بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی عمومی ۲

مهدی نجفی‌خواه

عضو هیأت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

تابستان ۱۳۸۶

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

نجفی‌خواه، مهدی، ۱۳۴۹ —
حساب دیفرانسیل، انتگرال و هندسهٔ تحلیلی
قابل استفاده برای دروس ریاضی عمومی، . . . جهت
دانشجویان مهندسی و علوم پایه / مهدی نجفی‌خواه.
— تهران: ساحل اندیشهٔ تهران، — ۱۳۸۶.
۲ج.
ISBN 964-94471-2-1
فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فهرست نویسی بر اساس جلد دوم.
۱. حساب دیفرانسیل –– راهنمای آموزش (عالی).
۲. حساب انتگرال –– راهنمای آموزش (عالی).
۳. هندسهٔ تحلیلی –– راهنمای آموزش (عالی).
۴. ریاضیات –– راهنمای آموزش (عالی). الف.
عنوان.
۵ح۳۷ن/۳/۳۰۳QA ۵۱۵/۱۵
کتابخانه ملی ایران ۸۱–۴۶۳۰۹م

نام کتاب: ریاضی عمومی ۲

نویسنده: دکتر مهدی نجفی خواه

شابک: ۱–۲–۹۴۴۷۱–۹۶۴

نوبت چاپ: اول — تابستان ۱۳۸۶

چاپ، صحافی و لیتوگرافی: چاپخانهٔ بهمن

تعداد صفحات: ۲۷۱

تعداد شکلها: ۲۵۹

تیراژ: ۱۵۰۰ نسخه

قیمت: ۳۰۰۰۰ ریال

ناشر: ساحل اندیشهٔ تهران (سات)

دیباچه

موضوع این کتاب دومین درس از یک دورهٔ دو ترمه در ارتباط با حساب دیفرانسیل، انتگرال و هندسه تحلیلی می‌باشد. موضوع اصلی آن آشنایی با جنبه‌های محاسباتی آنالیز ریاضی کلاسیک می‌باشد. در آنالیز ریاضی کلاسیک به مطالعهٔ خواص توابع بین فضاهای اقلیدسی پرداخته می‌شود. این مطالعه شامل سه بخش اساسی «حد»، «مشتق» و «انتگرال» است. به دلیل اینکه مطالعهٔ توابع به فرم $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ به یک باره ممکن نیست، موضوع به بخشهای مختلف تقسیم شده و به شکل مرحله به مرحله مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در ریاضی عمومی یک، توابع به فرم $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مطالعه شده است، یعنی حالت $m = n = ۱$. پس از حصول این مطلب، در ریاضی عمومی دو، ابتدا توابع به فرم $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (توابع برداری) مورد مطالعه قرار گرفته، سپس توابع به شکل $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (توابع چند متغیره) و آنگاه توابع به فرم $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (نگاشتها و میدانهای برداری) مورد بررسی قرار می‌گیرند. سایر مباحث موجود در دورهٔ حاضر، مطالبی هستند که مستقیم و یا غیر مستقیم در سایر قسمتها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

این کتاب دارای نه فصل است. فصل اول به جبر خطی اختصاص دارد که مقدمه‌ای برای درک فصل دوم، یعنی هندسهٔ تحلیلی می‌باشد. در فصل سوم که به توابع برداری اختصاص دارد آنالیز این نوع توابع مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مطالعهٔ توابع چند متغیره از فصل چهار آغاز و تا فصل هفتم ادامه پیدا می‌کند. در این فصول به ترتیب مباحث حد، مشتق و انتگرال توابع چند متغیره مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل هشتم انتگرال روی منحنیها مطرح شده و خواص و کاربردهای آن مورد بررسی قرار گرفته و قضیهٔ گرین مطرح می‌گردد. در فصل نهم انتگرال بر رویه‌ها مطرح شده و قضایای استوکس و گاوس بیان می‌گردد.

سالها است که دروس ریاضی عمومی، ریاضی عمومی ۱، ۲ و نیز دروس ریاض آ، آآ و آآآ (مخصوص دانشجویان رشتهٔ ریاضی) در دانشگاههای کشور تدریس می‌شد، اما مرجع مناسبی وجود نداشت که بتواند سرفصلهای مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فن آوری را برآورد و در عین حال شرایط دانشجویان این درس را نیز در نظر بگیرد. مؤلف که خود سالها به امر تدریس این دروس مشغول بوده است، با علم به این مطلب و نیز با توجه به استانداردهای موجود در جهان، اقدام به تدوین این اثر نموده است.

این کتاب دارای نکات برجسته‌ای است که برخی از آنها مخصوص این اثر می‌باشند. ذیلاً به بیان مواردی از آنها می‌پردازیم:

۱ــ این کتاب نتیجه‌ای از تدریس در دانشگاههای کشور است و لذا عملاً می‌تواند قابل استفادهٔ مجدد قرار گیرد.

۲ــ ارزشیابیهای انجام شده در پایان هر دورهٔ آزمایشی تدریس آن خبر از موفقیت نسبی آن در امر تفهیم مطالب و در نتیجه بالاتر رفتن سطح علمی دانشجویان دارد (این کار با مقایسه با سایر گروهها انجام گرفته).

۳ــ کتاب حاضر مملو از مثالهای متنوع است (در مقایسه با استاندارد کتابهای مشابه، دو تا سه برابر بیشتر است).

۴ــ کتاب حاضر دارای تعداد بسیار زیادی تمرین و مسأله است که از مسایل معمولی آغاز و به تمرینات مبارز طلب ادامه می‌یابد. بر همین اساس هم مدرس و هم شاگرد نیازی به جستجوی مسایل جدید ندارند.

۵ــ در خلال مباحث کتاب استفاده از نرم افزار میپل آموزش داده شده است و این کار موجب تسریع امر آموزش و یادگیری می‌شود.

۶ــ یک سایت اینترنتی شامل مواد کمک آموزشی کتاب را همراهی می‌کند، که استفادهٔ مناسب از آن می‌تواند اثر بسیار شگرفی در امر آموزش داشته باشد. (برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر در این خصوص، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا آدرس اینترنتی http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm مراجعه شود.)

از این کتاب و نیز کتاب ریاضی عمومی یک این جانب، به شیوه‌های مختلفی در امر آموزش حساب دیفرانسیل، انتگرال و هندسه تحلیلی می‌توان استفاده نمود. نظیر: دو درس چهار واحدی (ریاضی ۱ و ۲)، دو درس سه واحدی (ریاضی ۱ و ۲)، و سه درس چهار واحدی (ریاضی آ، آآ و آآآ). بطور کلی کتاب ریاضی عمومی یک مناسب برای تدریس درس ریاضی عمومی ۱ و ریاضی عمومی دو، مناسب برای تدریس دروس ریاضی عمومی ۲ می‌باشد. از هفت فصل اول کتاب ریاضی عمومی یک برای درس ریاضی آ، از دو فصل آخر کتاب ریاضی عمومی یک و نیز چهار فصل اول کتاب ریاضی عمومی دو، برای درس ریاضی آآ و از پنج فصل آخر کتاب ریاضی عمومی دو، برای درس ریاضی آآآ می‌توان استفاده نمود. چنانچه برخی مطالب که جنبهٔ پیشرفته‌تری دارند را حذف کنیم از این کتاب برای درس ریاضی عمومی نیز می‌توان استفاده نمود.

تعداد مسایل این کتاب بیشتر از حدی است که حتی در سه ترم (ریاضی آ، آآ و آآآ) بتوان دانشجو را مکلف به حل همهٔ آنها نمود. پیشنهاد مؤلف این است که استاد محترم درس، مسایلی را انتخاب نموده و از دانشجو بخواهد تا آنها را حل کند. این در واقع حداقل تعداد مسایلی است که استاد محترم برای بررسی دانشجویان لازم می‌داند. در ضمن دانشجو می‌تواند دانشجو خود می‌تواند مسایل بیشتری را انتخاب کرده و مورد بررسی قرار دهد. برخی از مسایل با علامت $*$ مشخص شده‌اند، این مسایل دشوارند و توقع نمی‌رود که همهٔ دانشجویان قادر به

حل آنها باشند.

هر چند این کتاب حاصل سالها تدریس مؤلف در دانشگاههای مختلف بوده است و در شش دورهٔ مختلف به صورت آزمایشی تدریس شده است، اما همانند همهٔ محصولات بشر می‌تواند دارای کاستیهای فراوان باشد. مؤلف با علم به این مطلب از خوانندهٔ محترم استدعا دارد که هر گونه نکته، انتقاد و یا پیشنهاد در خصوص مطالب این کتاب را با او (به آدرس: تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکدهٔ ریاضی و یا email : m_nadjafikhah@iust.ac.ir) در میان بگذارد.

نویسنده در پروژه‌ای تحت عنوان «استفاده از نرم افزار میپل در آموزش ریاضی عمومی یک» که از طرف دانشگاه علم و صنعت ایران مورد حمایت قرار گفت، بررسیهای جامعی را در زمینهٔ امکان سنجی استفاده از این نرم افزار انجام داده و از تجربیات خود در تألیف این اثر استفاده نموده است. بر همین اساس از مسئولین محترم دانشگاه علم و صنعت ایران که امکان این تحقیق و نیز تدریس آزمایشی دستنویس این کتاب را طی سالهای متوالی فراهم نموده‌اند، قدردانی می‌کنم.

این کتاب را سرکار خانم راحلهٔ بادرستانی و نیز سرکار خانم فرزانهٔ حیدری فعال به کمک نرم افزار فارسی‌تک تاپپ نموده‌اند و جناب آقای احمد رضا فروغ و جناب آقای مهدی جلالوندی ویرایش نموده‌اند، که در اینجا از زحمات بی دریغ همهٔ این عزیزان کمال تشکر را دارم. شکلها توسط مؤلف و به کمک نرم افزارهای Paint، Photoshop، Maple و GSview تهیه شده است.

بر خود لازم می‌دانم تا امتنان خود از زحمات بی دریغ آقایان علی رجبی ابهری و محسن ضیامنش را اعلام دارم. کتاب حاضر به همت این بزرگان به زیور تبع آراسته شده است. همچنین، از همهٔ کسانی که این جانب را در تهیهٔ این اثر همراهی نموده‌اند تشکر کنم. چه دانشجویانی که با انعکاس نکات مورد توجه خود باعث بالانده‌تر شدن آن گردیده‌اند و چه همکارانی که با اشارات فهیمانهٔ خود باعث ایجاد اصلاحات اساسی در آن شده‌اند. چون تعداد ایشان بسیار است و مجال ذکر آن در این مقدمه ممکن نیست، تنها به ابراز سپاس کلی بسنده می‌کنم.

مهدی نجفی خواه

تهران، تابستان ۱۳۸۶

فهرست مندرجات

فصل ۱

جبر خطی

هدف از این فصل تهیه مقدمات لازم برای درک فصول بعدی خصوصاً فصل دوم، یعنی هندسهٔ تحلیلی است. فصل حاضر به همراه فصل بعدی زمینه لازم برای درک سایر فصول این کتاب را فراهم سازند. به نظر می‌رسد که قسمت عمده‌ای از مطالب این فصل را خواننده در دوره قبل از دانشگاه مطالعهٔ نموده است. بنابراین، چنانچه خواننده محترم با مفاد این فصل آشنایی کافی دارد، می‌تواند از مطالعهٔ آن صرف نظر کرده و به ادامهٔ کتاب بپردازد.

۱.۱ خط، صفحه و فضای اقلیدسی

اشیاء مورد مطالعه در ادامهٔ این کتاب به سه مجموعهٔ زمینه‌ای خاص به نامهای خط، صفحه و فضای اقلیدسی (یا دکارتی) متعلقند. این سه را به ترتیب با نماد $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهیم. ذیلاً به تعریف دقیق هر یک از آنها می‌پردازیم.

۱.۱.۱ تعریف. عدد حقیقی نمادی به شکل $x = \pm\overline{x_0/x_1x_2\cdots x_n\cdots}$ است که در آن $x_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ و $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \in \left\{0, 1, 2, \cdots, 9\right\}$. در واقع، به زبان دنباله‌ها، داریم

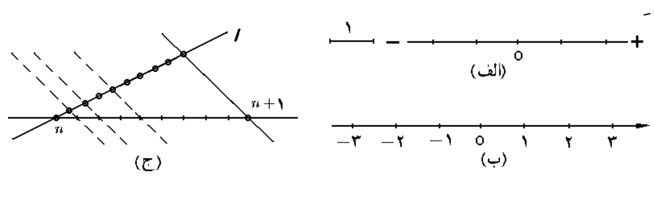
$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} \pm\overline{x_0/x_1x_2\cdots x_n} \\ &= \pm\lim_{n\to\infty}\left\{x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \cdots + \frac{x_n}{10^n}\right\} \end{aligned}$$

مجموعه همهٔ اعداد حقیقی را با نماد $\mathbb{R}$ نشان داده و به آن **خط حقیقی** می‌گوئیم.

۲.۱.۱ نمایش خط اقلیدسی. برای نمایش خط اقلیدسی از محور حقیقی استفاده می‌کنیم. این محور به صورت زیر ساخته می‌شود:

ابتدا خط راستی را در صفحه مشخص نموده و نقطه‌ای را بعنوان مبداء O بر آن تعیین می‌کنیم. سپس پاره‌خطی را بعنوان واحد ۱ فرض می‌کنیم. خط مفروض توسط O به دو قطعه تقسیم می‌شود. یکی از آن دو را **مثبت** و دیگری را **منفی** می‌نامیم. اکنون به کمک واحد به تقسیم خط می‌پردازیم (شکل ۱.۱—الف). تقسیمات بدست آمده در نیمهٔ مثبت را به ترتیب از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم و تقسیمات بدست آمده در نیمهٔ منفی را به ترتیب از راست به چپ شماره‌گذاری می‌کنیم و سپس به هر یک علامت منفی می‌افزائیم (شکل ۱.۱—ب).

اکنون برای تقسیم کردن هر یک از قسمتهای بدست آمده، از خاصیت مثلثهای متشابه استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که از ℓ خطی غیر موازی با محور حقیقی خارج نموده و با ابتدای از n، ده واحد بر آن مشخص می‌کنیم. اکنون از نقطهٔ انتهایی تکهٔ دهم خطی را به نقطهٔ $n+1$ متصل نموده و از سایر نقاط تقسیم نیز به موازات این خط، خطوطی را می‌گذرانیم. به این ترتیب از محل برخورد نه خط جدید با بازهٔ $[n; n+1]$، این بازه به ده قسمت مساوی تقسیم می‌گردد (شکل ۱.۱—ج).



شکل ۱.۱: نمایش اعداد بر محور حقیقی

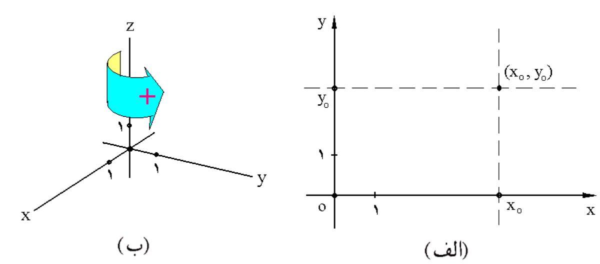
این روند را می‌توان ادامه داد و هر یک از تقسیمات بدست آمده را مجدداً به ده قسمت مساوی تقسیم نمود و ... برای نشان دادن $x = \overline{x_0/x_1x_2\cdots x_n\cdots}$ بر خط حقیقی به شیوهٔ زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا عدد x_0 را بر محور انتخاب می‌کنیم ($x_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$). سپس قطعهٔ شمارهٔ x_1 از بازهٔ $[x_0; x_0+1]$ را انتخاب نموده و سپس قطعهٔ شمارهٔ x_2 از بازهٔ $[\overline{x_0/x_1}\ ;\ \overline{x_0/x_1}+1/10]$ را انتخاب می‌کنیم و ... عدد $-x$ قرینهٔ x نسبت به 0 می‌باشد.

۳.۱.۱ قرارداد. تناظری یکبیک بین مجموعهٔ $\mathbb{R}$ و خط حقیقی وجود دارد. این جمله در واقع یک اصل از مجموعهٔ اصول موضوعهٔ هندسهٔ مسطحه است که بر مبنی آن، هر خط یک خط‌کش می‌پذیرد. به همین دلیل از این پس بین این دو مفهوم فرقی قایل نیستیم.

۴.۱.۱ تعریف. مجموعه همهٔ زوجهای مرتب از اعداد حقیقی را **صفحهٔ اقلیدسی** (یا **دکارتی**) نامیده و با نماد $\mathbb{R}^2$ نشان می‌دهیم $\mathbb{R}^2 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R} \right\}$. به این ترتیب، **نقطه در صفحه** یعنی یک زوج مرتب از اعداد حقیقی.

۵.۱.۱ نمایش صفحهٔ اقلیدسی. دو محور حقیقی همانند انتخاب می‌کنیم. این دو را طوری بر هم عمود می‌کنیم که مبداء هر دو بر هم منطبق شوند و با دورانی به اندازهٔ $\pi/2$ بتوان نیمهٔ مثبت محور افقی را بر نیمهٔ مثبت محور عمودی منطبق نمود. اکنون محور افقی را x−محور و محور عمودی را y−محور می‌نامیم. برای نشان دادن نقطهٔ $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ در صفحه حقیقی، از عدد x_0 واقع بر x−محور خطی را به موازات y−محور رسم نموده و سپس از عدد y_0 واقع بر y−محور نیز خطی را به موازات x−محور رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو خط، نمایشگر نقطهٔ (x_0,y_0) است (نیز شکل ۲.۱—الف توجه شود).



شکل ۲.۱: الف) نمایش نقاط در صفحه
ب) کنج راستگرد

۶.۱.۱ قضیه. تناظری یکبیک بین نقاط صفحهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ و صفحهٔ حقیقی وجود دارد. این قضیه نتیجه‌ای از قرارداد (۳.۱.۱) است. به همین دلیل، از این پس این دو را عملاً یکی می‌گیریم.

۷.۱.۱ تعریف. منظور از **شکل** در صفحه، مجموعه‌ای از نقاط در $\mathbb{R}^2$ می‌باشد.

۸.۱.۱ مثال. ذیلاً چند نمونه از شکلهای معروف در صفحه را معرفی می‌کنیم:

مبداء .... $O=(0,0)$

x−محور یا محور x ها .... $y=0$

y−محور یا محور y ها .... $x=0$

ربع اول .... $x\geq 0\ ,\ y\geq 0$

ربع دوم .... $x\leq 0\ ,\ y\geq 0$

ربع سوم .... $x\leq 0\ ,\ y\leq 0$

ربع چهارم .... $x\geq 0\ ,\ y\leq 0$

نیمساز ربع اول و سوم .... $y=x$

نیمساز ربع دوم و چهارم .... $y=-x$

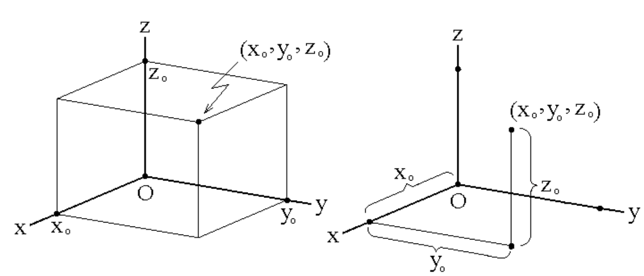
دایرهٔ واحد .... $S^1 : x^2+y^2=1$

۹.۱.۱ تعریف. مجموعهٔ همهٔ سه‌تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را **فضای اقلیدسی** (یا **دکارتی**) نامیده و با نماد $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

به این ترتیب **نقطه در فضا** یعنی یک سه‌تایی مرتب از اعداد حقیقی.

۱۰.۱.۱ نمایش فضای اقلیدسی. برای نشان دادن نقاط فضای اقلیدسی از فضای واقعی اطراف ما استفاده می‌شود. برای این منظور، سه محور همانند انتخاب نموده و آنها را در مبداء بر هم عمود می‌کنیم، به گونه‌ای که کنج حاصله راستگرد باشد. به این معنی که اگر آنها را به ترتیب x−محور، y−محور و z−محور بنامیم، آنگاه اگر x−محور را به سمت y−محور باندازهٔ $\pi/2$ در جهت مثبت دوران دهیم و این حرکت را با انگشتان دست راست نشان دهیم، شست دست راست در امتداد z−محور قرار بگیرد (شکل ۲.۱—ب).



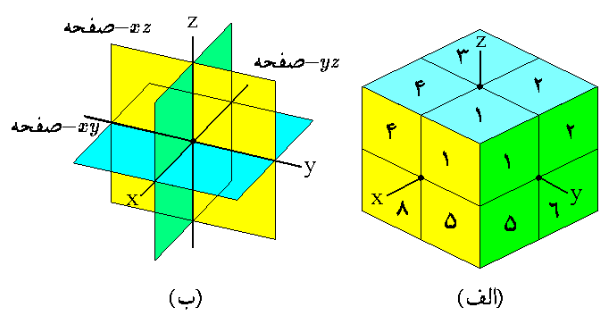
شکل ۳.۱: نمایش نقاط در فضا

اکنون برای نمایش نقطهٔ (x_0,y_0,z_0)، بر چهار نقطهٔ O، x_0 (بر x−محور)، y_0 (بر y−محور) و z_0 (بر z−محور) مکعب مستطیلی را رسم می‌کنیم. این کار با گذراندن صفحه‌ای عمود بر x−محور در نقطهٔ x_0، صفحه‌ای عمود بر y−محور در نقطهٔ y_0 و صفحه‌ای عمود بر z−محور در نقطهٔ z_0 انجام می‌پذیرد (شکل ۳.۱—الف). به این ترتیب، رأس مقابل به مبداء به نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) متناظر است.

این کار را با ترسیم تنها سه پاره‌خط نیز می‌توان انجام داد. به این ترتیب که ابتدا بر x–محور عدد x_0 را مشخص می‌کنیم، سپس از x_0 به اندازهٔ y_0 و به موازات y–محور پاره‌خطی را ترسیم می‌کنیم و آنگاه به موازات z–محور و به طول z_0 یک پاره‌خط رسم می‌کنیم. نقطهٔ انتهایی آخرین پاره‌خط، به (x_0, y_0, z_0) متناظر است (شکل ۳.۱–ب).

۱۱.۱.۱ قضیه. تناظری یکبیک بین نقاط فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ و نقاط فضای حقیقی وجود دارد. این قضیه، نتیجه‌ای از قرارداد ۳.۱.۱ است. به همین دلیل، از این پس بین این دو فرقی قایل نیستیم.

۱۲.۱.۱ تعریف. منظور از یک شکل در فضا، مجموعه‌ای از نقاط $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.



شکل ۴.۱: الف) تقسیم فضا به هشت قسمت
ب) صفحات مختصاتی

۱۳.۱.۱ مثال. شکلهای زیر از فضا معروفند و می‌بایستی دانسته شوند:

مبداء مختصات .... $O = (0, 0, 0)$
x–محور یا محور x ها .... $y = 0\ ,\ z = 0$
y–محور یا محور y ها .... $x = 0\ ,\ z = 0$
z–محور یا محور z ها .... $x = 0\ ,\ y = 0$
xy–صفحه یا صفحهٔ xOy .... $z = 0$
xz–صفحه یا صفحهٔ xOz .... $y = 0$
yz–صفحه یا صفحهٔ yOz .... $x = 0$
یک هشتم اول .... $x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0$
یک هشتم دوم .... $x \leq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0$
یک هشتم سوم .... $x \leq 0\ ,\ y \leq 0\ ,\ z \geq 0$
یک هشتم چهارم ...... $x \geq 0\ ,\ y \leq 0\ ,\ z \geq 0$
یک هشتم پنجم .... $x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \leq 0$
یک هشتم ششم .... $x \leq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \leq 0$
یک هشتم هفتم .... $x \leq 0\ ,\ y \leq 0\ ,\ z \leq 0$
یک هشتم هشتم .... $x \geq 0\ ,\ y \leq 0\ ,\ z \leq 0$
کرهٔ واحد .... $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

برخی از این پانزده مجموعه را در شکل ۴.۱ نمایش داده‌ایم.

۱۴.۱.۱ ارتباط خط، صفحه و فضای اقلیدسی.

خط اقلیدسی را با فرض $x = (x, 0)$ در صفحهٔ اقلیدسی می‌توان نشاند. با فرض $(x, y) = (x, y, 0)$ نیز می‌توان صفحهٔ اقلیدسی را در فضای اقلیدسی نشاند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. البته باید به معادله و اسامی مجموعه‌ها توجه کافی شود. مثلاً، مجموعهٔ $A : x = 0$ در $\mathbb{R}$ نقطهٔ O است، در $\mathbb{R}^2$ برابر y–محور است و در $\mathbb{R}^3$ برابر yz–صفحه می‌باشد.

۱۵.۱.۱ تعمیم و قرارداد. به صورت مشابه قبل $\mathbb{R}^4$ را مجموعهٔ همهٔ چهارتایی‌های مرتب از اعداد حقیقی می‌توان تعریف کرد و یا به شکل کلی تعریف نمود:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \;\middle|\; x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

در واقع، از این پس $n \geq 2$ و در قالب موارد $n = 2$ یا $n = 3$ است.

۱۶.۱.۱ تمرین. هر یک از نقاط داده شده را در صفحه و یا در فضا نشان دهید: $(-1, 3)$، $(2, -1)$، $(1, 1)$، $(0, 2)$، $(1, 1, 1)$، $(1, 0, 1)$، $(0, 1, 1)$، $(1, 1, 0)$، $(1, 0, 0)$، $(-1, 1, -1)$، $(-1, -1, 1)$ و $(-1, -2, -3)$.

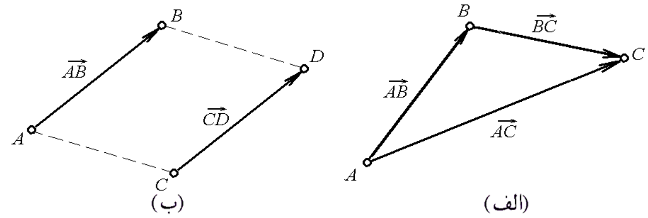
۲.۱ بردار

مهمترین مفهوم پس از نقطه، بردار است. بردار وسیله‌ای برای بیان جهت و حرکت است. در واقع اولین استفادهٔ از بردار در بیان تغییر مکان یک جسم از یک نقطهٔ آغازی به یک نقطهٔ پایانی بوده است. این امر انگیزه‌ای برای تعریف بردار مقید می‌باشد.

۱.۲.۱ تعریف. پاره‌خط جهتدار با ابتدای در نقطهٔ A و انتهای در نقطهٔ B را **بردار مقید** با شروع A و پایان B نامیده و با نماد $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر $\overrightarrow{AB}$ عبارت از زوج مرتب (A, B) است. در صورتی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را برابر گوئیم که $A = C$ و $B = D$.

مجموعه همهٔ بردارهای مقید در $\mathbb{R}^n$ را با نماد $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم. حاصل جمع بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ را به شکل $\overrightarrow{AC}$ تعریف می‌کنیم (به شکل ۵.۱–الف توجه شود).

۲.۲.۱ تعبیر فیزیکی بردار مقید.
از نظر فیزیک، بردار $\overrightarrow{AB}$ به معنی تغییر مکان از A به B می‌باشد. یعنی وسیله‌ای برای توضیح **جابجایی** می‌باشد. به این وسیله می‌توان حرکت را که عبارت از مجموعه‌ای از جابجایی‌ها می‌باشد، توضیح داد.



شکل ۵.۱: الف) بردار مقید
ب) بردارهای همسنگ

۳.۲.۱ تعریف. فرض کنید $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ دو بردار مقید باشند. در صورتی می‌گوئیم این دو بردار **همسنگ** هستند که چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد؛ یعنی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ هم جهت، هم طول و هم راستا باشند. در این صورت می‌نویسیم $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ (شکل ۵.۱–ب).

۴.۲.۱ قضیه. این طور می‌توان اظهار داشت که دو بردار در صورتی همسنگ هستند که طول پاره‌خط‌های حاصل از تصویر آنها بر هر سه محور مختصاتی، یکی باشد. رابطهٔ همسنگی در بین بردارهای مقید، یک رابطهٔ هم‌ارزی است. یعنی به ازای هر $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$ ای

الف) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$.

ب) اگر $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$، آنگاه $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$.

ج) اگر $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$، آنگاه $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

۵.۲.۱ قضیه. شرط لازم و کافی برای این که $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ باشد؛ آن است که

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= x_D - x_C \\ y_B - y_A &= y_D - y_C \\ z_B - z_A &= z_D - z_C \end{aligned}$$

۶.۲.۱ مثال. ۱) بردارهای مقید $\overrightarrow{(۲,-۱,۱)(۵,۳,۲)}$ و $\overrightarrow{(۱,۰,۲)(۴,۴,۳)}$ همسنگ هستند، زیرا

$$\begin{aligned} (۵)-(۲) &= (۴)-(۱), \\ (۳)-(-۱) &= (۴)-(۰), \\ (۲)-(۱) &= (۳)-(۲) \end{aligned}$$

مثال ۲) بردارهای مقید $\overrightarrow{(۱,-۱,۰)(۴,۵,۳)}$ و $\overrightarrow{(۱,۲,۳)(۲,۱,۵)}$ همسنگ نیستند، زیرا $x_D-x_C=(۲)-(۱)$ برابر $x_B-x_A=(۴)-(۱)$ نیست.

۷.۲.۱ تعریف. فرض کنید $\overrightarrow{AB}$ بردار مقید است. مجموعهٔ همهٔ بردارهای مقید $\overrightarrow{CD}$ همسنگ با $\overrightarrow{AB}$ را **بردار آزاد** با نمایندهٔ $\overrightarrow{AB}$ می‌نامیم. این مجموعه دارای عضوی به شکل $\overrightarrow{OC}$ می‌باشد که در آن

$$C = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

مجموعهٔ مذکور را با نماد $\mathbf{C}$ نشان داده و به آن **بردار مکانی نقطهٔ** C می‌گوئیم. مجموعهٔ همهٔ بردارهای آزاد در $\mathbb{R}^۳$ را با نماد $\mathbb{R}^۳$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{R}^۳ = \left\{ \overrightarrow{(x,y,z)} \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

برای تجسم بردار آزاد می‌توان چنین کرد: ابتدا بردار با ابتدای O و انتهای C را در نظر گرفته و سپس فرض کنید که ابتدای آن آزاد است و انتهای آن همواره طوری قرار می‌گیرد که بردار حاصل با $\overrightarrow{OC}$ همسنگ باشد.

۸.۲.۱ مثال. ۱) بردار مقید $\overrightarrow{(۱,۲,-۱)(۳,۴,۲)}$ نمایندهٔ بردار آزاد $\overrightarrow{(۲,۲,۳)}$ است.

مثال ۲) بردارهای مقید $\overrightarrow{(۱,۲,-۱)(۰,۳,۲)}$ و $\overrightarrow{(۴,۳,۰)(۳,۴,۳)}$ یک بردار آزاد را مشخص می‌کنند، یعنی بردار $\overrightarrow{(-۱,۱,۳)}$.

مثال ۳) اگر A دلخواه باشد، آنگاه $\overrightarrow{AA}$ نمایندهٔ بردار آزاد **صفر** $\mathbf{O} = \overrightarrow{(۰,۰,۰)}$ خواهد بود.

مثال ۴) اگر $\overrightarrow{AB}$ نمایندهٔ $\mathbf{C} = \overrightarrow{(a,b,c)}$ باشد، آنگاه $\overrightarrow{BA}$ نمایندهٔ $-\mathbf{C} = \overrightarrow{(-a,-b.-c)}$ است.

۹.۲.۱ تمرین. بردار آزاد نظیر به هر یک از بردارهای مقید زیر را مشخص کنید

۱) $\overrightarrow{(۱,۲,-۱)(۳,۰,۱)}$

۲) $\overrightarrow{(۱,-۱,۱)(۲,۱,۱)}$

۳) $\overrightarrow{(۱,-۱,۲)(۳,۲,۱)}$

۴) $\overrightarrow{(۱,۲,۳)(۳,۲,۱)}$

۵) اعداد x، y و z را طوری بیابید که
$\overrightarrow{(x-y,y-z,x-z)(۱,۱,۱)} \sim \overrightarrow{(۲,۱,-۱)(z,y,x)}$

۶) نشان دهید که تناظری یکبیک بین بردارهای مقید همسنگ با یک بردار مقید مفروض وصفحهٔ اقلیدسی وجود دارد.

۱۰.۲.۱ اعمال بر بردارها. فرض کنید $\mathbf{u} = \overrightarrow{(a,b,c)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(x,y,z)}$ در $\mathbb{R}^۳$ قرار دارند و $\alpha \in \mathbb{R}$. در این صورت، مجموع $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و حاصلضرب α در $\mathbf{u}$ را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \overrightarrow{(a+x, b+y, c+z)}$$
$$\alpha\mathbf{u} = \overrightarrow{(\alpha a, \alpha b, \alpha c)}$$

۱۱.۲.۱ قضیه. اگر $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^۳$ و $a,b \in \mathbb{R}$، آنگاه

۱) بسته بودن جمع: $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbb{R}^۳$

۲) شرکتپذیری جمع: $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

۳) وجود خنثی جمعی: $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$

۴) وجود قرینهٔ جمعی: $\mathbf{u}+(-۱)\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$

۵) تعویضپذیری جمع: $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$

۶) بسته بودن ضرب اسکالر: $a\mathbf{u} \in \mathbb{R}^۳$

۷) شرکتپذیری ضرب اسکالر: $a\,(b\mathbf{u}) = (ab)\,\mathbf{u}$

۸) توضیعپذیری ضرب در جمع: $a\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$

۹) وجود خنثی ضرب اسکالر: $۱\mathbf{u} = \mathbf{u}$

به این ترتیب اصطلاحاً گفته می‌شود که $\mathbb{R}^۳$ به همراه جمع و ضرب مشروح در ۹.۲.۱ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

۱۲.۲.۱ تمرین. ۱) x، y و z را طوری بیابید که
$\overrightarrow{(۱,۲,-۱)} = x\overrightarrow{(۱,۱,۰)} + y\overrightarrow{(۱,۰,۱)} + z\overrightarrow{(۰,۱,۱)}$.

۲) فرض کنید $\mathbf{w} = \overrightarrow{(۳,۲,۱)} \in \mathbb{R}^۳$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-۱,۲,۱)}$ و $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,۱,۱)}$ در این صورت، مقادیر $۵\mathbf{u}+\mathbf{v}$، $۳\mathbf{u}$، $-۲\mathbf{v}$، $۵\mathbf{u}$، $\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{w}$، $\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}+۲\mathbf{v}+۳\mathbf{w}$ رامحاسبه کنید.

۳) نشان دهید که اعداد x و y صادق در شرط

$$\overrightarrow{(۱,۲,-۱)} = x\overrightarrow{(۳,۱,۲)} + y\overrightarrow{(۱,-۱,۱)}$$

وجود ندارند.

۱۳.۲.۱ قرارداد. از این پس بجای گفتن این مطلب که $\overrightarrow{AB}$ یک نماینده $\mathbf{C}$ است از نماد $\mathbf{C} = \overrightarrow{AB}$ استفاده می‌کنیم. یعنی $\mathbf{C} = \mathbf{B}-\mathbf{A}$.

۱۴.۲.۱ قرارداد. نقطهٔ C انتهاء بردار $\mathbf{C}$ است و بردار $\mathbf{C}$ عبارت از بردار حاصل از متصل نمودن مبداء به نقطهٔ C است. به همین دلیل در غالب موارد بین C و $\mathbf{C}$ فرقی قایل نمی‌شویم. اگر چنانچه در بحثی نماد بردار فراموش شد، از روی محتوی بحث می‌توان بردار بودن اشیاء مورد بحث را فهمید.

۱۵.۲.۱ تعمیم. تمام مباحث بالا را به ابعاد بالاتر از ۳ می‌توان تعمیم داد، بی‌آنکه کار خاصی انجام شود. به این ترتیب سخن گفتن از فضای اقلیدسی n−بعدی $\mathbb{R}^n$ و فضای برداری n−بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ مجاز است.

۱۶.۲.۱ تمرین.

۱) فرض کنید $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,۲,-۱,۳)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-۱,۱,۲,۴)}$ دو بردار در $\mathbb{R}^۴$ باشند. مطلوبست محاسبهٔ $۲\mathbf{u}$، $-۵\mathbf{v}$، $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $۲\mathbf{u}-۴\mathbf{v}$.

۲) اعداد a، b، c و d را طوری بیابید که

$$\overrightarrow{(۱,-۱,۲,۳)} = a\overrightarrow{(-۱,۱,۱,۱)} + b\overrightarrow{(۱,-۱,۱,۱)} + c\overrightarrow{(۱,۱,-۱,۱)} + d(۳,۱,۲,۵)$$

۳) نشان دهید که اعداد a، b و c ای که در رابطهٔ زیر صدق کنند، نمی‌توان یافت

$$\overrightarrow{(۶,۹,۱۲,۱۷,۱۸)} = a\overrightarrow{(۱,۲,۳,۴,۵)} + b\overrightarrow{(۲,۳,۴,۵,۶)} + c\overrightarrow{(۳,۴,۵,۶,۷)}$$

۳.۱ استقلال، وابستگی، پایه و بعد

چرا می‌گوئیم فضا سه بعدی‌است، در حالی که گفته می‌شود صفحه دو بعدی است؟ اساساً بعد یک فضا به چه معنی است؟ هدف از این بخش پاسخ به این پرسش است.

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنید $\mathbf{u}_۱,\cdots,\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ بردارند. منظور از یک **ترکیب خطی** از این بردارها، عبارتی است به شکل $a_۱\mathbf{u}_۱+\cdots+a_k\mathbf{u}_k$ که در آن $a_۱,\cdots,a_k \in \mathbb{R}$ عدد هستند. مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی این بردارها را **فضای تولید شده** توسط آنها نامیده و با نماد $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_۱,\cdots,\mathbf{u}_k\}$ نشان می‌دهیم.

۲.۳.۱ مثال. ۱) فرض کنیم $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۱,-۱)} \in \mathbb{R}^۲$، $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۲,۱)}$. در این صورت $۵\mathbf{u}+۳\mathbf{v} = \overrightarrow{(۱۳,۲)}$، $\mathbf{u}-۲\mathbf{v} = \overrightarrow{(۰,۳)}$ و $۰\mathbf{u}+\mathbf{v} = \overrightarrow{(۱,-۱)}$ نمونه‌هایی از ترکیبات خطی این دو بردار می‌باشند.

مثال ۲) در صورتی که $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,۲,-۱)}$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۳,۴,۲)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(۵,۶,۵)}$، داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{span}\Big\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\Big\} &= \Big\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}\,\Big|\,a,b,c\in\mathbb{R}\Big\}\\ &= \Big\{(a+۳b+۵c)\mathbf{i}+(۲a+۴b+۶c)\mathbf{j}\\ &\quad +(-a+۲b+۵c)\mathbf{k}\,\Big|\,a,b,c\in\mathbb{R}\Big\}\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $\alpha = a + 3b + 5c$ و $\beta = 2a + 4b + 6c$، آنگاه می‌توان a و b را بر حسب α، β و c به شکل زیر بدست آورید $a = c - 2\alpha + 3\frac{\beta}{2}$ و $b = -2c + \alpha - \frac{\beta}{2}$. در نتیجه

$$-a + 2b + 5c = 4\alpha - \frac{5}{2}\beta$$

پس با فرض $\alpha = a$ و $\beta = 2b$، مجموعهٔ $\mathrm{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ عبارت است از

$$\begin{aligned}
&= \left\{\overrightarrow{\left(\alpha, \beta, 4\alpha - \frac{5}{2}\beta\right)} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\overrightarrow{(a, 2b, 4a - 5b)} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{a\overrightarrow{(1, 0, 4)} + b\overrightarrow{(0, 2, -5)} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \mathrm{span}\left\{\overrightarrow{(1, 0, 4)}, \overrightarrow{(0, 2, -5)}\right\}
\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1, -1)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-1, 2)}$، در این صورت

$$\begin{aligned}
\mathrm{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} &= \{a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \mid a, b \in \mathbb{R}\}\\
&= \left\{\overrightarrow{(a - b, 2b - a)} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

زیرا اگر $\alpha = a - b$ و $\beta = 2b - a$، آنگاه $b = \frac{\alpha + \beta}{3}$ و $a = 2\alpha + \beta$.

