آشنایی با جبر

مخصوص شرکت کنندگان مرحله اول المپیاد کشوری ریاضی

مؤلف

خشایار خسروی

دی ۱۳۸۸

۱-چندجمله ای

به هر عبارت به شکل $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ که در آن a_i ها اعدادی حقیقی هستند و علاوه بر آن $a_n \neq 0$ یک چندجمله ای با ضرایب حقیقی و از درجه ی n گفته می شود .در حالت خاص اگر همه ی a_i ها اعدادی صحیح باشند به این چند جمله ای یک چندجمله ای با ضرایب صحیح گفته می شود .

فرض کنید دو چندجمله ای با ضرایب حقیقی مانند $p(x), q(x)$ در اختیار داریم . می گوییم چندجمله ای $p(x)$ بر چندجمله ای $q(x)$ بخش پذیر است اگر چندجمله ای $h(x)$ با ضرایب حقیقی موجود باشد که :

$$p(x) = q(x)h(x)$$

در حالت کلی اگر دو چند جمله ای با ضرایب حقیقی مانند $p(x), q(x)$ در اختیار داشته باشیم چندجمله ای های یکتای $h(x), r(x)$ با ضرایب حقیقی وجود دارند دارند که :

$$\deg(r) < \deg(q) \qquad , \qquad p(x) = q(x)h(x) + r(x)$$

که منظور از $\deg(u)$ درجه ی چندجمله ای $u(x)$ است .

می توان با استفاده از بخش پذیری ثابت کرد که هر چندجمله ای ناصفر(چندجمله ای $p(x) = 0$ را چندجمله ای ثابت صفر می نامیم) از درجه n حداکثر n ریشه ی حقیقی (دقیقا n ریشه ی مختلط) دارد پس اگر دو چندجمله ای مانند $f(x), g(x)$ در اختیار داشته باشیم و تعریف کنیم $\alpha = \max(\deg(f), \deg(g))$ در این صورت اگر دو چندجمله ای $f(x), g(x)$ در بیش از α نقطه با هم برابر باشند آنگاه دو چندجمله ای همواره با هم برابر هستند (کافی است چندجمله ای $h(x) = f(x) - g(x)$ را در نظر بگیرید و توجه کنید که این چندجمله ای بیش از درجه ی خود ریشه دارد پس چندجمله ای صفر است یعنی $f(x) \equiv g(x)$) . وقتی می گوییم دو چندجمله ای با هم برابر هستند یعنی اینکه برای هر عدد حقیقی باهم برابرند در نتیجه طبق چیزی که در بالا گفتیم این دو چندجمله ای کاملا مشابه هستند یعنی اولا درجه هایشان با هم برابر هستند و ثانیا ضرایب متناظر با هم برابرند .

مسئله : اگر چندجمله ای ax^3+bx+c بر x^2+tx+1 بخش پذیر باشد آنگاه کدام یک از موارد زیر صحیح است ؟(مرحله اول المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۴)

الف) $a^2-2c \ge b$ ب) $a+c>3$ ج) $a^2-c \ge ab$ د) $a^2+c^2=ab$

ه) $a^2-c^2=ab$

راه حل : گزینه ی ه صحیح است .

توجه کنید که طبق چیز هایی که در بالا بیان کردیم چندجمله ای $h(x)$ وجود دارد که :

$$ax^3+bx+c=(x^2+tx+1)h(x)$$

می توانید ثابت کنید که اگر دو چندجمله ای از درجه های m,n داشته باشیم حاصلضربشان حتما از درجه $m+n$ است . در نتیجه اینکه چندجمله ای ax^3+bx+c با $(x^2+tx+1)h(x)$ برابر هستند یعنی اینکه درجه هایشان مساوی است . این بدین معناست که درجه ی h از ۱ بیشتر نیست . پس می توانیم بنویسیم $h(x)=rx+s$ که r,s حقیقی هستند . اکنون ضرایب متناظر را محاسبه و برابر قرار می دهیم :

$$ax^3+bx+c=(x^2+tx+1)h(x)=(x^2+tx+1)(rx+s)=rx^3+(s+rt)x^2+(st+r)x+s$$

پس می توانیم نتیجه بگیریم که روابط زیر برقرار هستند :

$$\left.\begin{aligned} a&=r\\ 0&=s+rt\\ b&=st+r\\ c&=s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c+at=0 \Rightarrow t=-\dfrac{c}{a} \Rightarrow a^2-c^2=ab \\ ct+a=b \end{cases}$$

