بازهٔ بسته $=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$

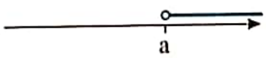
$[a,b)$ بازهٔ نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$

$(a,b]$ بازهٔ نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$

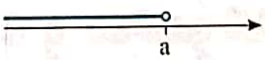
$[a,+\infty)$ بازهٔ نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}$

$(-\infty,a]$ بازهٔ نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$

$(a,+\infty)$ بازهٔ باز $=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$



$(-\infty,a)$ بازهٔ باز $=\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$



کل اعداد حقیقی را با بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ای که تعداد اعضایش عددی حسابی باشد، **مجموعه‌ای متناهی** است و مجموعه‌ای که متناهی نباشد، **مجموعه‌ای نامتناهی** است.

هر زیرمجموعه از مجموعه‌ای متناهی، خودش متناهی است. پس اگر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد، خودش هم نامتناهی است.

- هر مجموعه یا متناهی است یا نامتناهی.
- مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی‌اند. همچنین بازه‌ها، مجموعه‌هایی نامتناهی هستند.
- در هر موضوع، مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مورد بحث در آن موضوع زیرمجموعهٔ آن باشند، **مجموعهٔ مرجع** نامیده می‌شود.
- اگر A زیرمجموعهٔ دلخواهی از مجموعهٔ مرجع U باشد، مجموعهٔ $U-A$ را **متمم** A در U می‌نامند و با A' نشان می‌دهند. پس مجموعهٔ A' از همهٔ عضوهایی از U تشکیل شده است که عضو A نیستند.
- اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای آن را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.
- تعداد اعضای اجتماع دو مجموعهٔ A و B از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

- اگر A، B و C سه مجموعهٔ متناهی باشند، تعداد اعضای اجتماع آن‌ها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

- اگر A و B دو مجموعه باشند که عضو مشترک ندارند، گوییم A و B جدا از هم (مجزا) هستند. در این‌صورت $n(A\cap B)=0$.

آزمون ۱

بازه و مجموعه (۱)

پاسخ: ۲۸۸ تا ۲۸۹

محاسبات

۱- به‌ازای چند عدد طبیعی مانند n عدد $\frac{1}{4}$ در بازهٔ $(\frac{1}{n+3},\frac{1}{n+1}]$ قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲- اگر $0<a<1$، مجموعهٔ $(-a,a)\cap(-a^2,a^3)$ کدام است؟

۱) $\{0\}$ ۲) $(-a,a)$ ۳) $(-a^2,a^3)$ ۴) $(-a,-a^2)$

۳- اگر $A_n=[1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]$، حاصل $A_2\cup A_3\cup\dots\cup A_{10}$ کدام است؟

۱) $[\frac{9}{10},\frac{11}{10}]$ ۲) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ۳) $[\frac{1}{2},\frac{11}{10}]$ ۴) $[\frac{9}{10},\frac{3}{2}]$

۴- اگر $A=(-1,1]$، $B=[a,b)$، $A\cap B=[0,1]$ و $A\cup B=(-1,4)$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- اگر اشتراک دو بازهٔ $(-\infty,a+4]$ و $[-2a+1,+\infty)$ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

۶- اگر اشتراک دو بازهٔ $[-2,4)$ و $(2a,a)$ تهی نباشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(-2,0)$ ۳) $(-4,0)$ ۴) $(-\infty,-2)$

۷- اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{N}$ باشد، $A=\{1,3,4,5\}$، $B'=\{1,2,5,7\}$ و $C'=\{2,5\}$، مجموعهٔ $A-(B\cap C)$ کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{1,5\}$ ۳) $\{2,5\}$ ۴) $\{5\}$

۸- اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ باشد و $A=\{x\,|\,|x-5|>3\}$، مجموعهٔ A' چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۹- اگر $A\subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

۱) A' ۲) B' ۳) $A\cap B'$ ۴) $A'\cup B$

۱۰- اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه قطعاً متناهی است؟

۱) $A\cap B'$ ۲) $A\cup B$ ۳) $A'\cup B$ ۴) $A'\cap B$

۱۱- اگر A، B و C سه زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، $n(A)+n(B')=17$ و $n(B)+n(A')=13$، مقدار $n(C)+n(C')$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۲- اگر $n(A\cup B)+n(A\cap B)=24$ و $n(A)=2n(B)$، مقدار $n(B)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۳- در بررسی ۴۵ محصول معیوب یک کارخانه که عیوب A و B را دارند، مشخص شد ۳۰ عدد از محصولات، عیب A را دارند و ۲۰ عدد از آن‌ها فقط عیب A را دارند. چند محصول این شرکت فقط عیب B را دارند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۲۰