۳.۳.۱ قضیه. اگر $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ آنگاه $\mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_k\}$ یک فضای برداری است. یعنی نه خاصیت $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$ از قضیهٔ ۱.۲.۱ را دارد.

۴.۳.۱ تعریف. بردارهای $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ را در صورتی **وابستهٔ خطی** گوئیم که یک ترکیب صفر غیر بدیهی داشته باشند. یعنی، اعداد $a_1, \cdots, a_k$ که همگی همزمان صفر نیستند، به گونه‌ای وجود داشته باشند که $a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k$ صفر شود. اگر بردارهایی وابستهٔ خطی نباشند، **مستقل خطی** گفته می‌شوند.

۵.۳.۱ مثال. ۱) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1, -1, 2)}$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(3, 0, 1)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(1, -1, 1)}$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی‌اند، زیرا اگر فرض کنیم $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{O}$، آنگاه

$$\overrightarrow{(a + 3b + c, -a - c, 2a + b + c)} = \overrightarrow{(0, 0, 0)}$$

و در نتیجه

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ -a - c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ c = a \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7a = 0 \\ c = a \\ b = -3a \end{cases}$$

پس $a = b = c = 0$ و بنابراین بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ مستقل خطی‌اند.

مثال ۲) بردارهای $\mathbf{u} = \overrightarrow{(3, 0, 7, 10)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(1, 2, 3, 4)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(1, -1, 2, 3)}$ در $\mathbb{R}^4$ وابستهٔ خطی‌اند، زیرا، اگر فرض شود $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{O}$، آنگاه می‌بایستی

$$\begin{cases} 3a + b + c = 0 \\ 2b - c = 0 \\ 7a + 3b + 2c = 0 \\ 10a + 4b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3b = 0 \\ c = 2b \\ 10a + 10b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2b \\ a = -b \end{cases}$$

اگر فرض شود $b = 1$، آنگاه $a = -1$ و $c = 2$ و بنابرین $-\mathbf{u} + \mathbf{v} + 2\mathbf{w} = 0$. یعنی این سه بردار وابستهٔ خطی هستند.

۶.۳.۱ تمرین. کدام یک از مجموعه بردارهای داده شده مستقل خطی هستند؟ چرا؟

۱) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1, -1)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(0, 1)},$

۲) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(3, -2)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(-6, 4)}$

۳) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1, 2, -1)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(3, 4, 2)},\ \mathbf{w} = \overrightarrow{(4, 6, 1)},$

۴) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1, 2, 4)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(-3, 10, 21)},$
$\mathbf{w} = \overrightarrow{(-4, 8, 17)},$

۵) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1, 0, 0, 0)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(5, 2, 3, 1)},$
$\mathbf{w} = \overrightarrow{(0, 4, 7, -2)},\ \mathbf{n} = \overrightarrow{(0, 0, -3, 1)}$

۶) نشان دهید که بردارهای $\mathbf{u} = \overrightarrow{(a, b)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(c, d)}$ وقتی وتنها وقتی مستقل خطی‌اند که $ad \neq bc$. در حالت $d \neq 0$ و $b \neq 0$، این شرط به معنی $a/b = c/d$ است.

۷) نشان دهید که هر بردار دلخواه از $\mathbb{R}^3$ را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\mathbf{u} = \overrightarrow{(-1, 1, 1)}$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(1, -1, 1)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(1, 1, -1)}$ می‌توان نوشت.

۷.۳.۱ تعریف. در صورتی بردارهای $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ فضا را **تولید** می‌کنند که هر عضو از $\mathbb{R}^n$ را به صورت ترکیبی خطی از آنها بتوان نوشت، یعنی $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\left\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\right\}$. در صورتی می‌گوئیم بردارهای $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ تشکیل یک **پایه** برای $\mathbb{R}^n$ می‌دهند که اولاً مستقل خطی باشد و در ثانی فضا را تولید کنند. در حالت کلی، هر مجموعهٔ مستقل خطی از بردارها که فضای برداری V را تولید کنند، پایدار برای V نامیده می‌شوند.

۸.۳.۱ قضیه. تعداد بردارهای هر پایه از فضای $\mathbb{R}^n$ دقیقاً برابر n است. این عدد مشترک را **بعد فضای** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم. بنابراین، اگر $k > n$، آنگاه هر k تعداد از بردارهای در $\mathbb{R}^n$ وابسته خطی هستند.

۹.۳.۱ قضیه. اگر $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_۱, \cdots, \mathbf{u}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ پایه بوده و $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ برداری دلخواه باشد، آنگاه اعداد منحصر بفرد $a_۱, \cdots, a_n$ طوری یافت می‌شود که $\mathbf{v} = a_۱\mathbf{u}_۱ + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$. این اعداد را مختصات $\mathbf{v}$ بر پایهٔ $\mathcal{B}$ می‌نامیم، قرار داد می‌کنیم $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{(a_۱, \cdots, a_n)}$.

۱۰.۳.۱ مثال. ۱) فرض کنیم $\mathbf{i} = \overrightarrow{(۱, ۰)}$ و $\mathbf{j} = \overrightarrow{(۰, ۱)}$. در این صورت $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ پایهٔ استاندارد برای $\mathbb{R}^۲$ نامیده می‌شود. بعلاوه، $\overrightarrow{(a, b)} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

مثال ۲) فرض کنیم $\mathbf{i} = \overrightarrow{(۱, ۰, ۰)}$، $\mathbf{j} = \overrightarrow{(۰, ۱, ۰)}$ و $\mathbf{k} = \overrightarrow{(۰, ۰, ۱)}$. در این صورت $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ پایهٔ استاندارد برای $\mathbb{R}^۳$ نامیده می‌شود. بعلاوه $\overrightarrow{(a, b, c)} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

مثال ۳) بردارهای $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱, ۱, ۰)}$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۱, ۰, ۱)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(۰, ۱, ۱)}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^۳$ تشکیل می‌دهند. زیرا، اولاً مستقل خطی‌اند: از فرض $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{O}$ نتیجه می‌شود که

$$\begin{cases} a + b = ۰ \\ a + c = ۰ \\ b + c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = -a \\ -۲a = ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad a = b = c = ۰$$

و در ثانی فضا را تولید می‌کنند از فرض

$$(\alpha, \beta, \gamma) = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$$

داریم

$$\begin{cases} a + b = \alpha \\ a + c = \beta \\ b + c = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = \alpha \\ b - c = \alpha - \beta \\ b + c = \gamma \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha - b \\ ۲b = \alpha - \beta + \gamma \\ ۲c = -\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

در نتیجه

$$a = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{۲}, \; b = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{۲}, \; c = \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{۲}$$

یعنی، اگر $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\right\}$، آنگاه

$$\left[\overrightarrow{(\alpha, \beta, \gamma)}\right]_{\mathcal{B}} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{(\alpha + \beta - \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -\alpha + \beta + \gamma)}$$

مثال ۴) بردارهای $\mathbf{u}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۰, ۰, ۰)}$، $\mathbf{u}_۲ = \overrightarrow{(۱, ۱, ۰, ۰)}$، $\mathbf{u}_۳ = \overrightarrow{(۱, ۱, ۱, ۰)}$ و $\mathbf{u}_۴ = \overrightarrow{(۱, ۱, ۱, ۱)}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۴$ تشکیل می‌دهند، زیرا، اولاً مستقل خطی‌اند و از فرض

$$a_۱\mathbf{u}_۱ + a_۲\mathbf{u}_۲ + a_۳\mathbf{u}_۳ + a_۴\mathbf{u}_۴ = \mathbf{0}$$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ = ۰ \\ a_۲ + a_۳ + a_۴ = ۰ \\ a_۳ + a_۴ = ۰ \\ a_۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = -a_۲ - a_۳ - a_۴ \\ a_۲ = -a_۳ - a_۴ \\ a_۳ = -a_۴ \\ a_۴ = ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad a_۱ = a_۲ = a_۳ = a_۴ = ۰$$

و بعلاوه، فضا را تولید می‌کنند و از فرض

$$\overrightarrow{(a, b, c, d)} = a_۱\mathbf{u}_۱ + a_۲\mathbf{u}_۲ + a_۳\mathbf{u}_۳ + a_۴\mathbf{u}_۴$$

نتیجه می‌گردد که

$$\begin{cases} a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ = a \\ a_۲ + a_۳ + a_۴ = b \\ a_۳ + a_۴ = c \\ a_۴ = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = a - b \\ a_۲ = b - c \\ a_۳ = c - d \\ a_۴ = d \end{cases}$$

بنابراین، اگر $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_۱, \mathbf{u}_۲, \mathbf{u}_۳, \mathbf{u}_۴\}$، آنگاه

$$\left[\overrightarrow{(a, b, c, d)}\right]_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{(a - b, b - c, c - d, d)}$$

۱۱.۳.۱ تمرین. در هر یک از موارد زیر نشان دهید که بردارهای $\mathbf{e}_i$ تشکیل یک پایه می‌دهند و سپس بردار $\mathbf{v}$ را بر پایهٔ آنها بیان کنید:

۱) $\mathbf{e}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۲)},\ \mathbf{e}_۲ = \overrightarrow{(۳, ۱)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۲, ۳)}.$

۲) $\mathbf{e}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۰)},\ \mathbf{e}_۲ = \overrightarrow{(۱, ۱)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(x, y)}.$

۳) $\mathbf{e}_۱ = \overrightarrow{(۲, ۲, -۱)},\ \mathbf{e}_۲ = \overrightarrow{(۲, -۱, ۲)},$
$\mathbf{e}_۳ = \overrightarrow{(-۱, ۲, ۲)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۱, ۱, ۱)}.$

۴) $\mathbf{e}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۵, -۱)},\ \mathbf{e}_۲ = \overrightarrow{(۳, ۰, ۱)},$
$\mathbf{e}_۳ = \overrightarrow{(۵, ۴, ۱)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(x, ۱, y)}.$

۵) $\mathbf{e}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۲, ۳)},\ \mathbf{e}_۲ = \overrightarrow{(۰, ۲, ۳)},$
$\mathbf{e}_۳ = \overrightarrow{(۰, ۰, ۳)},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{(x, y, z)}.$

۶) $\mathbf{e}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۲, ۱, ۱)},\ \mathbf{e}_۲ = \overrightarrow{(۲, ۳, ۱, ۰)},$
$\mathbf{e}_۳ = \overrightarrow{(۳, ۱, ۱, -۲)}, \mathbf{e}_۴ = \overrightarrow{(۴, ۲, -۱, -۶)},$
$\mathbf{v} = \overrightarrow{(۰, ۰, ۲, ۷)}.$

۷) $\mathbf{e}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۱, ۱, ۱)},\ \mathbf{e}_۲ = \overrightarrow{(۲, ۲, ۲, ۰)},$
$\mathbf{e}_۳ = \overrightarrow{(۳, ۳, ۰, ۰)},\ \mathbf{e}_۴ = \overrightarrow{(۴, ۰, ۰, ۰)}, \mathbf{v} = \overrightarrow{(x, y, z, t)}.$

در صورتی که حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در بین بردارهای $\mathbf{u}_۱$، ... و $\mathbf{u}_k$ را بعد فضای $\operatorname{span}\left\{\mathbf{u}_۱, \cdots, \mathbf{u}_k\right\}$

تعریف کنیم، بعد فضای تولید شده توسط هر دسته از بردارهای زیر را مشخص کنید:

۸) $\mathbf{u}_۱ = \overrightarrow{(۱, -۱)},\ \mathbf{u}_۲ = \overrightarrow{(۳, ۲)},\ \mathbf{u}_۳ = \overrightarrow{(۱, -۱)}.$

۹) $\mathbf{u}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۲, -۱)},\ \mathbf{u}_۲ = \overrightarrow{(۳, ۴, ۲)},\ \mathbf{u}_۳ = \overrightarrow{(۷, ۱۰, ۳)}.$

۱۰) $\mathbf{u}_۱ = \overrightarrow{(۱, ۲, ۲, -۱)},\ \mathbf{u}_۲ = \overrightarrow{(۲, ۳, ۲, ۵)},$
$\mathbf{u}_۳ = \overrightarrow{(-۱, ۴, ۳, -۱)},\ \mathbf{u}_۴ = \overrightarrow{(۲, ۹, ۳, ۴)},$
$\mathbf{u}_۵ = \overrightarrow{(۱, -۱, ۱, -۱)}.$

۴.۱ ماتریس

ماتریس تعمیم طبیعی مفهوم بردار است و دارای کاربردهای فراوانی در سایر بخشهای ریاضی و نیز صنعت می‌باشد. به بیان ساده، ماتریس آرایه‌ای مرتب از اعداد است.

۱.۴.۱ تعریف. منظور از ماتریس $n\times m$، گردایه‌ای مرکب از nm عدد به شکل مستطیل

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱m} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

است که در n سطر و m ستون مرتب شده‌اند. در این صورت، به شکل خلاصه می‌نویسیم $A = [a_{ij}]$ و a_{ij} را درآیهٔ (i,j) ام A می‌نامیم (یعنی، درآیهٔ واقع در سطر i ام و ستون j ام از ماتریس A). البته در ادامه ماتریسهایی خواهیم داشت که در آنها برخی از a_{ij} ها عملگر، تابع و یا بردارند (بعنوان، مثال به صورت قضیهٔ استوکس ۵.۸.۹ مراجعه کنید). مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n\times m$ را با نماد $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ نشان می‌دهیم.

۲.۴.۱ قضیه. اگر به ازای $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathrm{Mat}\,(n\times m)$ و نیز $a \in \mathbb{R}$ تعریف کنیم $A + B := [a_{ij} + b_{ij}]$ و $aA := [aa_{ij}]$. در این صورت $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ به همراه عمل جمع و ضرب مشروح در بالا، یک فضای برداری است. به این معنی که به ازای $A, B, C \in \mathrm{Mat}\,(n\times m)$ و $a, b \in \mathbb{R}$ داریم:

۱) $A + B \in \mathrm{Mat}\,(n\times m)\,,$

۲) $A + (B + C) = (A + B) + C,$

۳) $A + O = O + A = A,$ ۴) $A + B = B + A,$

۵) $A + (-۱)\,A = O,$ ۶) $aA \in \mathrm{Mat}\,(n\times m)\,,$

۷) $a\,(bA) = (ab)\,A,$ ۸) $a\,(A + B) = aA + aB,$

۹) $۱A = A.$

که در اینجا $O = [o_{ij}]$ ماتریس صفر است که همهٔ درآیه‌های صفرند. بعلاوه، قرینهٔ جمعی ماتریس $A = [a_{ij}]$ عبارت از $[-a_{ij}] = (-۱)\,A$ است که از منفی کردن همهٔ درآیه‌های ماتریس A به دست آمده است.

۳.۴.۱ مثال. ۱) اگر $n = ۱$، اعضاء $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ را **ماتریسهای سطری** می‌نامند. عملاً $\mathbb{R}^۲ = \mathrm{Mat}\,(۱\times ۲)$ و $\mathbb{R}^۳ = \mathrm{Mat}\,(۱\times ۳)$.

مثال ۲) اگر $n = m$، اعضاء $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ را **ماتریسهای مربعی** می‌نامند، نظیر

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}, \qquad [۱],$$

مثال ۳) در $\mathrm{Mat}\,(۲\times ۳)$ داریم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۳ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ٦ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

مثال ۴) در $\mathrm{Mat}\,(۲\times ۲)$ داریم

$$۲\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۱ & ۵ \\ -۱۱ & -٦ \end{bmatrix}$$

۴.۴.۱ تمرین.

۱) آیا ماتریسهای $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ مستقل خطی‌اند؟

۲) فرض کنید A، B و C بترتیب $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ هستند. در این صورت $۲A$، $B - C$، $A + ۲B + C$ و $A - C$ را محاسبه کنید.

۳) فرض کنید E_{ij} ماتریس $n\times m$ای باشد که همهٔ درآیه‌های آن صفرند بجز مختص (i,j) ام آن که برابر یک است. نشان دهید که مجموعهٔ E_{ij} ها تشکیل یک پایه برای $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$. بعد $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ چقدر است؟

۴) نشان دهید ماتریسهای داده شده یک پایه برای $\mathrm{Mat}\,(۲\times ۲)$ تشکیل می‌دهند، سپس ماتریس دلخواه $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ را بر حسب آنها بیان کنید:

$$A_۱ = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad A_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad A_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

۵.۴.۱ تعریف. اگر $A=[a_{ij}]$ ماتریس $n\times m$ و $B=[b_{ij}]$ ماتریس $m\times l$ باشند، آنگاه **حاصلضرب** AB را ماتریس $n\times l$ ای تعریف می‌کنیم که درآیهٔ (i,j) ام آن برابر

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+\cdots+a_{im}b_{mj} \\ &= \begin{bmatrix} a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

است، که از حاصلضرب سطر i ام از ماتریس A در ستون j ام از ماتریس B حاصل شده است.

۶.۴.۱ مثال. با توجه به تعریف ضرب ماتریسها داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-۲+۵ \\ ۱+۶-۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -۱-۲ & ۰+۲ \\ ۳-۴ & ۰+۴ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۱۳ \\ ۶ & ۹ & ۲۱ \\ ۱۱ & ۱۳ & ۳۵ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۷.۴.۱ قضیه. اگر I_n ماتریس $n\times n$ ای باشد که قطر آن یک و سایر اعضاء آن صفرند (ماتریس همانی $n\times n$)، و نیز اگر A، ماتریس $n\times m$ باشد، آنگاه $AI_m=A$ و $I_nA=A$. بعلاوه، اگر A، B و C ماتریس بوده و a عدد باشد، در این صورت

۱) $A(B+C)=AB+AC$ ۲) $A(BC)=(AB)C$

۳) $a(AB)=(aA)B=A(aB)$ ۴) $۱A=A$

۸.۴.۱ تعریف. ماتریس مربعی A را در صورتی معکوسپذیر گویند که ماتریس مربعی B دیگری چنان یافت گردد که $AB=BA=I_n$. در این صورت B را معکوس A نامیده و با نماد $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

۹.۴.۱ مثال. ۱) ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ معکوسپذیر است، زیرا اگر فرض کنیم A ماتریس معکوسپذیر است و $A^{-۱}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{bmatrix}$، آنگاه فرض $AA^{-۱}=I_۲$ به معنی $\begin{bmatrix} \alpha+۲\gamma & \beta+۲\eta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ است. در نتیجه

$$\begin{cases} \alpha+۲\gamma=۱ \\ -\alpha=۰ \\ \beta+۲\eta=۰ \\ -\beta=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲\gamma=۱ \\ \alpha=۰ \\ ۲\eta-۱=۰ \\ \beta=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۰ \\ \beta=-۱ \\ \gamma=۱/۲ \\ \eta=۱/۲ \end{cases}$$

پس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}$. برای اثبات این که ماتریس مذکور معکوس A است، باید محاسبات زیر را انجام دهیم

$$\begin{aligned} AA^{-۱} &= \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = A^{-۱}A \end{aligned}$$

مثال ۲) ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ معکوسپذیر نیست، زیرا اگر فرض شود $B=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{bmatrix}$ و $AB=I_۲$، آنگاه

$$\begin{bmatrix} ۲\alpha+۲\gamma & ۲\beta+۲\eta \\ -\alpha-\gamma & -\beta-\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس بایستی $۲\alpha+۲\gamma=۱$ و $-\alpha-\gamma=۰$، که تناقص است.

۱۰.۴.۱ تمرین.

۱) حاصلضرب $A^{-۱}BA$ را در حالی بیابید که

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$ □

۲) نشان دهید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وقتی و تنها وقتی معکوسپذیر است که $ad\neq bc$، بعلاوه معکوس آن $\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ است.

۳) نشان دهید که اگر $ABC=I$، آنگاه $CAB=BCA=I$.

۴) فرض کنید P_{ij} ماتریس حاصل از تعویض سطر i ام و سطر j ام ماتریس همانی $I_۳$ باشد. در این صورت نشان دهید:
(الف) $P_{ij}^۲=I_۳$. (ب) $P_{ij}P_{jk}=P_{ik}$. (ج) P_{ij} از تعویض ستونهای i ام و j ام ماتریس $I_۳$ حاصل می‌شود.
(د) اگر A ماتریس ۳×۳ باشد، آنگاه $P_{ij}A$ عبارتست از ماتریس حاصل از تعویض سطرهای i ام و j ام ماتریس A.
(ه) اگر A ماتریس ۳×۳ باشد، آنگاه AP_{ij} عبارتست از ماتریس حاصل از تعویض ستونهای i ام و j ام ماتریس A.
(و) ماتریس P_{ij} معکوسپذیر است.

۵) با محاسبهٔ AB و BA در مورد $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، نشان دهید که در حالت کلی این دو برابر نیستند. یعنی، ضرب ماتریسها تعویضپذیر نیست.

۶) فرض کنید $P = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$، $Q = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$، $R = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$ و $E = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$. در این صورت، نشان دهید که

$a)\ E^۲ = E \qquad b)\ P^۲ = -E$

$c)\ Q^۲ = E \qquad d)\ R^۲ = E$

$e)\ EP = PE = P \qquad f)\ EQ = QE = Q$

$g)\ PQ + QP = O \qquad h)\ RP + PR = O$

$i)\ QR + RQ = O \qquad j)\ P + Q + R + E = \begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$

۷) نشان دهید که اگر A، B، C و D بترتیب ماتریسهایی $k \times m$، $\ell \times p$، $n \times k$ و $q \times \ell$ باشند، آنگاه $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & O \\ O & BD \end{pmatrix}$.

۸) نشان دهید که اگر $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$، آنگاه $A^۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ و $A^n = O$ که $n \geq ۳$.

۵.۱ دترمینان

دترمینان تنها برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌گردد. تعریف دترمینان به شکل بازگشتی است. به این ترتیب که برای تعریف دترمینان ماتریس $n \times n$ می‌باید قبلاً دترمینان ماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$ تعریف شده باشد.

۱.۵.۱ تعریف. دترمینان ماتریس مربعی A را با نماد $|A|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) دترمینان ماتریس مربعی ۱×۱: $|a| = a$

۲) دترمینان ماتریس مربعی ۲×۲: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

۳) دترمینان ماتریس مربعی ۳×۳:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

۴) فرض کنید دترمینان ماتریسهای $(n-۱) \times (n-۱)$ قبلاً تعریف شده باشد و $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر A_j برابر دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر اول و ستون j ام ماتریس A باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$|A| = a_{۱۱}A_{۱۱} - a_{۱۲}A_{۱۲} + \cdots + (-۱)^{n+۱}a_{۱n}A_{۱n}$$

۲.۵.۱ یادداشت. در تعریف ۱.۵.۱ از سطر اول استفاده شده است. این تعریف را می‌توان به کمک هر سطر دیگر و یا هر یک از ستون‌های ماتریس ارائه نمود. قضیه‌ای از جبر خطی وجود دارد که هم‌ارزی این تعریف را نشان می‌دهد. در واقع، داریم

۳.۵.۱ قضیه. اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد و A_{ij} دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} |A| &= (-۱)^{i+۱}\, a_{i۱}A_{i۱} + (-۱)^{i+۲}\, a_{i۲}A_{i۲} + \cdots \\ &\quad \cdots + (-۱)^{i+n}\, a_{in}A_{in} \\ &= (-۱)^{j+۱}\, a_{۱j}A_{۱j} + (-۱)^{i+۲}\, a_{۲j}A_{۲j} + \cdots \\ &\quad \cdots + (-۱)^{j+n}\, a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$

۴.۵.۱ مثال. با توجه به تعریف دترمینان، داریم

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} = (۱)(۱) - (۲)(-۱) = ۱ + ۲ = ۳$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۵ & ۴ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} &= (۲)\begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} - (۳)\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \\ &\quad + (-۱)\begin{vmatrix} ۵ & ۵ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} \\ &= (۲)(۸+۳) - (۳)(۱۰-۳) \\ &\quad + (-۱)(-۵-۴) = ۱۰ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ۳ & ۴ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{vmatrix} &= (۳)\begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} - (۲)\begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} \\ &\quad + (-۱)\begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} \\ &= (۳)(۰-۲) - (۲)(۱+۱) \\ &\quad + (-۱)(۸-۰) = -۴۰ \end{aligned}$$

چون در سطر سوم از ماتریس زیر دو عضو صفر وجود دارد، آنرا بر حسب سطر سوم بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&2&5\\-1&1&3\\0&-1&0\end{vmatrix} &= (-1)^{3+1}(0)A_{31}\\ &\quad+(-1)^{3+2}(-1)A_{32}+(-1)^{3+3}(0)A_{33}\\ &= A_{32}=\begin{vmatrix}1&5\\-1&3\end{vmatrix}=3+5=8\end{aligned}$$

۵.۵.۱ تمرین. دترمینان هر یک از ماتریسهای زیر را محاسبه کنید

$$1)\ \begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}\qquad 2)\ \begin{bmatrix}3&-1\\2&5\end{bmatrix}$$

$$3)\ \begin{bmatrix}1&2&3\\4&1&8\\5&3&11\end{bmatrix}\qquad 4)\ \begin{bmatrix}1&2&3\\1&4&9\\1&8&27\end{bmatrix}$$

$$5)\ \begin{bmatrix}0&2&1&5\\0&1&0&4\\1&3&0&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\qquad 6)\ \begin{bmatrix}2&3&2&1\\1&3&2&1\\1&2&2&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

در غالب موارد، محاسبهٔ مستقیم دترمینان از روی تعریف، کاری بس وقتگیر است. به همین دلیل معمولاً برای ساده‌تر کردن محاسبهٔ آنها از خواص دترمینان استفاده می‌کنند.

۶.۵.۱ قضیه.

۱) اگر در دترمینانی جای دو سطر را عوض کنیم، علامت دترمینان عوض خواهد شد.

۲) اگر سطری از یک ماتریس را در عددی ضرب کنیم، دترمینان آن ماتریس در این عدد ضرب می‌شود.

۳) اگر مضربی از یک سطر را به سطر دیگری از آن ماتریس بیافزائیم، دترمینان آن ماتریس تغییر نمی‌کند.

۴) خواص بالا برای ستونها نیز صحیح است.

۵) اگر بالای قطر اصلی و یا پائین قطر اصلی صفر شود، دترمینان ماتریس با حاصلضرب عناصر قطر اصلی برابر است.

۶) اگر سطری از یک ماتریس برابر مضربی از یک سطر دیگر آن باشد، آنگاه دترمینان ماتریس صفر است.

۷) اگر ستونی از یک ماتریس برابر مضربی از یک ستون دیگر آن باشد، آنگاه دترمینان ماتریس صفر است.

۸) اگر یک سطر و یا یک ستون از ماتریسی صفر باشد، دترمینان آن ماتریس صفر است.

۷.۵.۱ مثال. ۱) به کمک قضیهٔ ۶.۵.۱ داریم

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}3&5&2\\2&7&-1\\-1&3&1\end{vmatrix} &\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}0&14&5\\0&13&1\\-1&3&1\end{vmatrix}\\ &= (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix}14&5\\13&1\end{vmatrix}=-51\end{aligned}$$

که در (۱) ابتدا سه برابر سطر سوم به به سطر اول افزوده‌ایم و سپس دو برابر سطر سوم را به سطر دوم افزوده‌ایم.

مثال ۲) به کمک قضیهٔ ۶.۵.۱ داریم

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&0&-1&5\\-1&1&1&2\\2&3&2&1\\3&2&3&-1\end{vmatrix} &\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&7\\2&3&4&-9\\3&2&6&-16\end{vmatrix}\\ &\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\2&3&4&-30\\3&2&6&-30\end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\2&3&-2&0\\3&2&6&-30\end{vmatrix}\\ &= (1)(1)(4)(15)=60\end{aligned}$$

که در (۱) ستون اول را به ستون سوم افزوده‌ایم و پنج برابر ستون اول را از ستون چهارم کم کرده‌ایم؛ در (۲) هفت برابر ستون دوم را از ستون چهارم کم کرده‌ایم؛ در (۳) سطر چهارم را از سطر سوم کم کرده‌ایم.

مثال ۳) به کمک قضیهٔ ۶.۵.۱ داریم

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix} &\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}\\ &\overset{(2)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&0&0\\a&1&1\\a^2&b+a&c+a\end{vmatrix}\\ &\overset{(3)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&0&0\\a&1&0\\a^2&b+a&c-b\end{vmatrix}\\ &= (b-a)(c-a)(c-b)\end{aligned}$$

که در (۱) ستون اول را از دو ستون دیگر کم کرده‌ایم؛ در (۲) از ستون دوم عدد $b-a$ و از ستون سوم عدد $c-a$ را فاکتور گرفته‌ایم؛ در (۳) ستون دوم را از ستون سوم کم کرده‌ایم.

۸.۵.۱ تمرین. دترمینان هر یک از ماتریسهای زیر را به کمک خواص دترمینان محاسبه کنید

$$1)\ \begin{bmatrix}3&-1&2\\2&2&-1\\1&3&1\end{bmatrix}\qquad 2)\ \begin{bmatrix}3&1&3\\-1&2&1\\2&1&-1\end{bmatrix}$$

$$۳)\ \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \qquad ۴)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۰ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

۵) تنها به کمک ۶.۵.۱ ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = \left(a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲\right)^۲$$

۶) تنها به کمک ۵.۵.۱ ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = (۳a+b)b^۲$$

۹.۵.۱ قضیه. ماتریس مربعی A وقتی و تنها وقتی معکوسپذیر است که $|A|$ مخالف صفر باشد. بعلاوه، $|A^{-۱}|$ برابر $۱/|A|$ است و $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$.

۱۰.۵.۱ قضیه. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس مربعی با دترمینان Δ مخالف صفر است و A_{ij} دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A است. در این صورت $A^{-۱}$ برابر است با

$$\frac{۱}{\Delta}\begin{bmatrix} (-۱)^{۱+۱}A_{۱۱} & (-۱)^{۲+۱}A_{۲۱} & \cdots & (-۱)^{n+۱}A_{n۱} \\ (-۱)^{۱+۲}A_{۱۲} & (-۱)^{۲+۲}A_{۲۲} & \cdots & (-۱)^{n+۲}A_{n۲} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-۱)^{۱+n}A_{۱n} & (-۱)^{۲+n}A_{۲n} & \cdots & (-۱)^{n+n}A_{nn} \end{bmatrix}$$

۱۱.۵.۱ مثال ۱). فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، در این صورت

$$\begin{aligned} \Delta &= |A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۳ & -۶ \\ -۱ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -۳ & -۶ \\ ۵ & ۷ \end{vmatrix} = -۲۱ + ۳۰ = ۹ \end{aligned}$$

و لذا ماتریس A معکوسپذیر است، بعلاوه

$$A_{۱۱} = \begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = -۱۰, \quad A_{۱۲} = \begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۸,$$

$$A_{۱۳} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۷, \quad A_{۲۱} = \begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = -۱۱,$$

$$A_{۲۲} = \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۷, \quad A_{۲۳} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۵,$$

$$A_{۳۱} = \begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۳, \quad A_{۳۲} = \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} = -۶,$$

$$A_{۳۳} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = -۳.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A^{-۱} &= \frac{۱}{۹}\begin{bmatrix} (-۱۰) & -(-۱۱) & (۳) \\ -(۸) & (۷) & -(-۶) \\ (۷) & -(۵) & (-۳) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -۱۰/۹ & ۱۱/۹ & ۱/۳ \\ -۸/۹ & ۷/۹ & ۲/۳ \\ ۷/۹ & -۵/۹ & -۱/۳ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال ۲) ثابت کنید $(I+A)^{-۱} = A(A+I)^{-۱}$. چون معکوس در صورت وجود منحصر به فرد است و

$$\begin{aligned} (I+A^{-۱})(A(A+I)^{-۱}) &= (I+A^{-۱})A(A+I)^{-۱} \\ &= (A+A^{-۱}A)(A+I)^{-۱} \\ &= (A+I)(A+I)^{-۱} = I \end{aligned}$$

در نتیجه، حکم اثبات شده است.

۱۲.۵.۱ تمرین. معکوس هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید:

$$۱)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad ۲)\ \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$۳)\ \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} \qquad ۴)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ \alpha & \beta & \gamma & \theta \\ \alpha^۲ & \beta^۲ & \gamma^۲ & \theta^۲ \\ \alpha^۳ & \beta^۳ & \gamma^۳ & \theta^۳ \end{bmatrix}$$

۵) نشان دهید که اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ معکوسپذیر باشد، آنگاه $A^{-۱}$ برابر است با

$$\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۳} & a_{۱۲} \\ a_{۳۳} & a_{۳۲} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{۲۳} & a_{۲۱} \\ a_{۳۳} & a_{۳۱} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۳} & a_{۱۱} \\ a_{۲۳} & a_{۲۱} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۱} \\ a_{۳۲} & a_{۳۱} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

۷) ثابت کنید $(I+AB)^{-۱}A = A(I+BA)^{-۱}$.

۸) ثابت کنید $A^{-۱} + B^{-۱} = A^{-۱}(A+B)B^{-۱}$.

۱۳.۵.۱ معکوسیابی یک ماتریس افراز شده. فرض کنید ماتریس دلخواه S را بتوان به صورت $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ افراز کرد که A و D ماتریس‌های مربعی هستند. در این صورت، اگر A معکوسپذیر باشد، داریم

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = |A||D - CA^{-۱}B|$$

و اگر D معکوسپذیر باشد، داریم

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = |D||A - BD^{-۱}C|$$

۱۴.۵.۱ مثال.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|c} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ \hline ۰ & ۱ & -۱ \end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} \left| (-۱) - [۰ \ ۱] \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right|$$

$$= -۵ \left(-۱ - [۰ \ ۱] \begin{bmatrix} -۱/۵ & +۲/۵ \\ +۳/۵ & -۱/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right)$$

$$= -۵ \left(-۱ - [۰ \ ۱] \begin{bmatrix} ۳/۵ \\ -۴/۵ \end{bmatrix} \right)$$

$$= -۵ \left(-۱ + \frac{۴}{۵} \right) = ۱$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۱ & ۲ & -۱ \\ \hline ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \times$$

$$\times \left| \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left| \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۳ & -۲/۳ \\ ۱/۳ & ۱/۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left| \begin{bmatrix} A۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱/۳ & ۲/۳ \\ ۵/۳ & ۵/۳ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left| \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱۱/۳ & ۲۳/۳ \\ ۵/۳ & ۵/۳ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left| \begin{bmatrix} -۵/۳ & -۲۰/۳ \\ -۵/۳ & -۲/۳ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left(\frac{۱۰}{۹} - \frac{۱۰۰}{۹} \right) = -۳۰$$

۱۵.۵.۱ قضیه. اگر ماتریس‌های A و $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ معکوسپذیر باشند، آنگاه

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} A^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A^{-۱}B \\ I \end{bmatrix} (D - (A^{-۱}B)^{-۱})[-CA^{-۱} \quad I]$$

صورت مشابه، اگر D معکوسپذیر باشد، داریم

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & D^{-۱} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -D^{-۱}C \end{bmatrix} (A - BC^{-۱}C)^{-۱}[I \quad -BD^{-۱}]$$

۱۶.۵.۱ مثال.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} (۱)^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(۱)^{-۱}(۲) \\ ۱ \end{bmatrix} \times$$

$$\times \Big((-۱) - (۱)(۱)^{-۱}(۲) \Big)^{-۱} [-(۱)(۱)^{-۱} \quad ۱]$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} (-۳)^{-۱}[-۱ \ ۱]$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} - \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} [-۱ \ ۱]$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} - \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱/۳ & ۲/۳ \\ ۱/۳ & -۱/۳ \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ \hline ۴ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]^{-۱} = \left[\begin{array}{cc|c} ۰ & ۰ & \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} \\ ۰ & ۰ & \\ ۰ & ۰ & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \\ ۰ & ۰ & \end{array}\right]^{-۱}$$

$$+ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times \Bigg(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Bigg)^{-۱} \times$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ -۴ & -۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Bigg(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Bigg)^{-۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ -۴ & -۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۵/۴ & -۱۱/۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ & -۳ \\ ۵/۴ & -۱۱/۴ & -۷/۴ & ۴ \\ ۳/۲ & -۵/۲ & -۱/۲ & ۴ \\ -۵/۴ & ۱۱/۴ & ۷/۴ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ & -۳ \\ ۵/۴ & -۱۱/۴ & -۷/۴ & ۴ \\ ۳/۲ & -۵/۲ & ۱/۲ & ۳ \\ -۵/۴ & ۱۱/۴ & ۷/۴ & -۳ \end{bmatrix}$$

۶.۱ دستگاه معادلات خطی

دستگاههای معادلات خطی نقش مهمی را در کاربردهای ریاضیات ایفاء می‌کنند. لذا مطالعهٔ دقیق آنها را به خواننده توصیه می‌کنیم.

۱.۶.۱ تعریف. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، . . . و x_m متغیرند. عبارت

$$a_۱x_۱+\cdots+a_mx_m=b \qquad (۱.۱)$$

را که $a_۱$، ... a_m و b اعداد ثابت معلومند، **معادلهٔ خطی m متغیره** می‌نامیم. منظور از یک جواب خصوصی این معادله، یک m–تایی مرتب $(\alpha_۱,\cdots,\alpha_m)$ از اعداد است که وقتی فرض می‌کنیم $x_۱=\alpha_۱$، $\cdots$ و $x_m=\alpha_m$، آنگاه تساوی (۱.۱) برقرار خواهد بود. مجموعهٔ جوابهای خصوصی معادله را **جواب آن معادله** می‌نامیم. گردایه‌ای مرکب از چند معادلهٔ خطی با مجهولات مشترک را یک دستگاه معادلات خطی می‌نامیم؛ دستگاه

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲+\cdots+a_{۱m}x_m=b_۱\\ a_{۲۱}x_۱+a_{۲۲}x_۲+\cdots+a_{۲m}x_m=b_۲\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n۱}x_۱+a_{n۲}x_۲+\cdots+a_{nm}x_m=b_n \end{cases} \qquad (۲.۱)$$

را **دستگاه n معادلهٔ m مجهولی** می‌نامیم. منظور از یک **جواب خصوصی** برای دستگاه معادلات (۲.۱)، یک m–تایی مرتب $(\alpha_۱,\cdots,\alpha_m)$ است که بطور همزمان جواب هر یک از n معادلهٔ موجود در دستگاه می‌باشد. مجموعه همهٔ جوابهای خصوصی (۲.۱) را **جواب** آن می‌نامیم.

۲.۶.۱ مثال. ۱) دستگاه معادلات

$$x-۲y=-۴,\qquad ۲x+y=۷$$

را در نظر بگیرید. از معادلهٔ اول نتیجه می‌گردد $x=۲y-۴$. اگر در معادلهٔ دوم بجای x این عبارت را قرار بدهیم، به تساوی $۵y-۸=۷$ می‌رسیم. بنابراین $y=۳$ و $x=۲$. پس $(۲,۳)$ تنها جواب خصوصی دستگاه است و جواب آن عبارتست از $S=\{(۲,۳)\}$.

مثال ۲) دستگاه معادلات

$$۲x-۳y+z=۱,\qquad x+۲y+۳z=۲,$$
$$۵x-۴y+۵z=۵$$

را در نظر بگیرید. از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود که $z=۱+۳y-۲x$. اگر در دو معادلهٔ بعدی بجای z این عبارت را قرار دهید، معادلهٔ دوم به شکل $-۵x+۱۱y=-۱$ تبدیل می‌شود و معادلهٔ سوم به شکل $-۵x+۱۱y=۰$ تبدیل می‌شود. این یک تناقض است، پس دستگاه فاقد جواب خصوصی است. یعنی $S=\varnothing$.