در نتیجه گزینه ه همواره درست است . کافی است برای بقیه موارد مثال نقض بسازید که این کار را به خود شما واگذار می کنیم . توجه کنید در بالا $a \neq 0$ زیرا در غیر اینصورت یکی از درجه ی یکی از چندجمله ای ها ۱ و درجه ی دیگری حداقل ۲ بود که امکان نداشت با هم برابر باشند . در نتیجه مجاز به تقسیم کردن رابطه بر a بودیم .

تمرین : فرض کنید دو چندجمله ای $f(x),g(x)$ با ضرایب صحیح بوده و $\frac{f(k)}{g(k)}$ برای هر عدد طبیعی k صحیح باشد . در اینصورت کدامیک از گزاره های زیر درست است ؟ (مرحله اول ریاضی ایران سال ۱۳۷۴)

الف) $\frac{f(\frac{1}{n})}{g(\frac{1}{n})}$ برای هر عدد طبیعی n صحیح است .

ب) $f(x)$ بر $g(x)$ بخش پذیر است .

ج) $\frac{f'(k)}{g'(k)}$ برای هر k صحیح , صحیح است . ($f'(x)$ مشتق چندجمله ای $f(x)$ است)

د) $\lim_{k\to\infty}\frac{f(k)}{g(k)}=\infty$

ه)درجه ی $g(x)$ صفر یا یک است .

۲-ضرایب چندجمله ای ها

اکنون که با چندجمله ای ها آشنا شدید می خواهیم خاصیت های ضرایب چندجمله ای ها را بررسی کنیم . در این بخش خیلی معلومات خاصی نیاز ندارید فقط کافی است قدرت تحلیل مناسبی داشته باشید ولی اتحاد زیر در برخی موارد به شما کمک می کند :

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_{n,i}a^ib^{n-i}$$

که در آن $C_{n,i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ است .

سعی می کنیم در یک مثال منظورمان را توضیح دهیم :

مسئله : ضریب x^5 در چندجمله ای $(1+x^4+x^8)^2$ $(1+2x+3x^2+4x^3+...+1382x^{1381})^2$ چند است ؟

الف)۲۰ ب)۳۲ ج)۴۲ د)۶۴ ه)۷۰

راه حل : گزینه د صحیح است . توجه کنید که اگر بخواهید کل چندجمله ای را محاسبه کنید بدون شک خیلی وقت گیر و اشتباه است . از ما فقط ضریب x^5 را خواسته اند پس باید یک عبارت از مجذور پرانتز اول و یک عبارت از مجذور پرانتز دوم به نحوی انتخاب کنیم که جمع توان هایشان 5 باشد . مثلا اگر خوب دقت کنید زمانی که $(1+x^4+x^8)^2$ را باز می کنید تنها عبارت هایی که توانشان از ۵ بیشتر است عبارت هستند از 1 و $2x^4$ در نتیجه کافی است فقط ببینیم ضریب x^5 و x در مجذور پرانتز اول چقدر است . توجه کنید باز هم برای اینکار کافی است فقط دقت خود را محدود به $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)^2$ کنیم زیرا بقیه ی عبارت ها درجه ی بیشتر از ۵ دارند و در نتیجه هنگامی که در یک عبارت که درجه ی آن هم نامنفی است ضرب می شوند درجه شان بیشتر از ۵ باقی می ماند . حال برای محاسبه ضریب هایی که می خواستیم می نویسیم :