محاسبات

۱۴- اگر $\frac{n(A\cap B)}{4}=\frac{n(B)}{12}=\frac{n(A)}{7}$ و $n(A\cup B)=60$، مقدار $n(A)$ چقدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۸ ۴) ۲۴

۱۵- اگر مجموعهٔ مرجع U باشد، $n(U)=26$، $n(A\cup B)=14$ و $n(A)=n(A')$، مقدار $n(B-A)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶- اگر $n(A)=2n(B)$ و $n(A\cup B)=5n(A\cap B)=20$، مقدار $\frac{n(A-B)}{n(B-A)}$ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۷- اگر $n(A)=n(B)+3$، $n(A-B)=2n(B-A)$ و $n(A\cap B)=5$، مقدار $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۸- از ۱۰۰ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم ۸۵ نفر به ریاضی و ۷۰ نفر به فیزیک علاقه دارند. حداقل چند نفر به هر دو درس علاقه دارند؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۵

۱۹- اگر U مجموعهٔ مرجع باشد، $n(U)=23$، $n(A)=10$ و $n(B)=7$، بیشترین مقدار ممکن $n(A'\cap B')$ چقدر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۲۰- اگر $n(A)=3k-1$، $n(B)=3$ و $n(A\cap B)=k-2$، بیشترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

آزمون ۲ بازه و مجموعه (۲)

محاسبات

پاسخ: ۲۸۹ تا ۲۹۲

۱- اگر نقطهٔ وسط بازهٔ $[-a^۲, ۲a^۲+۱]$ روی محور اعداد حقیقی متناظر با عدد ۵ باشد، فاصلهٔ دو سر بازه از یکدیگر چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۹ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۲- اگر عدد a عضو بازهٔ $(۲a-۱, ۳-۳a)$ باشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-\infty, ۱)$ ۲) $(-\infty, \frac{۳}{۴})$ ۳) $(-\infty, \frac{۴}{۵})$ ۴) $(-\infty, ۰)$

۳- اگر $(b, ۴)\cap[-۲, a)=(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲})$، حاصل $(b, a)\cup(-۲a-۱, b)$ کدام است؟

۱) $(-۳, ۱)$ ۲) $(-۲, \frac{۱}{۲})$ ۳) $(۱, ۴)$ ۴) $(-۲, \frac{۱}{۲})-\{-\frac{۱}{۳}\}$

۴- اگر $[a, ۲]\cap[a+۲, b]=[-۲, ۱]$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) صفر

۵- اگر اجتماع دو بازهٔ $(-\infty, ۲a+۱]$ و $(۳a-۱, +\infty)$ برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی شود، کدام یک درست است؟

۱) $a=۲$ ۲) $a>۲$ ۳) $a\leq ۲$ ۴) $a<۲$

۶- اگر اشتراک دو بازهٔ $[۱-۲a, ۱+۲a]$ و $[-۵, -۳]$ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۳

۷- اگر مجموعهٔ مرجع $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد، $A=\{۱, ۳, ۵\}$، $B=\{۳, ۵\}$ و $C=\{۱, ۲, ۵\}$، مجموعهٔ $C\cap(A\cap B)'$ کدام است؟

۱) $\{۱\}$ ۲) $\{۱, ۲\}$ ۳) $\{۱, ۵\}$ ۴) $\{۲, ۵\}$

۸- اگر $A=(۱, ۲]$، $B=(-۱, ۱]$ و $C=(-\infty, ۰)$، حاصل $(A'-B')-C'$ کدام است؟

۱) $(-۱, ۱]$ ۲) $(۰, ۲)$ ۳) $(-۱, ۲)$ ۴) $(-۱, ۰)$

۹- اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد، $A=\{۱, ۶, ۷\}$، $B=\{۳, ۵, ۷\}$ و $C'=\{۱, ۴, ۵, ۶\}$، مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰- اگر $A=[n-۱, ۲n-۱]$ و $B=[۵, ۷]$ دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، n چند عدد طبیعی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۱- کدام‌یک درست است؟

۱) اگر $A\cup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A و B نامتناهی‌اند.