مثال ۳) دستگاه معادلات

$$x-۳y+۲z=۱,\qquad ۶x+y+۳z=۲,$$
$$۸x-۵y+۷z=۴$$

را در نظر بگیرید. از معادلهٔ اول نتیجه می‌گردد که $x=۱+۳y-۲z$. اگر در دو معادلهٔ بعدی بجای x قرار دهیم، معادله دوم به شکل $۱۹y-۹z=-۴$ تبدیل می‌شود و معادلهٔ سوم نیز به همان معادلهٔ تبدیل می‌گردد. پس دستگاه داده شده با دستگاه زیر معادل است:

$$x=۱+۳y-۲z,\qquad ۱۹y-۹z=-۴$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $y=(۹z-۴)/۱۹$، که اگر آن را در معادلهٔ اول قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x=۱+۳\frac{۹z-۴}{۱۹}-۲z=\frac{-۱۱z+۷}{۱۹}$$

در نتیجه، مجموعهٔ جواب دستگاه عبارت است از

$$S=\left\{\left(\frac{-۱۱z+۷}{۱۹},\frac{۹z-۴}{۱۹},z\right)\;\middle|\;z\in\mathbb{R}\right\}$$

توجه شود که این دستگاه معادلات، بینهایت جواب خصوصی دارد.

۳.۶.۱ شکل ماتریسی یک دستگاه معادلات خطی.

به کمک مفهوم ضرب ماتریسها می‌توان دستگاه معادلات خطی (۲.۱) را به شکل ماتریسی

$$AX=B \qquad (۳.۱)$$

نوشت که در آن

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n۱} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_۱\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_۱\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

A را **ماتریس ضرایب**، X را **ستون مجهولات** و B را **ستون معلومات** یا **طرف ثانی دستگاه** می‌نامیم. ماتریس حاصل از الحاق ستون B به ماتریس A را **ماتریس اضافی دستگاه** (۳.۱) نامیده و با نماد $A|B$ نشان می‌دهیم.

۴.۶.۱ روش حذف گاوس.

فلسفهٔ این روش چنین است: ابتدا یک متغیر را از معادلهٔ اول بر حسب سایر متغیرها بدست آورده و سپس در معادلات بعدی قرار می‌دهیم. اکنون معادلات باقیمانده دارای یک متغیر کمتر و نیز یک معادله کمتر می‌باشد. با ادامهٔ این کار، رفته رفته دستگاه ساده‌تر می‌شود. اگر این روند به تناقض نیانجامد، دستگاه آخر را حل کرده، جواب را در معادلهٔ قبلی قرار می‌دهیم، سپس جواب بدست آمده را در معادلهٔ قبل از آن قرار می‌دهیم و الی آخر.

برای ساده‌تر کردن بکارگیری این روش، از فرم ماتریسی دستگاه و الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

اعمال سطری مقدماتی عبارتند از:

الف) تعویض دو سطر با هم.

ب) ضرب کردن یک سطر در عددی مخالف صفر.

ج) اضافه کردن مضربی از یک سطر به سطری دیگر.

فرض کنیم $A|B$ ماتریس اضافی نظیر به دستگاه (۳.۱) و لذا دستگاه (۲.۱) باشد. اکنون مجاز به تعدادی متناهی مرحله از سه عمل بالا استفاده کنیم تا دستگاه $A|B$ به شکل بالا مثلثی تبدیل گردد. یعنی عناصر زیر قطر اصلی آن همگی صفر شوند. در مرحلهٔ آخر مجدداً از روی ماتریس اضافی حاصل، دستگاه را بازسازی نموده، و دستگاه سادهٔ حاصل را حل می‌کنیم.

۵.۶.۱ مثال. ۱) دستگاه معادلات

$$x-2y+3z=2,\qquad 2x+y-2z=6,$$
$$-3x+5y+z=2.$$

را در نظر بگیرید. ماتریس ضرایب، ستون مجهولات، ستون معلومات و ماتریس اضافهٔ آن به ترتیب عبارتند از

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&1&-2\\-3&5&1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},$$
$$B=\begin{bmatrix}2\\6\\2\end{bmatrix},\quad A|B=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\2&1&-2&6\\-3&5&1&2\end{array}\right]$$

. حال به روش زیر عمل می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\2&1&-2&6\\-3&5&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{(1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&5&-8&2\\0&-1&10&8\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{(2)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&-1&10&8\\0&5&-8&2\end{array}\right]\xrightarrow{(3)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&1&-10&-8\\0&5&-8&2\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{(4)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&1&-10&-8\\0&0&42&42\end{array}\right]\xrightarrow{(5)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&1&-10&-8\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

توضیح این که در (۱) دو برابر سطر اول را از سطر دوم کم کرده‌ایم و سه برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه کرده‌ایم. در (۲) جای سطر دوم و سطر سوم را عوض کرده‌ایم. در (۳) سطر دوم را در ۱− ضرب نموده‌ایم. در (۴) پنج برابر سطر دوم را از سطر سوم کم نموده‌ایم. در (۵) سطر سوم را در ۱/۴۲ ضرب نموده‌ایم. دستگاه نظیر به ماتریس آخر عبارتست از

$$x-2y+3z=2,\quad y-10z=-8,\quad z=1$$

بنابراین $z=1$، $y=10z-8=2$ و $x=2y-3z+2=3$.
یعنی جواب دستگاه عبارت است از $S=\left\{(3,2,1)\right\}$.

مثال ۲) دستگاه معادلات

$$x-2y+3z=1,\qquad 2x+5y-2z=3,$$
$$4x+y+4z=5$$

را در نظر بگیرید. ماتریس اضافی نظیر به آن عبارتست از

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\2&5&-2&3\\4&1&4&5\end{array}\right]$$

حال به روش زیر عمل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\2&5&-2&3\\4&1&4&5\end{array}\right]\xrightarrow{(1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\0&9&-8&1\\0&9&-8&1\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{(2)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\0&9&-8&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

توضیح این که، در (۱) دو برابر سطر اول را از سطر دوم کم نموده‌ایم و چهار برابر سطر اول را از سطر سوم کم نموده‌ایم. در (۲) سطر دوم را از سطر سوم کم نموده‌ایم. دستگاه نظیر به ماتریس آخر عبارتست از

$$x-2y+3z=1,\qquad 9y-8z=1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}x&=2y-3z+1=\frac{1}{9}(-11z+11)\\ y&=\frac{1}{9}(8z+1)\end{aligned}$$

پس جواب عمومی دستگاه عبارت است از

$$S=\left\{\left(\frac{11}{9}(1-z),\frac{1}{9}(8z+1),z\right)\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\}$$

مثال ۳) دستگاه معادلات

$$2x+y-3z=3,\qquad -x+2y+2z=2,$$
$$3x+4y-4z=10$$

را در نظر بگیرید. ماتریس اضافی نظیر به آن دستگاه است از

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&-3&3\\-1&2&2&2\\3&4&-4&10\end{array}\right]$$

حال به روش زیر عمل می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&-3&3\\-1&2&2&2\\3&4&-4&10\end{array}\right]\xrightarrow{(1)}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&2&2&2\\2&1&-3&3\\3&4&-4&10\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{(2)}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&2&2&2\\0&5&1&7\\0&10&2&16\end{array}\right]\xrightarrow{(3)}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&2&2&2\\0&5&1&7\\0&0&0&2\end{array}\right]$$

توضیح این که، در (۱) سطر اول و دوم را عوض نموده‌ایم. در (۲) دو برابر سطر اول را به سطر دوم اضافه کرده‌ایم و سه برابر سطر اول را به سطر سوم. در (۳) دو برابر سطر دوم را از سطر سوم کم نموده‌ایم.

دستگاه نظیر به ماتریس آخر عبارتست از

$$-x+2y+2z=2,\qquad 5y+z=7,\qquad 0=2$$

که معادلهٔ آخر تناقض است. پس دستگاه جواب ندارد $S=\oslash$.

۶.۶.۱ تمرین. هر یک از دستگاههای زیر را به روش گاوس حل کنید

$$1)\ \begin{cases} x-2y=3 \\ 5x+y=2 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 3x+2y+5z=1 \\ 4x-5y-8z=2 \\ 7x+2y+9z=-1 \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x-3y+5z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 5x-7y+13z=10 \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 2x+y-5z+t=8 \\ x-3y-6t=9 \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} 2y-z+2t=-5 \\ x+4y-7z+6t=0 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$$

آیا بدون حل دستگاه می‌توان در وجود و یا عدم وجود جواب آن دستگاه بحث کرد؟ پاسخ این پرسش در گرو دانستن مفهوم رتبه است.

۷.۶.۱ تعریف. فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ است و $1\le k\le \min\{m,n\}$. منظور از یک **زیر ماتریس** $k\times k$ از A، ماتریسی است که از محل برخورد k ستون و k سطر از ماتریس A حاصل می‌شود.

اگر دترمینان یک زیر ماتریس $k\times k$ از A مخالف صفر باشد و دترمینان کلیهٔ زیر ماتریسهای $(k+1)\times(k+1)$ از A صفر باشند، آنگاه گفته می‌شود که **رتبهٔ** A برابر k است و نوشته می‌شود $\operatorname{rank}(A)=k$.

۸.۶.۱ قضیه. شرط لازم و کافی برای این که دستگاه (۱.۲) جواب داشته باشد، آن است که رتبهٔ ماتریس ضرایب آن A با رتبهٔ ماتریس اضافه‌اش $A\big|B$ برابر باشد. تعداد متغیرهای مستقل موجود در جواب برابر $m-\operatorname{rank}(A)$ است.

۹.۶.۱ مثال. ۱) دستگاه معادلات

$$x-2y+3z=2,\qquad 2x+y+4z=2,$$
$$6x+2y-5z=1$$

را در نظر بگیرید. در این صورت ماتریس ضرایب و ماتریس اضافی این دستگاه معادلات به ترتیب برابرند با

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -5 \end{bmatrix},\quad A\big|B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & -5 & 2 \end{array}\right].$$

رتبهٔ هر دو برابر سه است، زیرا

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 6 & 14 & -23 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 14 & -23 \end{vmatrix} = -87 \neq 0 \end{aligned}$$

پس دستگاه جواب دارد. چون $m-\operatorname{rank}(A)=3-3=0$، بنابراین دستگاه تنها یک جواب خصوصی دارد.

مثال ۲) دستگاه معادلات

$$2x-3y+4z=2,\qquad 5x+2y-3z=2,$$
$$12x+y-2z=5$$

را در نظر بگیرید. ماتریس ضرایب و ماتریس اضافهٔ آن برابرند با

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 12 & 1 & -2 \end{bmatrix},\quad A\big|B=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 2 \\ 12 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right].$$

رتبهٔ A سه نیست، زیرا

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 12 & -13 \\ 12 & 25 & -26 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -19 & 12 & -13 \\ -38 & 25 & -26 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -19 & -13 \\ -38 & -26 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

اما دترمینان ماتریس حاصل از دو سطر اول و دو ستون اول آن برابر است با

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4+15=19\neq 0$$

پس رتبهٔ A برابر دو است. در حالی که رتبهٔ $A\big|B$ برابر سه است، زیرا دترمینان ماتریس حاصل از سه سطر ماتریس $A\big|B$ و سه ستون آخر آن مخالف صفر است

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 11 & -12 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & -10 \\ -11 & -12 & -17 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ -12 & -17 \end{vmatrix} = -1\neq 0 \end{aligned}$$

پس مطابق قضیهٔ ۸.۶.۱، دستگاه مورد نظر فاقد جواب است.

مثال ۳) دستگاه معادلات

$$x+2y+2z+t=2,\qquad y+z+t=1,$$
$$x+y+z=1$$

را در نظر بگیرید. در این صورت رتبهٔ ماتریس ضرایب و ماتریس اضافی این دستگاه معادلات برابر ۲ است. پس، دستگاه دارای جواب است و تعداد متغیرهای مستقل در جواب آن $m-\operatorname{rank}(A)=4-2=2$ می‌باشد. در واقع

$$S=\{(x,y,1-x-y,0)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$$

۱۰.۶.۱ تمرین.

در هر مورد بدون حل دستگاه، در وجود و یا عدم وجود جواب آن بحث کنید

۱) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x+3y=4 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

۵) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ 4x-y+5z=0 \end{cases}$ ٦) $\begin{cases} 2x-y+3z+4t=1 \\ y-z+2t=2 \\ 2x+2z+6t=-1 \end{cases}$

۱۱.۶.۱ روش کرامر.

اگر در دستگاه (۲.۱) تعداد معادلات و مجهولات برابر باشد $(m=n)$ و دترمینان ماتریس ضرایب آن نیز مخالف صفر باشد، آنگاه $x_i=|A_i|/|A|$. که A_i عبارت است از ماتریس حاصل از تعویض ستون i ام ماتریس A با ستون معلومات B.

۱۲.۶.۱ مثال.

۱) دستگاه معادلات

$$2x-3y+3z=8,\qquad 3x+2y-2z=-1,$$
$$3x-y+2z=7$$

را در نظر بگیرید. در این صورت، $S=\{(1,0,2)\}$. زیرا

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=13\neq 0$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 8 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix}=13,\quad x=x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=1$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad y=x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=0$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}=26,\quad z=x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=2$$

مثال ۲) دستگاه معادلات

$$2x+y-5z+t=8,\qquad x-3y-6t=9,$$
$$2y-z+2t=-5,\qquad x+4y-7z+6t=0$$

را در نظر بگیرید. در این صورت، $S=\Big\{(3,-4,-1,1)\Big\}$. چرا که بر اساس روش کرامر

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,$$

$$|A_4|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27,$$

$$x=x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=3\qquad y=x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=-4$$

$$z=x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=-1\qquad t=x_4=\frac{|A_4|}{|A|}=1$$

مثال ۳) (اگر دستگاه مربعی نباشد) دستگاه معادلات

$$x-3y+2z=4,\qquad 2x+5y-4z=2$$

را در نظر بگیرید. فرض کنیم z معلوم است، پس می‌توان نوشت

$$x-3y=4-2z,\qquad 2x+5y=2+4z$$

در نتیجه،

$$S=\left\{\left(\frac{2}{11}(z+13),\frac{2}{11}(4z-3),z\right)\Big|\,z\in\mathbb{R}\right\}$$

زیرا

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=11\neq 0$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 4-2z & -3 \\ 2+4z & 5 \end{vmatrix}=2z+26,$$

$$x=x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{2z+26}{11}$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 4-2z \\ 2 & 2+4z \end{vmatrix}=8z-6,$$

$$y = x_۲ = \frac{|A_۲|}{|A|} = \frac{۸z - ۶}{۱۱}$$

مثال ۴) (اگر دترمینان دستگاه صفر باشد) دستگاه معادلات

$$x - ۲y + ۳z = ۵, \qquad ۲x + y + ۲z = ۲,$$
$$۷x - ۴y + ۱۳z = ۱۹$$

را در نظر بگیرید. دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه صفر است. موقتاً معادلهٔ سوم را به کنار گذاشته و دستگاه حاصل از دو معادلهٔ اول را حل می‌کنیم:

$$x - ۲y = ۵ - ۳z, \qquad ۲x + y = ۲ - ۲z$$

که کاملاً شبیه به مثال (۱) است. بنابراین

$$x = x_۱ = \frac{|A_۱|}{|A|} = \frac{۹ - ۷z}{۵} \qquad y = x_۲ = \frac{|A_۲|}{|A|} = \frac{۴z - ۸}{۵}$$

حال باید x و y را در معادلهٔ سوم قرار داد و صحت پاسخ بدست آمده را تحقیق نمود

$$۷x - ۴y + ۱۳z = ۷\frac{۹ - ۷z}{۵} - ۴\frac{۴z - ۸}{۵} + ۱۳z = ۱۹$$

بنابراین

$$S = \left\{ \left(\frac{۱}{۵}(۹ - ۷z), \frac{۴}{۵}(z - ۲), z \right) \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

اگر چنانچه تساوی آخر برقرار نمی‌شد، جواب $\varnothing$ بود.

۱۳.۶.۱ تمرین. هر یک از دستگاههای زیر را به روش کرامر حل کنید

$$۱)\ \begin{cases} x - ۳y = -۵ \\ ۳x + ۲y = ۱۲ \end{cases} \qquad ۲)\ \begin{cases} ۶x + y = -۴ \\ x + ۶y = ۱۱ \end{cases}$$

$$۳)\ \begin{cases} ۲x - y + z = ۳ \\ x + ۲y - z = ۱ \\ ۵x - ۵y + ۴z = ۸ \end{cases} \qquad ۴)\ \begin{cases} x + y - z = ۱ \\ ۲x - y - z = ۲ \\ x + ۴y - ۲z = ۲ \end{cases}$$

$$۵)\ \begin{cases} x - y + z + t = ۰ \\ x + ۲y - z - t = ۰ \\ ۳x - y - z + ۲t = ۰ \\ x + ۳y + z - ۲t = ۱ \end{cases} \qquad ۶)\ \begin{cases} -x + y + z + t = ۸ \\ x - y + z + t = ۶ \\ x + y - z + t = ۴ \\ x + y + z - t = ۵ \end{cases}$$

۷.۱ مقدار و بردار ویژه

۱.۷.۱ تعریف. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ ای است. اگر بردار ستونی $\mathbf{v} \in \mathrm{Mat}(n \times ۱)$ و عدد حقیقی λ طوری یافت گردند که $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$، آنگاه λ را یک **مقدار ویژهٔ ماتریس** A و $\mathbf{v}$ را یک **بردار ویژهٔ** نظیر به λ برای A می‌نامیم. اغلب بردارهای $\mathbf{v}$ مخالف صفر مورد توجه است، زیرا بردار صفر بطور طبیعی در معادلهٔ $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ به ازای هر λ ای صدق دارد.

۲.۷.۱ قضیهٔ هامیلتن. عدد $\lambda \in \mathbb{R}$ وقتی و تنها وقتی یک مقدار ویژهٔ ماتریس مربعی $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ است که $p(\lambda) = |\lambda I_n - A| = ۰$. این معادله را **معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس** A و چند جمله‌ای مرتبهٔ n ام $p(\lambda)$ را **چند جمله‌ای مشخصهٔ** A می‌نامیم.

۳.۷.۱ مثال. ۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$. در این صورت، معادلهٔ مشخصهٔ A عبارتست از

$$۰ = |\lambda I_۲ - A| = \begin{vmatrix} \lambda - ۳ & -۱ \\ -۴ & \lambda - ۳ \end{vmatrix} = (\lambda - ۳)^۲ - ۴$$

پس $(\lambda - ۳)^۲ = ۴$، $\lambda - ۳ = \pm ۲$ و $\lambda = ۳ \pm ۲$. یعنی $\lambda_۱ = ۱$ و $\lambda_۲ = ۵$ مقادیر ویژهٔ A هستند. بعلاوه، در مورد مقدار ویژهٔ $\lambda_۱$ داریم

$$A\mathbf{v} = \lambda_۱\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ۳x + y = x \\ ۴x + ۳y = y \end{cases}$$

پس $۲x + y = ۰$ و لذا $y = -۲x$. یعنی، مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_۱ = ۱$ برابر است با

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ -۲x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} \right\}$$

در مورد مقدار ویژهٔ $\lambda_۲$ نیز، داریم

$$A\mathbf{v} = ۵\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ۵\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ۳x + y = ۵x \\ ۴x + ۳y = ۵y \end{cases}$$

بنابراین $y = ۲x$. یعنی، مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_۲ = ۵$ عبارتست از

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ ۲x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \right\}$$

مثال ۲) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۲ \\ -۵ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}$. در این صورت، معادلهٔ مشخصهٔ A عبارت است از

$$\begin{aligned} ۰ &= |\lambda I_۳ - A| = \begin{vmatrix} \lambda - ۱ & -۲ & -۲ \\ -۲ & \lambda - ۳ & ۲ \\ ۵ & -۳ & \lambda - ۸ \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - ۳)(\lambda - ۴)(\lambda - ۵) \end{aligned}$$

یعنی، مقادیر ویژهٔ A عبارتند از $\lambda_1 = ۳$، $\lambda_2 = ۴$ و $\lambda_3 = ۵$. در مورد مقدار ویژهٔ $\lambda_1 = ۳$، داریم

$$A\mathbf{v} = ۳\mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۲ \\ -۵ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ۳ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -۲x + ۲y + ۲z = ۰ \\ ۲x - ۲z = ۰ \\ -۵x + ۳y + ۵z = ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + z \\ z = x \\ ۳y + ۵z = ۵x \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = ۰ \\ z = x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = ۰ \end{cases}$$

یعنی، مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_1 = ۳$ از ماتریس A عبارتند از

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ ۰ \\ x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

به صورت مشابه، مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_2 = ۴$ و $\lambda_3 = ۵$ از ماتریس A، به ترتیب برابرند با

$$\operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\} \quad \text{و} \quad \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \right\}$$

مثال ۳) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. در این صورت، معادلهٔ مشخصهٔ A عبارت است از $\lambda^3 - \lambda^2 + ۳\lambda + ۵ = ۰$ اشت که دارای ریشهٔ حقیقی $\lambda_1 = -۱$ و ریشه‌های مختلط مزدوج $\lambda_2 = ۱ + ۲i$ و $\lambda_3 = ۱ - ۲i$ است. مجموعه‌های متشکل از بردارهای ویژهٔ نظیر به آنها بترتیب برابرند با

$$\operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\},\ \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ i \\ i \end{bmatrix} \right\},\ \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ -i \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

۴.۷.۱ قضیه. حاصلضرب همهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس، برابر دترمینان آن ماتریس است.

مجموع همهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریسس، برابر اثر دترمینان آن ماتریس است، یعنی برابر مجموع عناصر قطر اصلی آن ماتریس.

۵.۷.۱ قضیه. تعداد بردارهای ویژهٔ مستقل خطی نظیر به هر مقدار ویژه، حد اکثر برابر شمارهٔث تکرار آن مقدار ویژه در معادلهٔ مشخصه است.

بردارهای ویژهٔ نظیر به مقادیر ویژهٔ متفاوت، مستقل خطی هستند.

۶.۷.۱ قضیه. شرط لازم و کافی برای این که ماتریس $A \in \operatorname{Mat}(n \times n)$ قطری شدنی باشد آن است که A دارای n بردار ویژهٔ مستقل خطی باشد بعلاوه اگر ماتریس A دارای مقادیر ویژهٔ λ_1، λ_2، ... و λ_n (احتمالاً با تکرار) بوده و $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، ... و $\mathbf{v}_n$ بردارهای ویژهٔ ستونی نظیر به آنها باشند و C ماتریس حاصل از کنار هم قرار دادن ستونهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، ... و $\mathbf{v}_n$ باشد، در این صورت $C^{-1}AC$ قطری است و

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \lambda_2 & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

۷.۷.۱ مثال. ۱) **ادامهٔ مثال (۱) از ۲.۷.۱** در این حالت

$$C = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2\ ] = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

مثال ۲) (ادامهٔ مثال (۲) از ۲.۷.۱) در این حالت

$$C = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3\ ] = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۲ \\ -۵ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

مثال ۳) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۲ \\ ۵ & -۳ & -۳ \\ -۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$. در این صورت A دارای معادلهٔ مشخصهٔ $-(\lambda + ۱)^3 = ۰$ است و در نتیجه تنها یک مقدار ویژهٔ $\lambda = -۱$ با تکرار سه دارد. فرض $AX = -X$ به دستگاه معادلات

$$\begin{cases} ۳x - y + ۲z = ۰ \\ ۵x - ۲y + ۳z = ۰ \end{cases}$$

منتهی می‌شود که تنها جواب مستقل خطی آن $\mathbf{v} = (۱, ۱, -۱)^t$ است. بنابراین، ماتریس A قطری شدنی نیست.

۸.۷.۱ تمرین. تمام مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ هر یک از ماتریس‌های زیر را بدست آورده و در صورت امکان، شکل قطری آنرا بدست آورید.

$$۱)\ \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \qquad ۲)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$۳)\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & -۲ & ۵ \end{bmatrix} \qquad ۴)\ \begin{bmatrix} ۵ & -۲ & ۸ \\ -۴ & ۰ & -۵ \\ -۴ & ۲ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$۵)\ \begin{bmatrix} -۱ & -۴ & -۲ \\ -۲ & -۳ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۵ \end{bmatrix} \qquad ۶)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۷) مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و فرم قطری ماتریس بالا مثلثی $\begin{bmatrix} a & b & d \\ ۰ & c & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

۹.۷.۱ قضیه. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ است و $P(x) = |xI_n - A|$. در این صورت $p(A) = O$.

۱۰.۷.۱ مثال. ۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$، در این صورت

$$\begin{aligned} p(x) &= \left| x \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} x-۱ & ۰ \\ -۳ & x+۱ \end{vmatrix} \\ &= x^۲ - ۱ \end{aligned}$$

در نتیجه $A^۲ = I$ و بنابراین به ازای هر $n \geq ۱$ ای $A^{۲n} = I$ و $A^{۲n+۱} = A$.

مثال ۲) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$، آنگاه

$$\begin{aligned} p(x) &= \left| x \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} x-۱ & -۲ \\ ۱ & x-۳ \end{vmatrix} \\ &= x^۲ - ۴x + ۵ \end{aligned}$$

در نتیجه $A^۲ - ۴A + ۵I_۲ = O$، یا $A^۲ = ۴A - ۵I_۲$.

مثال ۳) اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$، با فرض $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ داریم $B^{-۱}AB = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} A^n &= \left(B \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} B^{-۱} \right)^n \\ &= B \begin{bmatrix} ۴^n & ۰ \\ ۰ & ۲^n \end{bmatrix} B^{-۱} \\ &= ۲^{n-۱} \begin{bmatrix} ۲^n + ۱ & ۲^n - ۱ \\ ۲^n - ۱ & ۲^n + ۱ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۱.۷.۱ تمرین. مقدار هر یک از ماتریسهای زیر را محاسبه کنید:

$$۱)\ \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}^n \qquad ۲)\ \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}^n$$

$$۳)\ \begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۳ \\ ۲ & ۳ & -۲ \\ ۴ & ۴ & -۳ \end{bmatrix}^n \qquad ۴)\ \begin{bmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}^n$$

۸.۱ ماتریسهای متعامد و متقارن

۱.۸.۱ تعریف. فرض کنید $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(m \times n)$. **ترانهاد ماتریس** A به صورت $A^t = [a_{ji}]$ تعریف می‌شود که عضوی از $\mathrm{Mat}(m \times n)$ است و از تعویض مکان عناصر a_{ij} و a_{ji} حاصل می‌گردد. در این صورت، روشن است که $(A^t)^t = A$. ماتریس A را در صورتی متعامد گوئیم که $AA^t = I$. یعنی معکوس آن برابر ترانهادش باشد.

۲.۸.۱ مثال. ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} A^{-۱} &= \begin{bmatrix} ۳/۵ & ۴/۵ \\ -۴/۵ & ۳/۵ \end{bmatrix}^{-۱} \\ &= \begin{bmatrix} ۳/۵ & -۴/۵ \\ ۴/۵ & ۳/۵ \end{bmatrix} = A^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-۱} &= \begin{bmatrix} ۲/۳ & ۲/۳ & ۱/۳ \\ ۲/۳ & -۱/۳ & -۲/۳ \\ ۱/۳ & -۲/۳ & ۲/۳ \end{bmatrix}^{-۱} \\ &= \begin{bmatrix} ۲/۳ & ۲/۳ & ۱/۳ \\ ۲/۳ & -۱/۳ & -۲/۳ \\ ۱/۳ & -۲/۳ & ۲/۳ \end{bmatrix} = A^t = A \end{aligned}$$

۳.۸.۱ قضیه. اگر $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(n \times n)$، آنگاه شرط لازم و کافی برای این که A متعامد باشد آن است که

الف) به ازای هر $۱ \leq j \leq n$، $a_{۱j}^۲ + a_{۲j}^۲ + \cdots + a_{nj}^۲ = ۱$.

ب) به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $a_{i۱}^۲ + a_{i۲}^۲ + \cdots + a_{in}^۲ = ۱$.

ج) به ازای هر $۱ \leq i \neq j \leq n$، $a_{۱i}a_{j۱} + \cdots + a_{ni}a_{jn} = ۰$.

د) به ازای هر $۱ \leq i \neq j \leq n$، $a_{i۱}a_{۱j} + \cdots + a_{in}a_{nj} = ۰$.

۴.۸.۱ تعریف. ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ را در صورتی **متقارن** گوئیم که با ترانهادش برابر باشد، یعنی به ازاء هر i و هر j ای $a_{ij} = a_{ji}$.

۵.۸.۱ قضیه. هر ماتریس متقارن $n \times n$ ای دارای n مقدار ویژهٔ حقیقی (با احتساب تکرار) و n بردار ویژهٔ مستقل خطی است و بنابراین قطری شدنی است. بعلاوه، بردارهای ویژهٔ نظیر به مقادیر ویژهٔ متفاوت، متعامدند.

۶.۸.۱ نتیجه. اگر $A \in \mathrm{Mat}\,(n\times n)$ یک ماتریس متقارن با مقدارهای ویژهٔ λ_1، λ_2، ... و λ_n و بردارهای ویژهٔ یکهٔ $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، ... و $\mathbf{v}_n$ بوده و ماتریس حاصل از کنار هم قرار دادن v_i ها را $C=[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_n]$ بنامیم، آنگاه

$$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}$$

بنابراین، اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ A متمایز باشند، و در C از بردارهای یکه استفاده کنیم، آنگاه ماتریس C متعامد خواهد بود.

۷.۸.۱ مثال. ۱) ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. این ماتریس متقارن است و معادلهٔ مشخصهٔ آن $\lambda^2-2\lambda=0$ است. پس مقادیر ویژهٔ آن $\lambda_1=0$ و $\lambda_2=2$ هستند. بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_1=0$ و $\lambda_2=2$ بترتیب برابرند با $\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ و $\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$. پس می‌توانیم فرض کنیم

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2\end{bmatrix},$$

$$C=[\ \mathbf{v}_1\quad \mathbf{v}_2\ ]=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\end{bmatrix}$$

در این صورت چون مقادیر ویژهٔ A متمایزند، $C^{-1}=C^t$ و در نتیجه

$$C^{-1}AC=C^tAC=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$$

مثال ۲) ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. این ماتریس متقارن است و معادلهٔ مشخصهٔ آن

$$\lambda\left(\lambda^2-2\right)=0$$

می‌باشد. پس مقادیر ویژهٔ A برابرند با $\lambda_1=0$، $\lambda_2=-\sqrt{2}$ و $\lambda_3=\sqrt{2}$. بردارهای ویژهٔ نظیر به λ_1، λ_2 و λ_3 به ترتیب

$$\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}\right\},\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

می‌باشند. پس می‌توان فرض کرد

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix},\ \ \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{2}/2\\-1/2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1/2\\-\sqrt{2}/2\\-1/2\end{bmatrix},\ \ C=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2&1/2&1/2\\0&\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

در این صورت $C^{-1}=C^t$ و بنابراین

$$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

مثال ۳) فرض کنید $\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}$. در این صورت معادلهٔ مشخصهٔ A عبارت است از

$$(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$$

فضای بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda=2$ عبارت است از $\mathrm{span}\left\{(1,1,0)^t,(1,0,-1)^t\right\}$ و فضای بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda=4$ عبارت است از $\mathrm{span}\left\{(1,1,2)^t\right\}$. بنابراین

$$C=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&2\end{bmatrix},\ C^{-1}AC=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

توجه شود که در این حالت $C^{-1}\neq C^t$.

مثال ۴) فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$ و $n\in\mathbb{N}$. مقدار A^n را بدست آورید.

حل. برای این منظور ابتدا A را قطری می‌کنیم. معادلهٔ مشخصه‌ث آن $\lambda^2-2\lambda-3=0$ و مقادیر ویژهٔ آن $\lambda_1=-1$ و $\lambda_2=3$ هستند. بردارهای ویژهٔ مستقل خطی نظیر به λ_1 و λ_2 بترتیب عبارتند از $\mathbf{v}_1=(1,1)^t$ و $\mathbf{v}_2=(1,-1)^t$. با کنار هم قرار دادن بردارهای $\mathbf{v}_1/\|\mathbf{v}_1\|$ و $\mathbf{v}_2/\|\mathbf{v}_2\|$ به ماتریس $C=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\end{bmatrix}$ می‌رسیم. بنابراین

$$C^tAC=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$$

یا $A=C\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}C^t$. در نتیجه

$$\begin{aligned}A^n&=\left(C\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}C^t\right)^n\\&=C\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}^nC^t\\&=C\begin{bmatrix}(-1)^n+3^n&(-1)^n-3^n\\(-1)^n-3^n&(-1)^n+3^n\end{bmatrix}C^t\\&=(-1)^n\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+3^n\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

۸.۸.۱ تمرین. نشان دهید که هر یک از ماتریسهای متقارن زیر با یک ماتریس قطری هم ارز است:

$$1)\ \begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}\qquad 2)\ \begin{bmatrix}2&2\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$3)\ \begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\qquad 4)\ \begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

۵) نشان دهید که اگر $A \in \mathrm{Mat}\,(n\times n)$ دلخواه باشد، آنگاه $M = \frac{۱}{۲}\left(A + A^t\right)$ یک ماتریس متقارن است.

۶) آیا حاصلضرب دو ماتریس متقارن، متقارن است؟ چرا؟

۷) آیا حاصلضرب دو ماتریس متعامد، متقارن است؟ چرا؟

۸) چنانچه $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، A^n را به ازای هر n ای محاسبه کنید.

۹) ثابت کنید که اگر $AA^t = O$، آنگاه $A = O$.

۹.۱ تبدیل خطی

توابع بین فضاهای برداری که حافظ خاصیت خطی بودن هستند، خطی نامیده می‌شوند. یعنی

۱.۹.۱ تعریف. نگاشت $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را در صورتی خطی گوئیم که به ازای هر $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ و هر $a \in \mathbb{R}$ ای

$$F(a\mathbf{u}) = aF(\mathbf{u}) \quad \text{و} \quad F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

معمولاً بجای $f(\overrightarrow{(x,y,z)})$ می‌نویسیم $f(x,y,z)$.

۲.۹.۱ مثال. ۱) نگاشت

$$F(x,y) = \overrightarrow{(۲x, x-y, y-x)}$$

از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}^۳$ خطی است. زیرا

$$\begin{aligned} F(a(x,y)) &= F(ax,ay) \\ &= \overrightarrow{(۲ax, ax-ay, ay-ax)} \\ &= \overrightarrow{(۲x, x-y, y-x)} \\ &= aF(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F((x,y)+(s,t)) = F(x+s, y+t) \\ &= \overrightarrow{(۲x+۲s, x+s-y-t, y+t-x-s)} \\ &= \overrightarrow{(۲x, x-y, y-x)} + \overrightarrow{(۲s, s-t, t-s)} \\ &= F(x,y) + F(s,t) \end{aligned}$$

مثال ۲) نگاشت $F(x,y,z) = x - ۲y + z$ از $\mathbb{R}^۳$ به $\mathbb{R}$ خطی است. زیرا

$$\begin{aligned} F(a(x,y,z)) &= F(ax,ay,az) \\ &= ax - ۲ay + az \\ &= a(x-۲y+z) \\ &= aF(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F((x,y,z)+(\alpha,\beta,\gamma)) = F(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) \\ &= x+\alpha-۲y-۲\beta+z+\gamma \\ &= (x-۲y+z)+(\alpha-۲\beta+\gamma) \\ &= F(x,y,z)+F(\alpha,\beta,\gamma) \end{aligned}$$

۳.۹.۱ قضیه. اگر F و G نگاشتهای خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ و H نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^l$ باشد و $a \in \mathbb{R}$، در این صورت $a\mathbf{F}$، $F+G$ و $H\circ F$ نگاشت خطی‌اند. بعلاوه، معکوس هر تبدیل خطی معکوسپذیر، یک تبدیل خطی معکوسپذیر است و $A = {(A^{-۱})}^{-۱}$.

۴.۹.۱ تعریف. فرض کنید $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ برداری است که مختص i ام آن یک و سایر مختصات آن صفرند و بعلاوه $\mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^m$ برداری است که مختص i ام آن یک و سایر مختصاتش صفر باشند.

فرض کنید $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی است و به ازای هر $۱ \le j \le n$ داشته باشیم

$$F(\mathbf{e}_i) = a_{۱j}\mathbf{E}_۱ + a_{۲j}\mathbf{E}_۲ + \cdots + a_{mj}\mathbf{E}_m$$

در این صورت ماتریس $A = [a_{ij}]$ را **ماتریس نمایش تبدیل خطی F** می‌نامیم و با نماد $M(\mathbf{F})$ نشان می‌دهیم. بنابراین، اگر بردارها به شکل ستونی نوشته شوند، آنگاه به ازای هر $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ای

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad F(\mathbf{v}) = M(F)\,\mathbf{v}$$

۵.۹.۱ قضیه. تناظری یکبیک بین نگاشتهای خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ و مجموعهٔ ماتریسهای $m \times n$ وجود دارد.

۶.۹.۱ قضیه. اگر F و G نگاشتهای خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$، H نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^l$ و J نگاشتی خطی و معکوسپذیر از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ باشد و $a \in \mathbb{R}$، در این صورت

۱) $M(aF) = aM(F)$

۲) $M(F+G) = M(F) + M(G)$

۳) $M(H\circ F) = M(H)\,M(F)$

۴) $M\left(J^{-۱}\right) = M(J)^{-۱}$

۷.۹.۱ مثال. فرض کنید $a = ۳$ و

$$F(x,y) = \overrightarrow{(۲x-y, x+y, x+۳y)}$$

$$G(x,y) = \overrightarrow{(۲x, x+y, ۲x+۳y)}$$

$$H(x,y,z) = \overrightarrow{(x-y+z, ۲x+y-۲z)}$$

$$J(x,y) = \overrightarrow{(x-y, ۲x+y)}$$

می‌خواهیم قضیهٔ ۱.۹.۶ را در این حالت تحقیق کنیم:

۱) چون (به شکل بردارهای ستونی)

$$F\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad F\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس نمایش F عبارتست از

$$M(F)=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

به صورت مشابه

$$G\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix},$$

$$M(G)=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}, \quad H\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix},$$

$$H\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad H\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix},$$

$$M(H)=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}, J\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix},$$

$$J\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad M(J)=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}.$$

۲) برای تحقیق قسمت ۱) از قضیهٔ ۱.۹.۶، داریم

$$\begin{aligned}(aF)(x,y) &= aF(x,y)\\ &= ۳\overrightarrow{(۲x-y,x+y,x+۳y)}\\ &= \overrightarrow{(۶x-۳y,۳x+۳y,۳x+۹y)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(aF) &= \begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ ۳ & ۳ \\ ۳ & ۹ \end{bmatrix}\\ &= ۳\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=aM(F)\end{aligned}$$

۳) برای تحقیق ۲) از قضیهٔ ۱.۹.۶، داریم

$$\begin{aligned}&(F+G)(x,y)=F(x,y)+G(x,y)\\ &= \overrightarrow{(۲x-y,x+y,x+۳y)}+\overrightarrow{(۲x,x+y,۲x+۳y)}\\ &= \overrightarrow{(۴x-y,۲x+۲y,۳x+۶y)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(F+G) &= \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\\ &= M(F)+M(G)\end{aligned}$$

۴) برای تحقیق ۳) از قضیهٔ ۱.۹.۶، داریم

$$\begin{aligned}(H\circ F)(x,y) &= H(F(x,y))\\ &= H(۲x-y,x+y,x+۳y)\\ &= \Big((۲x-y)-(x+y)+(x+۳y)\Big)\mathbf{i}\\ &\quad +\Big(۲(۲x-y)+(x+y)-۲(x+۳y)\Big)\mathbf{j}\\ &= \overrightarrow{(۲x+y,۳x-۷y)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(H\circ F) &= \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۷ \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\\ &= M(H)M(F)\end{aligned}$$

۵) برای تحقیق قسمت ۴) از قضیهٔ ۱.۹.۶، با فرض $J^{-۱}(x,y)=(u,v)$ داریم

$$\begin{aligned}&J\left(J^{-۱}(x,y)\right)=\overrightarrow{(x,y)}\Rightarrow J(u,v)=\overrightarrow{(x,y)}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{(u-v,۲u+v)}=\overrightarrow{(x,y)}\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u-v=x \\ ۲u+v=y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ۳u=x+y \\ ۳v=-۲x+y \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow J^{-۱}(x,y)=\overrightarrow{\left(\frac{x+y}{۳},\frac{-۲x+y}{۳}\right)}$$

$$\begin{aligned}M(J)^{-۱} &= \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} ۱/۳ & ۱/۳ \\ -۲/۳ & ۱/۳ \end{bmatrix}=M\left(J^{-۱}\right)\end{aligned}$$

۸.۹.۱ تمرین. نشان دهید که هر یک از نگاشتهای زیر خطی‌اند. سپس ماتریس نمایش هر یک را مشخص کنید:

۱) $F(x,y,z)=(۲x-۳y+۵z,x+y-۲z)$

۲) $F(x,y)=(۳x-۲y,۲x+۴y,x+y)$

۳) $F(x,y)=۲x-۳y$

۴) $F(x,y)=(x+y,۲x-y)$

۵) $F(x,y,z)=(x+z,y+x,z+x)$

۶) قضیهٔ ۱.۹.۶ را در صورتی تحقیق کنید که $a=۵$ و

$F(x,y)=(۳x-۲y,x+y) \quad H(x,y)=(x+y,x-y)$

$G(x,y)=(۲x-y,x-۲y) \quad J(x,y)=(۲x+y,x+۲y)$

۷) ثابت کنید که $(A^{-۱})^{-۱}=A$ و $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$.

