

۱- افراد قبیله‌ای اوقات شرعی خود را با سایه اشیاء و رویت ستارگان تشخیص می‌دهند، این افراد کدام استدلال را به کار می‌برند؟

- (۱) استقرایی (۲) استنتاجی (۳) تمثیلی (۴) شهودی

چون نتیجه‌گیری آنها از دیدن صورت می‌گیرد، یک استدلال شهودی دارند. پس گزینه ۴ صحیح است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سراسری - انسانی - ۷۷

۲- کدام عدد کلیت حکم «هر چه باشد n ، عدد طبیعی زوج، $1 + 2^n$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

اول نیست. $2^6 + 1 = 64 + 1 = 65$

عدد $n = 6$ ناقض این تعریف است. پس گزینه ۳ جواب است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سراسری - انسانی - ۷۷

۳- اصل استقراء ریاضی در مورد حکم « $p(n) : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{5n}{12}$ » برای اعداد طبیعی $n \geq m$ برقرار

است، کوچکترین مقدار m کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \dots + \frac{n!}{n}}{n!} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 4 : \frac{24 + 12 + 8 + 6}{24} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12} > \frac{20}{12} \\ n = 5 : \frac{120 + 60 + 40 + 30 + 24}{24} = \frac{274}{120} > \frac{25}{12} \\ n = 6 : \frac{720 + 360 + 240 + 180 + 144 + 120}{720} = \frac{29/4}{12} < \frac{30}{12} \end{array} \right.$$

که مقادیر ۴ و ۵ برای n غیر قابل قبول می‌باشند و تنها مقدار $n = 6$ قابل قبول است. بنابراین گزینه ۳، صحیح است.

ان و پیش‌دانشگاهی - سنجش علمی آزمون یار - ۸۱-۸۲ - متوسطه و دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سنجش علمی آزمون یار - ۸۰-۸۱ - متوسطه - پایه سوم - آزمون ۱

۴- از حرارت دادن میله‌های فلزی مختلف در آزمایشگاه نتیجه گرفته شده است که میله‌های فلزی در اثر حرارت طولشان زیاد می‌شود نوع استدلال برای این نتیجه‌گیری کدام است؟

- (۱) استنتاجی (۲) استقرایی (۳) تمثیلی (۴) قیاسی

روش استدلال استقرایی است. در این روش، نتیجه‌گیری کلی براساس مجموعه محدودی از مشاهدات صورت می‌گیرد. چون تعداد محدودی میله بر اثر حرارت دادن افزایش یافته است، پس نتیجه شده است که میله‌های فلزی در اثر حرارت طولشان زیاد می‌شود. پس نوع استدلال استقرایی است. و گزینه ۲ صحیح است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سراسری - انسانی - ۷۵ - مرحله اول

۵- کدام عدد کلیت حکم در رقم سمت راست هر عددی که به پنج و سه قابل قسمت باشد صفر است را نقض می کند؟
 (۱) ۱۱۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۲۵

گزینه ۴ پاسخ مسئله است زیرا عدد سمت راست ۲۲۵ صفر نیست ولی بر ۳ و ۵ قابل قسمت است. پس گزینه ۴ درست است.

توجه: با یک مثال نقض می توان یک حکم کلی را رد نمود.

- مرحله اول و دبیرستان و پیش دانشگاهی - آزمایشی سنجش - تجربی - ۸۱ - مرحله اول و دبیرستان و پیش دانشگاهی - آزمایشی سنجش - انسانی - ۸۱ - مرحله اول

۶- اگر مجموع عده‌ی اضلاع و عده‌ی اقطار یک چندضلعی کوژ برابر ۲۱ باشد، عده‌ی اضلاع آن کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۰

اگر n تعداد اضلاع یک n ضلعی کوژ باشد، تعداد اقطار آن برابر با $\frac{n(n-3)}{2}$ می باشد. بنابراین طبق صورت مسئله:

$$n + \frac{n(n-3)}{2} = 21 \Rightarrow n^2 - 3n + 2n = 42 \Rightarrow n^2 - n - 42 = 0 \Rightarrow (n+6)(n-7) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n = -6 & \text{غیرقابل قبول است} \\ n = 7 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۶۲

۷- یک نه ضلعی محدب حداکثر چند زاویه حاده داخلی می تواند داشته باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