۲) اگر $A\cap B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی‌اند.

۳) اگر $A\cup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی‌اند.

۴) اگر $A\cap B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A یا B می‌توانند متناهی باشند.

محاسبات

۱۲- اگر $n(A\cup B)+n(A\cap B)=24$ و $n(A)-n(B)=4$، مقدار $n(B)$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۳- اگر $A\subseteq B$، $n(A')=14$، $n(B')=10$ و $n(A\cup B)=9$، مقدار $n(A)$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۴- اگر $n(A)+n(B)=24$، $n(A\cup B)=16$ و $n(B-A)=3$، مقدار $n(A-B)$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۵- اگر $n(A\cap B)=2n(A-B)=3n(B-A)$ و $n(A\cup B)=44$، مقدار $n(B)$ چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۱۶- در کلاسی که ۳۰ دانش‌آموز دارد، ۱۸ نفر چای دوست دارند و ۱۵ نفر قهوه. حداکثر چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس نه چای دوست دارند نه قهوه؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

۱۷- اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد، $n(A)=5$ و $n(B)=7$، مجموع بیشترین مقدار و کمترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۸- اگر $A\subseteq B$ و $n(A)+2n(B)=14$، کمترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۹- اگر $n(A)=2n(B)$ و $n(A\cup B)=35$، بیشترین مقدار ممکن $n(A-B)$ چقدر است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۲۰- اگر $5n(A\cap B)=3n(A)=2n(B)$، کمترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۷

آزمون ۱

۱- گزینهٔ (۲) عدد $\frac{۱}{۴}$ باید از $\frac{۱}{n+۳}$ بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۳}<\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۳>۴\Rightarrow n>۱$$

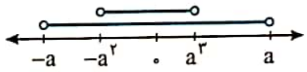
عدد $\frac{۱}{۴}$ باید از $\frac{۱}{n+۱}$ بیشتر نباشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۱}\ge\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۱\le ۴\Rightarrow n\le ۳$$

بنابراین عدد طبیعی n می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۲- گزینهٔ (۳) چون $۰<a<۱$، پس $a^۳<a$ و $-a<-a^۲$، بنابراین

$$(-a,a)\cap(-a^۲,a^۳)=(-a^۲,a^۳)$$



۳- گزینهٔ (۲) مجموعه‌های $A_۲$، $A_۳$، ... و $A_{۱۰}$ به شکل زیر هستند:

$$A_۲=[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}],\quad A_۳=[\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳}],\quad \dots,\quad A_{۱۰}=[\frac{۹}{۱۰},\frac{۱۱}{۱۰}]$$

واضح است که مجموعهٔ $A_۲$ شامل تمام مجموعه‌های دیگر است. پس اجتماع تمام این مجموعه‌ها همان $A_۲$ است.

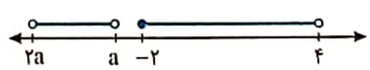
۴- گزینهٔ (۴) از تساوی $(-۱,۱]\cap[a,b)=[۰,۱]$ معلوم می‌شود $a=۰$. از تساوی $(-۱,۱]\cup[a,b)=(-۱,۴)$ معلوم می‌شود $b=۴$. بنابراین $a+b=۴$.

۵- گزینهٔ (۴) اشتراک این دو بازه تنها زمانی تک‌عضوی است که ابتدای بازهٔ $[-۲a+۱,+\infty)$ بر انتهای بازهٔ $(-\infty,a+۴]$ منطبق باشد. در نتیجه

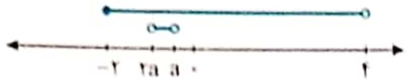
$$-۲a+۱=a+۴\Rightarrow a=-۱$$

۶- گزینهٔ (۲) چون $(۲a,a)$ یک بازه است، پس $۲a<a$ و در نتیجه $a<۰$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $a\le -۲$ اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(۲a,a)$ تهی است:

$a=-۲:$


$a<-۲:$


بنابراین $-۲<a$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $-۲<a<۰$، اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(۲a,a)$ تهی نیست.