۱۰.۱ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل doc.pdf مراجعه شود.

۱.۱۰.۱ راه اندازی. دستورات در مورد جبر خطی در میپل، در نرم افزاری بنام `linalg` وجود دارد که با دستور `with(linalg)` می‌توان آن را در حافظه آماده به کار نمود.

۲.۱۰.۱ تعریف بردار و ماتریس. برای استفاده از یک بردار و یا یک ماتریس، بهتر است آن را با اسمی بخصوص معرفی کنیم. برای تعریف برداری n−مؤلفه‌ای بنام `v` و با درآیه‌های بترتیب `v_1`، `v_2`، . . . و `v_n` از دستور

$$\mathrm{v} := \mathrm{vector}([\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_n]) \xmapsto{\text{میپل}} \mathrm{v} := \overrightarrow{(v_۱, v_۲, \cdots, v_n)}$$

استفاده می‌کنیم. برای تعریف ماتریس $n \times m$ بنام A و با درآیهٔ (i, j) ام A_{ij}، از دستور

$$\begin{aligned}\mathrm{A} := \mathrm{matrx}(\mathrm{n}, \mathrm{m}, [[\mathrm{A\_11}, \mathrm{A\_12}, ..., \mathrm{A\_2m}]\\ , [\mathrm{A\_21}, \mathrm{A\_22}, ..., \mathrm{A\_1m}],\\ ... , [\mathrm{A\_n1}, \mathrm{A\_n2}, ..., \mathrm{A\_nm},]])\end{aligned}$$

برای تعریف ماتریس

$$A := \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} & \cdots & A_{۱m} \\ A_{۲۲} & A_{۲۳} & \cdots & A_{۲m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n۱} & A_{n۲} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

استفاده می‌کنیم. توصیه می‌شود که حتی برای تعریف بردارها نیز از دستور ماتریس ستفاده شود. البته دستورات دیگری برای ایجاد سهولت در تعریف وجود دارد که می‌توانید به کمک help میپل به مطالعهٔ آنها بپردازید.

۳.۱۰.۱ اعمال بر ماتریسها. فرض کنید A و B ماتریس و c عددی دلخواه باشد، در این صورت

جمع ماتریسهای A و B .... $\mathtt{A+B} \xmapsto{\text{میپل}}$

A منهی ماتریس B .... $\mathrm{A\ -\ B} \xmapsto{\text{میپل}}$

c در ماتریس A .... $\mathtt{c*A} \xmapsto{\text{میپل}}$

حاصلضرب ماتریسهای A در B $\mathrm{multiply\,(\,A\,,\,B\,)} \xmapsto{\text{میپل}}$

ماتریس A به توان n .... $\mathtt{A \wedge n} \xmapsto{\text{میپل}}$

معکوس A .... $\mathrm{inverse\,(\,A\,)} \xmapsto{\text{میپل}}$

ترانهاد ماتریس A .... $\mathtt{transpose(A)} \xmapsto{\text{میپل}}$

دترمینان ماتریس A .... $\mathrm{det\,(\,A\,)} \xmapsto{\text{میپل}}$

۴.۱۰.۱ مثال. قسمت ۲ از تمرین ۱۰.۴.۱ را به صورت زیر به کمک میپل انجام می‌دهیم:

```
with(linalg) :
A := matrix(2, 2, [[1, −2], [2, 3]]);
B := matrix(2, 2, [[0, 2], [3, 1]]);
C := multiply(inverse(A), B);
multiply(C, A);
```

۵.۱۰.۱ حل دستگاه معادلات خطی. فرض کنید دستگاه `Sy` از معادلات

`eq_i:a_{i1}*x_1+a_{i2}*x_2+...+a_{im}*x_m=b_i`

تشکیل شده باشد، که $۱ \leq i \leq n$. این دستگاه را به شکل زیر در میپل وارد می‌کنیم:

```
with(linalg) :
eq_1 := a_11 ∗ x_1 + ... + a_1m ∗ x_m = b_1;
⋮
eq_n := a_n1 ∗ x_1 + ... + a_nm ∗ x_m = b_n;
Sy := {eq_1, eq_2, ..., eq_n};
Va := {x_1, x_2, ..., x_m};
```

اکنون برای حل این دستگاه کافی است از دستور `solve(Sy,Va)` استفاده شود.

۶.۱۰.۱ مقدار و بردار ویژه. برای بدست آوردن چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس A کافی است از دستور `charpoly(A)` استفاده شود. به کمک دستور `eigenvectors(A)` می‌توان مقادیر و بردارهای ویژهٔ A را بدست آورد. نتیجه به شکل زنجیره‌ای از عبارتهای به فرم `[a,b,(v_1,...,v_k)]` خواهد بود، که `a` مقدار ویژه، b شمارهٔ تکرار آن در چندجمله‌ای مشخصه و `(v_1,...,v_k)` مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای ویژهٔ نظیر به `a` می‌باشد.

۷.۱۰.۱ یادداشت. در آدرس اینترنتی

`http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm`

مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.

فصل ۲

هندسهٔ تحلیلی

هندسه را به صورت علم مطالعهٔ خواص اشکال می‌توان تعریف نمود. مثلاً اینکه اگر دو ضلع و زاویه بین دو مثلث با هم برابر باشند، آن دو مثلث قابل انطباقند، یک حکم هندسی است. روشهای متعددی برای حل مسایل هندسی وجود دارد. از جمله هندسهٔ اصل موضوعی که مبتنی بر منطق است و یا هندسهٔ دیفرانسیل که مبتنی بر حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد. هدف از این فصل استفاده از جبر خطی در حل مسایل هندسه است. این علم را هندسهٔ تحلیلی می‌نامند.

۱.۲ ضرب داخلی

موضوع این بخش بسیار اساسی است، زیرا همان طوری که خواهید دید، این ادعا درست است که تقریباً تمام هندسهٔ تحلیلی را تنها با داشتن ضرب داخلی می‌توان ساخت.

۱.۱.۲ تعریف. اگر $\mathbf{v}=\overrightarrow{(a,b,c)}, \mathbf{w}=\overrightarrow{(x,y,z)}\in\mathbb{R}^{۳}$، حاصلضرب داخلی $\mathbf{v}$ در $\mathbf{w}$ را با نماد $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}$ نشان داده و به شکل

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=ax+by+cz$$

تعریف می‌کنیم.
به صورت مشابه ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ را می‌توان تعریف نمود: اگر $\mathbf{v}=\overrightarrow{(a_۱,\cdots,a_n)}$ و $\mathbf{w}=\overrightarrow{(b_۱,\cdots,b_n)}$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند، تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}:=a_۱b_۱+\cdots+a_nb_n$$

از این پس، تنها در مورد خواص ضرب داخلی در $\mathbb{R}^۳$ سخن خواهیم گفت، اما این مطالب بدون هیچ محدودیتی برای $\mathbb{R}^n$ صحیح هستند.

۲.۱.۲ قضیه. اگر $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^۳$ و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه:

۱) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}$ ۳) $a(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})=(a\mathbf{u})\bullet\mathbf{v}$

۲) $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}$ ۴) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}\geq ۰$

۳.۱.۲ تعریف. به دلیل ویژگی (۴) از قضیه ۲.۱.۲، **طول** (**نرم** یا **اندازه**) بردار مفروض $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^۳$ را به صورت

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}$$

تعریف می‌کنیم. یعنی،

$$\|\overrightarrow{(a,b,c)}\|:=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$$

۴.۱.۲ قضیه. اگر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^۳$ و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه:

۱) $\|\mathbf{u}\|\geq ۰$ ۲) $\|a\mathbf{u}\|=|a|\|\mathbf{u}\|$

۳) $\|\mathbf{u}\|=۰\Leftrightarrow\mathbf{u}=\mathbf{0}$ ۴) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$

۵) $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|\leq\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$

نامساوی ۴) و ۵) را بترتیب نامساوی مثلثی و نامساوی کوشی می‌نامند.

۵.۱.۲ تعریف. به دلیل وجود نامساوی کوشی، داریم $-۱\leq\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\leq ۱$. در نتیجه، زاویه بین بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^۳$ را به صورت

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\arccos\left(\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

توان تعریف نمود.
بنابراین، اگر زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ برابر α باشد، آنگاه

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\alpha$$

۶.۱.۲ قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ **متعامد** باشند، آن است که $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=۰$.

۷.۱.۲ تعریف. فرض کنید $A,B\in\mathbb{R}^۳$. در این صورت **فاصلهٔ** A **تا** B را به صورت اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ تعریف نموده و با نماد $d(A,B)$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر

$$d\big((x,y,z),(a,b,c)\big):=\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲+(z-c)^۲}$$

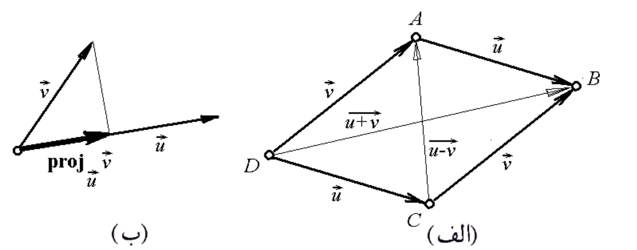
۸.۱.۲ قضیه. اگر $A,B,C\in\mathbb{R}^۳$، آنگاه:

۱) $d(A,B)\geq ۰$ ۲) $d(A,B)=۰\Leftrightarrow A=B$

۳) $d(A,B)=d(B,A)$

۴) $d(A,B)+d(B,C)\geq d(A,C)$

نامساوی ۳) را **نامساوی مثلثی** می‌نامند.



شکل ۱.۲: الف) ضرب داخلی
ب) تصویر یک بردار بر دیگری

۹.۱.۲ مثال. ۱) زاویه بین بردارهای

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{(۲,-۴,\sqrt{۵})}\quad \text{و}\quad \mathbf{v}=\overrightarrow{(-۲,۴,\sqrt{۵})}$$

برابر است با

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})=\arccos\left(\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)$$

$$=\arccos\left(\frac{(۲)(-۲)+(-۴)(۴)+(\sqrt{۵})(\sqrt{۵})}{\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲+(\sqrt{۵})^۲}\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲+(\sqrt{۵})^۲}}\right)$$

$$=\arccos\left(\frac{-۱۵}{۵\times ۵}\right)=\arccos(۰/۶)\approx ۰/۹۲۷$$

مثال ۲) مثلثی که رئوس آن $A=(۱,۱,۰)$، $B=(۱,۰,۱)$ و $C=(۰,۱,۱)$ هستند، متساوی الاضلاع است. زیرا:

$$\begin{aligned}d(A,B)&=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۰-۱)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}\\ d(A,C)&=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۱-۱)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}\\ d(B,C)&=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۱-۰)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۲}\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید A، B، C و D رئوس یک متوازی الاضلاعند. ثابت کنید که مجموع توان دوم طول اضلاع با مجموع توان دوم طول دو قطر برابر است. (شکل ۱.۲—الف):

$$AB^۲+BC^۲+CD^۲+DA^۲=AC^۲+BD^۲$$

حل. فرض کنیم $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{v}=\overrightarrow{DA}$. در این صورت $\overrightarrow{DC}=\mathbf{u}$، $\overrightarrow{CB}=\mathbf{v}$، $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{v}-\mathbf{u}$. بنابراین حکم مورد نظر

$$\|\mathbf{u}\|^۲+\|-\mathbf{v}\|^۲+\|-\mathbf{u}\|^۲+\|\mathbf{v}\|^۲=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^۲+\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^۲$$

است. یا به بیان دیگر

$$۲\|\mathbf{u}\|^۲+۲\|\mathbf{v}\|^۲=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^۲+\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^۲$$

برای اثبات، کافی است از تعریف اندازه استفاده شود:

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^۲+\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^۲=\\ &=(\mathbf{u}+\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}+\mathbf{v})+(\mathbf{u}-\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &=\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}+۲\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}-۲\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}\\ &=۲\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}+۲\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}=۲\|\mathbf{u}\|^۲+۲\|\mathbf{v}\|^۲\end{aligned}$$

۱۰.۱.۲ تمرین. در هر یک از موارد زیر، $\|\mathbf{u}\|$، $\|\mathbf{v}\|$، $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ و $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ را محاسبه کنید:

۱) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,۲,-۲)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۳,۲,۱)}$

۲) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۰,۱,۱)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,۰,۰)}$

۳) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,۰,۱)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,۱,۰)}$

۴) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۴,۳,-۵)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(-۵,۳,۴)}$

۵) فرض کنید $A=(۱,۲,-۱)$، $B=(۳,۰,۱)$ و $C=(۴,۳,۰)$. قسمت (۳) از قضیه ۸.۱.۲ را در این مورد تحقیق کنید.

۱۱.۱.۲ تعریف. فرض کنید $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^۳$ برداری مخالف صفر است. بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را به صورت $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ تعریف می‌کنیم. دلیل این اسم گذاری آن است که اندازه این بردار یک است و بعلاوه: $\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$.

۱۲.۱.۲ تصویر یک بردار بر برداری دیگر. فرض کنید $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^۳$ و $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$. در این صورت تصویر $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{u}$ برابر

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=\left(\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}$$

است. به شکل ۱.۲—ب توجه شود.

اثبات: طول تصویر بردار $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{u}$ برابر

$$\begin{aligned}
\|\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\| &= \|\mathbf{v}\|.|\cos\alpha| \\
&= \|\mathbf{v}\|\frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|} \\
&= \frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}
\end{aligned}$$

است، که α زاویهٔ $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ است. روشن است که اگر $\pi/۲ < \alpha \leq \pi$، آنگاه $\cos\alpha < ۰$ و لذا طول منفی می‌شود. به همین دلیل در محاسبه بالا $|\cos\alpha|$ ظاهر شده است. از طرفی، اگر $۰ \leq \alpha < \pi/۲$، آنگاه بردار یکهٔ تصویر با بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ برابر است و اگر که $\pi/۲ < \alpha \leq \pi$، آنگاه با $-\mathbf{u}$ برابر است. در نتیجه

$$\frac{\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}}{\|\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\|} = \text{sgn}\,(\cos\alpha)\,\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

پس در مجموع، داریم:

$$\begin{aligned}
\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \|\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\|\frac{\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}}{\|\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\|} \\
&= \frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}\text{sgn}\,(\cos\alpha)\,\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \\
&= \frac{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\cos\alpha|}{\|\mathbf{u}\|}\,\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}\,\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \\
&= \frac{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\alpha}{\|\mathbf{u}\|^{۲}}\mathbf{u} \\
&= \left(\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}
\end{aligned}$$

۱۳.۱.۲ مثال.

۱) تصویر بردار $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۱,۲,-۱)}$ بر بردار $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,-۱,۲)}$ را بدست آورید.

حل. با توجه به تعریف داریم

$$\begin{aligned}
\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \left(\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}\right)\mathbf{u} \\
&= \frac{(۱)(۱)+(-۱)(۲)+(۲)(-۱)}{(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۲)^{۲}}\overrightarrow{(۱,-۱,۲)} \\
&= \overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},-۱\right)}
\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید $A = (۱,۲,-۱)$، $B = (۱,۲,۳)$ و $C = (۰,-۱,۱)$. طول ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور ابتدا فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \overrightarrow{CB} = \mathbf{B}-\mathbf{C} = \overrightarrow{(۱,۳,۲)} \\
\mathbf{v} &= \overrightarrow{CA} = \mathbf{A}-\mathbf{C} = \overrightarrow{(۱,۳,-۲)}
\end{aligned}$$

اگر تصویر A بر ضلع BC را H نامیده و فاصلهٔ A تا H را h بنامیم (شکل ۲−.۲الف) آنگاه در مثلث قائم الزاویهٔ CAH، برای محاسبه h می‌توان ضلع CA و ضلع CH را محاسبه کرد. یعنی $h^{۲} = \|\mathbf{v}\|^{۲} - l^{۲}$، که در آن l عبارت از تصویر $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{u}$ است. یعنی

$$l = \|\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\| = \frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{|۱+۹-۴|}{\sqrt{۱+۹+۴}} = \frac{۶}{\sqrt{۱۴}}$$

در نتیجه، طول خواسته شده برابر $\sqrt{۸۰/۷}$ می‌باشد. زیرا

$$\begin{aligned}
h^{۲} &= \left(\sqrt{۱+۹+۴}\right)^{۲} - \left(\frac{۶}{\sqrt{۱۴}}\right)^{۲} \\
&= ۱۴ - \frac{۳۶}{۱۴} = \frac{۸۰}{۷}
\end{aligned}$$

۱۴.۱.۲ تمرین.

در هر مورد، تصویر $\mathbf{u}$ را بر $\mathbf{v}$ بیابید:

۱) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,-۱,۲)},\ \ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۲,۳,-۱)}$

۲) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,۱,۱)},\ \ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۰,۱,۱)}$

۳) مساحت مثلث با رئوس $A = (۱,۱,۰)$، $B = (-۱,۲,۳)$ و $C = (۰,۱,-۱)$ را محاسبه کنید.

۴) نشان دهید که اگر $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ سه بردار یکه و دو به دو عمود بر هم باشند، آنگاه به ازای هر بردار دلخواه $\mathbf{x}$ ای:

$a)$ $\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{u}$

$b)$ $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{x} = (\mathbf{v}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{v}$

$c)$ $\text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{x} = (\mathbf{w}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{w}$

$d)$ $\mathbf{x} = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{u} + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{v} + (\mathbf{w}\bullet\mathbf{x})\,\mathbf{w}$

۵) (کسینوسهای هادی) فرض کنید زاویه بین محور x ها و بردار $\mathbf{u}$ را α، زاویه بین محور y ها و بردار $\mathbf{u}$ را β و زاویه بین محور z ها و بردار $\mathbf{u}$ را γ بنامیم. (شکل ۲.۲− ب). نشان دهید که در این صورت $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ با $\overrightarrow{(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)}$ برابر است. بخصوص

$$\cos^{۲}\alpha + \cos^{۲}\beta + \cos^{۲}\gamma = ۱$$

۶) در صورتی که $\|\mathbf{u}\| = ۴$، $\|\mathbf{v}\| = ۳$ و $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ۲\pi/۳$، مقدار هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید:

$a)$ $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ $b)$ $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}$

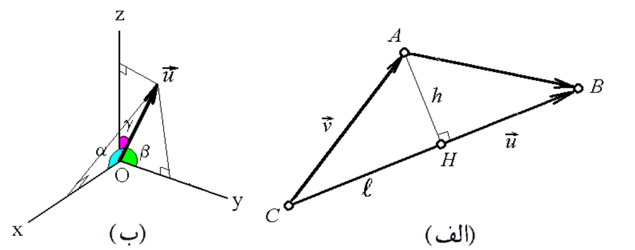
$c)$ $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^{۲}$ $d)$ $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

$e)$ $(۳\mathbf{u}-۲\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}+۲\mathbf{v})$ $f)$ $\|۳\mathbf{u}+۲\mathbf{v}\|$

۷) فرض کنید بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ یکه‌اند و $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{0}$، مقدار مجموع $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}$ را بدست آورید.

۸) در صورتی که $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{۳}$، $\|\mathbf{v}\| = ۱$ و $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \pi/۶$، زاویه بین $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ را بدست آورید.

۹) نشان دهید که به ازای هر سه بردار دلخواه $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردار $\mathbf{v}(\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})$ بر $\mathbf{u}$ عمود است.



شکل ۲.۲: الف) تصویر یک بردار بر برداری دیگر
ب) کسینوسهای هادی

۲.۲ پایهٔ متعامد و روش گرام—اشمیت

کار کردن با پایه‌های متعامد معمولاً راحت است و در برخی مسایل نظیر نرمالسازی منحنیها و یا رویه‌های درجه دوم لازم است تا پایهٔ داده شده را متعامد کنیم. هدف از این بخش پاسخ به این احتیاجات است. بدون ایجاد هر گونه خللی در ادامه بحث، از مطالعهٔ این بخش می‌توان صرف نظر نمود.

۱.۲.۲ تعریف. فرض کنید $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \cdots, \mathbf{v}_k\right\}$ پایه‌ای برای زیر فضای برداری V از $\mathbb{R}^n$ باشد. در صورتی می‌گوئیم $\mathcal{B}$ **یک پایهٔ متعامد برای** V است که بازای هر i و هر $j \neq i$ ای $\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_j = ۰$. این پایه را در صورتی **متعامد یکه** گویند که به ازای هر i ای $\|\mathbf{v}_i\| = ۱$.

۲.۲.۲ مثال. ۱) فرض کنید $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱,۰,-۱)}$ و $\mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۱,۲,۱)}$. در این صورت $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲\}$ یک پایهٔ متعامد برای $V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲\}$ است.

مثال ۲) فرض کنید

$$\mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}$$

در این صورت $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲\}$ یک پایهٔ متعامد برای $V = \operatorname{span}\{\overrightarrow{(۱,۰,-۱)}, \overrightarrow{(۱,۱,۱)}\}$ است.

مثال ۳) فرض کنید $\mathbf{e}_i$ برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد به همهٔ درایه‌های آن صفرند بجز درآیهٔ i ام که برابر یک است. در این صورت $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای $\mathbb{R}^n$ است.

۳.۲.۲ قضیه. اگر $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ پایه‌ای متعامد برای زیر فضای برداری V از $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت بازای هر $\mathbf{v} \in V$ ای

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v}_۱\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}_۱\bullet\mathbf{v}_۱}\right)\mathbf{v}_۱ + \left(\frac{\mathbf{v}_۲\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}_۲\bullet\mathbf{v}_۲}\right)\mathbf{v}_۲ + \cdots + \left(\frac{\mathbf{v}_k\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}_k\bullet\mathbf{v}_k}\right)\mathbf{v}_k$$

۴.۲.۲ مثال. فرض کنیم

$$\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱,۱,۱)}\,,\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(-۱,۰,۱)}\,,\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۱,-۲,۱)}$$

و $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳\right\}$. در این صورت $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ است. بعلاوه، اگر $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a,b,c)} \in \mathbb{R}^۳$، در این صورت

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \left(\frac{\mathbf{v}_۱\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}_۱\bullet\mathbf{v}_۱}\right)\mathbf{v}_۱ + \left(\frac{\mathbf{v}_۲\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}_۲\bullet\mathbf{v}_۲}\right)\mathbf{v}_۲ + \left(\frac{\mathbf{v}_۳\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}_۳\bullet\mathbf{v}_۳}\right)\mathbf{v}_۳ \\ &= \left(\frac{a+b+c}{۳}\right)\mathbf{v}_۱ + \left(\frac{-a+c}{۲}\right)\mathbf{v}_۲ + \left(\frac{a-۲b+c}{۶}\right)\mathbf{v}_۳\end{aligned}$$

۵.۲.۲ روش گرام اشمیت. فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای چون $\left\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \cdots, \mathbf{v}_k\right\}$ برای زیر فضای برداری V از $\mathbb{R}^n$ باشد، و تعریف کنیم

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_۱ &= \mathbf{v}_۱ \\ \mathbf{w}_۲ &= \mathbf{v}_۲ - \frac{\mathbf{v}_۲\bullet\mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱\bullet\mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ \\ \mathbf{w}_۳ &= \mathbf{v}_۳ - \frac{\mathbf{v}_۳\bullet\mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱\bullet\mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_۳\bullet\mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲\bullet\mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲ \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_k &= \mathbf{v}_k - \frac{\mathbf{v}_k\bullet\mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱\bullet\mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_k\bullet\mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲\bullet\mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲ - \cdots \\ &\qquad \cdots - \frac{\mathbf{v}_k\bullet\mathbf{w}_{k-۱}}{\mathbf{w}_{k-۱}\bullet\mathbf{w}_{k-۱}}\mathbf{w}_{k-۱}\end{aligned}$$

در این صورت $\mathcal{B}' = \left\{\mathbf{w}_۱, \mathbf{w}_۲, \cdots, \mathbf{w}_k\right\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای زیر فضای برداری V از $\mathbb{R}^n$ است.

۶.۲.۲ مثال. ۱) فرض کنید $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱,۰,۱,۰)}$، $\mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۲,۱,۲,۱)}$، $\mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(-۱,۲,-۳,۴)}$ و بعلاوه $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳\right\}$. در این صورت به کمک روش گرام—اشمیت پایه‌ای متعامد و نیز یک پایه‌ای متعامد یکه برای زیر فضای $\left\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳\right\}$ از $\mathbb{R}^۴$ بسازید.
حل. برای این منظور با توجه به قضیهٔ ۶.۲.۲ داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_۱ &= \mathbf{v}_۱ \\ &= \overrightarrow{(۱,۰,۱,۰)} \\ \mathbf{w}_۲ &= \mathbf{v}_۲ - \frac{\mathbf{v}_۲\bullet\mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱\bullet\mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ \\ &= \overrightarrow{(۲,۱,۲,۱)} - \frac{۲+۰+۲+۰}{۱+۰+۱+۰}\overrightarrow{(۱,۰,۱,۰)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overrightarrow{(۲,۱,۲,۱)} - ۲\overrightarrow{(۱,۰,۱,۰)} = \overrightarrow{(۰,۱,۰,۱)}\\
\mathbf{w}_۳ &= \mathbf{v}_۳ - \frac{\mathbf{v}_۳\bullet\mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱\bullet\mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_۳\bullet\mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲\bullet\mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲\\
&= \overrightarrow{(-۱,۲,-۳,۴)} - \frac{-۱+۰-۳+۰}{۱+۰+۱+۰}\overrightarrow{(۱,۰,۱,۰)}\\
&\quad -\frac{۰+۲+۰+۴}{۰+۱+۰+۱}\overrightarrow{(۰,۱,۰,۱)}\\
&= \overrightarrow{(-۱,۲,-۳,۴)} + ۲\overrightarrow{(۱,۰,۱,۰)} - ۳\overrightarrow{(۰,۱,۰,۱)}\\
&= \overrightarrow{(۱,-۱,-۱,۱)}
\end{aligned}
$$

در نتیجه $\mathcal{B}' = \left\{\mathbf{w}_۱,\mathbf{w}_۲,\mathbf{w}_۳\right\}$ یک پایهٔ متعامد است و چنانچه فرض شود

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_۱ &= \frac{\mathbf{w}_۱}{||\mathbf{w}_۱||} = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰\right)},\\
\mathbf{u}_۲ &= \frac{\mathbf{w}_۲}{||\mathbf{w}_۲||} = \overrightarrow{\left(۰,\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)},\\
\mathbf{u}_۳ &= \frac{\mathbf{w}_۳}{||\mathbf{w}_۳||} = \overrightarrow{\left(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)}
\end{aligned}
$$

در این صورت، $\mathcal{B}'' = \left\{\mathbf{u}_۱,\mathbf{u}_۲,\mathbf{u}_۳\right\}$ یک پایهٔ متعامد یکه است.

مثال ۲) فرض کنید $\mathbf{v}_۱$، $\mathbf{v}_۲$ و $\mathbf{v}_۳$ بترتیب برابر $\overrightarrow{(-۱,۰,۰,۱)}^t$، $\overrightarrow{(-۱,۰,۱,۰)}^t$ و $\overrightarrow{(-۱,۱,۰,۰)}^t$ باشند. روش گرام—اشمیت را برای پایهٔ $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{v}_۱,\mathbf{v}_۲,\mathbf{v}_۳,\mathbf{v}_۴\right\}$ اجرا می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_۱ &= \mathbf{v}_۱\\
&= \overrightarrow{(-۱,۰,۰,۱)}^t\\
\mathbf{w}_۲ &= \mathbf{v}_۲ - \frac{\mathbf{v}_۲\bullet\mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱\bullet\mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱\\
&= \overrightarrow{(-۱,۰,۱,۰)}^t - \frac{۱+۰+۰+۰}{۱+۰+۰+۱}\overrightarrow{(-۱,۰,۰,۱)}^t\\
&= \overrightarrow{(-۱,۰,۱,۰)}^t - \frac{۱}{۲}\overrightarrow{(-۱,۰,۰,۱)}^t\\
&= \overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲},۰,۱,-\frac{۱}{۲}\right)}^t\\
\mathbf{w}_۳ &= \mathbf{v}_۳ - \frac{\mathbf{v}_۳\bullet\mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱\bullet\mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_۳\bullet\mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲\bullet\mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲\\
&= \overrightarrow{(-۱,۱,۰,۰)}^t - \frac{۱+۰+۰+۰}{۱+۰+۰+۱}\overrightarrow{(-۱,۰,۰,۱)}^t\\
&\quad -\frac{۱/۲+۰+۰+۰}{۱/۴+۰+۱+۱/۴}\overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲},۰,۱,-\frac{۱}{۲}\right)}^t\\
&= \overrightarrow{(-۱,۱,۰,۰)}^t - \frac{۱}{۲}\overrightarrow{(-۱,۰,۰,۱)}^t\\
&\quad -\frac{۱}{۳}\overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲},۰,۱,-\frac{۱}{۲}\right)}^t\\
&= \overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۳},۱,-\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۳}\right)}^t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_۴ &= \mathbf{v}_۴ - \frac{\mathbf{v}_۴\bullet\mathbf{w}_۱}{\mathbf{w}_۱\bullet\mathbf{w}_۱}\mathbf{w}_۱ - \frac{\mathbf{v}_۴\bullet\mathbf{w}_۲}{\mathbf{w}_۲\bullet\mathbf{w}_۲}\mathbf{w}_۲ - \frac{\mathbf{v}_۴\bullet\mathbf{w}_۳}{\mathbf{w}_۳\bullet\mathbf{w}_۳}\mathbf{w}_۳\\
&= \overrightarrow{(۱,۱,۱,۱)}^t - \frac{۰+۰+۰+۰}{۱+۰+۰+۱}\overrightarrow{(-۱,۰,۰,۱)}^t\\
&\quad -\frac{۰+۰+۰+۰}{۱/۴+۰+۱+۱/۴}\overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۲},۰,۱,-\frac{۱}{۲}\right)}^t\\
&\quad -\frac{۰+۰+۰+۰}{۱/۹+۱+۱/۹+۱/۹}\overrightarrow{\left(-\frac{۱}{۳},۱,-\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۳}\right)}^t\\
&= \overrightarrow{(۱,۱,۱,۱)}^t
\end{aligned}
$$

به این ترتیب $\mathcal{B}' = \left\{\mathbf{v}_۱,\mathbf{v}_۲,\mathbf{v}_۳,\mathbf{v}_۴\right\}$ پایه‌ای متعامد است. در ادامه این پایه را یکه می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_۱ &= \frac{\mathbf{w}_۱}{||\mathbf{w}_۱||} = \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,۰,\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}^t,\\
\mathbf{u}_۲ &= \frac{\mathbf{w}_۲}{||\mathbf{w}_۲||} = \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳},۰,\frac{۲\sqrt{۳}}{۳},-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}^t,\\
\mathbf{u}_۳ &= \frac{\mathbf{w}_۳}{||\mathbf{w}_۳||} = \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۶},\frac{\sqrt{۳}}{۲},-\frac{\sqrt{۳}}{۶},-\frac{\sqrt{۳}}{۶}\right)}^t,\\
\mathbf{u}_۴ &= \frac{\mathbf{w}_۴}{||\mathbf{w}_۲||} = \overrightarrow{\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)}^t.
\end{aligned}
$$

در این صورت، $\mathcal{B}'' = \left\{\mathbf{u}_۱,\mathbf{u}_۲,\mathbf{u}_۳,\mathbf{u}_۴\right\}$ یک پایهٔ متعامد یکه است.

۷.۲.۲ تمرین. در هر مورد به کمک روش گرام—اشمیت، یک پایهٔ متعامد و سپس یک پایهٔ متعامد یکه بیابید:

۱) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱,۲)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۲,۱)}$

۲) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱,-۱)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۰,۱)}$

۳) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱,۱,۰)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۱,۰,۱)},\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۰,۱,۱)}$

۴) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱,۲,۳)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۲,۳,۱)},\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۳,۲,۱)}$

۵) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱,۱,۱,۰)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۱,۱,۰,۱)},\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۱,۰,۱,۱)},\ \mathbf{v}_۴ = \overrightarrow{(۰,۱,۱,۱)}$

۶) $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۱,۱,۰,۰)},\ \mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۱,۰,۰,۱)},\ \mathbf{v}_۳ = \overrightarrow{(۰,۰,۱,۱)},\ \mathbf{v}_۴ = \overrightarrow{(۰,۱,۰,۱)}$

هر یک از مارتریسهای زیر را به شکل قطری تبدیل کنید

۷) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$

۸) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$

۹) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$

۱۰) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$

۳.۲ ضرب خارجی

۱.۳.۲ تعریف. فرض کنید

$$\mathbf{v}=\overrightarrow{(x,y,z)},\mathbf{u}=\overrightarrow{(a,b,c)}\in\mathbb{R}^۳$$

حاصلضرب دکارتی (یا **خارجی**) بردار $\mathbf{u}$ در $\mathbf{v}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a & b & c\\ x & y & z\end{vmatrix}\\ &= (bz-cy)\,\mathbf{i}+(cx-az)\,\mathbf{j}+(ay-bx)\,\mathbf{k}\\ &= \overrightarrow{(bz-cy,cx-az,ay-bx)}\end{aligned}$$

۲.۳.۲ قضیه. به ازای هر $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^۳$ و هر $a\in\mathbb{R}$

۱) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$

۲) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

۳) $a\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(a\mathbf{u})\times\mathbf{v}$

۴) $\mathbf{u}\perp\mathbf{u}\times\mathbf{v}\ ,\ \mathbf{v}\perp\mathbf{u}\times\mathbf{v}$

۵) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}))$

٦) $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$

۷) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{u}\|\mathbf{v}$ اگر و تنها اگر $\lambda\in\mathbb{R}$ ای یافت گردد که $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$.

۸) بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ کنج راستگرد تشکیل می‌دهند.

۹) اگر بردار $\mathbf{w}$ به بردارهای مفروض $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ عمود باشد، آنگاه $\mathbf{w}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

۳.۳.۲ مثال. ۱) فرض کنیم

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,۲,-۱)}\quad,\quad\mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,۱,-۱)}$$

در این صورت:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & ۲ & -۱\\ ۱ & ۱ & -۱\end{vmatrix}\\ &= \overrightarrow{(-۲+۱,-۱+۱,۱-۲)}\\ &= \overrightarrow{(-۱,۰,-۱)}\end{aligned}$$

مثال ۲) در صورتی که $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,۰,۲)}$، $\mathbf{v}=\overrightarrow{(۳,-۱,۰)}$ و $\mathbf{w}=\overrightarrow{(۰,-۱,۱)}$، داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۳ & -۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱\end{vmatrix}\\ &= \mathbf{u}\times\overrightarrow{(-۱,-۳,-۳)}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & ۰ & ۲\\ -۱ & -۳ & -۳\end{vmatrix}\\ &= \overrightarrow{(٦,۱,-۳)}\\ (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۳ & -۱ & ۰\end{vmatrix}\times\mathbf{w}\\ &= \overrightarrow{(۲,٦,-۱)}\times\mathbf{w}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۲ & ٦ & -۱\\ ۰ & -۱ & ۱\end{vmatrix}\\ &= \overrightarrow{(۰,-۲,-۲)}\end{aligned}$$

بنابراین، ضرب خارجی شرکتپذیر نیست.

مثال ۳) در مورد بردارهای پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^۳$، داریم:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i}$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{j}$$

مثال ۴) فرض کنید $\mathbf{u}=\overrightarrow{(a,b,c)}$، $\mathbf{v}=\overrightarrow{(x,y,z)}$ و $\mathbf{w}=\overrightarrow{(\alpha,\beta,\gamma)}$، در این صورت:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\bullet\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x & y & z\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}\\ &= \mathbf{u}\bullet\overrightarrow{\left(\begin{vmatrix}y & z\\ \beta & \gamma\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x & z\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x & y\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}\right)}\\ &= a\begin{vmatrix}y & z\\ \beta & \gamma\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}x & z\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}x & y\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}a & b & c\\ x & y & z\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}\end{aligned}$$

۴.۳.۲ تمرین. در هر مورد، حاصلضرب خارجی $\mathbf{u}$ در $\mathbf{v}$ را محاسبه کنید:

۱) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,-۱,۲)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۲,۰,۱)}$

۲) $\mathbf{u}=\mathbf{i}-\mathbf{j},\ \mathbf{v}=۲\mathbf{i}+\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$

۳) $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۰,۱,۱)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,۱,۰)}$

۴) $\mathbf{u}=\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(۱,-۱,۰)}$

۵) فرض کنید $\mathbf{u}=\overrightarrow{(۱,-۱,۲)}$، $\mathbf{v}=\overrightarrow{(-۵,۳,۴)}$، $\mathbf{w}=\overrightarrow{(۱,۱,۱)}$ و $a=۲$. موارد یک تا هفت قضیهٔ ۲.۳.۲ را در این مورد تحقیق کنید.

۶) ثابت کنید که $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = ۲\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. معنی هندسی این تساوی چیست؟

۷) در صورتی که $\|\mathbf{u}\|=۱$، $\|\mathbf{v}\|=۲$ و $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\sqrt{۳}$، مقدار $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ را محاسبه کنید.

۸) در صورتی که $\|\mathbf{u}\|=۳$، $\|\mathbf{v}\|=۲۶$ و $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=۷۲$، مقدار $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ را محاسبه کنید.

۹) ثابت کنید $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^۲+(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})^۲=\|\mathbf{u}\|^۲\|\mathbf{v}\|^۲$.

۱۰) نشان دهید که همواره $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\le\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. تساوی در چه صورتی برقرار است؟

۱۱) فرض کنید $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$، ثابت کنید
$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{w}\times\mathbf{u}$.

۱۲) ثابت کنید که $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{w})v-(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})\mathbf{w}$.

۱۳) ثابت کنید که
$\left[\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})\,\right]\bullet(\mathbf{u}+\mathbf{w}) = ۲\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$.

۱۴) ثابت کنید که
$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{0}$.

۱۵) نشان دهید که اگر $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$، آنگاه
$\mathbf{u}\times\left\{\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times[\mathbf{u}\times\mathbf{v}])\right\}=\|\mathbf{u}\|^۴\mathbf{v}$.

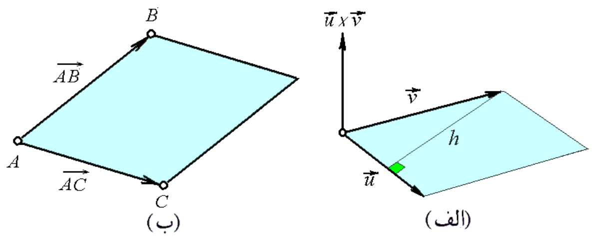
۱۶) فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای معلوم و $\mathbf{x}$ برداری مجهول باشد، چه شرایطی باید بر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ اعمال شود تا معادلهٔ برداری $\mathbf{u}\times\mathbf{x}=\mathbf{v}$ دارای جواب باشد؟ در صورت برقراری این شرایط، جواب مسأله را مشخص کنید.

۵.۳.۲ تعبیر هندسی اندازهٔ ضرب خارجی.

اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار دلخواه باشند و ابتدای هر دوی آنها را در مبداء فرض کنیم، با حرکت دادن $\mathbf{u}$ در امتداد $\mathbf{v}$ و نیز $\mathbf{v}$ در امتداد $\mathbf{u}$، یک متوازی الاضلاع حاصل می‌شود (شکل ۲ .۳—الف). مساحت این متوازی الاضلاع برابر طول بردار $\mathbf{u}$ ضرب در ارتفاع وارد از رأس $\mathbf{v}$ بر ضلع $\mathbf{u}$ می‌باشد. اما ارتفاع مورد نظر برابر طول بردار $\mathbf{v}$ ضرب در سینوس زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
A &= \|\mathbf{u}\|.h\\
&= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\left(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})\right)
\end{aligned}
$$

که این چیزی جز اندازهٔ بردار $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ نیست. یعنی، اندازه حاصلضرب خارجی $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ برابر است با مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$. توجه شود که $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ بر صفحه‌ای که این متوازی الاضلاع در آن قرار دارد، عمود است.



شکل ۳.۲: الف) تعبیر هندسی اندازه ضرب خارجی ب) محاسبهٔ مساحت به کمک ضرب خارجی

۶.۳.۲ مثال. فرض کنید A، B و C بترتیب برابر $(۱,-۲,۱)$، $(۲,۳,۷)$ و $(-۱,۲,۳)$ هستند. مساحت مثلث $\triangle ABC$ را محاسبه کنید.

حل. بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را در نظر می‌گیریم. روشن است (شکل ۳.۲—ب) که متوازی الاضلاع حاصل از این دو بردار، دارای دو برابر مساحت مثلث $\triangle ABC$ است. بنابرانی کافی است که نصف $\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$ را محاسبه کنیم:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \mathbf{B}-\mathbf{A}=\overrightarrow{(۱,۵,۶)}\\
\overrightarrow{AC} &= \mathbf{C}-\mathbf{A}=\overrightarrow{(-۲,۴,۲)}
\end{aligned}
$$

و بنابراین

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Area}(\triangle ABC) &= \frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|\\
&= \frac{۱}{۲}\left\|\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۱&۵&۶\\ -۲&۴&۲\end{vmatrix}\right\|\\
&= \frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{(-۱۴,-۱۴,۱۴)}\|=۷\sqrt{۳}
\end{aligned}
$$

۷.۳.۲ تمرین. در هر مورد، مساحت مثلث $\triangle ABC$ را در محاسبه کنید:

۱) $A=(۱,۲,-۱)\,,\ B=(۳,-۱,۴)\,,\ C=(۰,۱,-۱)$

۲) $A=(۳,۰,۲)\,,\ B=(۲,۱,۱)\,,\ C=(-۱,۱,۰)$

۴.۲ ضرب سه گانه

اعمال ضرب داخلی و خارجی دو تایی‌اند، یعنی دو بردار در آنها نقش دارند. در حالی که ضرب سه گانه یک عمل سه تایی است. ضرب جدید کاربردهای بسیاری دارد.

۱.۴.۲ تعریف. به ازای سه بردار $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^۳$، **حاصلضرب سه تایی** این سه را به صورت $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ تعریف کرده و با نماد $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$ نشان می‌دهیم. بنابه قسمت (۶) از

قضیهٔ ۲.۳.۲، داریم $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$. بعلاوه، بنابه قسمت (۴) از مثال ۳.۳.۲، داریم

$$[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

۲.۴.۲ قضیه.

اگر $\mathbf{u}$، $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردار باشند و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه:

۱) $[\mathbf{u}+\mathbf{u}_۱,\mathbf{v},\mathbf{w}] = [\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] + [\mathbf{u}_۱,\mathbf{v},\mathbf{w}]$

۲) $[a\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] = a[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$

۳) $[\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}] = [\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w}] = -[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$

۴) $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] = [\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}] = [\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}]$

۵) وقتی و تنها وقتی $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] = ۰$ که بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ وابستهٔ خطی باشند.

۳.۴.۲ تعبیر هندسی ضرب سه گانه.

با سه بردار $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ یک متوازی السطوح مشخص می‌گردد (شکل ۴.۲—الف). حجم این متوازی السطوح برابر است با مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ ضرب در ارتفاع وارد از رأس $\mathbf{w}$ بر این متوازی الاضلاع. چون $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ بر این ارتفاع الاضلاع عمود است، ارتفاع مورد نظر برابر است با طول تصویر بردار $\mathbf{w}$ بر $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$، یعنی

$$\begin{aligned} h &= \|\mathrm{proj}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\mathbf{w}\| \\ &= \frac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|} \end{aligned}$$

از طرفی مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ برابر $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ است، حجم متوازی السطوح برابر است با:

$$\begin{aligned} V &= \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\,h \\ &= \left|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}\right| \\ &= \left|[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]\right| \end{aligned}$$

۴.۴.۲ مثال.

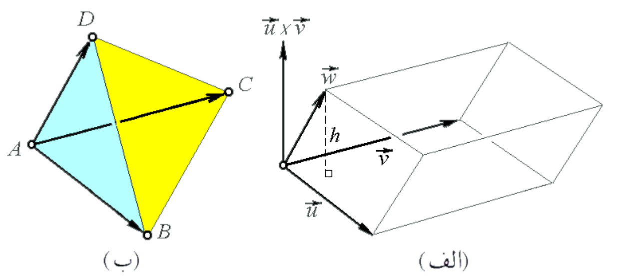
۱) حجم هرمی را بیابید که رئوس آن عبارتند از $A = (۱,۲,-۱)$، $B = (۱,۰,۱)$، $C = (۳,۴,۲)$ و $D = (۱,-۱,۱)$.

حل. با سه بردار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ متوازی السطوحی مشخص می‌گردد. بنابه خواص هندسی متوازی السطوح و هرم، حجم هرم با رئوس A، B، C و D برابر یک ششم حجم متوازی السطوح است. به شکل ۴.۲—ب توجه شود. پس کافی است که یک ششم ضرب سه گانه‌ی بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \mathbf{B}-\mathbf{A} = \overrightarrow{(۰,-۲,۲)} \\ \overrightarrow{AC} &= \mathbf{C}-\mathbf{A} = \overrightarrow{(۲,۲,۳)} \\ \overrightarrow{AD} &= \mathbf{D}-\mathbf{A} = \overrightarrow{(۰,-۳,۲)} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} V &= \frac{۱}{۶}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right| \\ &= \frac{۱}{۶}\left\|\begin{matrix} ۰ & -۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۳ & ۲ \end{matrix}\right\| = \frac{۲}{۳} \end{aligned}$$



شکل ۴.۲: الف) تعبیر هندسی ضرب سه گانه
ب) محاسبهٔ حجم مکعب به کمک ضرب سه گانه

مثال ۲) آیا نقاط $A = (۱,۲,-۱)$، $B = (۳,۲,۱)$، $C = (۰,۱,-۱)$ و $D = (۴,۱,۳)$ هم صفحه‌اند؟

حل. برای پاسخ به این پرسش، به این نکته توجه می‌کنیم که چهار نقطه مذکور وقتی و تنها وقتی در یک صفحه قرار دارند که حجم هرم حاصل از آنها صفر باشد. پس کافی است حاصلضرب سه گانهٔ $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ را محاسبه کنیم. اگر این ضرب صفر باشد، نقاط بر یک صفحه‌اند و بالعکس. اما

$$\begin{aligned} \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right] &= \left[\mathbf{B}-\mathbf{A},\mathbf{C}-\mathbf{A},\mathbf{D}-\mathbf{A}\right] \\ &= \left[\overrightarrow{(۲,۰,۲)},\overrightarrow{(-۱,-۱,۰)},\overrightarrow{(۳,-۱,۴)}\right] \\ &= \begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۲ \\ -۱ & -۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۴ \end{vmatrix} \\ &= -۸+۰+۸ = ۰ \end{aligned}$$

پس نقاط مذکور در یک صفحه واقعند.

۵.۴.۲ تمرین.

۱) قضیهٔ ۲.۴.۲ را اثبات کنید.

۲) حجم هرمی با رئوس $A = (۱,۲,۰)$، $B = (۱,۱,۱)$، $C = (-۱,۲,۱)$ و $D = (۴,۲,۳)$ را بیابید.

۳) حجم هرمی را بیابید که رئوس آن عبارتند از $A = (۱,۱,۰)$، $B = (۱,۰,۱)$، $C = (۰,۱,۱)$ و $D = (۱,۲,۳)$.

۴) آیا چهار نقطهٔ $A=(۱,-۱,۰)$، $B=(-۱,۲,۰)$، $C=(۱,۱,۲)$ و $D=(۲,۱,۳)$ در یک صفحه واقعند؟

۵) آیا پنج نقطهٔ $A=(۱,۱,۰)$، $B=(۲,۳,-۴)$، $C=(۱,۱,۱)$، $D=(۱,۲,۴)$ و $E=(۰,۱,۱)$ در یک صفحه قرار دارند؟

٦) ثابت کنید که $[\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{w}+\mathbf{u}]=۲[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$.

*۷) ثابت کنید که
$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{w}\times\mathbf{x})=[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x}]\mathbf{w}-[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]\mathbf{x}$.

۸) ثابت کنید که $[\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{v}\times\mathbf{w},\mathbf{w}\times\mathbf{u}]=[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]^۲$.

۵.۲ خط در صفحه

بنابه تعریف، اگر ذره‌ای در خلاء واقع باشد و هیچ نیرویی بر آن وارد نشود و ناگهان ضربه‌ای به آن وارد شود، ذره مسیری را در پی می‌گیرد. این مسیر را خط می‌نامند. بنابراین هر خط با یک تکیه گاه (مکان اولیهٔ ذره) و یک بردار هادی (جهت بردار نیروی وارد بر ذره) مشخص می‌گردد.

۱.۵.۲ تعریف. خط راست ℓ با **تکیه گاه** $X_۰=(x_۰,y_۰)$ و **بردار هادی** $\mathbf{v}=\overrightarrow{(a,b)}$ عبارت است از مجموعه همه نقاط به شکل $\overrightarrow{X_۰}+t\mathbf{v}$ که $t\in\mathbb{R}$. در این حالت می‌نویسیم:

$$\ell\,:\,\mathbf{X}=\mathbf{X}_۰+t\mathbf{v}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

به شکل ۵.۲—الف توجه شود. این معادله را **معادلهٔ برداری — پارامتری خط** ℓ می‌نامند.

معادلات پارامتری خط ℓ عبارتند از

$$\ell\,:\,x=x_۰+at\ ,\ \ y=y_۰+bt\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

در صورتی که a و b مخالف صفر باشند، **معادلهٔ کانونی خط** ℓ عبارت است از

$$\ell\,:\,\frac{x-x_۰}{a}=\frac{y-y_۰}{b}$$

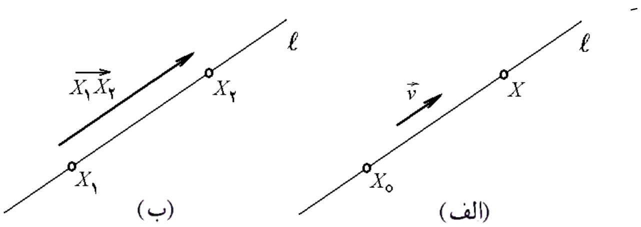
۲.۵.۲ قضیه. فرض کنید $\ell_۱$ خط با تکیه گاه $X_۱$ و هادی $\mathbf{v}_۱$ است و $\ell_۲$ خط با تکیه گاه $X_۲$ و هادی $\mathbf{v}_۲$ می‌باشد. در این صورت وقتی و تنها وقتی $\ell_۱$ و $\ell_۲$ یکی‌اند که $\mathbf{v}_۱$ موازی $\mathbf{v}_۲$ باشد و $X_۱$ به $\ell_۲$ تعلق داشته باشد.

یک نتیجهٔ خاص از قضیهٔ ۲.۵.۲ این است که بردار هادی یک خط مفروض را با مضربی غیر صفر از همان می‌توان عوض کرد. بعلاوه، تکیه گاه را می‌توان هر نقطه‌ای بر خط فرض گرفت.

۳.۵.۲ مثال. ۱) معادلهٔ خط راستی که از نقاط $X_۱=(x_۱,y_۱)$ و $X_۲=(x_۱,y_۲)$ می‌گذرد را در صورتی بیابید که $X_۱\neq X_۲$.

حل. $X_۱$ را تکیه گاه و بردار $\overrightarrow{X_۱X_۲}$ را هادی می‌توانیم بگیریم. به شکل ۵.۲—ب توجه شود. در نتیجه معادله خط ℓ گذرنده از نقاط $X_۱$ و $X_۲$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\ell\ &:\ \mathbf{X}=(۱-t)\,\mathbf{X}_۱+t\mathbf{X}_۲\ ;\ t\in\mathbb{R}\\ &:\ \begin{cases}x=(۱-t)\,x_۱+tx_۲\\ y=(۱-t)\,y_۱+ty_۲\end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}\\ &:\ \frac{x-x_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{y-y_۱}{y_۲-y_۱}\end{aligned}$$



شکل ۵.۲: الف) تعریف خط
ب) خط گذرنده از دو نقطه

مثال ۲) وضعیت دو خط

$$\begin{aligned}\ell_۱\ &:\ x+۲y=۳\\ \ell_۲\ &:\ x=t+۱\,,\,y=۳t-۱\,;\,t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

را نسبت به هم مشخص کنید.

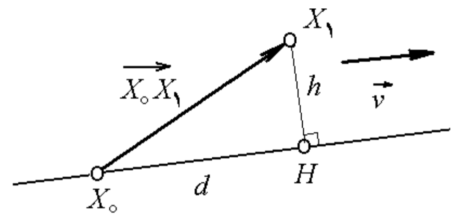
حل. نظر به مباحث هندسهٔ دبیرستانی، هر دو خط غیر موازی در $\mathbb{R}^۲$ الزاماً متقاطعند. پس کافی است موازی بودن این خطوط را تحقیق کنیم. ابتدا $\ell_۱$ را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\ell_۱\ &:\ x+۲y=۳\\ &:\ x-۳=-۲y\\ &:\ \frac{x-۳}{۲}=\frac{y-۰}{-۱}\end{aligned}$$

بنابراین، داریم $X_۱=(۳,۰)$ و $\mathbf{v}_۱=\overrightarrow{(۲,-۱)}$. بعلاوه، $X_۲=(۱,-۱)$ و $\mathbf{v}_۲=\overrightarrow{(۱,۳)}$. شرط توازی دو خط نسبت به هم، توازی بردارهای هادی آن دو است، اما $\mathbf{v}_۱\|\mathbf{v}_۲$ به معنی $\frac{-۱}{۳}=\frac{۲}{۱}$ می باشد، که غلط است. پس دو خط موازی نیستند. بنابراین، متقاطع می‌باشند. بعلاوه:

$$\begin{aligned}\ell_۱\cap\ell_۲\ &:\ \begin{cases}x+۲y=۳\\ x=t+۱\\ y=۳t-۱\end{cases}\ :\ \begin{cases}t+۱+٦t-۲=۳\\ x=t+۱\\ y=۳t-۱\end{cases}\\ &:\ \begin{cases}x=۱۱/۷\\ y=۵/۷\end{cases}\end{aligned}$$

یعنی دو خط مذکور در $X_۰=(۱۱/۷,۵/۷)$ متقاطع می‌باشند.



شکل ۲.۶: فاصلهٔ نقطه تا خط

مثال ۳) فاصلهٔ نقطهٔ $X_1 = (x_1, y_1)$ تا خط ℓ به معادلهٔ $ax + by + c = 0$ را بیابید.

حل. فرض کنیم H تصویر نقطهٔ X_1 بر خط ℓ باشد (به شکل ۲.۶ توجه شود). در این مثلث اضلاع $\overrightarrow{X_0X_1}$ و $d = \overline{X_0H}$ قابل محاسبه‌اند:

$$\begin{aligned}
\overline{X_0X_1} &= \|\overrightarrow{X_0X_1}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\
d &= \|\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\overrightarrow{X_0X_1}\| = \frac{|\overrightarrow{X_0X_1} \bullet \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|} \\
&= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

که در اینجا $X_0 = (x_0, y_1)$ تکیه گاه و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a, b)}$ هادی ℓ است. سه حالت ممکن است رخ دهد:

الف) اگر a و b مخالف صفر باشند، می‌توان نوشت

$$\ell : \frac{x - 0}{-b} = \frac{y + c/b}{a}$$

بنابراین X_1 را $(0, -c/b)$ و $\mathbf{v}$ را $\overrightarrow{(-b, a)}$ می‌توان فرض کرد. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
h &= \sqrt{\overline{X_0X_1}^2 - d^2} \\
&= \sqrt{(x_1)^2 + \left(y_1 + \frac{c}{b}\right)^2 - \frac{(-bx_1 + a(y_1 + c/b))^2}{b^2 + a^2}} \\
&= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

ب) اگر $a = 0$ و b مخالف صفر باشد، می‌توانیم بنویسیم $l : x = t, y = -c/b$ بنابراین $X_0 = (0, -c/b)$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(1, 0)}$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
h &= \sqrt{\overline{X_0X_1}^2 - d^2} \\
&= \sqrt{(x_1)^2 + \left(y_1 + \frac{c}{b}\right)^2 - \frac{|x_1|^2}{1 + 0}} \\
&= \left|y_1 + \frac{c}{b}\right| = \frac{|by_1 + c|}{|b|}
\end{aligned}$$

ج) اگر $b = 0$ و a مخالف صفر باشد، مشابه حالت ب داریم $h = \dfrac{|ax_1 + c|}{|a|}$.

پس، در هر حالت، فرمول $h = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ برقرار است.

۲.۵.۴ تمرین.

۱) معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $X_1 = (1, 3)$ و $X_2 = (3, 2)$ را بیابید.

۲) فاصلهٔ نقطهٔ $X_0 = (1, 2)$ را از خط گذرنده از نقاط $X_1 = (1, -1)$ و $X_2 = (2, 2)$ را بیابید.

۳) نشان دهید که اگر خط ℓ، $x-$ محور را در a و $y-$ محور را در b قطع کند، آنگاه معادلهٔ کانونی آن $x/a + y/b = 1$ خواهد بود.

۴) نشان دهید که اگر $\ell_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $\ell_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ دو خط متقاطع باشند، آنگاه معادلهٔ هر خط $\ell = \ell_2$ گذرنده از محل تلاقی آن دو را به شکل $\ell : a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ می‌توان نوشت، که λ یک عدد حقیقی است. مجموعهٔ خطوط ℓ را دسته خط مشخص شده توسط ℓ_1 و ℓ_2 می‌نامند.

۵) نشان دهید که سه نقطهٔ $X_i = (x_i, y_i)$ که $i = 1, 2, 3$ وقتی و تنها وقتی بر یک خط مواقعند که:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۶) نشان دهید که خطوط $\ell_1 : ax + by + c = 0$ و $\ell_2 : -ax + by + c = 0$ نسبت به $y-$ محور متقارن هستند.

۷) نشان دهید که خطوط $\ell_1 : ax + by + c = 0$ و $\ell_2 : ax - by + c = 0$ نسبت به $x-$ محور متقارن هستند.

۸) نشان دهید که خطوط $\ell_1 : ax + by + c = 0$ و $\ell_2 : -ax - by + c = 0$ نسبت به مبداء متقارن هستند.

۹) نشان دهید که مساحت مثلث ساخته شده توسط خط $l : ax + by + c = 0$، $x-$محور و $y-$محور برابر با $c^2/2|ab|$ است.

۱۰) معادلهٔ خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط $\ell_1 : x - 2y + 3 = 0$ و $\ell_2 : x + y = 2$ و نیز نقطهٔ $X_3 = (2, 5)$ می‌گذرد.

۶.۲ صفحه در فضا

بنابه قضیه‌ای از هندسهٔ دبیرستانی، اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، آن خط بر جمیع خطوط موجود در صفحه عمود است. این را مبنای تعریف صفحه می‌گیریم:

۱.۶.۲ تعریف. صفحهٔ P با **تکیه گاه** $X_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰)$ و **بردار نرمال** $\mathbf{n} = \overrightarrow{(a,b,c)}$ مجموعهٔ همهٔ نقاطی است مانند $X = (x,y,z)$ که $\overrightarrow{X_۰X_۱}$ بر $\mathbf{n}$ عمود است، یعنی:

$$P \,:\, \mathbf{n} \bullet (\mathbf{X} - \mathbf{X}_۰) = ۰$$

معادلهٔ مذکور را **معادلهٔ برداری صفحهٔ** P می‌نامند. به شکل مختصاتی این معادله عبارت است از

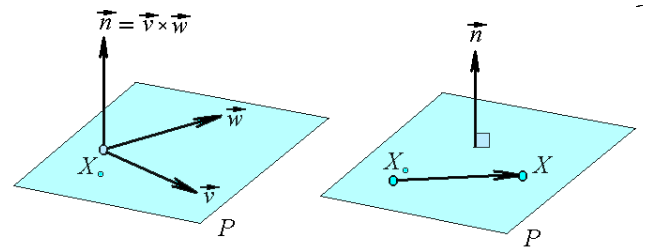
$$P \,:\, a\,(x - x_۰) + b\,(y - y_۰) + c\,(z - z_۰) = ۰$$

که **معادلهٔ کانونی صفحه** نامیده می‌شود. به شکل ۷.۲—الف توجه شود.

۲.۶.۲ مثال. ۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $X_۰ = (۱,۲,-۱)$ گذشته و بر بردار $\mathbf{n} = \overrightarrow{(۲,۱,۰)}$ عمود است.
حل. با توجه به ۱.۶.۲ داریم

$$۲\,(x-۱) + (y-۲) + ۰\,(z+۱) = ۰$$

یا $۲x + y = ۴$.



(ب) (الف)

شکل ۷.۲: صورتهای مختلف تعریف صفحه در فضا

مثال ۲) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $X_۰ = (۱,-۱,۲)$ می‌گذرد و با دو بردار مفروض $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۰,۱,۱)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(۱,۱,۰)}$ موازی است. به شکل ۷.۲—ب توجه شود.
حل. حاصلضرب خارجی $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ بر دو بردار غیر موازی $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ از صفحهٔ P عمود است، لذا برخورد P نیز عمود می‌باشد. به همین دلیل نرمال صفحه به شمار می‌آید. بنابراین:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-۱,۱,-۱)}$$

$$P \,:\, -(x-۱) + (y+۱) - (z-۲) = ۰$$

$$:\, z + x = y + ۴$$

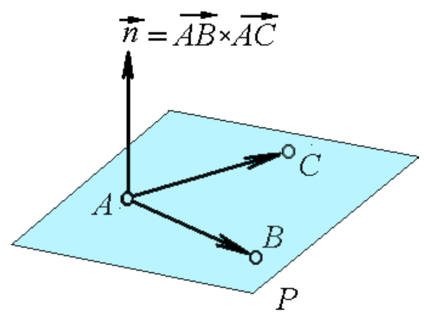
مثال ۳) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ $A = (۱,۲,-۱)$، $B = (۱,۲,۳)$ و $C = (۰,-۱,۴)$ می‌گذرد.
حل. چون A، B و C بر صفحه P واقعند، بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بر صفحه قرار دارند و بنابراین موازی صفحه‌اند. (به شکل ۸.۲ توجه شود). پس می‌توانیم مانند مثال قبل فرض کنیم که $X_۰ = A$ و $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. از طرفی:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \\ &= \overrightarrow{(۰,۰,۴)} \times \overrightarrow{(-۱,-۳,۵)} = \overrightarrow{(۱۲,-۴,۰)} \end{aligned}$$

بنابراین، معادله صفحه عبارت است از

$$۱۲\,(x-۱) - ۴\,(y-۲) + ۰\,(z+۱) = ۰$$

یا $y = ۳x - ۱$.



شکل ۸.۲: صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ مفروض

مثال ۴) وضعیت دو صفحهٔ $P_۱ \,:\, x - ۲y + ۳z = ۴$ و $P_۲ \,:\, ۲x + y = z + ۳$ را نسبت به هم مشخص کنید.
حل. دو صفحه در فضا یا متقاطع هستند و یا موازی. شرط توازی دو صفحه، توازی نرمال آنها است. اما در این مسأله $\mathbf{n}_۱ = \overrightarrow{(۱,-۲,۳)}$ و $\mathbf{n}_۲ = \overrightarrow{(۲,۱,-۱)}$. $\mathbf{n}_۱$ و $\mathbf{n}_۲$ در صورتی موازیند که نسبت مختصاتشان برابر باشد. به بیان دیگر

$$\frac{۱}{۲} = \frac{-۲}{۱} = \frac{۳}{-۱}$$

که چنین نیست. بنابراین دو صفحهٔ مذکور متقاطعند.

۳.۶.۲ تمرین.

۱) محل تلاقی سه صفحهٔ $x + y + z = ۱$، $x = ۲y$ و نیز $۲x + y + ۳z + ۱ = ۰$ را بیابید.

۲) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقاط $A = (۱,۲,۱)$، $B = (۰,۱,۱)$ و $C = (۱,-۱,۳)$ می‌گذرد.

۳) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $X_۱ = (۱,۲,-۱)$ به موازات صفحهٔ $P \,:\, x - ۲y = z$ می‌گذرد.

۴) نشان دهید که معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ $X_i=(x_i,y_i,z_i)$ که $i=۱,۲,۳$ برابر است با:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & ۱ \\ x_۱ & y_۱ & z_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & z_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & z_۳ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_۱ & y-y_۱ & z-z_۱ \\ x_۲-x_۱ & y_۲-y_۱ & z_۲-z_۱ \\ x_۳-x_۱ & y_۳-y_۱ & z_۳-z_۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۵) نشان دهید که اگر صفحهٔ P سه محور x، y و z را بترتیب در سه مقدار مخالف صفر a، b و c قطع کند، آنگاه معادلهٔ P به صورت $x/a+y/b+z/c=۱$ خواهد بود.

٦) نشان دهید که فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۱,y_۱,z_۱)$ تا صفحهٔ $ax+by+cz+d=۰$ برابر است با

$$h=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

۷) زاویهٔ بین دو صفحهٔ به معادلات $۲x+y=۲z+۳$ و $٦y+۲z=۳x+۱۵$ را مشخص کنید.

۸) فاصلهٔ دو صفحهٔ $x+۲y-۳z=۲$ و $x+۲y=۳z+۵$ از یکدیگر را محاسبه کنید.

*۹) نشان دهید که اگر دو صفحهٔ $a_۱x+b_۱y+c_۱z+d_۱=۰$ و $a_۲x+b_۲y+c_۲z+d_۲=۰$ متقاطع باشند، آنگاه صفحهٔ $P\neq P_۲$ وقتی و تنها وقتی از محل تلاقی آن دو می‌گذرد که به ازای λ ای بتوان نوشت:

$$P\ :\ a_۱x+b_۱y+c_۱z+d_۱ +\lambda\left(a_۲x+b_۲y+c_۲z+d_۲\right)=۰$$

۱۰) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که درست از وسط زاویهٔ ساخته شده دو صفحهٔ داده شده می‌گذرد:

$$P_۱\ :\ x+۲y+۲z=۴\ ,\ P_۲\ :\ ۲x+y+۲z+۱=۰$$

۷.۲ خط در فضا

خط در فضا کاملاً شبیه به خط در صفحه تعریف می‌گردد. یعنی با یک نقطه و یک بردار موازی با آن تعریف می‌شود.

۱.۷.۲ تعریف. خط راست با **تکیه گاه** در نقطهٔ $X_۰=(x_۰,y_۰,z_۰)$ و **بردار هادی** $\mathbf{v}=\overrightarrow{(a,b,c)}$، مجموعه همهٔ نقاطی $X=(x,y,z)$ است که با بردار $\overrightarrow{X_۰X}$ موازی $\mathbf{v}$ است. یعنی $t\in\mathbb{R}$ ای وجود دارد که $\overrightarrow{X_۰X}=t\mathbf{v}$. بنابراین، **معادلهٔ برداری—پارامتری خط** به صورت

$$\ell\ :\ \mathbf{X}=\overrightarrow{X_۰}+t\mathbf{v}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

است و معادلات پارامتری آن به صورت:

$$\ell\ :\ x=x_۰+at\ ,\ y=y_۰+bt\ ,\ z=z_۰+ct\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

می‌باشد و معادلات کانونی آن عبارتند از

$$\ell\ :\ \frac{x-x_۰}{a}=\frac{y-y_۰}{b}=\frac{z-z_۰}{c}$$

۲.۷.۲ مثال. ۱) معادلهٔ خط گذرنده از نقاط به مختصات $X_۱=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $X_۲=(x_۲,y_۲,z_۲)$ را بنویسید.

حل. $X_۱$ را تکیه گاه و $\overrightarrow{X_۱X_۲}=\overrightarrow{(x_۲-x_۱,y_۲-y_۱,z_۲-z_۱)}$ را بردار هادی می‌توانیم بگیریم. پس معادلهٔ این خط

$$\ell\ :\ \frac{x-x_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{y-y_۱}{y_۲-y_۱}=\frac{z-z_۱}{z_۲-z_۱}$$

می‌باشد.

مثال ۲) معادلات کانونی خط حاصل از برخورد دو صفحهٔ به معادلات $P_۱\ :\ x-۲y+۳z=۱$ و $P_۲\ :\ ۲x+y+۵z=۳$ را بدست آورید.

حل. برای یافتن تکیه گاهی از خط ℓ، معادلهٔ آن دو صفحه را در دستگاهی حل می‌کنیم. البته چون این دستگاه بینهایت جواب دارد. پس می‌توانیم یکی از متغیرها را مقدار گذاری کرده، دو تای دیگر را بر حسب آن محاسبه کنیم. پس فرض می‌کنیم $z_۰=۰$ و بنابراین (به شکل ۹.۲—الف توجه شود):

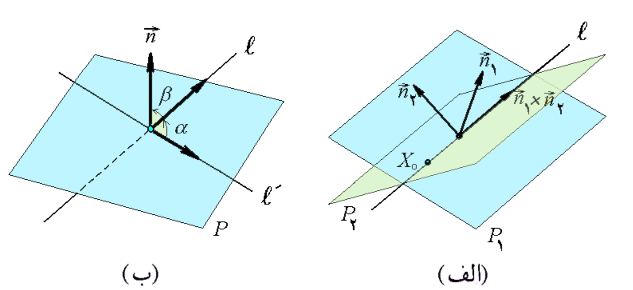
$$\begin{cases} x_۰-۲y_۰=۱ \\ ۲x_۰+y_۰=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵x_۰=۷ \\ ۵y_۰=۱ \end{cases} \Rightarrow X_۰=\left(\frac{۷}{۵},\frac{۱}{۵},۰\right)$$

چون خط ℓ بر صفحهٔ $P_۱$ واقع است، لذا بردار هادی آن $\mathbf{v}$ بر بردار نرمال $\mathbf{n}_۱$ صفحهٔ $P_۱$ عمود است. به همین دلیل $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{n}_۲$ عمود است. در نتیجه می‌توان فرض نمود

$$\mathbf{v}=\mathbf{n}_۱\times\mathbf{n}_۲=(۱,-۲,۳)\times(۲,۱,۵)=(-۱۳,۱,۵)$$

بنابراین معادلهٔ خط ℓ عبارت است از:

$$\ell\ :\ \frac{x-۷/۵}{-۱۳}=\frac{y-۱/۵}{۱}=\frac{z-۰}{۵}$$



شکل ۹.۲: الف) تعبیر هندسی طول حاصلضرب دکارتی ب) زاویه بین خط و صفحه

مثال ۳) وضعیت خط ℓ_1 به معادلات $x+y+z=16$ و $2x=y$ و نیز ℓ_2 به معادلات $x=2t-1$، $y=3t+1$ و $z=t-2$ را نسبت به هم مشخص کنید.

حل. دو خط در فضا دارای سه وضعیت کلی هستند: موازی، متقاطع و متنافر. قبل از بحث بیشتر، تکیه گاه و هادی دو خط داده شده را می‌یابیم: ℓ_1 را بصورت:

$$\ell_1 \;:\; \begin{cases} 2x=y \\ x+y+z=16 \end{cases} \;:\; \begin{cases} 2x=y \\ 3x+z=16 \end{cases}$$
$$: \quad \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-16}{-3}$$

می‌نویسیم. پس $X_1=(0,0,-16)$ و $\mathbf{v}_1=\overrightarrow{(1,2,-3)}$. بعلاوه، $X_2=(-1,1,-2)$ و $\mathbf{v}_2=\overrightarrow{(2,3,1)}$.

این دو خط در صورتی موازیند که $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ موازی باشند، یعنی $\frac{-3}{1}=\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ که غلط است. پس موازی نیستند. برای تحقیق متقاطع بودن آنها، معادلات آنها را در یک دستگاه حل می‌کنیم. مقادیر x، y و z بر حسب t را از معادلات ℓ_2، در معادلات ℓ_1 قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 4t-2=3t+1 \\ 2t-1+3t+1+t-2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ 6t=18 \end{cases} \Rightarrow t=3$$

پس دو خط متقاطعند (اگر مقادیر t متفاوت می‌شدند، دو خط متنافر بودند) و محل برخورد آنها عبارت است از نقطهٔ $X_0=(5,10,1)$.

مثال ۴) زاویه بین خط $\ell : 2x=2y+24\,, 3x=z-4$ و صفحهٔ $P : 2x+2y+3z+1=0$ را محاسبه کنید.

حل. همان طوری که از شکل ۹.۲—ب بر می آید، زاویهٔ بین ℓ و P برابر است با زاویهٔ بین ℓ و تصویر ℓ بر P (یعنی ℓ'). این زاویه α مکمل زاویهٔ β بین هادی خط و نرمال صفحه است اما ℓ محل برخورد دو صفحه است، پس هادی آن برابر حاصلضرب خارجی نرمال آن دو صفحه می‌باشد:

$$\mathbf{v}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\overrightarrow{(3,-2,0)}\times\overrightarrow{(3,0,-1)}=\overrightarrow{(2,3,6)}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \angle(l,P) &= \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta \\ &= \frac{\pi}{2}-\angle(\mathbf{v},\mathbf{n}) \\ &= \frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{n}\|}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{36}{49}\right) \end{aligned}$$

مثال ۵) فاصلهٔ نقطهٔ $X_1=(2,1,-1)$ تا خط به معادلات $\ell : x=2y, z=3y+1$ را بیابید.

حل. اگر تصویر X_1 بر ℓ را H بنامیم، آنگاه فاصلهٔ مورد نظر h با طول ضلع $\overrightarrow{HX_1}$ برابر است. چون مثلث X_0X_1H قائم الزاویه است. $\overrightarrow{HX_1}$ برابر وتر در سینوس زاویهٔ α بین $\overrightarrow{X_0X_1}$ و هادی خط $\mathbf{v}$ است:

$$\begin{aligned} h &= \|\overrightarrow{X_0X_1}\|\sin\left(\angle(\overrightarrow{X_0X_1},\mathbf{v})\right) \\ &= \|\overrightarrow{X_0X_1}\|\frac{\|\overrightarrow{X_0X_1}\times\mathbf{v}\|}{\|\overrightarrow{X_0X_1}\|\|\mathbf{v}\|}=\frac{\|\overrightarrow{X_0X_1}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \end{aligned}$$

بنابراین، در حالت کلی داریم: $d(X_1,l)=\dfrac{\|\overrightarrow{X_0X_1}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$.

چون در این مسأله خاص معادلات کانونی ℓ به صورت

$$l : x=2t, y=t, z=3t+1$$

است، پس $X_0=(0,0,1)$ و $\mathbf{v}=(2,1,3)$. بنابراین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با:

$$\begin{aligned} d(X_1,l) &= \frac{\left\|(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_0)\times\mathbf{v}\right\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{\left\|\overrightarrow{(2,1,-2)}\times\overrightarrow{(2,1,3)}\right\|}{\sqrt{4+1+9}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\left\|\overrightarrow{(5,-10,0)}\right\|=5\sqrt{\frac{5}{14}} \end{aligned}$$

مثال ۶) معادلهٔ تصویر خط

$$l : 2x+3y+4z+5=0 \quad x-6y+3z-7=0$$

بر صفحهٔ $P : 2x+2y+z+15=0$ را بنویسید.

حل. چون ℓ محل برخورد دو صفحه است، معادلهٔ دسته صفحات گذشته از ℓ بصورت:

$$P_\lambda : 2x+3y+4z+5+\lambda(x-6y+3z-7)=0$$

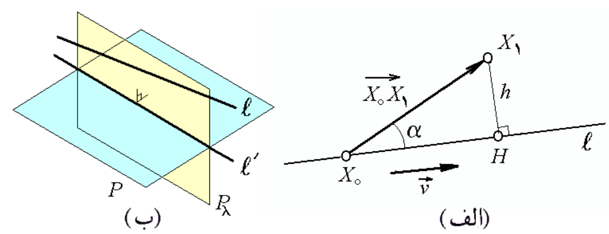
است. اکنون تصویر ℓ بر P عبارت است از محل برخورد آن عضو از P_λ که بر P عمود است. (به شکل ۱۰.۲—ب). لذا کافی است شرط عمود بودن P_λ و P را تحقیق کنیم. این امر به معنی تحقیق عمود بودن بردار $\mathbf{n}_\lambda=\overrightarrow{(2+\lambda, 3-6\lambda, 4+3\lambda)}$ نرمال بر P_λ و بردار $\mathbf{n}=\overrightarrow{(2,2,1)}$ نرمال بر P است؛ اما

$$\mathbf{n}\bullet\mathbf{n}_\lambda=2(2+\lambda)+2(3-6\lambda)+(4+3\lambda)=-7\lambda+14$$

پس باید $\lambda=2$. با قرار دادن مقدار λ در معادلهٔ P_λ بدست می آوریم

$P_2 : 4x-9y+10z-9=0$. بنابراین:

$$\ell'=P\cap P_2 \;:\; \begin{cases} 2x+2y+z+15=0 \\ 4x-9y+10z-9=0 \end{cases}$$
$$: \; \begin{cases} -13y+6z=39 \\ -16x-19y=159 \end{cases}$$



شکل ۱۰.۲: الف) فاصلهٔ نقطه تا خط
ب) تصویر خط بر صفحه

مثال ۷) آیا دو خط ℓ_1 و ℓ_2 در یک صفحه واقعند؟ چرا؟

$$\ell_1 \;:\; x=2t-1,\, y=5t+2,\, z=1-t$$
$$\ell_2 \;:\; x=y-1=\frac{1}{2}(z-2)$$

حل. فرض کنیم خط ℓ_i دارای تکیه گاه X_i و هادی $\mathbf{v}_i$ باشد. از نقطهٔ X_1 به نقطهٔ X_2 بردار $\overrightarrow{X_1X_2}$ را متصل می‌کنیم (شکل ۱۱.۲—الف). اگر این دو خط بر یک صفحه واقع باشند، و بلعکس. پس این دو خط وقتی همصفحه هستند که بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\overrightarrow{X_\circ X_1}$ وابستهٔ خطی باشند. یعنی

$$[\overrightarrow{X_\circ X_1}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0$$

اما، در این حالت بخصوص، داریم $X_1 = (-1,2,1)$، $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{(2,5,-1)}$ و $X_2 = (0,1,2)$ و $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{(1,1,2)}$. در نتیجه:

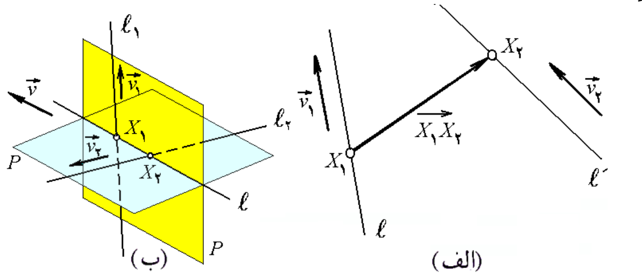
$$\begin{aligned}[\overrightarrow{X_1X_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] &= \left[\overrightarrow{(1,-1,1)}, \overrightarrow{(2,5,-1)}, \overrightarrow{(1,1,2)}\right] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0\end{aligned}$$

پس دو خط مذکور همصفحه نیستند.