می دانیم در هر راس چند ضلعی محدب زاویه داخلی و زاویه خارجی تشکیل یک نیم صفحه را می دهند. اگر در یک رأس، زاویه داخلی حاده باشد، زاویه خارجی آن منفرجه است. پس تعداد زاویه حاده داخلی برابر با تعداد زاویه منفرجه خارجی است و چون مجموع زاویه‌های خارجی هر چند ضلعی 360° است در نتیجه تعداد زاویه‌های منفرجه خارجی کمتر از ۴ می باشد، پس حداکثر ۳ زاویه حاده داخلی داریم و گزینه ۳ صحیح است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری نظام قدیم - ریاضی - ۷۶ - مرحله دوم و دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۷۶

۸- کدام گزینه زیر مثال نقض دارد؟

(۱) هر مربع یک لوزی است.

(۲) هر عدد اول و بزرگتر از ۲ فرد است.

(۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.

(۴) توان دوم هر عدد طبیعی بزرگتر از توان سوم آن است.

مثال نقض برای گزینه ۴: $2^2 \neq 2^3$ بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۸۰ و دبیرستان و پیش دانشگاهی - سنجش علمی آزمون یار - ۸۱-۸۰ - متوسطه - پایه سوم - آزمون ۱

۹- کدام عبارت، مثال نقض دارد؟

(۱) حاصلضرب دو عدد فرد متوالی، عددی فرد است.

(۲) حاصل تفاضل هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

(۳) حاصل مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

(۴) حاصل مجموع هر دو عدد اول با یک عدد فرد، عددی فرد است.

مثال نقض گزینه ۴: ۳ عدد اول و ۹ عددی فرد است ولی $3 + 9 = 12$ فرد نیست. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - انسانی - ۸۰

۱۰- بومیان یک منطقه برخی از امراض خفیف را با گیاهان معالجه می کنند، روش معالجه‌ی آنها بر مبنای کدام نوع استدلال است؟

- (۱) شهودی (۲) استقرایی (۳) استقرای ریاضی (۴) تمثیلی

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. استدلالی که از روی مشاهده انجام گیرد را شهودی گویند.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - انسانی - ۸۱

۱۱- در اصل استقرای تعمیم یافته، برای حکم: $n \geq m$; $(n+1)! < 4^n$ عدد طبیعی مناسب m کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. کافی است از $n = 4$ به ترتیب عددگذاری کنیم که $n = 6$ نامساوی را برقرار می کند.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۸۱

۱۲- کدام گزینه در مورد مجموعه اعداد طبیعی فرد یا زوج **نا درست** است؟

- (۱) مجموعه اعداد فرد نسبت به عمل جمع بسته است.
 (۲) مجموعه اعداد زوج نسبت به عمل جمع بسته است.
 (۳) مجموعه اعداد فرد نسبت به عمل ضرب بسته است.
 (۴) مجموعه اعداد زوج نسبت به عمل ضرب بسته است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا مجموع ۲ عدد فرد برابر یک عدد زوج است که در آن مجموعه قرار نمی گیرد.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - انسانی - ۸۲

۱۳- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقیمانده‌ی تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است، بزرگترین مقدار a مضرب کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

$$a = 37q + (q^2 - 2)$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$0 \leq q^2 - 2 < 37$$

$$2 \leq q^2 < 39$$

$$\sqrt{2} \leq q < \sqrt{39} \Rightarrow q_{\text{Max}} = 6$$

$$\Rightarrow a_{\text{Max}} = 37 \times 6 + 36 - 2 = 256 \Rightarrow 16 \mid 256$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۴- اثبات کدام قضیه‌ی زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟
 (۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

(۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می توان رسم کرد.

(۳) در یک صفحه از نقطه مفروض فقط یک خط می توان بر خط مفروض عمود کرد.