۷- گزینهٔ (۲) توجه کنید که

$$B=\{۳,۴,۶,۸,۹,۱۰,\dots\}$$

$$C=\{۱,۳,۴,۶,۷,۸,۹,\dots\}$$

بنابراین $B\cap C=\{۳,۴,۶,۸,۹,\dots\}$ و در نتیجه

$$A-(B\cap C)=\{۱,۵\}$$

۸- گزینهٔ (۱) **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$|x-۵|>۳\Rightarrow\begin{cases}x-۵>۳\\x-۵<-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۸\\x<۲\end{cases}$$

بنابراین $A=\{\dots,۰,۱,۹,۱۰,\dots\}$. در نتیجه

$$A'=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$$

یعنی $n(A')=۷$.

راه‌حل دوم چون $A=\{x\,|\,|x-۵|>۳\}$، پس

$$A'=\{x\,|\,|x-۵|\le ۳\}$$

از نابرابری $|x-۵|\le ۳$ نتیجه می‌شود

$$-۳\le x-۵\le ۳\Rightarrow ۲\le x\le ۸$$

مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ است، پس

$$A'=\{۲,۳,\dots,۸\}\Rightarrow n(A')=۷$$

۹- گزینهٔ (۴) چون A نامتناهی است، پس B هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعهٔ دیگری نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ نامتناهی است.

۱۰- گزینهٔ (۱) B نامتناهی است، پس B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون A متناهی است، پس $A\cap B'$ متناهی است. توجه کنید که چون A متناهی است، A' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. پس متناهی یا نامتناهی بودن $A'\cap B$ مشخص نیست. همچنین چون B نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ و $A\cup B$ نامتناهی هستند.

۱۱- گزینهٔ (۴) توجه کنید که

$$\begin{cases}n(A)+n(B')=۱۷\\n(B)+n(A')=۱۳\end{cases}\Rightarrow n(A)+n(A')+n(B)+n(B')=۳۰$$

$$n(U)+n(U)=۳۰\Rightarrow n(U)=۱۵$$

بنابراین $n(C)+n(C')=n(U)=۱۵$.

۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

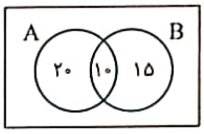
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A\cup B)+n(A\cap B)=2n(B)+n(B)$$

$$24=3n(B)\Rightarrow n(B)=8$$

۱۳- گزینهٔ ۱ تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با ۲۰−۳۰، یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب B را دارند برابر ۲۵=۲۰−۴۵ است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب A را نیز دارند. پس ۱۵ محصول فقط عیب B را دارند.



۱۴- گزینهٔ ۳ مقدار مشترک نسبت‌ها را برابر t می‌گیریم. در این صورت

$$n(A)=7t,\quad n(B)=12t,\quad n(A\cap B)=4t$$

در نتیجه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$60=7t+12t-4t\Rightarrow 60=15t\Rightarrow t=4$$

بنابراین $n(A)=7t=28$.

۱۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$n(A)+n(A')=n(U)$$

$$2n(A)=26\Rightarrow n(A)=13$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$14=13+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(B)-n(A\cap B)=1\Rightarrow n(B-A)=1$$

۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$20=2n(B)+n(B)-4\Rightarrow 3n(B)=24$$

$$n(B)=8\Rightarrow n(A)=16$$

بنابراین

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=16-4=12$$

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=8-4=4$$

در نتیجه $\frac{n(A-B)}{n(B-A)}=\frac{12}{4}=3$.

۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$n(A-B)=2n(B-A)$$

$$n(A)-n(A\cap B)=2n(B)-2n(A\cap B)$$

$$n(A)=2n(B)-n(A\cap B)=2n(B)-5$$

بنابراین

$$\begin{cases} n(A)=2n(B)-5 \\ n(A)=n(B)+3 \end{cases}$$

$$n(A)=11,\ n(B)=8$$

در نتیجه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=11+8-5=14$$

۱۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$100-x=85+70-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=55+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=0$، بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A\cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$n(A')=n(U)-n(A)=23-10=13$$

$$n(B')=n(U)-n(B)=23-7=16$$

اکنون توجه کنید که

$$n(A'\cap B')\le n(A')=13$$

۲۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=3k-1+3-(k-2)=2k+4$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cap B)\le n(B)$$

$$k-2\le 3\Rightarrow k\le 5$$

بنابراین

$$n(A\cup B)=2k+4\le 2\times 5+4=14$$

آزمون ۲

۱- گزینهٔ ۳ نقطهٔ وسط پاره‌خط، متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه است، یعنی

$$\frac{2a^2+1+(-a^2)}{2}=\frac{a^2+1}{2}=5$$

$$a^2=9$$

بنابراین بازهٔ مورد نظر $[-9,19]$ است و فاصلهٔ دو سر آن از یکدیگر برابر است با $19-(-9)=28$.