$$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)$$

برای محاسبه ضریب x که از درجه ۱ است . یا باید یک عبارت از درجه ۱ از پرانتز اول و یک عبارت از درجه صفر از پرانتز دوم انتخاب کنیم یا اینکه یک عبارت از درجه صفر از پرانتز اول و یک عبارت از درجه ۱ از پرانتز دوم انتخاب کنیم در نتیجه ضریب x برابر است : $1\times2+2\times1=4$. به همین ترتیب برای محاسبه ضریب x^5 هم باید مشابها یا از پرانتز اول درجه صفر از پرانتز دوم درجه ۵ یا از پرانتز اول درجه ۱ از پرانتز دوم درجه ۴ یا ... و یا از پرانتز اول درجه ۵ و از پرانتز دوم درجه ۰ انتخاب کنیم . در نتیجه ضریب x^5 عبارتست از :

$$1\times6+2\times5+3\times4+4\times3+5\times2+6\times1=56$$

اکنون که ضرایب x^5, x را به دست آوردیم در نتیجه ضریب x^5 در کل عبارتست از : $4\times2+56\times1=64$.

۳ - دستگاه معادلات

در حل دستگاه های معادلات معمولا روش خیلی خاصی برای حل وجود ندارد ولی در برخی موارد جمع یا تفریق کردن معادلات به ما در حل کمک می کند . برخی اوقات هم در نظر گرفتن ترتیب در حل معادلات بسیار مناسب است . فقط توجه داشته باشید که اگر ترتیبی در نظر می گیرید نباید خللی به کلیت مسئله وارد کند . مثلا دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 2b \\ b^2 - 1 = 2c \\ c^2 - 1 = 2a \end{cases}$$

در این دستگاه در مرحله اول از آنجایی که هر کدام از a,b,c که بزرگتر باشند و ما آن را بزرگتر در نظر بگیریم در بقیه راه حل تفاوتی ایجاد نمی کند در نتیجه می توانیم بدون وارد شدن اشکال به کلیت مسئله فرض کنیم $a \ge b, a \ge c$ اما نمی توانیم فرض کنیم $a \ge b \ge c$ زیرا این موضوع به کلیت مسئله ایراد وارد می کند .

مسئله : دستگاه معادلات روبرو در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد ؟(مرحله اول ریاضی سال ۱۳۸۶)

الف)۱ ب)۲ ج)۳ د)۴ ه)جواب ندارد

$$\begin{cases} x - 1 = yz \\ y - 1 = zx \\ z - 1 = xy \end{cases}$$

راه حل : گزینه ج صحیح است .

کافی است معادله ی دوم را از معادله اول کم کنیم در نتیجه : $(x-y) = z(y-x)$. یعنی یا $x = y$ و یا $z = -1$ ابتدا حالت اول را در نظر می گیریم . با جایگذاری $x = y$ در دستگاه معادلات :

$$\begin{cases} x-1=xz \\ z-1=x^2 \end{cases}$$

در نتیجه باز هم با کم کردن معادله دوم از معادله اول داریم : $(x-z)=x(z-x)$ در نتیجه باز هم یا $x=-1$ و یا $x=z$. اگر $x=-1$ در آن صورت $z=2$ در نتیجه جواب $(x,y,z)=(-1,-1,2)$ به دست می آید . اگر $x=z$ در آن صورت $x^2-x+1=0$ که می دانیم ریشه ی حقیقی ندارد .

اکنون حالت دوم را در نظر می گیریم . با جایگذاری $z=-1$ به دستگاه معادلات زیر می رسیم :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$$

در نتیجه x,y ریشه های معادله ی $a^2-a+2=0$ هستند در نتیجه : $(x,y)=(-1,2),(x,y)=(2,-1)$ پس معادله دقیقا ۳ جواب دارد .

راه حل دوم: بنابر تقارن مسئله نسبت به متغیرها، می توان فرض کرد که $x\geq \max(y,z)$. x نمی تواند منفی باشد(چرا؟). از طرفی $(y-z)=x(z-y)$. پس لزوما $y=z$ و در نتیجه مسئله ما معادل می شود با حل معادله

$$\begin{cases} x-1=xz \\ z-1=x^2 \end{cases}$$

که مشابه راه حل قبل می توان آن را حل نمود.