مثال ۸) معادله عمود مشترک خطوط داده شده را بیابید:

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 4t+3 \\ z = 3t+1 \end{cases} \quad \text{و}\; ; \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 2s+5 \\ y = 3s+4 \\ z = 6s-1 \end{cases}$$

حل. بنابه تعریف، عمود مشترک دو خط عبارت از خطی است که هر دو را قطع کرده و بر آنها عمود نیز می‌باشد (شکل ۱۱.۲—ب). فرض کنیم مسأله حل شده است و پاسخ آن خط ℓ است. فرض کنیم: $\mathbf{v}$، $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{(2,4,3)}$ و $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{(2,3,6)}$ بترتیب بردار هادی خط ℓ، ℓ_1 و ℓ_2 باشند. X_1 و X_2 بترتیب محل برخورد خط ℓ با خط ℓ_1 و ℓ_2 باشند. P_1 صفحه‌ای باشد که از خط ℓ_1 و نقطهٔ X_2 می‌گذرد. P_2 صفحه‌ای باشد که از خط ℓ_2 و نقطهٔ X_1 می‌گذرد. $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ بترتیب بردار نرمال صفحهٔ P_1 و P_2 باشند.



شکل ۱۱.۲: الف) فاصلهٔ دو خط از هم
ب) عمود مشترک دو خط

در این صورت، همان طوری که در شکل ۱۱.۲—ب مشهود است، چون صفحهٔ P_1 خطوط ℓ_1 و ℓ را شامل است، بنابراین با هر دوی آنها موازی است و در نتیجه $\mathbf{n}_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{v}_1$. P_2 خطوط ℓ_2 و ℓ را شامل است، بنابراین با هر دوی آنها موازی است و در نتیجه $\mathbf{n}_2 = \mathbf{v} \times \mathbf{v}_2$. از این که خط ℓ بر هر دو خط ℓ_1 و ℓ_2 عمود است نتیجه می‌گردد که $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. پس در مجموع

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= \Big(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\Big) \times \mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} \times \mathbf{v}_1 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 15 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-10,-49,72)} \\ \mathbf{n}_2 &= \Big(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\Big) \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 15 & -6 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{(-30,-94,57)}\end{aligned}$$

چون $(2,3,1) \in \ell_1 \subset P_1$، معادلهٔ صفحهٔ P_1 عبارت است از

$$-10(x-2) - 49(y-3) + 72(z-1) = 0$$

به صورت مشابه، چون $(5,4,-1) \in \ell_2 \subset P_2$، معادلهٔ صفحهٔ P_2 عبارت است از

$$-30(x-2) - 94(y-3) + 57(z-1) = 0$$

در نتیجه، ℓ که مقطع P_1 و P_2 می‌باشد، عبارت است از

$$\begin{aligned}\ell \;&:\; \begin{cases} -10(x-2) - 49(y-3) + 72(z-1) = 0 \\ -30(x-2) - 94(y-3) + 57(z-1) = 0 \end{cases} \\ &:\; \begin{cases} 10x + 49y - 72z - 95 = 0 \\ 30x + 94y - 57z - 285 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

۳.۷.۲ تمرین.

۱) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(2,0,-3)$ به موازات خط $x = y = \frac{z-1}{3}$ می‌گذرد.

۲) آیا خط گذرنده از نقاط $(3,-1,10)$ و $(1,1,-2)$ صفحهٔ $2x + y = z + 1$ را قطع می‌کند؟

۳) ثابت کنید که خط $\frac{z}{۱} = \frac{y-۱}{-۲} = \frac{x+۲}{۳}$ با خط فصل مشترک دو صفحهٔ $x + y - z = ۰$ و $x = y + ۵z + ۸$ موازی است.

۴) معادلهٔ خط حاصل از اشتراک دو صفحهٔ $x - ۲y + ۳z = ۱$ و $۲x + ۲y = ۳z$ را بیابید.

۵) خطی را بیابید که از نقطهٔ $(۳, ۵, -۴, -)$ گذشته و دو خط متنافر زیر را قطع کند: $\ell_۱ : \frac{x+۱}{۳} = \frac{y+۳}{-۲} = \frac{z-۲}{-۱}$ و $\ell_۲ : \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۱}{۳} = \frac{z-۱}{-۵}$.

٦) قرینهٔ نقطهٔ $X_۱ = (۲, -۵, ۷)$ نسبت به خط به معادلات $\frac{x+۳}{۲} = \frac{y-۱}{۲} = z$ را بیابید.

۷) فرمولی برای محاسبهٔ کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط بیابید و سپس در مورد دو خط داده شده را بکار ببندید:

$$\ell_۲ : x = ۲t - ۴ , \, y = ۴ - t , \, z = -۲t - ۱$$

$$\ell_۲ : x = ۴t - ۵ , \, y = -۳t + ۵ , \, z = -۵t + ۵$$

۸) تصویر خط $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۲}{-۲} = \frac{z-۱}{۳}$ را بر تک تک صفحه‌های مختصاتی بیابید.

۹) نشان دهید که معادلهٔ صفحهٔ گذشته از نقطهٔ $(x_۱, y_۱, z_۱)$ و خط ℓ با تکیه گاه $(x_۰, y_۰, z_۰)$ و هادی $\mathbf{v} = (a, b, c)$، به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x - x_۱ & y - y_۱ & z - z_۱ \\ x_۰ - x_۱ & y_۰ - y_۱ & z_۰ - z_۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۸.۲ منحنیهای درجه دوم

منحنیهای درجه دوم یا مقاطع مخروطی همان طوری که از اسمشان بر می‌آید، تصاویر حاصل از برخورد مخروط استاندارد $x^۲ + y^۲ = z^۲$ و یک صفحهٔ دلخواه بر xy–صفحه هستند. به بیان دقیقتر

۱.۸.۲ تعریف. منحنی درجه دوم یا **مقطع مخروطی**، مجموعهٔ جوابهای معادله‌ای به شکل

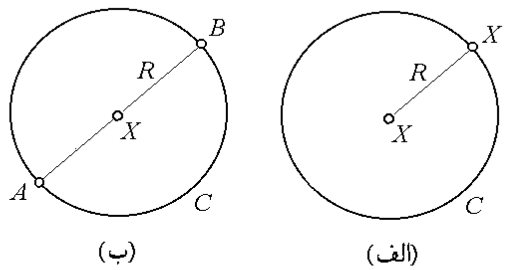
$$C \, : \, ax^۲ + by^۲ + ۲cxy + dx + ey + f = ۰$$

است که در آن $a^۲ + b^۲ + c^۲ \neq ۰$. چنانچه $c = ۰$، منحنی C را **استاندارد** می‌نامیم.

در ادامه به طبقه‌بندی همهٔ منحنیهای استاندارد می‌پردازیم و سپس با برداشتن شرط $c = ۰$، صورت کلی این گونه منحنیها را بررسی خواهیم نمود.

۲.۸.۲ دایره. مکان هندسی همهٔ نقاطی که از نقطه‌ای بخصوص به یک فاصله‌اند را دایره می‌نامند. نقطهٔ ثابت را مرکز و عدد ثابت را شعاع دایره می‌نامیم. به شکل ۱۲.۲—الف توجه شود. اگر مختصات مرکز را $X_۰ = (x_۰, y_۰)$ و شعاع را R فرض کنیم، آنگاه نقطهٔ $X = (x, y)$ وقتی و تنها وقتی بر دایره C قرار دارد که فاصلهٔ X تا $X_۰$ برابر R شود، یعنی $R = \|\overrightarrow{X_۰X}\|$ و یا به شکل مختصاتی:

$$C \, : \, (x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ = R^۲$$



شکل ۱۲.۲: الف) تعریف دایره ب) کوچکترین دایرهٔ گذرنده از دو نقطهٔ مفروض

۳.۸.۲ مثال. ۱) دایرهٔ به مرکز $X_۰ = (۱, -۱)$ و شعاع $R = ۲$ به معادلهٔ $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲^۲$ است، یا

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۲$$

مثال ۲) معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ٦x + ۴y + ۹ = ۰$ معرف یک دایره است. زیرا با مربع کامل کردن آن به معادلهٔ

$$(x - ۳)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۲^۲$$

می‌رسیم که معادلهٔ دایره‌ای به شعاع $R = ۲$ و با مرکز در نقطهٔ $X_۰ = (۳, -۲)$ است.

مثال ۳) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که قطر آن پاره خط $AB = (۳, ٦)\,(۳, ۲)$ است. روشن است که در این حالت، شعاع R دایره برابر نصف فاصلهٔ A تا B است و مرکز آن نیز دقیقاً نقطهٔ $X_۰$ وسط پاره خط AB است. به شکل ۱۲.۲—ب توجه شود. در نتیجه، معادلهٔ دایره عبارت است از $(x-۳)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲^۲$. زیرا

$$\begin{aligned} R &= \frac{۱}{۲} d\,(A, B) = \frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{(۰, -۴)}\| = ۲ \\ \mathbf{X}_۰ &= \frac{۱}{۲}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{(٦, ۸)} = \overrightarrow{(۳, ۴)} \end{aligned}$$

مثال ۴) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ $A = (۱, ۲)$، $B = (-۱, ۲)$ و $C = (۳, ۴)$ می‌گذرد.

حل. فرض کنیم معادلهٔ دایره $S\,:\,x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ است. از فرض $A,B,C\in S$ به ترتیب نتیجه می‌شود که

$$\begin{cases} ۱+۴+a+۲b+c=۰ \\ ۱+۴-a+۲b+c=۰ \\ ۹+۱۶+۳a+۴b+c=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+۲b+c=-۵ \\ -a+۲b+c=-۵ \\ ۳a+۴b+c=-۲۵ \end{cases}$$

که پس از حل دستگاه، مقادیر $a=۰$، $b=-۱۰$ و $c=۱۵$ حاصل می‌شود. بنابراین دایرهٔ مورد نظر عبارتست از:

$$\begin{aligned} S \;&:\; x^{۲}+y^{۲}-۱۰y+۱۵=۰ \\ &:\; (x-۰)^{۲}+(y-۵)^{۲}=۱۰ \end{aligned}$$

۴.۸.۲ تمرین.

۱) وضعیت خط $l\,:\,x+y=۱$ و دایرهٔ $C\,:\,x^{۲}+y^{۲}=۲$ نسبت به هم را مشخص کنید.

۲) مکان هندسی نقاطی را بیابید که از $X_{۰}=(۲,-۱)$ به فاصلهٔ $R=۵$ هستند. آیا $X_{۱}=(۳,٦)$ بر روی آن واقع است؟ آیا $X_{۱}$ درون آن واقع است؟

۳) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن در $X_{۰}=(۳,۲)$ است و بر خط $۲x+۵=۳y$ مماس است.

۴) مرکز و شعاع دایره‌ای را بیابید که معادلهٔ آن عبارتست از:

الف) $۲x^{۲}+۲y^{۲}+٦x-۸y=۰$

ب) $x^{۲}+y^{۲}-۴y=۵$

۵) وضعیت نقطهٔ $A=(۲,-۱)$ و دایرهٔ
$$C\,:\,x^{۲}+y^{۲}-۲y=۰$$
نسبت به هم را مشخص کنید.

٦) وضعیت دوایر $C_{۱}\;:\;x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y=۳$ و $C_{۲}\,:\,x^{۲}+y^{۲}=x+y+۲$ نسبت به هم را مشخص کنید.

۷) نشان دهید که دایرهٔ به مرکز $X_{۰}=(x_{۰},y_{۰})$ و شعاع R را بصورت ذیل می‌توان پارامتره کرد:
$C\,:\,x=x_{۰}+R\cos t\,,\;y=y_{۰}+R\sin t;\;۰\leq t<۲\pi$.

۸) مکان هندسی مرکز همه دوایر مماس بر دو خط مفروض $l_{۱}:x+y=۵$ و $l_{۲}\,:\,۲x=۳y$ را بیابید.

۹) مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌های مماس بر دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۱$ و خط $x=۳$ را بیابید.

۵.۸.۲ بیضی.

مکان هندسی همهٔ نقاطی که مجموع فواصل آنها تا دو نقطهٔ مشخص برابر عددی معلوم است را **بیضی** می‌نامند. نقاط مشخص شده را **کانونهای بیضی** و عدد معلوم را **نرم** آن می‌نامند (شکل ۱۳.۲–الف). برای سهولت در بحث می‌توان فرض کرد که کانونها $A=(-c,۰)$ و $B=(c,۰)$ اند و عدد ثابت $۲a$ است. پس اگر C بیضی مورد نظر باشد و $X=(x,y)$ بر C واقع باشد، آنگاه بنابه تعریف داریم:

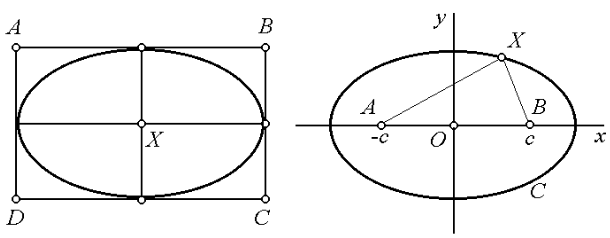
$$\begin{aligned} &d\,(X,A)+d\,(X,B)=۲a \\ &\sqrt{(x+c)^{۲}+y^{۲}}+\sqrt{(x-c)^{۲}+y^{۲}}=۲a \end{aligned}$$

که پس از ساده کردن، و با فرض $b^{۲}=c^{۲}-a^{۲}$ داریم

$$C\,:\,\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$$

توجه شود که محل برخورد C با x–محور برابر $\pm a$ و با y–محور برابر $\pm b$ است. عدد a و b را بترتیب نیم–قطر نظیر به x و y می‌نامند. مرکز این بیضی $(۰,۰)$ است. در حالت کلی، بیضی با نیم قطرهای a و b و با مرکز در $X_{۰}=(x_{۰},y_{۰})$ به معادله‌ی زیر است (تمرین):

$$C\,:\,\frac{(x-x_{۰})^{۲}}{a^{۲}}+\frac{(y-y_{۰})^{۲}}{b^{۲}}=۱$$



(ب) (الف)

شکل ۱۳.۲: الف) تعریف بیضی
ب) بیضی محاط در یک مستطیل

اگر فرض کنیم $a>b$ و $c=\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}$، آنگاه کانونهای C عبارتند از $(x_{۰}\pm c,y_{۰})$ و نرم آن نیز $۲a$ است. در حالی که اگر $a<b$ و فرض کنیم $c=\sqrt{b^{۲}-a^{۲}}$، آنگاه کانونهای C عبارتند از $(x_{۰},y_{۰}\pm c)$ و نرم آن $۲b$ خواهد بود.

٦.۸.۲ مثال.

۱) یک منحنی به معادلهٔ

$$C\,:\,۹x^{۲}+۴y^{۲}=۱۸x+۱٦y+۱۱$$

داده شده است. نوع آن را مشخص کنید.
حل. با مربع کامل کردن به معادلهٔ

$$C\,:\,\frac{(x-۱)^{۲}}{۲^{۲}}+\frac{(y-۲)^{۲}}{۳^{۲}}=۱$$

می‌رسیم، که یک بیضی با مرکز در $X_{۰}=(۱,۲)$ و نیم قطرهای $a=۲$ و $b=۳$ است.

مثال ۲) معادلهٔ بیضی با کانونهای $A=(۱,۲)$ و $B=(۱,۴)$ و نرم ۴ را بنویسید.

حل. چون مختص x هر دو نقطه یکی است، پس کانونها به شکل $(x_\circ, y_\circ \pm c)$ هستند، که حالت $a<b$ و $c=\sqrt{b^۲-a^۲}$ است. چون مرکز بیضی وسط دو کانونش است. در نتیجه، داریم $X_\circ = \frac{۱}{۲}(A+B)=(۱,۳)$. بعلاوه $۲c = ۴-۲ = ۲$ یا $c=۱$. اما مطابق فرض $۲b = ۴$. بنابراین $b=۲$ و $\sqrt{۴-a^۲}=۱$ در نتیجه $a=\sqrt{۳}$. پس معادلهٔ بیضی عبارت است از

$$C: \frac{(x-۱)^۲}{۳}+\frac{(y-۳)^۲}{۴}=۱$$

مثال ۳) معادلهٔ بیضی محاط در متوازی الاضلاع با رئوس $A=(۲,۵)$، $B=(٦,۵)$، $C=(٦,۳)$ و $D=(۲,۳)$ را بیابید.

حل. اگر نقاط داده شده را بترتیب A، B، C و D باشند، آنگاه مطابق شکل ۱۳.۲—ب، نیم قطرها برابرند با:

$$a = \frac{۱}{۲}\overline{AB}=\frac{۱}{۲}\|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|=۲$$
$$b = \frac{۱}{۲}\overline{BC}=\frac{۱}{۲}\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|=۱$$

بعلاوه مرکز بیضی، وسط چهارضلعی است، بنابراین

$$X_\circ = \frac{۱}{۴}(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D})=(۴,۴)$$

در نتیجه معادلهٔ بیضی

$$\frac{(x-۴)^۲}{۴}+\frac{(y-۴)^۲}{۱}=۱$$

است. (چرا؟)

۷.۸.۲ تمرین. معادلهٔ کانونی بیضیهای داده شده را بیابید:

۱) $۹x^۲+۴y^۲=۳٦$

۲) $۵x^۲+۴y^۲=۱۰x+۲۴y-۲۱$

۳) $x^۲+۴y^۲=۸x+۳۲y-۷٦$

۴) $۴x^۲+y^۲+۸x=۲y-۱$

۵) معادلهٔ بیضی با کانونهای $(۴,۳)$ و $(۱۰,۳)$ و نرم ۱۰ را بیابید.

٦) نشان دهید که بیضی به مرکز $X_\circ=(x_\circ,y_\circ)$ و نیم قطرهای a و b را بصورت زیر می‌توان پارامتره کرد:

$$C: x=x_\circ+a\cos t, y=y_\circ+b\sin t; \circ\le t<۲\pi$$

۷) وضعیت نقطهٔ $X_\circ=(۱,-۱)$ و بیضی $۹x^۲+۴y^۲=۳٦$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۸) وضعیت خط $x+y=۲$ و بیضی $۴x^۲+y^۲+۸x+۱=۲y$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹) فرض کنید $C: x^۲+y^۲=۹$ و

$$F(x,y)=(x+۲y-۳, x+y+۱)$$

وضعیت C را پس از تاثیر F مشخص کنید. آیا شکل حاصل بیضی است؟

۸.۸.۲ سهمی.

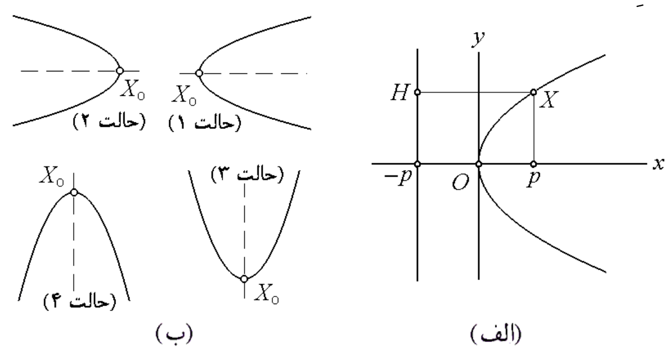
مطابق تعریف سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آنها تا یک خط مفروض برابر فاصلهٔ آنها تا یک نقطهٔ مفروض است. خط را مولد و نقطه را کانون سهمی می‌نامند. نصف فاصلهٔ مولد تا کانون را فاصلهٔ کانونی می‌نامند. برای سهولت در بحث فرض می‌کنیم کانون سهمی نقطه‌ی $(p,\circ)$ و مولد آن خط $x=-p$ باشد. اکنون وقتی و تنها وقتی $X=(x,y)$ بر سهمی C واقع است که فاصلهٔ X تا $(p,\circ)$ برابر فاصلهٔ X تا $x=-p$ باشد (به شکل ۱۴.۲—الف توجه شود):

$$\begin{aligned} C &: \overline{(p,\circ)(x,y)}=(x-(-p)) \\ &: \sqrt{(x-p)^۲+y^۲}=x+p : x=\frac{y^۲}{۴p}\end{aligned}$$

به صورت مشابه می‌توان چهار شکل استاندارد برای سهمی‌ها بدست آورد:

مولد	کانون	معادلهٔ سهمی
$x=x_\circ-\frac{۱}{۴a}$	$\left(x_\circ+\frac{۱}{۴a}, y_\circ\right)$	$x-x_\circ=a(y-y_\circ)^۲$
$x=x_\circ+\frac{۱}{۴a}$	$\left(x_\circ-\frac{۱}{۴a}, y_\circ\right)$	$x-x_\circ=-a(y-y_\circ)^۲$
$y=y_\circ-\frac{۱}{۴a}$	$\left(x_\circ, y_\circ+\frac{۱}{۴a}\right)$	$y-y_\circ=a(x-x_\circ)^۲$
$y=y_\circ+\frac{۱}{۴a}$	$\left(x_\circ, y_\circ-\frac{۱}{۴a}\right)$	$y-y_\circ=-a(x-x_\circ)^۲$

توضیح اینکه در هر چهار حالت فاصلهٔ کانونی $۱/۴a$ است و رأس آنها $(x_\circ,y_\circ)$ است (در شکل ۱۴.۲—الف رأس $(\circ,\circ)$ است) و a عددی مثبت می‌باشد. برای مشاهدهٔ حالتهای ممکن به شکل ۱۴.۲—ب توجه کنید.



شکل ۱۴.۲: الف) تعریف سهمی
ب) انواع سهمی استاندارد

۹.۸.۲ مثال. ۱) سهمی با رأس در $(۱,-۱)$، رو به جهت منفی y–محور و با فاصلهٔ کانونی ۱/۸ دارای معادلهٔ

$$y-(-۱)=\frac{-۱}{۴\,(۱/۸)}\,(x-۱)^{۲}$$

یا $y+۱=-۲\,(x-۱)^{۲}$ است.

مثال ۲) سهمی با رأس در نقطهٔ $(۴,۳)$، رو به جهت مثبت x–محور و با فاصلهٔ کانونی ۱/۴ دارای معادلهٔ

$$x-۴=\frac{۱}{۴\,(۱/۴)}\,(y-۳)^{۲}$$

یا $x-۴=(y-۳)^{۲}$ است.

مثال ۳) منحنی $y=۳x^{۲}+۶x$ یک سهمی با رأس در $(-۱,۳)$ و فاصلهٔ کانونی ۱/۱۲ است، زیرا پس از مربع کامل کردن، می‌توان نوشت $y-۳=۳\,(x+۱)^{۲}$. این سهمی رو به جهت مثبت y–محور می‌باشد.

مثال ۴) منحنی $۲y^{۲}+x=۴y$ یک سهمی با رأس در $(۲,۱)$ و فاصلهٔ کانونی ۱/۸ است که به جهت منفی x–محور تمایل دارد، زیرا می‌توان نوشت $x-۲=-۲\,(y-۱)^{۲}$.

۱۰.۸.۲ تمرین. معادلهٔ هر یک از سهمی‌های زیر را بنویسید:

۱) رأس آن $(۲,۱)$ است و فاصلهٔ کانونی آن ۱ است و به سمت مثبت x–محور جهتدار است.

۲) رأس آن $(۱,۲)$ است و فاصلهٔ کانونی آن ۱/۴ است و به سمت منفی x–محور جهتدار است.

۳) رأس آن $(-۱,۲)$ است و فاصلهٔ کانونی آن ۱ است و به سمت مثبت y–محور جهتدار است.

۴) رأس آن $(۱,۱)$ است و فاصلهٔ کانونی آن ۱/۸ است و به سمت منفی y–محور جهتدار است.

رأس، کانون و فاصلهٔ کانونی هر یک از سهمی‌های زیر را مشخص کنید:

۵) $x+y^{۲}=۲y$ ‏ ۶) $x^{۲}+۲y+۱=۰$

۷) $x=۱+۴y^{۲}+۸y$ ‏ ۸) $۵y=۴x^{۲}$

۹) وضعیت نقطهٔ $(۱,-۱)$ و سهمی $y=x^{۲}-۱$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۰) وضعیت خط $y=۲x$ و سهمی $x=-۲\,(y-۳)^{۲}$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۱) فرض کنید C سهمی $y=x^{۲}$ است و

$$F\,(x,y)=(x+y+۱,۲x-y)$$

شکل $F(C)$ را رسم کنید. آیا سهمی است؟

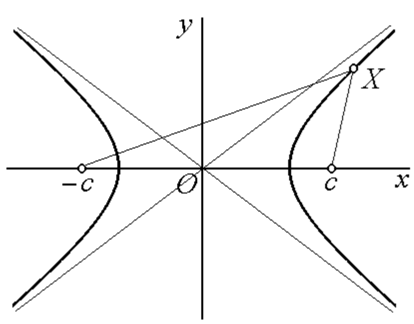
۱۲) منعکس سهمی $y=x^{۲}$ نسبت به مبداء، y–محور و نیمساز ربع اول و سوم را بیابید.

۱۳) فرض کنید $C\,:\,y-y_{۰}=P\,(x-x_{۰})$ مشخص کنید که با تغییر $x_{۰}$، شکل منحنی چه تغییری می‌کند.

۱۴) فرض کنید $C\,:\,y-y_{۰}=P\,(x-x_{۰})$ مشخص کنید که با تغییر $y_{۰}$، شکل منحنی چه تغییری می‌کند.

۱۵) فرض کنید $C\,:\,y-y_{۰}=P\,(x-x_{۰})$ مشخص کنید که با تغییر P، شکل منحنی چه تغییری می‌کند.

۱۱.۸.۲ هذلولی. بنابه تعریف هذلولی مجموعه‌ای از نقاط است که تفاضل فواصل آنها از دو نقطه مشخص برابر عددی مشخص است (شکل ۱۵.۲). نقاط مشخص شده را **کانون** و عدد ثابت مورد نظر را **نرم هذلولی** می‌نامند.



شکل ۱۵.۲: تعریف هذلولی

اگر فرض کنیم C هذلولی با کانونهای $(c,۰)$ و $(-c,۰)$ و نرم $۲a$ است، آنگاه وقتی و تنها وقتی $X=(x,y)$ بر C واقع است که $\overline{(-c,۰)\,(x,y)}-\overline{(c,۰)\,(x,y)}=۲a$ و بنابراین

$$\sqrt{(x+c)^۲+y^۲}-\sqrt{(x-c)^۲+y^۲}=۲a$$

پس از ساده کردن و فرض $b=\sqrt{c^۲-a^۲}$، داریم:

$$C\ :\ \frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

هذلولی مذکور دارای دو مجانب $y=\pm\frac{b}{a}x$ است. اعداد a و b را نیم قطرهای هذلولی می‌نامند.

در حالت کلی دو دسته هذلولی داریم:

الف) هذلولی به مرکز $X_۰=(x_۰,y_۰)$ و نیم قطرهای a و b و در امتداد x−محور (به شکل ۱۶.۲—الف توجه شود):

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}-\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}=۱$$

ب) هذلولی به مرکز $X_۰=(x_۰,y_۰)$ و نیم قطرهای a و b و در امتداد y−محور (به شکل ۱۶.۲—ب توجه شود):

$$\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}-\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}=۱$$

در هر دو حالت مجانبها عبارتند از

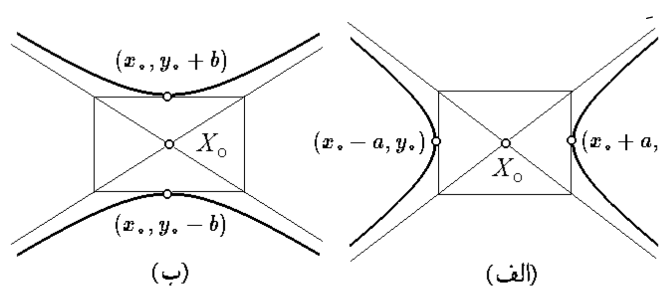
$$y-y_۰=\pm\frac{b}{a}\,(x-x_۰)$$

۱۲.۸.۲ مثال. ۱) هذلولی به مرکز $(۱,-۱)$ و نیم قطرهای ۳ و ۴ و در امتداد x−محور به معادلهٔ زیر است:

$$\frac{(x-۱)^۲}{۱۶}-\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$$

مثال ۲) هذلولی $(y-۳)^۲/۹-(x-۲)^۲/۴=۱$ به مرکز $(۲,۳)$ و نیم قطرهای ۲ و ۳ و در امتداد y−محور است.

مثال ۳) منحنی $۴x^۲-y^۲+۶y=۲۵$ یک هذلولی است، زیرا معادلهٔ آن را به صورت $x^۲/۲^۲-(y-۳)^۲/۴^۲=۱$ می‌توان نوشت. مرکز این هذلولی $(۰,۳)$ و نیم قطرهایش ۲ و ۴ هستند.



(ب) (الف)

شکل ۱۶.۲: انواع هذلولی استاندارد

۱۳.۸.۲ تمرین. ضمن تعیین مرکز، نیم قطرها و مجانبهای هر یک از هذلولی‌های زیر، آنها را رسم کنید:

۱) $(x-۱)^۲-\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$ ۲) $x^۲-y^۲=۴$

۳) $\frac{(x-۲)^۲}{۴}-y^۲=۱$ ۴) $۲۵y^۲-\frac{(x-۱)^۲}{۴}=۱$

۱۴.۸.۲ منحنیهای درجهٔ دوم غیر استاندارد.

تا اینجا به طبقه بندی منحنیهای درجه دوم پرداختیم. اکنون فرض $c=۰$ را برداشته و منحنی کلی

$$C\ :\ ax^۲+by^۲+۲cxy+dx+ey+f=۰ \qquad (۱.۲)$$

را در نظر می‌گیریم. هدف آن است که نشان دهیم پس از یک انتقال و احتمالاً دوران مناسب، منحنی C را به یک منحنی استاندارد می‌توان تبدیل نمود.

۱۵.۸.۲ نرمال سازی منحنی درجهٔ دوم — روش اول.

با دوران دادن محورها می‌توان ضریب جملهٔ xy در معادلهٔ منحنی درجه دوم (۱.۲) را صفر نمود. در این حالت باید فرض کرد:

$$x=u\cos\alpha-v\sin\alpha\ \ ,\ \ y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$$

که در آن

$$\alpha=\frac{۱}{۲}\arctan\left(\frac{۲c}{a-b}\right)=\frac{۱}{۲}\mathrm{arccot}\left(\frac{a-b}{۲c}\right)$$

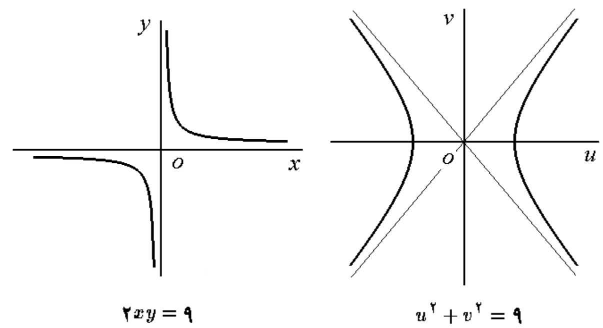
حال اگر (۱.۲) را بر حسب u و v بنویسیم، ضریب uv صفر خواهد بود. به این کار نرمال سازی گفته می‌شود. مهمترین ویژگی منحنی‌های از این دست آن است که محورهای تقارن آنها موازی محورهای مختصاتی می‌باشند.

۱۶.۸.۲ مثال. ۱) منحنی $۲xy=۹$ را در نظر بگیرید. در این صورت بنابه ۱۵.۸.۲، داریم:

$$\alpha=\frac{۱}{۲}\mathrm{arccot}\left(\frac{۰}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{cases} x=u\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right)-v\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,(u-v)\\ y=u\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)+v\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,(u+v)\end{cases}$$

پس از جایگذاری، داریم $u^۲-v^۲=۹$ که معادلهٔ یک هذلولی به مرکز $(۰,۰)$ و نیم قطرهای ۳ و ۳ و در امتداد v−محور در صفحهٔ uv می‌باشد (به شکل ۱۷.۲ توجه شود).



شکل ۱۷.۲: نرمال نمودن یک هذلولی

مثال ۲) منحنی $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2-10=0$ را در نظر بگیرید. در اینصورت:

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x = u\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - v\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}u - v\right) \\ y = u\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + v\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(u + \sqrt{3}v\right) \end{cases}$$

پس از جایگذاری x و y در معادلهٔ داده شده و ساده کردن نتیجه، به معادلهٔ $u^2/4 + v^2/20 = 1$ می‌رسیم که یک بیضی به مرکز مبداء و نیم قطرهای ۲ و $2\sqrt{5}$ در $uv-$صفحه می‌باشد (به شکل ۱۸.۲ توجه شود).

۱۷.۸.۲ تمرین.

هر یک از منحنی‌های درجه دوم داده شده را نرمال کنید:

۱) $xy = 2$

۲) $x^2 + 2y^2 = \sqrt{3}xy + 1$

۳) $xy + 1 = x + y$

۴) $3x^2 + 4\sqrt{3}xy = y^2 + 7$

۵) $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$

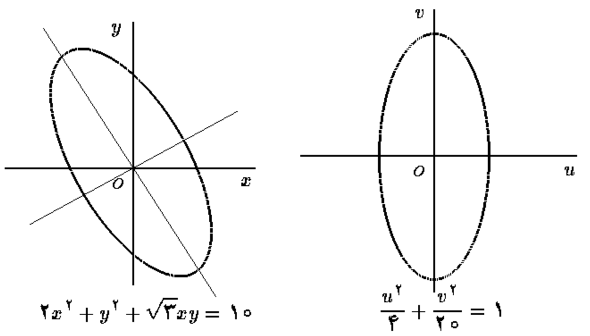
۶) $x^2 + y^2 = 2xy + 2$

۷) $xy + 2y = 2$

۸) $x^2 + y^2 + 2x = 2xy + 2y + 1$

۱۸.۸.۲ آزمون تعیین نوع منحنی درجهٔ دوم.

به منحنی درجهٔ دوم (۱.۲) مبین $\triangle = c^2 - ab$ را نسبت می‌دهیم. در اینصورت، صرف نظر از حالتهای خاص غیر مهم:
الف) اگر $\triangle = 0$، آنگاه منحنی C سهمی است.
ب) اگر $\triangle > 0$، آنگاه منحنی C هذلولی است.
ج) اگر $\triangle < 0$، آنگاه منحنی C بیضی است.



شکل ۱۸.۲: نرمال نمودن یک بیضی

۱۹.۸.۲ تعیین مرکز و محور تقارن یک منحنی درجهٔ دوم.

به منحنی درجهٔ دوم (۱.۲) دستگاه معادلات:

$$\{2ax + 2cy + d = 0\ ,\ 2by + 2cx + e = 0\}$$

را نظیر می‌کنیم. در اینصورت:
الف) اگر $\triangle = 0$، آنگاه دستگاه دارای یک خط از جوابها است، که این خط محور تقارن شکل بدست آمده است.
ب) اگر $\triangle \neq 0$، آنگاه دستگاه یک جواب دارد. جواب دستگاه مرکز بیضی یا هذلولی C است. هر یک از معالات دستگاه یکی از محورهای تقارن منحنی را مشخص می‌کنند.

۲۰.۸.۲ مثال. ۱) منحنی به معادلهٔ $xy = 2$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $\triangle = 1/4$ مثبت است و لذا شکل هذلولی است. دستگاه نظیر به منحنی عبارتست از $\{x = 0, y = 0\}$ پس مرکز این هذلولی $(0, 0)$ است و $x-$محور و $y-$محور محورهای تقارن آن هستند.

مثال ۲) منحنی به معادلهٔ $x^2 + y^2 = xy + x$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $\triangle = -3/4$ منفی است و لذا شکل بیضی است. دستگاه نظیر به منحنی $\{2x - y - 1 = 0\ , 2y - x = 0\}$ است که جواب آن $(2/3, 1/3)$ است. پس این بیضی با مرکز $(2/3, 1/3)$ و محورهای تقارن $x = 2y$ و $2x = y + 1$ می‌باشد.

مثال ۳) منحنی به معادلهٔ $x^2 + y^2 + 2xy = x + y + 1$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $\triangle = 1 - 1 = 0$ صفر است و لذا شکل سهمی می‌باشد. دستگاه نظیر به این منحنی عبارتست از $\{2x + 2y - 1 = 0, 2y + 2x - 1 = 0\}$ که دارای بینهایت جواب صادق در معادلهٔ $2x + 2y = 1$ است. این معادلهٔ محور تقارن سهمی می‌باشد.

۲۱.۸.۲ تمرین. در هر مورد نوع منحنی، محورهای تقارن و مرکز تقارن را مشخص کنید:

۱) $x^2 + y^2 = 3xy + x$

۲) $3x^2+27y^2+7y=18xy+5x$

۳) $xy+y^2=3x+y$ ۴) $3x^2+\sqrt{3}xy=y^2$

۵) $2x^2+7xy+9y^2+20x=86$

٦) $x^2+4y^2=4xy+5x+y$

در هر مورد،یک منحنی درجهٔ دوم به شکل پارامتری داده شده است. ضمن استخراج معادلهٔ آن منحنی، نوع، محورهای تقارن و مرکز تقارن منحنی را مشخص کنید:

۷) $x=2\sin t-1,\ y=4\cos t+2,\ 0\le t<2\pi$

۸) $x=3t,\qquad y=9t^2-t,\qquad -\infty<t<\infty$

۹) $x=t,\qquad y=\sqrt{1-t^2},\qquad -1\le t\le 1$

۱۰) $x=-\cosh t,\quad y=\sinh t,\qquad -\infty<t<\infty$

۱۱) $x=t^2,\qquad y=\sqrt{t^4+1},\qquad 0\le t$

۱۲) $x=2\sinh t+1,\ y=\cosh t+3,\ -\infty<t<\infty$

هر یک از منحنی‌های درجه دوم زیر را پارامتره کنید:

۱۳) $xy=2$ ۱۴) $xy+y^2=3x+y$

۱۵) $\frac{x^2}{4}-(y-1)^2=1$ ۱٦) $x^2+y^2+2xy=x-y$

۱۷) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ۱۸) $3x^2+\sqrt{3}xy=y^2$

۱۹) نشان دهید که منحنی
$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=a$$
یک هذلولی با مجانبهای
$a_1x+b_1y+c_1=0$ و $a_2x+b_2y+c_2=0$
است، مشروط به آنکه $a_1b_2\neq a_2b_1$.

*۲۰) نشان دهید که اگر $a_1b_2\neq a_2b_1$، آنگاه
$$(a_1x+b_1y+c_1)^2=(a_2x+b_2y+c_2)^2+a$$
یک هذلولی است.

۲۲.۸.۲ نرمالسازی منحنی‌های درجهٔ دوم — روش دوم.

هدف از این بخش اثبات این مطلب است که

۲۳.۸.۲ قضیهٔ. هر منحنی درجهٔ دوم یکی از اشکال به شرح زیر است: « دایره، بیضی، هذلولی، سهمی، دو خط متقاطع، یک خط، یک نقطه و یا مجموعه‌ای تهی.»

اثبات: برای اثبات این مطلب، معادلهٔ (۱.۲) را به شکل ماتریسی

$$\begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c\\ c & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}+dx+ey+f=0 \quad (2.2)$$

نوشته و فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix} a & c\\ c & b\end{bmatrix}$، که یک ماتریس متقارن 2×2 می‌باشد. بنابه قضیهٔ ٦.۸.۱ ، اگر α و β مقادیر ویژهٔ A باشند، آنگاه دو حالت ممکن است که رخ دهد:

الف) $\alpha\neq\beta$ که در این صورت بردارهای ویژهٔ نظیر به آنها بر هم عمودند و بنابراین می‌توان دو بردار متعامد یکهٔ $\mathbf{v}_1=[a_{11},a_{21}]^t$ و $\mathbf{v}_2=[a_{12},a_{22}]^t$ به گونه‌ای یافت که $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بترتیب بردار ویژهٔ نظیر به α و β باشند.

ب) $\alpha=\beta$ که در این صورت باز هم می‌توان دو بردار متعامد یکهٔ $\mathbf{v}_1=[a_{11},a_{21}]^t$ و $\mathbf{v}_2=[a_{12},a_{22}]^t$ به گونه‌ای یافت که هر دو پایه‌ای برای بردارهای ویژهٔ نظیر به α تشکیل می‌دهند.