۲- گزینهٔ ۲ چون a عضو بازه است، پس

$$۲a-۱<a<۳-۳a$$

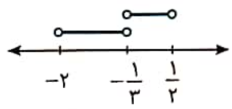
از نابرابری $۲a-۱<a$ نتیجه می‌شود $a<۱$ و از نابرابری $a<۳-۳a$ نتیجه می‌شود $a<\frac{۳}{۴}$. بنابراین باید $a<\frac{۳}{۴}$. اکنون توجه کنید که شرط اینکه $(۲a-۱,۳-۳a)$ بازه باشد این است که $۲a-۱<۳-۳a$، یعنی $a<\frac{۴}{۵}$، که اگر $a<\frac{۳}{۴}$، این شرط هم برقرار است. بنابراین مجموعهٔ مقادیر ممکن a بازهٔ $(-\infty,\frac{۳}{۴})$ است.

۳- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می‌شود

$$(b,۴)\cap[-۲,a)=(b,a)$$

بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-\frac{۱}{۳}$. اکنون می‌توان نوشت

$$(b,a)\cup(-۲a-۱,b)=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})\cup(-۲,-\frac{۱}{۳})=(-۲,\frac{۱}{۲})-\{-\frac{۱}{۳}\}$$

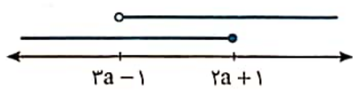


۴- گزینهٔ ۱ چون اشتراک دو بازه از عدد ۲− شروع می‌شود و $a<a+۲$، پس $a+۲=-۲$، یعنی $a=-۴$. بنابراین تساوی داده شده به صورت زیر است:

$$[-۴,۲]\cap[-۲,b]=[-۲,۱]$$

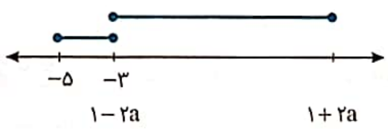
چون اشتراک سمت چپ به عدد ۱ ختم شده است و $۲>۱$، پس $b=۱$. در نتیجه $a-b=-۵$.

۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم می‌شود اجتماع دو بازهٔ داده شده وقتی برابر $\mathbb{R}$ می‌شود که $۳a-۱\leq ۲a+۱$، یعنی $a\leq ۲$.



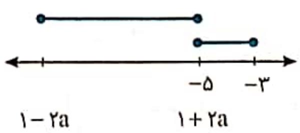
۶- گزینهٔ ۳ در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه مجموعه‌ای تک‌عضوی می‌شود.

حالت اول



$$۱-۲a=-۳\Rightarrow a=۲$$

حالت دوم



$$۱+۲a=-۵\Rightarrow a=-۳$$

اکنون توجه کنید که شرط اینکه $[۱-۲a,۱+۲a]$ بازه باشد این است که $۱+۲a>۱-۲a$، یعنی $a>۰$. بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای a برابر ۲ است.

۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $A\cap B=\{۳,۵\}$، پس $(A\cap B)'=\{۱,۲,۴,۶\}$ و

$$C\cap(A\cap B)'=\{۱,۲\}$$

۸- گزینهٔ ۴ ابتدا مجموعه‌های A'، B' و C' را پیدا می‌کنیم:

$$A'=(-\infty,۱]\cup(۲,+\infty)$$

$$B'=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$$

$$C'=[۰,+\infty)$$

بنابراین

$$A'-B'=(-۱,۱]$$

و در نتیجه

$$(A'-B')-C'=(-۱,۰)$$

۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** مجموعهٔ مرجع $\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$ است، پس

$$B'=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}\ ,\quad C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$$

در نتیجه

$$A\cap B'=\{۱,۶\}$$

$$(A\cap B')\cup C=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$$

بنابراین مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$، هفت عضو دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$A\cap B'=A-B=\{۱,۶\}$$

$$C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$$

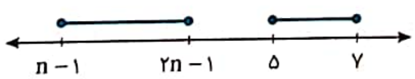
بنابراین

$$(A\cap B')\cup C=\{۱,۶\}\cup\{۲,۳,۷,۸,۹\}$$

$$=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$$

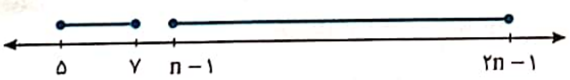
۱۰- گزینهٔ ۴ اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول



$$۲n-۱<۵\Rightarrow n<۳$$

حالت دوم



$$n-۱>۷\Rightarrow n>۸$$

بنابراین n اعداد طبیعی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.