(۴) مربع هر عدد طبیعی فرد از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. دقت کنید مورد گزینه ۲: اصل اقلیدس است (قضیه نیست)

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۸۶

۱۵- اگر مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی شروع از ۱، برابر با مربع مجموع آن اعداد باشد، حاصل

$$۱۰^۳ + ۱۲^۳ + ۱۴^۳ + \dots + ۳۰^۳$$

کدام است؟ (۱) ۱۱۴۱۰۰ (۲) ۱۱۴۲۰۰ (۳) ۱۱۴۳۰۰ (۴) ۱۱۴۴۰۰

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$۲^۳(۵^۳ + ۶^۳ + \dots + ۱۵^۳) = ۲^۳ \times \left(\left(\frac{۱۵ \times ۱۶}{۲} \right)^۲ - \left(\frac{۵ \times ۴}{۲} \right)^۲ \right) = ۱۱۴۴۰۰$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۹۱

۱۶- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

(۱) ۵۶ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴) ۷۴

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اعداد ۲^n را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی طبیعی نوشت، زیرا مجموع اعداد طبیعی متوالی بر مبنای تصاعد حسابی، عددی می‌دهد که فاکتور عدد فرد بزرگ‌تر از ۱ می‌دهد.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۱۷- روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات کدام نوع استدلال است؟

(۱) قیاسی (۲) شهودی (۳) استقرایی (۴) استنتاجی

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. استدلال استقرایی: نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۸۸

۱۸- کدام قضیه‌ی شرطی زیر، بازگشت پذیر نیست؟

(۱) $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$ (۲) $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$
 (۳) $A = B \Rightarrow A \cap C = B \cap C$ (۴) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

مثال نقض: اگر $C = \{1\}$ و $A = \{1, 4\}$ و $B = \{1, 9\}$ آن گاه $A \neq B$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۸۸

۱۹- در اثبات نامساوی $۱ + ۲ + ۳ + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$; $n \geq ۱$ ، با کمک استقرای ریاضی، کدام رابطه بدیهی به

کار می‌رود؟

(۱) $k+1 < 2k$ (۲) $k+1 < 2k+3$
 (۳) $۴(k^2 + 3k + 2) < (2k+3)^2$ (۴) $۴k^2 + ۱۲k + ۹ = (2k+3)^2$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

فرض: $P(K) : ۱ + ۲ + ۳ + \dots + k < \frac{1}{8}(2k+1)^2$

حکم: $P(K+1) : ۱ + ۲ + ۳ + \dots + k + k + 1 < \frac{1}{8}(2k+3)^2$

به طرفین فرض $(k+1)$ را اضافه می‌کنیم حکم همواره درست می‌شود پس رابطه گزینه ۴ صادق است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سراسری - ریاضی - ۹۰

۲۰- در اثبات نامساوی $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ ، با روش استقرای ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کار می‌رود؟

$$k^2 + k + 1 > k^2 + k \quad (۴) \quad k^2 + k > k^2 + 1 \quad (۳) \quad 2k - 1 > k + 1 \quad (۲) \quad k + 2 > k + 1 \quad (۱)$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{فرض } P(k): 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

$$\text{حکم } \Rightarrow P(k+1): 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

به طرفین فرض عبارت $\frac{1}{(k+1)^2}$ را اضافه می‌کنیم.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)}$$

پس کافی است ثابت شود که

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow k^2 + 2k + 1 > k^2 + k$$

$$\Rightarrow k + 1 > k$$

با توجه به این که نامساوی بدیهی فوق به صورت مستقیم در گزینه‌ها وجود ندارد تنها گزینه‌ی (۱) است که می‌تواند هم‌ارزی با این نامساوی باشد، یعنی $k + 2 > k + 1$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰

۲۱- در اثبات نامساوی $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} < \frac{n}{2}$; ($n \geq 3$) با کمک استقرای تعمیم‌یافته از کدام نامساوی

بدیهی استفاده شده است؟

$$2^k > k \quad (۱) \quad 2^{k+1} > 2 \quad (۲) \quad 2^{k+1} > 3 \quad (۳) \quad 2^k > k^2 - 1 \quad (۴)$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{فرض استقرا } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} < \frac{k}{2} \xrightarrow[\frac{1}{2^{k+1}-1}]{\text{به طرفین فرض اضافه می‌کنیم}} \frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k+1}-1} < \frac{k+1}{2}$$

$$\text{حکم استقرا } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2^{k+1}-1} < \frac{k+1}{2} \Rightarrow 2^{k+1}-1 > 2 : 2^{k+1} > 3$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۲۲- در اثبات حکم $n! > \sqrt{6}^n$ ، با اصل استقرای تعمیم یافته، از کدام نامساوی بدیهی استفاده می‌شود؟