در هر دو حالت، ماتریس متعامد $B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ را می‌توان تهیه نمود. در این صورت $B^{-1}=B^t$ و $B^tAB=\begin{bmatrix} \alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$.
در نتیجه اگر فرض شود $\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}=X\mathbf{v}_1+Y\mathbf{v}_2$، آنگاه

$$ax^2+by^2+2cxy=\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}^t A\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}=\alpha X^2+\beta Y^2$$

بنابراین اگر C را بر حسب X و Y بنویسیم، آنگاه معادلهٔ حاصل نرمال خواهد بود:

$$C\ :\ \alpha X^2+\beta Y^2+\gamma X+\eta Y+\theta=0$$

به این ترتیب، بسته به مقادیر مختلف α، β، γ، η و θ، منحنی C به یکی از موارد زیر است:

۱) اگر α و β مخالف صفر و هم علامت بوده و

$$\phi:=\theta-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\eta^2}{\alpha}\right)$$

صفر باشد، در این صورت با فرض $u=X+\gamma/2\alpha$ و $v=Y+\eta/2\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\alpha u^2+\beta v^2=0$ می‌رسیم که تنها جواب آن یک نقطه است: $u=v=0$. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C یک نقطه است.

۲) اگر α و β مخالف صفر و هم علامت بوده و

$$\phi:=\theta-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\eta^2}{\alpha}\right)$$

نیز با آن دو هم علامت باشد، در این صورت با فرض $u=X+\gamma/2\alpha$ و $v=Y+\eta/2\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\alpha u^2+\beta v^2+\phi$ می‌رسیم که هیچ گونه جوابی ندارد. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C تهی است.

۳) اگر α و β مخالف صفر و هم علامت بوده و

$$\phi:=\theta-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\eta^2}{\alpha}\right)$$

با آنها مختلف العلامه باشد، در این صورت با فرض $u = X+\gamma/۲\alpha$ و $v = Y+\eta/۲\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\frac{\alpha}{\phi}u^۲ + \frac{\beta}{\phi}v^۲ = ۱$ می‌رسیم که یک بیضی در uv-صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C یک بیضی است.

۴) اگر α و β مخالف صفر و مختلف العلامه بوده و

$$\phi := \theta - \frac{۱}{۴}\left(\frac{\gamma^۲}{\beta} + \frac{\eta^۲}{\alpha}\right)$$

صفر باشد، در این صورت با فرض $u = X + \gamma/۲\alpha$ و $v = Y + \eta/۲\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\frac{\alpha}{\phi}u^۲ + \frac{\beta}{\phi}v^۲ = ۰$ می‌رسیم که آن را به شکل $v = \pm\frac{\alpha}{\beta}u$ می‌توان نوشت و عبارت از دو خط متقاطع در uv-صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C اجتماعی از دو خط متقاطع است.

۵) اگر α و β مخالف صفر و مختلف العلامه بوده و

$$\phi := \theta - \frac{۱}{۴}\left(\frac{\gamma^۲}{\beta} + \frac{\eta^۲}{\alpha}\right)$$

مخالف صفر باشد، در این صورت با فرض $u = X + \gamma/۲\alpha$ و $v = Y + \eta/۲\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\frac{\alpha}{\phi}u^۲ + \frac{\beta}{\phi}v^۲ + ۱ = ۰$ می‌رسیم که آن را به شکل $\frac{u^۲}{A^۲} - \frac{v^۲}{B^۲} = \pm ۱$ می‌توان نوشت که یک هذلولی در uv-صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C یک هذلولی است.

٦) اگر $\alpha = ۰$ و β و γ مخالف صفر باشند، در این صورت با فرض $\phi := \theta - \eta^۲/۴\beta$، $u = X$ و $v = Y + \eta/۲\beta$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\gamma u + \beta v^۲ + \phi = ۰$ می‌رسیم که آن را به شکل $u = -\frac{\phi}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}v^۲$ می‌توان نوشت که یک سهمی در uv-صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C یک سهمی است.

۷) اگر $\beta = ۰$ و α و γ مخالف صفر باشند، آنگاه وضعیت کاملاً شبیه به (٦) است.

۸) اگر $\alpha = \gamma = ۰$، $\beta \neq ۰$ و $\phi := \theta - \frac{\eta^۲}{۴\beta}$ هم علامت با β باشد، در این صورت با فرض $u = X$ و $v = Y + \frac{\eta}{۲\beta}$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\beta v^۲ + \phi = ۰$ می‌رسیم که هیچ گونه جوابی ندارد. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C تهی است.

۹) اگر $\beta = \gamma = ۰$ و α مخالف صفر باشد و $\phi := \theta - \frac{\gamma^۲}{۴\alpha}$ هم علامت با α باشد، آنگاه وضعیت کاملاً شبیه به (۸) است.

۱۰) اگر $\alpha = \gamma = ۰$ و β مخالف صفر باشد و $\phi := \theta - \frac{\eta^۲}{۴\beta}$ و β مختلف العلامه باشند، در این صورت با فرض $u = X$ و $v = Y + \frac{\eta}{۲\beta}$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\beta v^۲ + \phi = ۰$ می‌رسیم که دو خط $v = \pm\sqrt{-\frac{\phi}{\beta}}u$ در uv-صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C اجتماعی از دو خط موازی است.

۱۱) اگر $\beta = \gamma = ۰$ و α مخالف صفر باشد و $\phi := \theta - \frac{\gamma^۲}{۴\beta}$ و α مختلف العلامه باشند، آنگاه وضعیت کاملاً شبیه به (۱۰) است.

۱۲) اگر $\alpha = \gamma = ۰$ و β مخالف صفر باشد و $\phi := \theta - \frac{\eta^۲}{۴\beta} = ۰$، در این صورت با فرض $u = X$ و $v = Y + \frac{\eta}{۲\beta}$، و نوشتن معادلهٔ C بر حسب u و v به معادلهٔ به شکل $\beta v^۲ = ۰$ می‌رسیم که یک خط $v = ۰$ در uv-صفحه است. یعنی، در این حالت منحنی درجه دوم C خط راست است.

۱۳) اگر $\beta = \gamma = ۰$ و α مخالف صفر باشد و $\phi := \theta - \frac{\gamma^۲}{۴\alpha} = ۰$، آنگاه وضعیت کاملاً شبیه به (۱۲) است.

۱۴) اگر $\alpha = \beta = \gamma = ۰$ و $\theta \neq ۰$، در این صورت C تهی است. و به این ترتیب برهان تمام است. □

۲۴.۸.۲ مثال. ۱) منحنی $x^۲ + y^۲ = ۴xy + x$ را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - x = ۰$$

در نتیجه $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$. معادلهٔ مشخصهٔ این ماتریس:

$$۰ = |\lambda I_۲ - A| = \begin{vmatrix} \lambda - ۱ & ۲ \\ ۲ & \lambda - ۱ \end{vmatrix} = \lambda^۲ - ۲\lambda - ۳$$

است. پس مقادیر ویژهٔ آن عبارتند از $\alpha = -۱$ و $\beta = ۳$. بردار یکهٔ ویژهٔ نظیر به $\alpha = -۱$ عبارتست از

$$\mathbf{v}_۱ = \left[\sqrt{۲}/۲, \sqrt{۲}/۲\right]^t$$

و بردار یکهٔ ویژهٔ نظیر به $\beta = ۳$ نیز عبارتست از

$$\mathbf{v}_۲ = \left[\sqrt{۲}/۲, -\sqrt{۲}/۲\right]^t$$

بنابراین فرض می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X\mathbf{v}_۱ + Y\mathbf{v}_۲ = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲}X + \frac{\sqrt{۲}}{۲}Y \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}X - \frac{\sqrt{۲}}{۲}Y \end{bmatrix}$$

بنابراین $x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(X+Y)$ و $y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(X-Y)$ که پس از قرار دادن در معادلهٔ داده شده، داریم

$$X^۲ - ۳Y^۲ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}X - \frac{\sqrt{۲}}{۲}Y = ۰$$

اکنون فرض می‌کنیم $u = X - \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $v = Y + \frac{\sqrt{2}}{12}$. در نتیجه خواهیم داشت: $u^2 - 3v^2 = \frac{1}{12}$ یا $\frac{u^2}{1/12} - \frac{v^2}{1/4} = 1$ که معادلهٔ یک هذلولی در uv−صفحه است.

مثال ۲) منحنی $3x^2 = 3y^2 + 8xy + 10y + 3$ را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 10y - 3 = 0$$

در نتیجه $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$. معادلهٔ مشخصهٔ این ماتریس:

$$0 = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 4 \\ 4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25$$

است. پس مقادیر ویژهٔ آن عبارتند از $\alpha = 5$ و $\beta = -5$. بردار یکهٔ ویژهٔ نظیر به $\alpha = 5$ عبارتست از

$$\mathbf{v}_1 = \left[-2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5\right]^t$$

و بردار یکهٔ ویژهٔ نظیر به $\beta = -5$ نیز عبارتست از

$$\mathbf{v}_2 = \left[\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5\right]^t$$

بنابراین فرض می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X\mathbf{v}_1 + Y\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5}X + \frac{\sqrt{5}}{5}Y \\ \frac{\sqrt{5}}{5}X + \frac{2\sqrt{5}}{5}Y \end{bmatrix}$$

بنابراین $x = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2X + Y)$ و $y = \frac{\sqrt{5}}{5}(X + 2Y)$ که پس از قرار دادن در معادلهٔ داده شده، داریم

$$5X^2 = 5y^2 + 2\sqrt{5}X + 4\sqrt{5}Y + 3$$

اکنون فرض می‌کنیم $u = X - \sqrt{5}/5$ و $v = Y - 2\sqrt{5}/5$. در نتیجه خواهیم داشت: $u^2 = v^2$ یا $v = \pm u$ که معادلهٔ دو خط متقاطع در uv−صفحه است.

۲۵.۸.۲ تمرین. روند بالا را در مورد هر یک از منحنیهای درجه دوم زیر اجرا کنید:

۱) $xy = 2$

۲) $3x^2 + \sqrt{3}xy = y^2$

۳) $x^2 - y^2 + xy = 1$

۴) $xy + y^2 = 3x + y$

۹.۲ پارامتره نمودن منحنیهای درجه دوم

هدف از این بخش ایجاد زمینهٔ لازم برای مطالعهٔ فصل هشت و نیز فصل نه است. مطالعهٔ این بخش را تا آن هنگام می‌توانید متوقف کنید.

۱.۹.۲ تعریف. منظور از پارامتره نمودن یک مجموعه، بیان آن مجموعه به صورت برد یک یا چند تابع است.

۲.۹.۲ دایره. با توجه به شکل کلی دایره

$$C\ :\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

می‌توان فرض نمود $x - x_0 = R\cos t$ و $y - y_0 = R\sin t$. در نتیجه، C را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t)}\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

۳.۹.۲ بیضی. با توجه به شکل کلی بیضی

$$C\ :\ \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

می‌توان فرض نمود $x - x_0 = a\cos t$ و $y - y_0 = b\sin t$. در نتیجه، C را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)}\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

۴.۹.۲ سهمی. با توجه به شکل کلی سهمی قائم

$$C\ :\ y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

می‌توان فرض نمود $x - x_0 = t$ و در نتیجه، C را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t, y_0 + at^2)}\ ;\ -\infty < t < \infty$$

به صورت مشابه، برای سهمی افقی

$$C\ :\ x - x_0 = b(y - y_0)^2$$

می‌توان فرض نمود $y - y_0 = t$ و در نتیجه، C را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x_0 + bt^2, t)}\ ;\ -\infty < t < \infty$$

۵.۹.۲ هذلولی. با توجه به شکل کلی هذلولی افقی

$$C\ :\ \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

می‌توان فرض نمود $x-x_0=a\cosh t$ و $y-y_0=b\sinh t$. در نتیجه، C را به صورت اجتماع برد دو تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \overrightarrow{(x_0+a\cosh t, y_0+b\sinh t)}\ ;\ 0\le t\le 2\pi\\ \mathbf{h}(t) &= \overrightarrow{(x_0-a\cosh t, y_0+b\sinh t)}\ ;\ 0\le t\le 2\pi\end{aligned}$$

به صورت مشابه، هذلولی قائم

$$C\ :\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

را به شکل اجتماع برد دو تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \overrightarrow{(x_0+a\sinh t, y_0+b\cosh t)}\ ;\ 0\le t\le 2\pi\\ \mathbf{h}(t) &= \overrightarrow{(x_0+a\sinh t, y_0-b\cosh t)}\ ;\ 0\le t\le 2\pi\end{aligned}$$

۱۰.۲ رویه‌های درجهٔ دوم

تعمیم منحنیهای درجه دوم به حالت سه بعدی را رویه‌ی درجهٔ دوم می‌نامند. هدف از این بخش دسته بندی این اشیاء است. از این رویه‌ها در ادامه بسیار استفاده می‌شود.

۱.۱۰.۲ تعریف. مجموعهٔ جوابهای یک معادلهٔ چند جمله‌ای درجه دوم بر حسب x، y و z در فضا

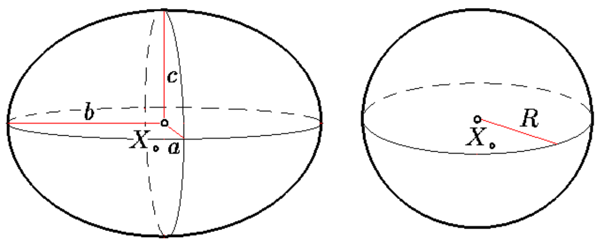
$$\begin{aligned}S\ :\ & a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy\\ & +2a_{13}xz+2a_{23}yz\\ & +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0\end{aligned}\qquad (۳.۲)$$

را رویه درجه دوم می‌نامند. رویه را در صورتی نرمال گوئیم که ضرایب جملات xy،xz و yz در آن صفر باشند. در قسمت ۱۳.۱۰.۲ روش نرمال سازی رویهٔ مفروض (۳.۲) نشان داده خواهد شد. فعلاً، برای ایجاد سهولت در بحث فرض می‌کنیم رویهٔ S نرمال باشد: $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$. در ادامه به دسته بندی رویه‌های درجهٔ دوم می‌پردازیم.

۲.۱۰.۲ کره. کرهٔ به مرکز در X_0 و شعاع R، مجموعهٔ همهٔ نقاطی از فضا است که از نقطهٔ X_0 به فاصلهٔ R هستند. معادلهٔ چنین رویهٔ درجه دومی به شکل

$$S\ :\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

است. مرکز کره $X_0=(x_0,y_0,z_0)$، نقطه تقارن آن می‌باشد (به شکل ۱۹.۲—الف توجه شود).



(ب) (الف)

شکل ۱۹.۲: کره و بیضی‌گون

۳.۱۰.۲ بیضی‌گون. شکل فضایی که برخوردش با هر صفحهٔ دلخواهی تهی، یک نقطه و یا یک بیضی باشد را بیضی‌گون می‌نامند. معادلهٔ کلی این رویهٔ درجه دوم

$$S\ :\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

است. $X_0=(x_0,y_0,z_0)$ را مرکز و اعداد a، b و c را بترتیب نیم قطرهای بیضی‌گون S می‌نامند (به شکل ۱۹.۲—ب توجه شود). شش نقطهٔ $(x_0\pm a,y_0,z_0)$، $(x_0,y_0\pm b,z_0)$ و $(x_0,y_0,z_0\pm c)$ بر سطح بیضی‌گون واقعند.

۴.۱۰.۲ مخروط. فرض کنید یک بیضی در صفحه‌ای موازی با xy—صفحه، و نقطه‌ای X_0 غیر واقع بر آن صفحه در اختیار داریم. مکان هندسی نقاط واقع بر خطوط گذرنده از نقاط آن بیضی و نیز نقطهٔ X_0، مخروطی است با رأس در X_0 معادلهٔ چنین رویهٔ درجهٔ دومی به شکل

$$S\ :\ \frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

است (به شکل ۲۰.۲—الف توجه شود). محور تقارن مخروط موازی z—محور است. روشن است که اگر طرف اول تساوی بر حسب y باشد، محور تقارن به موازات y—محور است و اگر بر حسب x باشد، محور تقارن آن موازی x—محور است. بنابراین جمعاً سه نوع مخروط نرمال وجود دارد.

همانطوری که قبلاً گفته شد، اگر صفحه‌ای را با مخروط قطع دهیم (مثلاً صفحهٔ $z=ax+b$ را با مخروط $z^2=x^2+y^2$)، منحنی بدست آمده یک منحنی درجه دوم است. به همین دلیل منحنیهای درجهٔ دوم را مقاطع مخروطی می‌نامند.

۵.۱۰.۲ هذلولی‌گون یکپارچه. رویهٔ درجه دوم

$$S\ :\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

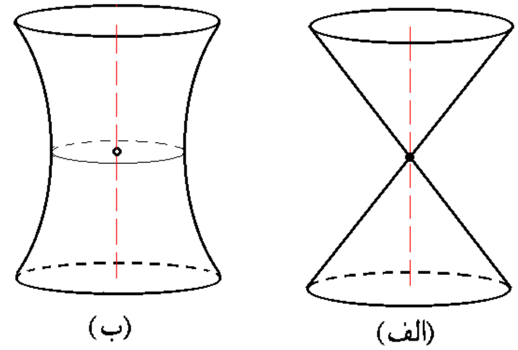
را هذلولی‌گون یکپارچه با مرکز $X_0=(x_0,y_0,z_0)$ و محور تقارن موازی z—محور می‌نامند (به شکل ۲—۲۰.ب توجه شود).

موازی y—محور و x—محور نیز می‌توان هذلولی یکپارچه تعریف نمود. برای این منظور کافی است منفی را قبل از عبارت y و یا x ببریم.

۶.۱۰.۲ هذلولی‌گون دو پارچه. رویهٔ درجه دوم

$$S\,:\,-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

را هذلولی‌گون دو پارچهٔ با مرکز $X_0=(x_0,y_0,z_0)$ و محور تقارن موازی z−محور می‌نامند (به شکل ۲۱.۲−الف توجه شود). با عوض کردن مکان علامت + می‌توان هذلولی گونهای دوپارچهٔ با محور موازی x−محور و یا y−محور را تعریف نمود.



شکل ۲۰.۲: الف) مخروط
ب) هذلولی‌گون یکپارچه

۷.۱۰.۲ سهمی‌گون بیضوی. رویه درجه دومی است

که مقاطع آن با صفحات عمود بر محورش تهی، تک نقطه و یا بیضی است و مقاطع آن با صفحات موازی محورش همگی سهمی‌اند. سهمی‌گون بیضوی نرمال با رأس در نقطه‌ی $X_0=(x_0,y_0,z_0)$ و محور تقارن موازی z−محور و رو به جهت مثبت z−محور به معادلهٔ:

$$S\,:\,z-z_0=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

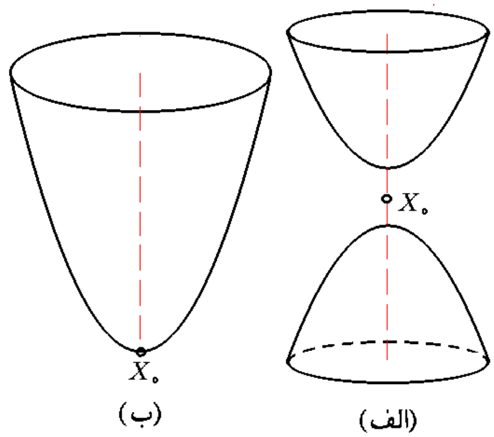
است. با تعویض علامت سمت راست، سهمی‌گون رو به جهت منفی z−محور خواهد چرخید. اگر بجای اینکه عبارت درجه اول بر حسب z داشته باشیم، عبارتی درجه یک بر حسب y در اختیار باشد، S سهمی‌گون به موازات y−محور خواهد بود. همین مطلب برای x−محور درست است. در نتیجه جمعاً شش نوع سهمی‌گون بیضوی نرمال وجود دارد (به شکل ۲۱.۲−ب توجه شود).

۸.۱۰.۲ سهمی‌گون هذلولوی. رویه درجه دومی است

که مقاطع آن با صفحات عمود بر محورش هذلولی می‌باشد و مقاطع آن با صفحات موازی با محورش همگی سهمی‌اند. سهمی‌گون بیضوی نرمال با رأس در نقطهٔ $X_0=(x_0,y_0,z_0)$ و با محور تقارن موازی z−محور و دهنهٔ به موازات y−محور، به معادلهٔ:

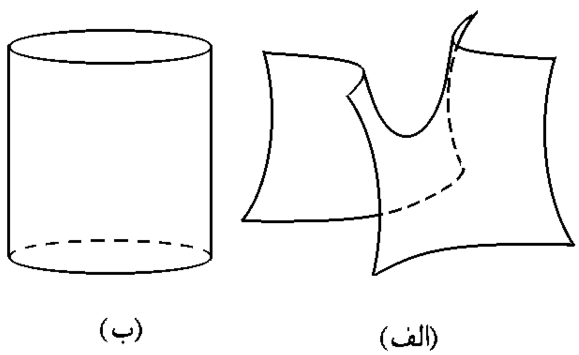
$$S\,:\,z-z_0=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

است. اگر جای − در سمت راست را عوض کنیم، دهنهٔ S رو به x−محور خواهد شد.



شکل ۲۱.۲: الف) هذلولی‌گون دو پارچه
ب) سهمی‌گون بیضوی

اگر نقش z و x را عوض کنیم، محور تقارن S، x−محور خواهد شد. همین مطلب برای y−محور درست است. بنابراین شش نوع سهمی گون هذلولوی نرمال وجود دارد (به شکل ۲۲.۲−الف توجه شود).



شکل ۲۲.۲: الف) سهمی‌گون هذلولوی
ب) استوانهٔ بیضوی

۹.۱۰.۲ استوانهٔ بیضوی. اگر معادلهٔ

$$S\,:\,\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

را در صفحه حل کنیم، پاسخ یک بیضی با مرکز در (x_0,y_0) و نیم قطرهای a و b خواهد بود. اما اگر نقطهٔ $(x,y,0)$ بر این بیضی واقع باشد، آنگاه همهٔ نقاط (y,x,z) که z دلخواه است، بر S قرار دارند. به این ترتیب S یک استوانهٔ با قائدهٔ بیضی و به موازات z−محور است (به شکل ۲۲.۲−ب توجه شود). اگر چنانچه در معادله y نباشد، یعنی جای y را با z عوض کنیم، استوانهٔ موازی با y−محور بدست خواهد آمد. یعنی سه نوع استوانهٔ بیضوی داریم.

۱۰.۱۰.۲ استوانه هذلولوی. رویه درجه دوم

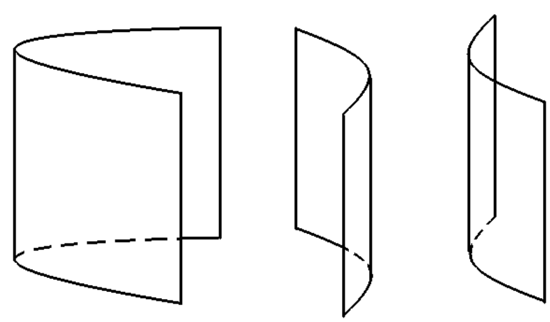
$$S : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

را استوانهٔ هذلولوی می‌نامند. اگر این معادله را در صفحه رسم کنیم، هذلولوی خواهد بود، برای ترسیم S کافی است این هذلولوی را در امتداد محور z ها حرکت دهیم. اگر جای منفی را در معادلهٔ S عوض کنیم، دهنهٔ شکل بجای در امتداد y–محور، x–محور خواهد بود. یعنی S استوانهٔ هذلولوی در امتداد z–محور و با دهنهٔ در امتداد y–محور است (به شکل ۲۳.۲–الف توجه شود). بنابراین جمعاً شش نوع استوانهٔ هذلولوی نرمال وجود دارد.

۱۱.۱۰.۲ استوانهٔ سهموی. رویه درجه دوم به معادلهٔ

$$S : y - y_0 = a(x-x_0)^2$$

که $a > 0$ را استوانهٔ سهموی به موازات z–محور و جهت مثبت x–محور می‌نامیم (به شکل ۲۳.۲–ب توجه شود). اگر $a < 0$، آنگاه استوانهٔ سهموی رو به جهت منفی x–محور خواهد داشت. اگر نقش y را با z عوض کنیم، استوانهٔ سهموی به موازات y–محور بدست خواهد آمد. بنابراین، جمعاً شش نوع استوانهٔ سهموی نرمال وجود دارد.



(ب) (الف)

شکل ۲۳.۲: الف) استوانهٔ هذلولوی
ب) استوانهٔ سهموی

۱۲.۱۰.۲ تمرین. نوع هر یک از رویه‌های درجه دوم زیر را مشخص نموده، آنها را رسم کنید:

۱) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 9$ ۲) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

۳) $x = z^2 - y^2$ ۴) $x = y^2 + 4z^2$

۵) $y = z^2$ ۶) $z = y^2 - 1$

۷) $x^2 + y^2 = 4z^2$ ۸) $x^2 + z^2 = y^2 + 2y + 1$

۹) $z = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ ۱۰) $16x^2 + 9y^2 = 25$

۱۳.۱۰.۲ نرمال سازی رویه‌های درجهٔ دوم. هدف از این بخش نرمال سازی معادلهٔ یک رویهٔ درجهٔ دوم دلخواه است، یعنی انتخاب یک تغییر مختصات مناسب به شکل

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}w + \alpha_{14} \\ y = \alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}w + \alpha_{24} \\ z = \alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}w + \alpha_{34} \end{cases}$$

به نحوی که بتواند معادلهٔ (۳.۲) را به یک معادلهٔ استاندارد (یعنی، معادله‌ای که در آن ضریب جملات uv، uw و vw صفرند) تبدیل کند. این نوع تغییر مختصات (که تغییر مختصات خطی نامیده می‌شوند) شکل کلی رویه را تغییر نمی‌دهند، بلکه باعث انتقال، دوران، انعکاس و یا تجانس یافتن شکل می‌گردد.

به معادلهٔ (۳.۲) ماتریس 3×3 متقارن $A = [a_{ij}]$ را نسبت می‌دهیم (توجه شود که در این ماتریس $a_{ij} = a_{ji}$؛ مثلاً، ضریب جملهٔ xy برابر $2a_{12}xy$ است که بجای آن می‌نویسیم $a_{12}xy + a_{21}yx$). بنابه قضیهٔ ۶.۸.۱ ، ماتریس A دارای ۳ مقدار ویژهٔ حقیقی (احتمالاً، با تکرار) است. می‌دانیم که بردارهای ویژهٔ نظیر به مقادیر ویژهٔ متفاوت بر هم عمودند و بعلاوه اگر مقدار ویژهٔ بخصوصی بیش از یک بار تکرار شود، همواره می‌توان پایه‌ای برای فضای بردارهای ویژهٔ نظیر به آن انتخاب نمود. درنتیجه، حکم زیر را داریم:

۱۴.۱۰.۲ قضیه. فرض کنیم A ماتریس نظیر به معادلهٔ درجهٔ دوم (۳.۲) باشد و $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ مقادیر ویژهٔ نظیر به A باشند. در این صورت بردارهای مت‌عامد $\left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\right\}$ طوری وجود دارند که $\mathbf{v}_i$ بردار ویژهٔ نظیر به λ_i است.

۱۵.۱۰.۲ قضیه. فرض کنیم λ_i ها و $\mathbf{v}_i$ ها همانند قضیهٔ ۱۴.۱۰.۲ باشند و

$$[x\ y\ z]^t = X\mathbf{v}_1 + Y\mathbf{v}_2 + Z\mathbf{v}_3$$

در این صورت، اگر در (۳.۲) بجای x، y و z مقادیر بر حسب X، Y و Z را قرار دهیم، معادلهٔ حاصل نرمال خواهد بود. یعنی، به شکل

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \eta = 0$$

۱۶.۱۰.۲ قضیه. هر رویهٔ درجه دوم به کمک یک تغییر مختصات خطی قابل تبدیل به یکی از رویه‌های زیر است:

«کره، بیضی، هذلولی‌گون یکپارچه، هذلولی‌گون دوپارچه، مخروط، سهمی‌گون بیضوی، سهمی‌گون هذلولوی، استوانهٔ بیضوی، استوانهٔ سهموی، استوانهٔ هذلولوی، دو صفحهٔ متقاطع، یک صفحه، دو صفحهٔ موازی، دو خط متقاطع، دو خط موازی، یک خط، دو نقطه و یا یک نقطه».

۱۷.۱۰.۲ مثال. ۱) رویه درجه دوم

$$S:\ 2x^2+2y^2+2z^2+2yz=2xz+2xy+1$$

را در نظر بگیرید. ماتریس A نظیر به S عبارتست از:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

معادلهٔ مفسر این ماتریس متقارن برابر $\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4=0$ است. بنابراین، مقادیر ویژهٔ A عبارتند از $\lambda_1=\lambda_2=1$ و $\lambda_3=4$. بردارهای ویژهٔ نظیر به ۱ عبارتند از $\mathbf{v}_1=[0,1,-1]^t$ و $\mathbf{v}_2=[2,1,1]^t$ که بر هم عمودند و بردار ویژهٔ نظیر به ۴ نیز عبارت است از $\mathbf{v}_3=[-1,1,1]^t$. اکنون، فرض می‌کنیم $[x,y,z]^t=X\mathbf{v}_i+Y\mathbf{v}_j+Z\mathbf{v}_3$، در این صورت $x=2Y-Z$، $y=X+Y+Z$ و $z=-X+Y+Z$. پس از جایگزاری این مقادیر در معادلهٔ S، به $6X^2+12Y^2+2Z^2=1$ می‌رسیم. که یک بیضی‌گون در XYZ−فضا است.

مثال ۲) رویه درجه دوم

$$S:\ y^2+2xy-4xz-2yz-3x+y-3z-5=0$$

را در نظر بگیرید. ماتریس A نظیر به S عبارتست از:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

معادلهٔ مفسر این ماتریس متقارن برابر $\lambda^3-\lambda^2-6\lambda=0$ است. بنابراین، مقادیر ویژهٔ A عبارتند از $\lambda_1=-2$، $\lambda_2=0$ و $\lambda_3=3$. بردارهای ویژهٔ نظیر به این سه به ترتیب برابرند با: $\mathbf{v}_1=[1,0,1]^t$، $\mathbf{v}_2=[-1,2,1]^t$ و $\mathbf{v}_3=[-1,-1,1]^t$. اکنون، فرض می‌کنیم $[x,y,z]^t=X\mathbf{v}_1+Y\mathbf{v}_2+Z\mathbf{v}_3$، در این صورت $x=X-Y-Z$، $y=2Y-Z$ و $z=X+Y+Z$. پس از جایگزاری این مقادیر در معادلهٔ S، به

$$9Z^2-4X^2-6X+2Y-Z-5=0$$

می‌رسیم. این معادله را به صورت

$$Y-\frac{25}{18}=\frac{(X+3/2)^2}{2(5/6)^2}-\frac{(Z-1/18)^2}{2(5/9)^2}$$

می‌توان نوشت که یک سهمی‌گون هذلولوی در راستای Y−محور است.

مثال ۳) رویه درجه دوم $S:\ x^2+z^2+2xz=1$ را در نظر بگیرید. ماتریس A نظیر به S عبارتست از:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

معادلهٔ مفسر این ماتریس برابر $2\lambda^2-\lambda^3=0$ است. بنابراین، مقادیر ویژهٔ A عبارتند از $\lambda_1=\lambda_2=0$ و $\lambda_3=2$. بردارهای ویژهٔ نظیر به ۰ عبارتند از $\mathbf{v}_1=[1,0,1]^t$ و $\mathbf{v}_2=[0,1,0]^t$ که بر هم عمودند و بردار ویژهٔ نظیر به ۲ نیز عبارت است از $\mathbf{v}_3=[-1,0,1]^t$. اکنون، فرض می‌کنیم

$$[x,y,z]^t=X\mathbf{v}_1+Y\mathbf{v}_2+Z\mathbf{v}_3$$

در این صورت $x=X-Z$، $y=Y$ و $z=X+Z$. پس از جایگزاری این مقادیر در معادلهٔ S، به $4Z^2=1$ می‌رسیم. این معادله را به صورت $Z=\pm 1/2$ می‌توان نوشت که اجتماعی از دو صفحهٔ موازی XY−صفحه است.

۱۸.۱۰.۲ تمرین. هر یک از رویه‌های درجه دوم زیر را به شکل نرمال درآورده، نوع آنرا مشخص کنید:

۱) $3x^2+3y^2-2xy+4xz+4yz=0$

۲) $x^2-y^2+2z^2+2x+4y-8z=0$

۳) $(x+y)^2+2y+2z=0$

۴) $x^2-4y^2+xz+2x-6z+5=0$

۵) $xy+xz+yz=3$ ۶) $xy-yz=x$

۷) $6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$

۸) $4x^2+16y^2+25z^2+4xy+6xz$
$-10yz+2x=4z=0$

۱۱.۲ پارامتره نمودن رویه‌های درجه دوم

هدف از این بخش ایجاد زمینهٔ لازم برای مطالعهٔ فصل هشت و نیز فصل نه است. مطالعهٔ این بخش را تا آن هنگام می‌توانید متوقف کنید.

۱.۱۱.۲ تعریف. منظور از پارامتره نمودن یک مجموعه، بیان آن مجموعه به صورت برد یک یا چند تابع است.

۲.۱۱.۲ کره. با توجه به شکل کلی کره

$$S:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

می‌توان فرض نمود $x-x_0=R\sin t\cos s$، $y-y_0=R\sin t\sin s$ و $z-z_0=R\cos t$. در نتیجه، S را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(s,t)=\overrightarrow{(x_0+R\sin t\cos s,y_0+R\sin t\sin s,z_0+R\cos t)}$$
$$0\le t\le\pi,\ 0\le s\le 2\pi$$

۳.۱۱.۲ بیضی‌گون.

با توجه به شکل کلی بیضی‌گون

$$S\ :\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

می‌توان فرض نمود

$$\begin{aligned} x-x_0 &= a\sin t\cos s,\\ y-y_0 &= b\sin t\sin s,\\ z-z_0 &= c\cos t. \end{aligned}$$

در نتیجه، S را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(s,t)=\overrightarrow{(x_0+a\sin t\cos s, y_0+b\sin t\sin s, z_0+c\cos t)}$$
$$0\le t\le\pi,\ 0\le s\le 2\pi$$

۴.۱۱.۲ هذلولی‌گون یکپارچه.

با توجه به شکل کلی هذلولی‌گون یکپارچه

$$S\ :\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

می‌توان فرض نمود

$$\begin{aligned} x-x_0 &= a\cosh t\cos s,\\ y-y_0 &= b\cosh t\sin s,\\ z-z_0 &= c\sinh t. \end{aligned}$$

در نتیجه، S را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(s,t)=\overrightarrow{(x_0+a\cosh t\cos s, y_0+b\cosh t\sin s, z_0+c\sinh t)}$$
$$-\infty\le t\le\infty,\ 0\le s\le 2\pi$$

۵.۱۱.۲ هذلولی‌گون دو پارچه.

با توجه به شکل کلی هذلولی‌گون دو پارچه

$$S\ :\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

می‌توان فرض نمود

$$\begin{aligned} x-x_0 &= a\sinh t\cos s,\\ y-y_0 &= b\sinh t\sin s,\\ z-z_0 &= c\cos t. \end{aligned}$$

در نتیجه، S را به صورت اجتماع برد دو تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(s,t)=\overrightarrow{(x_0+a\sinh t\cos s, y_0+b\sinh t\sin s, z_0+c\cosh t)}$$
$$\mathbf{h}(s,t)=\overrightarrow{(x_0+a\sinh t\cos s, y_0-b\sinh t\sin s, z_0-c\cosh t)}$$
$$-\infty\le t\le\infty,\ 0\le s\le 2\pi$$

۶.۱۱.۲ مخروط.

با توجه به شکل کلی مخروط

$$S\ :\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$

چنانچه فرض کنیم $z-z_0=cs$، آنگاه

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=s^2$$

بنابراین، فرض می‌کنیم $x-x_0=as\cos t$ و $y-y_0=bs\sin t$.
در نتیجه، S را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(s,t)\ =\ \overrightarrow{(x_0+as\cos t, y_0+bs\sin t, z_0+cs)}$$
$$0\le t\le 2\pi,\ 0\le s\le\infty$$

۷.۱۱.۲ سهمی‌گون بیضوی.

با توجه به شکل کلی سهمی‌گون بیضوی

$$S\ :\ \frac{z-z_0}{c}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

چنانچه فرض کنیم $z-z_0=cs^2$، آنگاه

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=s^2$$

بنابراین، فرض می‌کنیم $x-x_0=as\cos t$ و $y-y_0=bs\sin t$.
در نتیجه، S را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(s,t)\ =\ \overrightarrow{(x_0+as\cos t, y_0+bs\sin t, z_0+cs^2)}$$
$$0\le t\le 2\pi,\ 0\le s\le\infty$$

۸.۱۱.۲ سهمی‌گون هذلولوی.

با توجه به شکل کلی سهمی‌گون هذلولوی

$$S\ :\ \frac{z-z_0}{c}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

چنانچه فرض کنیم $x-x_0=a(s+t)$ و $y-y_0=b(s-t)$، آنگاه $z-z_0=4cst$. در نتیجه، S را به صورت اجتماع برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(s,t)\ =\ \overrightarrow{(x_0+a(s+t), y_0+b(s-t), z_0+4cst)}$$
$$-\infty\le t\le\infty,\ -\infty\le s\le\infty$$

۹.۱۱.۲ استوانه بیضوی.

با توجه به شکل کلی استوانه بیضوی

$$S\ :\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

می‌توان فرض نمود $x-x_0=a\cos t$، $y-y_0=b\sin t$ و $z=s$.
در نتیجه، S را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(s,t)\ =\ \overrightarrow{(x_0+a\cos t, y_0+b\sin t, s)}$$
$$0\le t\le 2\pi,\ -\infty<s<\infty$$

۱۰.۱۱.۲ استوانه هذلولوی. با توجه به شکل کلی استوانه هذلولوی

$$S : \frac{(x-x_\circ)^2}{a^2} - \frac{(y-y_\circ)^2}{b^2} = 1$$

می‌توان فرض نمود $x-x_\circ = \pm a\cosh t$، $y-y_\circ = b\sinh t$ و $z=s$. درنتیجه، S را به صورت اجتماع برد دو تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(s,t) &= \overrightarrow{(x_\circ + a\cosh t, y_\circ + b\sinh t, s)} \\
\mathbf{h}(s,t) &= \overrightarrow{(x_\circ - a\cosh t, y_\circ + b\sinh t, s)} \\
& -\infty \le t \le \infty,\ -\infty < s < \infty
\end{aligned}$$

۱۱.۱۱.۲ استوانه سهموی. با توجه به شکل کلی استوانه سهموی

$$S : y - y_\circ = a(x-x_\circ)^2$$

می‌توان فرض نمود $x-x_\circ = t$، $y-y_\circ = at^2$ و $z=s$. در نتیجه، S را به صورت برد تابع زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(s,t) &= \overrightarrow{(x_\circ + t, y_\circ + at^2, s)} \\
& -\infty \le t \le \infty,\ -\infty < s < \infty
\end{aligned}$$

۱۲.۲ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل doc.pdf مراجعه شود.

۱.۱۲.۲ بردار و اعمال بر آن. مانند در ۲.۱۰.۱ به صورت

$$\text{بردار}\ \overrightarrow{(a,b,c)} \quad \text{vector([a, b, c])} \xmapsto{\text{میپل}}$$

می‌توان بردار را در محیط میپل تعریف نمود. دستورات نرم، مجموع، ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها در بستهٔ نرم افزاری `linalg` قرار دارد که با دستور `with(linalg)` می‌توان آن را در حافظه آماده نمود. اعمال بر بردارها را به شکل زیر می‌توان انجام داد: فرض کنید `u` و `v` بردارند و `a` عدد باشد، در این صورت

تفاضل v از u .... $\text{evalm}(u-v) \xmapsto{\text{میپل}}$

مجموع u و v .... $\text{evalm}(u+v) \xmapsto{\text{میپل}}$

طول u .... $\text{norm}(u) \xmapsto{\text{میپل}}$

حاصلضرب a در u .... `evalm(a*u)` $\xmapsto{\text{میپل}}$

حاصلضرب داخلی u در v .... `dotprod(u,v)` $\xmapsto{\text{میپل}}$

حاصلضرب خارجی u در v ..... `crossprod(u,v)` $\xmapsto{\text{میپل}}$

۲.۱۲.۲ تصویر بردار بر بردار دیگر. از برنامهٔ زیر برای محاسبهٔ تصویر بردار `u` بر بردار `v` می‌توان استفاده نمود:

```
proj := proc(u, v) dotprod(u, v), dotprod(v, v) * v end;
```

اکنون برای محاسبهٔ تصویر بردار `u` بر `v` کافی است از دستور `proj(u,v)` استفاده شود.