۱۱- گزینهٔ ۳ اگر $A\cup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B قطعاً متناهی هستند. چون اگر یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، اجتماع آن با هر مجموعهٔ دیگری نامتناهی می‌شود.

۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

پس

$$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲۴$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} n(A)+n(B)=۲۴ \\ n(A)-n(B)=۴ \end{cases} \Rightarrow n(B)=۱۰$$

۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow n(A\cup B)=n(B)$$

طبق فرض $n(A\cup B)=۹$. پس $n(B)=۹$. از طرف دیگر،

$$n(A)+n(A')=n(B)+n(B')$$

$$n(A)+۱۴=۹+۱۰\Rightarrow n(A)=۵$$

۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۱۶=۲۴-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۸$$

از طرف دیگر،

$$n(B-A)=n(B)-n(B\cap A)\Rightarrow ۳=n(B)-۸\Rightarrow n(B)=۱۱$$

در نتیجه $n(A)=۲۴-n(B)=۱۳$. به این ترتیب،

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۱۳-۸=۵$$

۱۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cap B)=۲n(A-B)=۲n(A)-۲n(A\cap B)$$

$$n(A)=\frac{۳}{۲}n(A\cap B)$$

همین‌طور

$$n(A\cap B)=۳n(B-A)=۳n(B)-۳n(A\cap B)$$

$$n(B)=\frac{۴}{۳}n(A\cap B)$$

اکنون توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۴۴=\frac{۳}{۲}n(A\cap B)+\frac{۴}{۳}n(A\cap B)-n(A\cap B)$$

$$=\frac{۱۱}{۶}n(A\cap B)$$

$$n(A\cap B)=۲۴$$

در نتیجه

$$n(B)=\frac{۴}{۳}n(A\cap B)=۳۲$$

۱۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

$$=۱۲+۱۵-n(A\cup B)=۲۷-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\geq n(B)=۱۵$. بنابراین

$$n(A\cap B)=۲۷-n(A\cup B)\leq ۲۷-۱۵=۱۲$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر $A\subseteq B$، این وضعیت پیش می‌آید).

۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۲-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A\cup B)=۱۲-n(A\cap B)\leq ۱۲$$

و در این نابرابری تساوی وقتی پیش می‌آید که $n(A\cap B)=۰$، یعنی $A\cap B=\varnothing$. از طرف دیگر،

$$n(A\cap B)\leq n(A)=۵$$

البته، توجه کنید که در این نابرابری تساوی وقتی برقرار است که $A\cap B=A$، یعنی $A\subseteq B$، که طبق فرض درست نیست. بنابراین $n(A\cap B)\leq ۴$ و در نتیجه

$$n(A\cup B)=۱۲-n(A\cap B)\geq ۸$$

یعنی بیشترین مقدار $n(A\cup B)$ برابر ۱۲ و کمترین مقدار آن برابر ۸ است و مجموع آن‌ها برابر ۲۰ است.

۱۸- گزینهٔ ۳ چون $A\subseteq B$، پس $A\cup B=B$. از طرف دیگر،

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\leq n(B)$$

اکنون توجه کنید که

$$۱۴=n(A)+۲n(B)\leq n(B)+۲n(B)=۳n(B)$$

و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\geq ۵$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(B)\geq ۵$$

۱۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۳۵=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A)-n(A\cap B)=۳۵-n(B)$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)\leq n(A)+n(B)\Rightarrow ۳۵\leq ۲n(B)+n(B)$$

بنابراین $۳n(B)\geq ۳۵$. در نتیجه، چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\geq ۱۲$. به این ترتیب

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۳۵-n(B)$$

در نتیجه

$$n(A-B)\leq ۳۵-۱۲=۲۳$$