۴ - اتحاد اویلر

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

این اتحاد مبنای حل بسیاری از معادلات است در واقع اگر $x^3+y^3+z^3=3xyz$ آنگاه $x+y=z=0$ یا $x=y=z$. با حل تمرین زیر با کاربرد این اتحاد در حل معادلات آشنا خواهید شد :

تمرین : دستگاه معادلات زیر در اعداد حقیقی چند جواب دارد ؟ (مرحله اول ریاضی سال ۱۳۸۲)

$$\begin{cases} 1+a^3+3ab=b^3 \\ 1+a^5=b^5 \end{cases}$$

الف) صفر ب)۱ ج)۲ د)۳ ه)نامتناهی جواب

راه حل:گزینه ج صحیح است. طبق معادله اول می توان گفت که $1+a-b=0$ یا $a=-b=1$. به راحتی می توان مشاهده کرد که حالت دوم برقرار نیست. پس لزوما حالت اول برقرار است. در این صورت طبق معادله دوم خواهیم داشت:

$$(a+1)^5-a^5=1 \Rightarrow 5a^4+10a^3+10a^2+5a=0 \Rightarrow 5a(a+1)(a^2+a+1)=0$$

در نتیجه با توجه به مثبت بودن پرانتز آخر عبارت فوق، می توان گفت $a=0$ یا $a=-1$. پس دستگاه فوق دارای ۲ جواب است.

۵-نابرابری ها

از نابرابری های مهم می توان به نامساوی حسابی-هندسی و کوشی شوارتز اشاره کرد :

(نامساوی حسابی – هندسی) $$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

(نامساوی کوشی شوارتز) $$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$$

توجه کنید نامساوی حسابی-هندسی هنگامی درست است که همه a_i ها مثبت باشند . اما نا مساوی کوشی شوارتز برای همه اعداد حقیقی درست است .

مسئله : بیشترین مقدار $ab+bc+cd$ برای $a,b,c,d \geq 0$ و $a+b+c+d=1$ چند است ؟(مرحله اول ریاضی سال ۱۳۸۶)

الف)1 ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{2}{9}$ ه) $\frac{3}{16}$

راه حل : گزینه ج صحیح است . کافی است توجه کنید که :

$$ab+bc+cd \leq ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)$$

طبق نامساوی حسابی هندسی :

$$\frac{(a+c)+(b+d)}{2} \geq \sqrt{(a+c)(b+d)} \Rightarrow \sqrt{(a+c)(b+d)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow (a+c)(b+d) \leq \frac{1}{4}$$

اکنون کافی است برای حالت $\frac{1}{4}$ یک حالت تساوی مثال بزنیم . در نتیجه کافی است قرار دهیم :

$a = c = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, d = 0$.

در نتیجه گزینه ج صحیح است .

تمرین : معادله $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{1376}} = \frac{1376}{a_1+a_2+\ldots+a_{1376}}$ که در آن $1 = a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{1376}$ روی اعداد حقیقی چند جواب دارد ؟(مرحله اول ریاضی سال ۱۳۷۶)

الف) 0 ب)1 ج)$1376!$ د)بی نهایت ه) $2\times(1376!)$

۶ - قدر مطلق

احتمالا با قدرمطلق در ریاضیات دبیرستان به طور وسیع و عمده آشنا شده اید . فقط کافی است دقت کنید که :

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

در نتیجه قدر مطلق یک عدد همواره نا منفی است .

مسئله : معادله $\left|2-\left||a|+3\right|\right| = 1$ چند جواب حقیقی دارد ؟ (مرحله اول ریاضی سال ۱۳۸۶)

الف)۱ ب)۲ ج)۳ د)۸ ه)جواب ندارد

راه حل : گزینه الف صحیح است .

توجه کنید قدرمطلق هر عددی نامنفی است پس : $|a|+3\geq 3 \Rightarrow \left||a|+3\right|\geq 3 \Rightarrow 2-\left||a|+3\right|\leq -1 \Rightarrow \left|2-\left||a|+3\right|\right|\geq 1$

توجه کنید تساوی هنگامی رخ می دهد که در همه ی رابطه ها تساوی رخ دهد و خصوصا $|a|=0$ که این یعنی $a=0$.در نتیجه معادله تنها یک جواب دارد و گزینه الف صحیح است .