$$(1) \quad (k+1) > \sqrt{6}, \quad k \geq 5$$

$$(2) \quad (k+1) > \sqrt{6}, \quad k \geq 3$$

$$(3) \quad k^2 > 6, \quad k \geq 3$$

$$(4) \quad k^2 > 6, \quad k \geq 5$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. $n=4 \rightarrow 4! > \sqrt{6}^4$ شروع استقرا $n=5 \rightarrow 5! > \sqrt{6}^5$

$$k! > \sqrt{6}^k \quad \text{فرض استقرا} \quad \times (k+1) \Rightarrow (k+1)! > (k+1) \sqrt{6}^k$$

$$(k+1)! > \sqrt{6}^{k+1} \Rightarrow (k+1) \sqrt{6}^k > \sqrt{6}^{k+1} \Rightarrow k+1 > \sqrt{6}$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۲

۲۳- در اثبات نامساوی $\frac{n(n+1)}{2} > n!$ با کمک استقرای ریاضی، از کدام نامساوی بدیهی استفاده شده است؟

$$(1) \quad 2^{k+1} > k+1 \quad (2) \quad 2^{k+2} > k \quad (3) \quad k^2 + 1 > k+1 \quad (4) \quad 4^k > k+2$$

$$P_k: \frac{k(k+1)}{2} > k! \quad ; \quad P_{k+1}: \frac{(k+1)(k+2)}{2} > (k+1)! \quad \text{گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.}$$

$$\underbrace{\frac{k(k+1)}{2}}_a (k+1) > \underbrace{(k+1)!}_b$$

طرفین فرض P_k را در $k+1$ ضرب می‌کنیم:

حال داریم $b < a$ و برای این‌که نشان دهیم $b < c$ ، کافی است داشته باشیم $a < c$ ، چون:

$$b < a, \quad \boxed{a < c} \rightarrow b < c$$

$$\frac{k(k+1)}{2} (k+1) < \frac{(k+1)(k+2)}{2} \rightarrow k+1 < \frac{k^2 + 3k + 2}{2} - \frac{k^2 + k}{2} \rightarrow k+1 < 2k+1$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

۲۴- در اثبات $2^n > n^2$ ؛ $n \geq 5$ با روش استقراء ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کار می‌رود؟

$$(1) \quad k^2 > k \quad (2) \quad 2k - 1 > 5 \quad (3) \quad (k-1)^2 > 2 \quad (4) \quad (k+1)^2 > 2$$

$$P_k: 2^k > k^2 \quad ; \quad P_{k+1}: 2^{k+1} > (k+1)^2 \quad \text{گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.}$$

طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم: $2^{k+1} > 2k^2$ ، بنابراین اگر ثابت کنیم $2k^2 > (k+1)^2$ ، آنگاه حکم P_{k+1}

نیز ثابت می‌شود:

$$2k^2 > (k+1)^2 \rightarrow 2k^2 > k^2 + 2k + 1 \rightarrow k^2 > 2k + 1 \rightarrow k^2 - 2k - 1 > 0$$

$$\xrightarrow{+2} k^2 - 2k + 1 > 2 \rightarrow (k-1)^2 > 2$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۶

۲۵- کدام عدد حکمیت «هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می کند؟

$$۶۴ \text{ (۴)}$$

$$۵۶ \text{ (۳)}$$

$$۴۶ \text{ (۲)}$$

$$۴۰ \text{ (۱)}$$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به مثال کتاب جبر و احتمال در بحث مثال نقض، می توان ثابت کرد که اعداد طبیعی به صورت ۲^k را نمی توان به صورت حاصل جمع اعداد طبیعی متوالی نوشت، در نتیجه $۶۴=۲^۶$ پاسخ صحیح است. حال سه گزینه ی دیگر را بررسی می کنیم:

$$(۱) \text{ گزینه ی } ۴۰: ۴۰=۶+۷+۸+۹+۱۰$$

$$(۲) \text{ گزینه ی } ۴۶: ۴۶=۱۰+۱۱+۱۲+۱۳$$

$$(۳) \text{ گزینه ی } ۵۶: ۵۶=۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۸