۷-تعداد جواب های یک معادله

بعضی مواقع به معادلاتی بسیار دشوار بر می خوریم که پیدا کردن جواب هایشان تقریبا غیرممکن به نظر می رسد . اما از ما تعداد جواب ها را خواسته اند . در این موارد سعی می کنیم با رسم نمودار ها و تقاطع دادن آنها تعداد نقاط تقاطع یعنی تعداد جواب ها را به دست آوریم . مثلا معادله $\tan(x)=x$ را در نظر بگیرید . فرض کنید می خواهیم تعداد جواب های آن را در بازه $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ به دست آوریم . توجه کنید حل معادله تقریبا غیر ممکن به نظر می رسد . در این حالت دو تابع مانند $f(x)=x$ و $g(x)=\tan(x)$ را در نظر می گیریم . با نمودار های هر دو تابع آشنا هستیم . در نتیجه کافی است دو نمودار را رسم کنیم و تعداد تقاطع هایشان را در بازه ی خواسته شده بیابیم . توجه کنید دقیق رسم کردن توابع تا حد ممکن در این مسائل احتمال خطا را کاهش می دهد .

تمرین : معادله $[\sin(x)]+\sin(x)=\left[\frac{x}{3}\right]+\frac{x}{3}$ چند جواب حقیقی دارد ؟ ($[a]$ جز صحیح a است) (مرحله اول ریاضی سال ۱۳۸۳)

الف)جواب ندارد　　ب)یکی　　ج)دوتا　　د)سه تا　　ه)پنج تا

۸-تابع و معادله تابعی

در ریاضیات معمولا ما با توابع سر و کار داریم . منظور از معادله ی تابعی یافتن همه ی توابعی است که در شرط خاص یا شرایط خاصی صدق می کنند . در بررسی تابع و همچنین حل معادلات تابعی بعضی از ویژگی

های تابع مثلا یک به یک یا پوشا بودن , متناوب بودن , کران دار بودن , صعودی یا نزولی بودن و خیلی موارد دیگر به کار ما می آیند . در معادلات تابعی به دست آوردن مقدار تابع در برخی نقاط معمولا کمک زیادی به حل می کند .

مسئله : چند تابع $f: N\cup\{0\}\to N\cup\{0\}$ وجود دارد که برای هر $n\in N\cup\{0\}$ داشته باشیم $f(f(n))+f(n)=2n+3$ ؟ (مرحله اول ریاضی سال ۱۳۷۶)

الف)صفر　　ب)یک　　ج)دو　　د)سه　　ه)بی نهایت

راه حل:گزینه ب صحیح است .

اگر در مسئله قرار دهیم $n=0$ به رابطه $f(0)+f(f(0))=3$ می رسیم . در نتیجه از آنجایی که $f(0)\geq 0$ پس $f(0)$ چهار حالت دارد :

۱) $f(0)=0$ در این صورت از آنجایی که باید $f(0)+f(f(0))=3$ باشد به تناقض می رسیم .

۲) $f(0)=1$ در این صورت از رابطه ی بالا نتیجه می گیریم که $f(f(0))=f(1)=3-1=2$. اکنون اگر در رابطه مسئله قرار دهیم $n=1$ در آن صورت $f(1)+f(f(1))=5$ در نتیجه $f(f(1))=f(2)=5-2=3$ پس به نظر می رسد با تکرار همین روند بتوان ثابت کرد که $f(n)=n+1$ که اینکار با استقرا صورت می گیرد و به خود شما واگذار می شود.

۳) $f(0)=2$ در اینصورت با قرار دادن در رابطه به دست آمده $f(2)=3-2=1$ به دست می آید .

اکنون اگر در رابطه مسئله قرار دهیم $n=2$ داریم : $f(1)=7-f(2)=6$ در نتیجه امکان ندارد که $f(f(1))+f(1)=5$ اتفاق بیافتد و این تناقض است .

۴) $f(0)=3$ در اینصورت می توان نتیجه گرفت که $f(3)=0$ در نتیجه اگر رابطه مسئله را برای $n=3$ بنویسیم : $f(f(3))+f(3)=f(0)+f(3)=3\neq 9$ در نتیجه باز هم به تناقض می رسیم .

پس تنها یک تابع در شرایط مسئله صدق می کند و گزینه ب صحیح است .

تمرین : تابع $f : N \to N$ در شرایط زیر صدق می کند :

۱)به ازای هر $x, y \in N$ داریم : $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$

۲)فقط به ازای تعداد متناهی x داریم : $f(x) = 1$

۳) $f(30) = 4$

مقدار $f(2)$ چقدر است ؟ (مرحله اول ریاضی سال ۱۳۷۶)

الف)۱ ب)۲ ج)۳ د)۴ ه)۵

۹-فهم نمودار تابع

معمولا با نگاه کردن به نمودار یک تابع می توانید خیلی از ویژگی های آن را سریعا استنتاج کنید . مثلا می توانید یک به یک بودن , پوشایی , فرد یا زوج بودن , صعودی یا نزولی بودن و موارد دیگری را نتیجه گیری کنید . در برخی مسائل هدف سوال این است که ببیند آیا شما درک درستی از نمودار یک تابع دارید یا خیر . برای مثال یک تابع که شکل کاملا عجیب و غریبی دارد به شما می دهند و می گویند کدام یک ضابطه این تابع است . در این موارد باید سعی کنید ببینید که ویژگی های کدام یک از گزینه ها با ویژگی های شکل داده شده همخوانی دارد . در نتیجه شما در همه مسائل باید از نمودار تابع ها درک درستی داشته باشید .

۱۰-دنباله و دنباله های بازگشتی

دنباله های عددی معمولا از جمله مواردی هستند که در المپیاد از آنها سوال مطرح می شود . برخی دنباله ها بازگشتی هستند و مقدار آنها را با استفاده از مقادیر قبلی دنباله می توان به دست آورد . در بسیاری از موارد به دست آوردن الگویی مناسب در مورد دنباله ها به ما کمک می کند تا آنها را بهتر بشناسیم زیرا دنباله ها معمولا نامتناهی در نظر گرفته می شوند و به دست آوردن یا بررسی رفتار همه ی اعضای آنها تقریبا امکان پذیر نیست .

در حل معادلات بازگشتی معمولا یکی از راه ها به دست آوردن جمله های اولیه و حدس زدن رابطه ای برای دنباله است . در پایان برای اثبات کافی است از استقرا استفاده کنید . البته روش های کلی برای حل دنباله های بازگشتی با استفاده از ریشه های چندجمله ای ها وجود دارد . ولی دنباله های بازگشتی به شکل $a_{n+1} = pa_n + q$ را خیلی ساده می توان حل کرد . برای حل این معادلات ابتدا جواب های کلی رابطه بازگشتی $b_{n+1} = pb_n$ را به دست بیاورید و از روی آن رابطه بازگشتی مربوط را حل کنید .

مسئله : دنباله $a_1, a_2, \ldots$ ((برگشتی خطی)) نامیده می شود اگر و فقط اگر اعداد صحیح p,q وجود داشته باشند که : $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$. دوجمله ی بعدی در دنباله ی $2,5,14,41,\ldots$ کدام یک از دو عدد زیر است با شرط این که دنباله ((برگشتی خطی)) باشد ؟ (مرحله اول ریاضی سال ۱۳۷۸)

الف)۲۸و۸۲ ب)۲۸و۱۲۳ ج)۱۳۶و۳۲۸ د)۱۲۲و۳۶۵ ه)۲۴۴و۴۸۷

راه حل : گزینه د صحیح است .

ابتدا p,q مربوط به دنباله را می یابیم :

$$\begin{cases} a_3 = pa_2 + qa_1 \\ a_4 = pa_3 + qa_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14 = 5p + 2q \\ 41 = 14p + 5q \end{cases} \Rightarrow p = 4, q = -3$$

اکنون با داشتن p,q می توان مقادیر a_4, a_5 را محاسبه کرد :

$$a_4 = 4\times 41 - 3\times 14 = 122$$
$$a_5 = 4\times 122 - 3\times 41 = 365$$

در نتیجه گزینه د صحیح است .

تمرین : دنباله $\{x_n\}$ را بدین نحو تعریف می کنیم : $x_0 = t$ و برای $n \geq 0$, $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$. چند $t \in [-1,1]$ وجود دارد که $x_{11} = 1$ ؟ (راهنمایی: $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$) (مرحله اول ریاضی سال ۱۳۸۱)

الف)چنین t ای وجود ندارد .

ب)تنها یک t با این خاصیت وجود دارد .

ج)تعداد چنین t هایی بین صد و هزار است .

د)بیش از هزار t با این خاصیت وجود دارد .

ه)نامتناهی t با این خاصیت وجود دارد .

تمرین : عدد های طبیعی $a_1, a_2, a_3, ...$ به این صورت تعریف شده اند که $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = 2a_n + 5$. کدام یک از اعداد زیر می تواند در بین a_i ها ظاهر شود ؟(مرحله اول ریاضی سال ۱۳۷۸)

الف)۵۶۲۳۰۱ ب)۷۸۶۴۲۷ ج)۱۶۴۸۵ د)۳۱۲۳ ه)۵۱۵۱۹

۱۱-تخمین و مقایسه سرعت رشد دنباله ها

در برخی مسائل از شما خواسته می شود که ((رشد دنباله ها)) را با هم مقایسه کنید . رشد یعنی آهنگ افزایش در نتیجه شما در این مسائل ببینید که کدامیک از دنباله ها با آهنگ تندتری رشد می کند . البته ممکن است تا جایی یک دنباله از دنباله ی دیگر رشد بیشتری داشته باشد و از جایی به بعد دنباله دوم رشد بیشتری داشته باشد . در حل این مسائل توجه به چند نکته راه گشا و موثر خواهد بود :

۱-رشد تابع لگاریتمی $f(x) = \log x$ از رشد تابع $g(x) = x^r$ برای هر r مثبت از جایی به بعد کمتر است .

۲-رشد چندجمله ای ها از رشد عبارات نمایی با پایه بزرگتر از ۱ از جایی به بعد کمتر است . مثلا رشد $p(x) = 1000x^{2000}$ از رشد $f(x) = (1.0001)^x$ از جایی به بعد کمتر است .

۳-رشد عبارت های نمایی از رشد عبارت های فاکتوریلی از جایی به بعد کمتر است .فقط توجه کنید در این مورد تابع فاکتوریل برای اعداد صحیح و نامنفی تعریف می شود . برای مثال رشد تابع $f(n) = 10000^n$ از جایی به بعد کمتر از رشد $g(n) = n!$ است (دوتابع برای اعداد صحیح و نامنفی تعریف شده اند) .

تمرین : فرض کنید f, g دو تابع از N به R باشند . می گوییم $f \lhd g$ اگر عدد طبیعی M وجود داشته باشد که برای هر $n > M$ ، $f(n) < g(n)$. اگر : $f_3(n) = \sqrt[n]{(n!)!}$ $f_2(n) = 2^{n!}$ $f_1(n) = (10^n)!$

کدامیک از گزینه های زیر صحیح است ؟ (مرحله اول ریاضی سال ۱۳۸۱)

الف) $f_1 \lhd f_2 \lhd f_3$ ب) $f_2 \lhd f_1 \lhd f_3$

ج) $f_3 \lhd f_2 \lhd f_1$ د) $f_1 \lhd f_3 \lhd f_2$

ه) $f_2 \lhd f_3 \lhd f_1$

۱۲-ماتریس و دترمینان ماتریس دو در دو

ماتریس ها از مفاهیم خیلی مهم در جبر خطی و در ریاضیات هستند . یکی از فواید ماتریس ها حل دستگاه معادلات خطی است . با اعمال روی ماتریس ها در ریاضیات دبیرستان آشنا شده اید . ماتریس ها برخی خاصیت های اعداد را ندارند . مثلا اگر دو ماتریس مانند $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ را در نظر بگیرید . برای این دو ماتریس AB لزوما با BA یکسان نیست ! برخی از ماتریس ها می توانند وارون داشته باشند همان گونه که اعداد غیر صفر وارون دارند . در دنیای ماتریس ها $I_{1\times1} = [1]$, $I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و به همین نحو تعریف می شوند . ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ (ماتریس مربعی است اگر تعداد سطر و ستون های آن مساوی باشد) را وارون پذیر می نامیم هر گاه ماتریس مربعی $A^{-1}_{n\times n}$ وجود داشته باشد که $AA^{-1} = I_{n\times n}$. توجه کنید که اگر این اتفاق بیافتد لزوما $A^{-1}A = I_{n\times n}$ خواهد بود .

برای یک ماتریس دو در دو مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس به شکل : $\det(A) = ad - bc$. تعریف می شود . دترمینان برای ماتریس های مربعی از هر مرتبه تعریف می شود . می توان ثابت کرد که یک ماتریس مربعی وارون پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان این ماتریس صفر نباشد . در حالت خاص برای ماتریس دو در دو A که در بالا معرفی شد و $\det(A) \neq 0$ وارون A ماتریس زیر است :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تمرین : A,B دو ماتریس دو در دو به شکل زیر هستند :

$$A=\begin{bmatrix}1 & x\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{bmatrix}$$

چه زمانی رابطه $A^2+B^2+2AB=(A+B)^2$ برقرار است ؟(مرحله اول ریاضی سال ۱۳۸۲)

الف)همواره ب)وقتی $x+y=0$ ج)وقتی $x=y$

د)وقتی $xy=1$ ه)هیچگاه

۱۳-تصاعد

تصاعد ها که خود به دو دسته حسابی(عددی) و هندسی تقسیم می شوند در خیلی از مسائل به طور مستقیم و در برخی دیگر از مسائل برای حل قسمتی از سوال به کار گرفته می شوند . با روابط بین جملات و همچنین مجموع جملات تصاعد های حسابی و هندسی در ریاضیات دبیرستان آشنا شده اید .

تمرین : چند عدد صحیح x که $9<x<15$ وجود دارد که دنباله ی متناهی $1,2,6,7,9,x,15,18,20$ مشتمل بر هیچ سه جمله ای نباشد که تشکیل تصاعد عددی بدهند ؟ (مرحله اول ریاضی سال ۱۳۷۸)

الف)صفر ب)۱ ج) ۲ د)۳ ه)۴

۱۴-توابع مثلثاتی

آشنایی با توابع مثلثاتی مانند $\cot, \tan, \cos, \sin$ برای حل برخی مسائل لازم است .از نمودار این توابع , صعودی یا نزولی بودن آنها , فرد یا زوج بودن آنها , پوشایی یا یک به یک بودن آنها و همچنین آشنایی با وارون آنها در بازه های محدود شده ممکن است سوال مطرح شود . همچنین حل معادلات مثلثاتی ساده را

هم دانش آموز باید آموخته و به آن مسلط باشد . ممکن است از این توابع سوال نامساوی طرح شود. یا سوال چندجمله ای یا دنباله از این توابع مطرح شود .

۱۵-مجموعه ها

با مجموعه ها به طور عمده از ریاضیات دبیرستان آشنایی دارید . نحوه تعریف اشتراک , اجتماع , مکمل , تفاضل و تفاضل متقارن مجموعه ها را می دانید . برای اثبات روابط در مجموعه ها در حالت کلی از روش هایی مانند عضوگیری یا جبر مجموعه ها استفاده می شود . اما برای حل یک تست رسم نمودار ون روش مناسبی است . با استفاده از نمودار ون می توانید اینکه هر عضوی در کدام قسمت ها می تواند قرار بگیرد را نشان دهید . همچنین می توانید اشتراک و اجتماع دو مجموعه را با یک مساحت مدلسازی کنید . البته توجه کنید که نمودار ون روشی برای اثبات تشریحی نیست و به شما ایده کلی اثبات را می دهد .

تمرین : A, B, C سه مجموعه دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است (سمت چپ منهای سمت راست) . مثلا $D = A - B$. کدام گزینه حتما درست است ؟(مرحله اول ریاضی سال ۱۳۸۲)

$A \quad B \quad C$

$D \quad E$

F

الف) $F \subseteq C$ ب) $B \subseteq F$

ج) $F \subseteq A \bigcap C$ د) $A \bigcap C \subseteq F$

ه) $D \bigcap C \subseteq F$