۳.۱۲.۲ زاویهٔ بین دو بردار. برای محاسبهٔ زاویهٔ بین بردارهای `u` و `v` از دستور `angle(u,v)` استفاده می‌شود.

۴.۱۲.۲ بردار واصل بین دو نقطه. قرارداد می‌کنیم که نقطهٔ `P` به مختصات `(a,b,c)` را به صورت `P:=[a,b,c]` در محیط میپل وارد کنیم. بردار $\overrightarrow{PQ}$ واصل بین دو نقطهٔ `P` و `Q` را با دستور `evalm(vector(P)-vector(Q))` می‌توان بدست آورد.

۵.۱۲.۲ روش گرام اشمیت. برای اعمال روش گرام اشمیت بر مجموعهٔ بردارهای مفروض `v_1`، `v_2`، ... و `v_n` از دستور `GramSchmidt([v_1,v_2,...,v_n])` استفاده می‌کنیم.

از این به بعد تا پایان بخش حاضر، از بستهٔ نرم افزاری `Geom3d` استفاده می‌کنیم. برای در دسترس بودن آن کافی است دستور `with(geom3d)` را در محیط میپل اجرا کنیم.

۶.۱۲.۲ نقطه. برای وارد نمودن نقطهٔ `P` به مختصات `(a,b,c)` در محیط میپل، از دستور `point(P,[a,b,c])` استفاده می‌کنیم. بعلاوه

مختصات نقطهٔ P .... `coordinates(P)` $\xmapsto{\text{میپل}}$

مختص x نقطهٔ P .... `xcoord(P)` $\xmapsto{\text{میپل}}$

مختص y نقطهٔ P .... `ycoord(P)` $\xmapsto{\text{میپل}}$

مختص z نقطهٔ P .... `zcoord(P)` $\xmapsto{\text{میپل}}$

۷.۱۲.۲ خط. برای وارد نمودن خط `l` در محیط میپل از یکی از دستورات زیر می‌توان استفاده نمود:

خط گذرنده از نقاط `P1` و `P2` .... `line(l,[P1,P2])`

خط با بردار هادی `v` و تکیه گاه `P` .... `line(l,[P,v])`

خط محل تلاقی دو صفحهٔ `p1` و `p2` ..... `line(l,[p1,p2])`

line(l,[a*t+x0,b*t+y0,c*t+z0],t) ....
خط با معادلات پارامتری x0+at، y0+bt و z0+ct ....

چنانچه خط l را به یکی از روشهای به غیر از پارامتری بیان نموده باشید، با دستور Equation(l) می‌توانید شکل پارامتری آن را بیابید. دستورات ParallelVector(l) و FixedVector(L) بترتیب یک بردار هادی و یک تکیه گاه برای l را اعلام می‌دارند.

۸.۱۲.۲ صفحه. برای وارد نمودن صفحهٔ P در محیط میپل از یکی از دستورات زیر می‌توان استفاده نمود:

صفحهٔ گذرنده از نقاط X، Y و Z .... plane(P,[X,Y,Z])
صفحهٔ با بردار نرمال v و تکیه گاه X ...... plane(P,[X,v])
صفحهٔ گذرنده از دو خط l1 و l2 ...... plane(P,[l1,l2])
صفحهٔ به معادلهٔ eq .... plane(P,eq)

چنانچه صفحهٔ P را به یکی از روشهای غیر استاندارد بیان نموده باشید، با دستور Equation(P) می‌توانید شکل استاندارد آن را بیابید. دستور NormalVector(P) بردار نرمال صفحهٔ P را اعلام می‌دارد.

۹.۱۲.۲ برخورد دو شیء. فرض کنید A و B نقطه، خط و یا صفحه باشند، دراین صورت محل برخورد C این دو شیء را با دستور intersection(C,A,B) می‌توان بدست آورد.

۱۰.۱۲.۲ فاصلهٔ دو شیء از هم. فرض کنید A و B نقطه، خط و یا صفحه باشند، در این صورت فاصلهٔ این دو شیء از هم را با دستور distance(A,B) می‌توان بدست آورد.

۱۱.۱۲.۲ زاویهٔ بین دو شیء. فرض کنید A و B خط یا صفحه باشند، در این صورت زاویهٔ بین این دو شیء را با دستور FindAngle(A,B) می‌توان بدست آورد.

۱۲.۱۲.۲ تصویر یک شیء بر شیء دیگر. فرض کنید A و B نقطه، خط یا صفحه باشند، در این صورت تصویر C شئ A بر شیء B را با دستور projection(C,A,B) می‌توان بدست آورد.

۱۳.۱۲.۲ انتقال یک شیء باندازهٔ یک بردار. فرض کنید A یک نقطه، خط و صفحه باشد و v یک بردار باشد، در این صورت انتقال یافتهٔ C شیء A باندازهٔ بردار v را با دستور translation(C,A,v) می‌توان بدست آورد.

۱۴.۱۲.۲ یادداشت. در آدرس اینترنتی
http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm
مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.

فصل ۳

توابع برداری

هدف از این فصل آشنایی با توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^۳$ است. ضمن بیان آنالیز این گونه توابع (یعنی، حد، مشتق و انتگرال نامعین و انتگرال معین)، کاربرد این تابع در هندسه، آنالیز و فیزیک را مطرح خواهیم نمود.

۱.۳ آنالیز توابع برداری

موضوع این بخش عبارت است از حد، مشتق، انتگرال نامعین و انتگرال معین توابع برداری، نشان خواهیم داد که هر مسألهٔ در مورد یک تابع برداری از چند مسألهٔ ساده‌تر تشکیل می‌گردد، که هر یک از آنها در خصوص توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ (توابع مورد بحث در ریاضی عمومی یک) می‌باشد.

۱.۱.۳ تعریف. **تابع برداری $\mathbf{r}$ در $\mathbb{R}^۳$** تابعی است به شکل $\mathbf{r}\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^۳$. اگر دامنهٔ $\mathbf{r}$ را $D_{\mathbf{r}}$ بنامیم، آنگاه به ازای هر $t\in D_{\mathbf{r}}$ ای $\mathbf{r}(t)\in\mathbb{R}^۳$؛ بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))}=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$$

توابع $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ را **توابع مؤلفه‌ای** $\mathbf{r}(t)$ می‌نامند. این توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ هستند. بصورت مشابه تابع برداری در $\mathbb{R}^۲$ و یا $\mathbb{R}^n$ قابل تعریف است، که n عدد طبیعی دلخواه می‌باشد.

توجه شود که دامنهٔ هر تابع برداری برابر اشتراک دامنهٔ توابع مؤلفه‌ای آن است: $D_{\mathbf{r}}=D_x\cap D_y\cap D_z$.

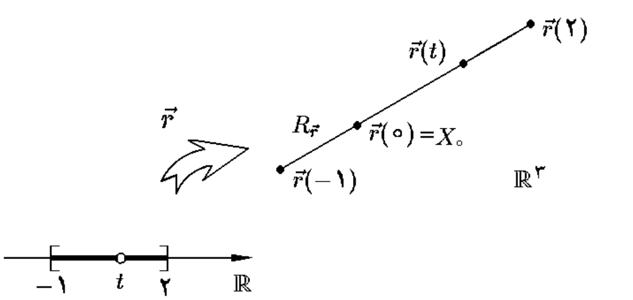
۲.۱.۳ مثال. ۱) فرض کنید:

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۲+۳t,۱-۲t,۵t+۳)}\ ;\ -۱\le t\le ۲$$

در این صورت توابع مؤلفه‌ای آن $x(t)=۲+۳t$، $y(t)=-۲t+۱$ و $z(t)=۵t+۳$ هستند. دامنهٔ این تابع برداری $D_{\mathbf{r}}=[-۱;۲]$ و برد آن $R_{\mathbf{r}}:=\{\mathbf{r}(t)\,|\,t\in D_{\mathbf{r}}\}$ برابر

$$\left\{\overrightarrow{(۲+۳t,۱-۲t,۵t+۳)}\,\middle|\,-۱\le t\le ۲\right\}=$$
$$=\left\{\overrightarrow{(۲,۱,۳)}+t\overrightarrow{(۳,-۲,۵)}\,\middle|\,-۱\le t\le ۲\right\}$$

است. اما معادلهٔ مطرح شده در $R_{\mathbf{r}}$، معادلهٔ برداری—پارامتری خط راست با تکیه‌گاه $X_\circ=(۲,۱,۳)$ و بردار هادی $\mathbf{v}=\overrightarrow{(۳,-۲,۵)}$ می‌باشد. چون پارامتر t از دو طرف محدود است، پس برد $\mathbf{r}(t)$ یک پاره خط می‌باشد. یعنی، پاره خط از $\mathbf{r}(-۱)=\overrightarrow{(-۱,۳,-۲)}$ تا $\mathbf{r}(۲)=\overrightarrow{(۸,-۳,۱۳)}$ (به شکل ۱.۳ توجه شود).



شکل ۱.۳: پاره خط برد یک تابع برداری است

مثال ۲) فرض کنید

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۱+۲\sin t,۴\cos t,۵)}\ ;\ -\pi\le t\le\pi$$

در این صورت می‌توان نوشت:

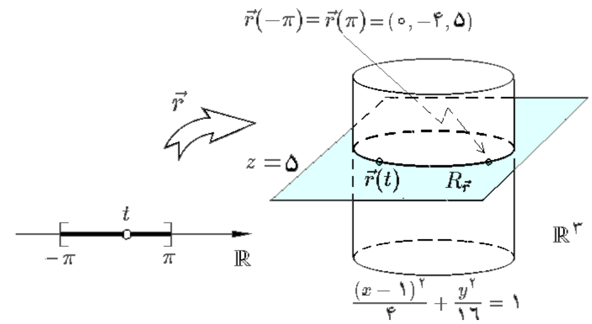
$$\mathbf{r}(t)=(۱+۲\sin t)\mathbf{i}+(۴\cos t)\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$$

یعنی توابع مؤلفه‌ای آن $x(t)=۱+۲\sin t$، $y(t)=۴\cos t$ و $z(t)=۵$ می‌باشند. ملاحظه می‌گردد که دامنهٔ $\mathbf{r}$ برابر $[-\pi;\pi]$ است و بعلاوه $\sin t=\frac{۱}{۲}(x(t)-۱)$، $\cos t=\frac{۱}{۴}y(t)$ و $z(t)=۵$. از طرفی $\cos^۲ t+\sin^۲ t=۱$، و در نتیجه برد $\mathbf{r}(t)$ بر فصل

مشترک صفحهٔ $z=۵$ و استوانهٔ بیضوی $\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ واقع است. (به شکل ۲.۳ توجه شود) یعنی یک بیضی واقع در صفحهٔ $z=۵$ است که تصویر آن بر xy−صفحه برابر بیضی $\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ می‌باشد:

$$R_{\mathbf{r}}\ :\ \frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۱۶}=۱\,,\ z=۵$$

(به شکل ۲.۳ توجه شود).



شکل ۲.۳: بیضی برد یک تابع برداری است

تمام آنچه که در مورد آنالیز توابع برداری می‌توان گفت را در تنها یک جمله می‌شود خلاصه نمود:

۳.۱.۳ اصل اساسی آنالیز توابع برداری. فرض کنید P خاصیتی در خصوص توابع معمولی (یعنی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$) باشد. در صورتی می‌گوئیم تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ دارای خاصیت P است، که هر یک از توابع مؤلفه‌ای $\mathbf{r}(t)$ آن خاصیت P را داشته باشند.

به عنوان نتیجه‌ای از این تعریف کلی ۳.۱.۳، داریم:

۴.۱.۳ حد و پیوستگی. اگر $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))}$، آنگاه

$$\lim_{t\to ۰}\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{\left(\lim_{t\to ۰}x(t),\lim_{t\to ۰}y(t),\lim_{t\to ۰}z(t)\right)}$$

وقتی و تنها وقتی $\mathbf{r}(t)$ در $t_۰$ ناپیوسته است که همهٔ توابع مؤلفه‌ای آن در $t_۰$ پیوسته باشند. بعلاوه اگر $a\in\mathbb{R}$ و $\square\in\{+,-,\bullet,\times\}$، آنگاه:

$$۱)\quad \lim_{t\to t_۰}a\mathbf{r}(t)=a\lim_{t\to t_۰}\mathbf{r}(t)$$

$$۲)\quad \lim_{t\to t_۰}(\mathbf{r}\square\mathbf{h})=\big(\lim_{t\to t_۰}\mathbf{r}(t)\big)\square\big(\lim_{t\to t_۰}\mathbf{h}(t)\big)$$

۵.۱.۳ مثال. ۱) فرض کنیم

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{\left(\frac{e^{۲t}-۱}{t},\cos t,\frac{\sin t}{t}\right)}$$

در این صورت:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to ۰}\mathbf{r}(t) &= \overrightarrow{\left(\lim_{t\to ۰}\frac{e^{۲t}-۱}{\sin t},\lim_{t\to ۰}\cos t,\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\right)}\\ &\overset{(۱)}{=} \overrightarrow{\left(\lim_{t\to ۰}\frac{۲e^{۲t}}{\cos t},\cos(۰),۱\right)}=\overrightarrow{(۲,۱,۱)}\end{aligned}$$

که در (۱) از قاعدهٔ هوپیتال برای درآیهٔ اول استفاده شده است.

مثال ۲) فرض کنیم

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t^۲,-t,t+۱)}\quad,\quad \mathbf{h}(t)=\overrightarrow{(t,t-۱,۲t)}$$

در این صورت:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t)\times\mathbf{h}(t) &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ t^۲ & -t & t+۱\\ t & t-۱ & ۲t\end{vmatrix}\\ &= \overrightarrow{(-۳t^۲+۱,-۲t^۳+t^۲+t,t^۳)}\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to -۱}\big(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{h}(t)\big)=\overrightarrow{(-۲,۲,-۱)}$$

از طرفی، با محاسبهٔ مستقیم داریم:

$$\begin{aligned}\left(\lim_{t\to -۱}\mathbf{r}(t)\right)\times\left(\lim_{t\to -۱}\mathbf{h}(t)\right) &= \overrightarrow{(۱,۱,۰)}\times\overrightarrow{(-۱,-۲,-۲)}\\ &= \overrightarrow{(-۲,۲,-۱)}\end{aligned}$$

مثال ۳) آیا قضیهٔ مقدار میانی برای توابع برداری درست است؟

حل. خیر، زیرا مثلاً اگر فرض کنیم $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(\cos t,\sin t)}$ که $۰\le t\le\pi$. اکنون $C=(۰,۰)$ بر پاره خط واصل بین نقاط $\mathbf{r}(۰)=\overrightarrow{(۱,۰)}$ و $\mathbf{r}(\pi)=\overrightarrow{(-۱,۰)}$ قرار دارد، در حالی که به ازای هیچ $t\in[۰,\pi]$ ای $\mathbf{r}(t)=C$ نمی‌شود. یعنی این غلط است که بگوئیم:

اگر $\mathbf{r}(t)$ بر $[a;b]$ پیوسته باشد و C بر پاره خط $\mathbf{r}(a)\mathbf{r}(b)$ واقع باشد، آنگاه $t\in[a;b]$ ای وجود دارد که $\mathbf{r}(t)=C$.

۶.۱.۳ تمرین. هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید:

$$۱)\quad \lim_{t\to ۱}\overrightarrow{\left(t^۲\sin(\pi t),t^۳-۲t+۱,e^t\right)}$$

$$۲)\quad \lim_{t\to ۰}\overrightarrow{\left(\frac{\sin t-t}{t^۳},\frac{e^t-\cos t}{\sin t}\right)}$$

$$۳)\quad \lim_{t\to ۲}\left\{t\mathbf{i}-\big(\sin\frac{\pi}{t}\big)\mathbf{k}\right\}\qquad ۴)\quad \lim_{t\to ۰-}(\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t^۲\mathbf{k})te^{۱/t}$$

۵) فرض کنید $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t,-t,۲t)}$، $\mathbf{h}(t)=\overrightarrow{(۲t,۱,t^۲)}$، $a=۲$، $t_۰=۱$ و همچنین $\square\in\{-,+,\bullet,\times\}$. روابط در ۴.۱.۳ را تحقیق کنید.

۷.۱.۳ مشتق. فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ در $t=t_۰$ پیوسته است، در صورتی می‌گوئیم $\mathbf{r}(t)$ در نقطهٔ $t=t_۰$ مشتق‌پذیر است که حد $\lim\limits_{t\to t_۰}\frac{۱}{t-t_۰}(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_۰))$ موجود باشد. مقدار این حد را مشتق $\mathbf{r}(t)$ در $t=t_۰$ نامیده و با $\mathbf{r}'(t_۰)$ نشان می‌دهیم. به سادگی اثبات می‌شود که اگر $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))}$ آنگاه (بنابه ۳.۱.۳)

$$\mathbf{r}'(t_۰)=\overrightarrow{(x'(t_۰),y'(t_۰),z'(t_۰))}$$

در نتیجه، تابع برداری در صورتی مشتقپذیر است که مؤلفه‌های آن مشتقپذیر باشند.

۸.۱.۳ قضیه. اگر $\mathbf{r}$، $\mathbf{h}$ و $\mathbf{l}$ توابع برداری مشتقپذیر باشند و $a\in\mathbb{R}$، در این صورت

۱) $(a\mathbf{r})'=a\mathbf{r}'$ ۲) $(\mathbf{r}+\mathbf{h})'=\mathbf{r}'+\mathbf{h}'$

۳) $(\mathbf{r}\bullet\mathbf{h})'=\mathbf{r}'\bullet\mathbf{h}+\mathbf{r}\bullet\mathbf{h}$ ۴) $(\mathbf{r}\times\mathbf{h})'=\mathbf{r}'\times\mathbf{h}+\mathbf{r}\times\mathbf{h}'$

۵) $\|\mathbf{r}\|'=(\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}')/\|\mathbf{r}\|$

۶) $[\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{l}]'=[\mathbf{r}',\mathbf{h},\mathbf{l}]+[\mathbf{r},\mathbf{h}',\mathbf{l}]+[\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{l}']$

۷) **قضیهٔ تیلور:** اگر $\mathbf{r}(t)$ دارای مشتق مرتبهٔ $(k+۱)$ ام پیوسته در $t=t_۰$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t_۰)+(t-t_۰)\mathbf{r}'(t_۰)+\frac{(t-t_۰)^۲}{۲}\mathbf{r}''(t_۰)+\cdots\\ &\quad\cdots+\frac{(t-t_۰)^k}{k!}\mathbf{r}^{(k)}(t_۰)+\mathbf{h}(t)\end{aligned}$$

که در آن $\lim\limits_{t\to t_۰}\dfrac{\mathbf{h}(t)}{(t-t_۰)^{k+۱}}=۰$.

۹.۱.۳ مثال. ۱) فرض کنیم $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(e^t,\cos t,t\sin t)}$ و $\mathbf{h}(t)=\overrightarrow{(t,t+۱,t^۲)}$. در این صورت رابطهٔ (۳) از ۸.۱.۳ را تحقیقی کنید.

حل. با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \overrightarrow{((e^t)',(\cos t)',(t\sin t)')}\\ &= \overrightarrow{(e^t,-\sin t,\sin t+t\cos t)}\\ \mathbf{h}'(t) &= \overrightarrow{((t)',(t+۱)',(t^۲)')}=\overrightarrow{(۱,۱,۲t)}\end{aligned}$$

$$(\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{h}(t))'=\left(te^t+(۱+t)\cos t+t^۳\sin t\right)'$$
$$=e^t+te^t+\cos t-(۱+t)\sin t+۳t^۲\sin t+t^۳\cos t$$
$$\mathbf{r}'(t)\bullet\mathbf{h}(t)+\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{h}'(t)=te^t-(۱+t)\sin t$$
$$+t^۲\sin t+t^۳\cos t+e^t+\cos t+۲t^۲\sin t$$

مثال ۲) بسط مک لورن (تیلور در $t=۰$) تابع برداری $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(e^t,\cos t,t\sin t)}$ را تا مرتبهٔ سوم محاسبه کنید.

حل. با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &\approx \mathbf{r}(۰)+t\mathbf{r}'(۰)+\frac{t^۲}{۲}\mathbf{r}''+\frac{t^۳}{۶}\mathbf{r}'''(۰)\\ &= \overrightarrow{(e^t,\cos t,t\sin t)}\Big|_{t=۰}\\ &\quad +t\overrightarrow{(e^t,-\sin t,\sin t+t\cos t)}\Big|_{t=۰}\\ &\quad +\frac{t^۲}{۲}\overrightarrow{(e^t,-\cos t,۲\cos t-t\sin t)}\Big|_{t=۰}\\ &\quad +\frac{t^۳}{۶}\overrightarrow{(e^t,\sin t,-۳\sin t-t\cos t)}\Big|_{t=۰}\\ &= \overrightarrow{(۱,۱,۰)}+t\overrightarrow{(۱,۰,۰)}\\ &\quad +\frac{t^۲}{۲}\overrightarrow{(۱,-۱,۲)}+\frac{t^۳}{۶}\overrightarrow{(۱,۰,۰)}\\ &= \overrightarrow{\left(۱+t+\frac{t^۲}{۲}+\frac{t^۳}{۶},۱-\frac{t^۲}{۲},t^۲\right)}\end{aligned}$$

توجه شود که در تأیید اصل ۳.۱.۳، بسط تیلور مرتبهٔ سوم توابع مؤلفه‌ای $\mathbf{r}(t)$ عبارتند از: $x(t)=e^t\approx ۱+t+\frac{t^۲}{۲}+\frac{t^۳}{۶}$، $y(t)=\cos t\approx ۱-\frac{t^۲}{۲}$ و $z(t)\approx t^۲$.

مثال ۳) ثابت کنید که اگر طول یک تابع برداری در همه جا ثابت باشد، آنگاه در همه جا مشتق آن تابع برداری بر خودش عمود است.

حل. فرض کنیم A عددی ثابت باشد و به ازای هر t ای $\|\mathbf{r}(t)\|=A$. در این صورت، داریم $\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}(t)=\|\mathbf{r}(t)\|^۲=A^۲$ و با مشتقگیری داریم $\mathbf{r}'(t)\bullet\mathbf{r}(t)+\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}'(t)=۰$. پس بایستی $\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}'(t)=۰$ یا $\mathbf{r}'(t)\perp\mathbf{r}(t)$. یعنی $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{r}'(t)$ بر هم عمود هستند.

۱۰.۱.۳ تمرین. مشتق هر یک از توابع برداری مشروح در زیر را محاسبه کنید:

۱) $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{\left(\frac{t+۱}{t-۱},\cos t\right)}$ ۲) $\mathbf{r}(t)=\dfrac{t\mathbf{i}-t^۲\mathbf{j}}{\sqrt{۱+t^۲}}$

۳) $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(te^t,\cos^۲ t,\arctan t)}$

۴) $\mathbf{r}(t)=\dfrac{t^۲+۱}{t^۲-۱}\mathbf{i}-e^t\mathbf{j}+(\tan t)\mathbf{k}$

۵) فرض کنید

$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(e^t,\sin t,t^۲)}$ و $\mathbf{h}(t)=\overrightarrow{(\sin t,۱+t,t)}$

روابط ۲، ۳، ۴ و ۵ از ۸.۱.۳ را در این مورد تحقیق کنید.

۶) قضیه ۸.۱.۳ را ثابت کنید.

۱۱.۱.۳ انتگرال نامعین. در صورتی می‌گوئیم $\mathbf{h}(t)$ یک تابع اولیهٔ $\mathbf{r}(t)$ است که $\mathbf{h}'(t)=\mathbf{r}(t)$ مجموعه همهٔ توابع

اولیهٔ $\mathbf{r}(t)$ را انتگرال نامعین $\mathbf{r}(t)$ نامیده و با نماد $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ نشان می‌دهیم.

اگر دامنهٔ $\mathbf{r}(t)$ همبند (یعنی، یکپارچه) باشد و $\mathbf{h}_1$ و $\mathbf{h}_2$ دو تابع اولیهٔ $\mathbf{r}(t)$ باشند، آنگاه بردار ثابت $\mathbf{C}$ چنان یافت خواهد شد که به ازای هر t ای $\mathbf{h}_2(t)=\mathbf{h}_1(t)+\mathbf{C}$. در این حالت می‌نویسیم $\int \mathbf{r}(t)\,dt=\mathbf{h}_1(t)+\mathbf{C}$.

قضایای معمولی انتگرال نامعین توابع ریاضی یکی، برای توابع برداری صحیح هستند، از جمله

۱۲.۱.۳ قضیه. اگر توابع برداری $\mathbf{r}$ و $\mathbf{h}$ انتگرال‌پذیر باشند و a عددی حقیقی باشد، آنگاه

$$1)\quad \int a\mathbf{r}(t)\,dt=a\int \mathbf{r}(t)\,dt$$

$$2)\quad \int \left(\mathbf{r}(t)+\mathbf{h}(t)\right)dt=\int \mathbf{r}(t)\,dt+\int \mathbf{h}(t)\,dt$$

در مورد اصل ۳.۱.۳ می‌توان گفت که، در صورتی که $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))}$، آنگاه:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt=\overrightarrow{\left(\int x(t)\,dt,\int y(t)\,dt,\int z(t)\,dt\right)}$$

نتیجتاً، شرط انتگرال‌پذیری $\mathbf{r}(t)$ به معنی انتگرال‌پذیری توابع $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ می‌باشد.

۱۳.۱.۳ مثال.

$$1)\quad \int \overrightarrow{(2t-1,\sin t,e^{2t})}\,dt=\overrightarrow{\left(t^2-t,-\cos t,\frac{1}{2}e^{2t}\right)}+\mathbf{c}$$

$$\begin{aligned}
2)\quad &\int \left\{(t\sin t)\mathbf{i}-\frac{t+1}{t-1}\mathbf{j}\right\}dt=\\
&=\mathbf{i}\int t\sin t\,dt-\mathbf{j}\int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt\\
&=\mathbf{i}\left\{-t\cos t+\int \cos dt\right\}-\mathbf{j}\int\left\{\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right\}dt\\
&=\mathbf{i}\left\{-t\cos t+\sin t+c_1\right\}\\
&\qquad -\mathbf{j}\left\{\frac{1}{2}\ln|t^2+1|+\arctan t+c_2\right\}
\end{aligned}$$

۱۴.۱.۳ تمرین. انتگرال هر یک از توابع برداری زیر را محاسبه کنید:

$$1)\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t^2-2t,t\ln t)}\qquad 2)\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{\left(\frac{1}{t},\ln t,\sin(2t)\right)}$$

$$3)\ \mathbf{r}(t)=\frac{t\mathbf{i}-t^2\mathbf{j}}{\sqrt{t^2+1}}\qquad 4)\ \mathbf{r}(t)=t^2\left(\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}\right)$$

۱۵.۱.۳ انتگرال معین. فرض کنید

$$P\,:\,a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

افرازی از بازهٔ $[a;b]$ است و به ازاء هر i ای $\zeta_i\in I_i=[t_{i-1}\,;\,t_i]$ دلخواه است. اگر حد مجموع $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}(\zeta_i)\triangle t_i$ هنگامی که $\triangle t_i\to 0$ موجود باشد، می‌گوئیم $\mathbf{r}(t)$ بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر است و مقدار حد را انتگرال $\mathbf{r}(t)$ از a تا b نامیده و با نماد $\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$ نشان میدهیم. قضیهٔ نیوتن—لایبنیتز در این حالت نیز برقرار است.

۱۶.۱.۳ قضیه. اگر $\mathbf{h}(t)$ یک تابع اولیهٔ $\mathbf{r}(t)$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt=\mathbf{h}(b)-\mathbf{h}(a)$$

۱۷.۱.۳ مثال. با توجه به قضیهٔ بالا داریم:

$$\begin{aligned}
1)\quad \int_0^1 \overrightarrow{([2t],te^t)}\,dt&=\overrightarrow{\left(\int_0^1[2t]\,dt,\int_0^1 te^t\,dt\right)}\\
&=\overrightarrow{\left(\int_0^{1/2}0\,dt+\int_{1/2}^1 1\,dt,\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt\right)}\\
&=\overrightarrow{\left(\frac{1}{2},e-\left[e^t\right]_0^1\right)}=\overrightarrow{\left(\frac{1}{2},1\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\quad &\int_0^\pi \{\sin t\mathbf{i}-t\mathbf{j}+\cos t\mathbf{k}\}\,dt=\\
&=\left[-\cos t\right]_0^\pi\mathbf{i}-\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi\mathbf{j}+\left[\sin t\right]_0^\pi\mathbf{k}\\
&=2\mathbf{i}-\frac{\pi^2}{2}\mathbf{j}=\overrightarrow{\left(2,\frac{-\pi^2}{2},0\right)}
\end{aligned}$$

۱۸.۱.۳ تمرین. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$1)\ \int_1^2\overrightarrow{\left(\frac{1}{t},\ln(t^2)\right)}\,dt\quad 2)\ \int_0^\pi\overrightarrow{(t\sin t,e^t,\ln(1+t))}\,dt$$

$$3)\ \int_0^1\frac{\mathbf{i}+t\mathbf{j}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\qquad 4)\ \int_{-1}^1\left\{e^t\mathbf{i}-te^t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}\right\}dt$$

۵) فرض کنید $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ تابعی برداری، $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{v}_0$ بردارهایی ثابت و ω عددی حقیقی باشد. مسألهٔ

«$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\omega^2\mathbf{r}$، $\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{r}'(0)=\mathbf{v}_0$»

را حل کنید. آیا اساساً جواب وجود دارد؟ در صورت وجود جواب، آیا جواب یکتا است؟

۶) فرض کنید $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ تابعی برداری، $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{v}_0$ بردارهایی ثابت و g و c اعدادی حقیقی باشد. مسألهٔ

«$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-g\mathbf{k}-c\frac{d\mathbf{r}}{dt}$، $\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{r}'(0)=\mathbf{v}_0$»

را حل کنید. آیا اساساً جواب وجود دارد؟ در صورت وجود جواب، آیا جواب یکتا است؟

۷) قضیه ۱۶.۱.۳ را ثابت کنید.

۲.۳ هندسه دیفرانسیل منحنیها

هدف از این بخش استفاده از توابع برداری در مطالعهٔ هندسهٔ منحنیهای در صفحه و فضا است. مسألهٔ اصلی این است که منحنیهای C_1 و C_2 مفروضند، در چه صورتی می‌توان با یک تبدیل اقلیدسی (حرکت) یکی را بر دیگری منطبق نمود. البته، پاسخ این مسألهٔ بسیار تکنیکی است و ما تنها به ذکر آن می‌پردازیم و اثبات آن به درس هندسهٔ دیفرانسیل موکول می‌شود.

۱.۲.۳ تعریف. تابع برداری $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x(t), y(t), z(t))}$ را در صورتی **خم** یا **پارامتر** گوئیم که:

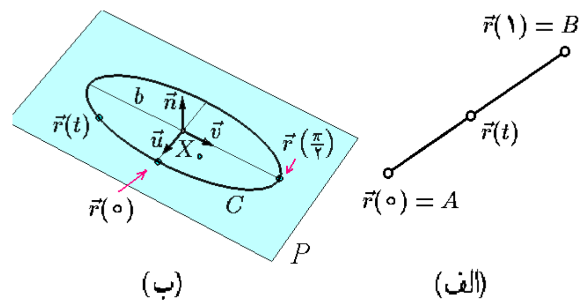
۱) دامنهٔ $\mathbf{r}$ به شکل $[a;b]$ باشد.

۲) $\mathbf{r}$ بر $[a;b]$ پیوسته باشد.

۳) $\mathbf{r}$ بر $(a;b)$ مشتق‌پذیر باشد.

۴) $\mathbf{r}'$ بر $(a;b)$ مخالف صفر باشد.

۵) $\mathbf{r}$ بر $(a;b)$ یکبیک باشد.



شکل ۳.۳: الف) پاره خط AB

ب) بیضی تعمیم یافته

زیر مجموعهٔ $C \subseteq \mathbb{R}^3$ را در صورتی **منحنی** یا **قوس** گوئیم که با اجتماعی از برد یک یا چند خم برابر باشد. تعیین خمهایی که اجتماع برد آنها برابر مجموعهٔ C شود، **پارامتره کردن** یا **پرمایش** C گفته می‌شود.

۲.۲.۳ مثال. **۱) پاره‌خط.** فرض کنیم A و B دو نقطهٔ متفاوت از $\mathbb{R}^3$ بوده و C پاره خط AB باشد. تابع برداری $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{A} + t\mathbf{B}$ با دامنهٔ $[0;1]$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\mathbf{r}$ بر $[0;1]$ پیوسته و بر $(0;1)$ مشتق‌پذیر است:

$$\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{A} + \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$$

پس چهار شرط اول برقرارند. بعلاوه، با فرض $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s)$، داریم $(1-t)\mathbf{A} + t\mathbf{B} = (1-s)\mathbf{A} + s\mathbf{B}$. بنابراین

$$(s-t)(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

اما $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$، پس $s = t$ و لذا $\mathbf{r}$ بر $(0;1)$ یکبیک است. بنابراین AB یک منحنی است (به شکل ۳.۳—الف توجه شود).

مثال ۲) دایره. فرض کنیم $X_0 = (x_0, y_0)$، $R > 0$ و C دایرهٔ به مرکز در X_0 وشعاع R است. معادلهٔ C به شکل

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که $x - x_0 = R\cos t$ و $y - y_0 = R\sin t$. بنابراین

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t)}$$

که $0 \leq t \leq 2\pi$. به سادگی می‌توان شرایط ۱ تا ۳ را تحقیق نمود. در مورد شرط ۴ داریم: $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$، زیرا

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|\overrightarrow{(-R\sin t, R\cos t)}\| = R \neq 0$$

بعلاوه از فرض $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s)$ و $R > 0$، نتیجه می‌شود که $\sin t = \sin s$ و $\cos t = \cos s$. و چون مطابق فرض $t, s \in (0; 2\pi)$، بایستی $s = t$. پس C یک منحنی است.

مثال ۳) بیضی به مرکز $X_0 = (x_0, y_0)$ و نیم قطرهای a و b یک منحنی است، زیرا با بحث شبیه به (۲) داریم:

$$C \,:\, \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)}\ ;\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

مثال ۴) نمودار تابعی از x در صفحه. فرض کنیم $y = f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته و بر $(a;b)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت نمودار f بر $[a;b]$ که بصورت

$$\Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

تعریف می‌شود، یک منحنی است، زیرا برابر برد خم

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t, f(t))}\ ;\ a \leq t \leq b$$

می‌باشد. به عنوان مثال، ، سهمی به معادلهٔ $y = x^2 - x + 1$ که در آن $-1 \leq x \leq 2$ را بصورت

$$C \,:\, \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t, t^2 - t + 1)}\ ;\ -1 \leq t \leq 2$$

می‌توان پارامتره نمود.

مثال ۵) بیضی تعمیم یافته در فضا. فرض کنیم X_0 نقطه‌ای از فضا است و بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یکه و متعامدند. به شکل ۳.۳—ب توجه شود. همچنین فرض کنیم a و b اعداد مثبتند. در این صورت بیضی C به مرکز X_0، نیم قطرهای a و b و به موازات $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ واقع در صفحهٔ با تکیه‌گاه X_0 و بردار قائم $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ را به کمک خم

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{X_0} + (a\cos t)\mathbf{u} + (b\sin t)\mathbf{v}\ ;\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

می‌توان پارامتره نمود.

سه شرط اول بدیهی هستند. در مورد شرط چهارم داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t)=\mathbf{0}\quad &\Rightarrow\quad \begin{cases}\mathbf{r}\bullet\mathbf{u}=0\\ \mathbf{r}\bullet\mathbf{v}=0\end{cases}\\ &\Rightarrow\quad \begin{cases}(-a\cos t)\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}=0\\ (b\sin t)\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}=0\end{cases}\\ &\Rightarrow\quad \cos t=\sin t=0\end{aligned}$$

که محال است. بعلاوه از فرض $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(s)$، نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases}\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{u}=\mathbf{r}(s)\bullet\mathbf{u}\\ \mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{v}=\mathbf{r}(s)\bullet\mathbf{v}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\cos t=a\cos s\\ b\sin t=b\sin s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos t=\cos s\\ \sin t=\sin s\end{cases}$$

اما $0<t$ و $s<2\pi$، بنابراین $s=t$.

مثال ۶) برخورد نمودار دو تابع سه متغیره. یکی از معمولترین روشها برای تعریف منحنیهای در فضا، استفاده از دو رابطهٔ میان x، y و z می‌باشد؛ نظیر

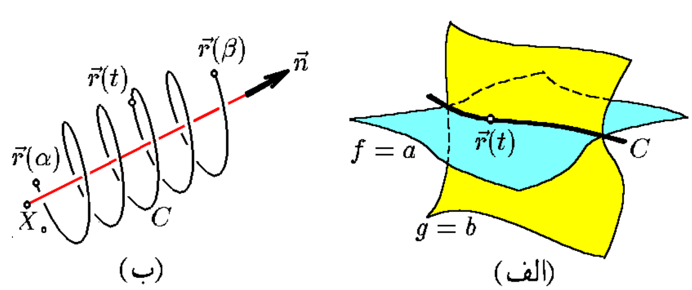
$$C\ :\ f(x,y,z)=a\ ,\ g(x,y,z)=b$$

تنها کاری که باید کرد، حل دستگاه معادلات است، به این ترتیب که یکی را متغیر فرض کرده و دوتای دیگر را تابع فرض کنیم.

مثلاً اگر $x+y+z=0$ و $C\ :\ x^2+y^2=1$، آنگاه $z=-x-y$. اما بنابه فرض $x^2+y^2=1$، که می‌توانیم $x=\cos t$ و $y=\sin t$ بگیریم. بنابراین $z=-\cos t-\sin t$ و در نتیجه

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(\cos t,\sin t,-\cos t-\sin t)}\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$

به شکل ۴.۳—الف توجه شود.



شکل ۴.۳: الف) منحنی حاصل از برخورد دو رویه
ب) مارپیچ تعمیم یافته

مثال ۷) مارپیچ. فرض کنید متحرکی چنان حرکت می‌کند که تصویر آن در امتداد بردار $\mathbf{N}$ برابر بیضی در مثال (۵) است و با سرعت ثابت c در امتداد $\mathbf{n}$ بالا می‌رود. این منحنی را به صورت زیر می‌توان پارامتره نمود:

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{X_0}+(a\cos t)\mathbf{u}+(b\sin t)\mathbf{v}+ct\mathbf{n}\ ;\ \alpha\le t\le\beta$$

که α و β اعداد دلخواهند و حدود مارپیچ را مشخص می‌کنند. به شکل ۴.۳—ب توجه شود.

مثال ۸) چون اجتماع هر تعداد متناهی منحنی، خود یک منحنی است؛ بنابراین با منحنیهای بالا می‌توان بینهایت منحنی جدید ساخت. مثلاً، مثلث که اجتماع سه پاره خط است و یا شکل $\oplus$ که اجتماع یک دایره و دو پاره خط است.

مثال ۹) هر قطعه از یک منحنی، خود یک منحنی است. مثلاً، نیم دایره یک منحنی است و یا یک ربع از بیضی.

مثال ۱۰) فرض کنید D قسمتی از ربع دوم است که توسط دو سهمی $y=x^2$ و $y=2-x^2$ جدا شده است. مرز C آن را پارامتره می‌کنید. فرض کنیم $C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$. به شکل ۵.۳—الف توجه شود. C_1 پاره خط است. در نتیجه

$$\begin{aligned}C_1\ :\ \mathbf{r}(t)\ &=\ (1-t)\,\overrightarrow{(0,0)}+t\,\overrightarrow{(0,2)}\ ;\ 0\le t\le 1\\ &=\ \overrightarrow{(0,2t)}\ ;\ 0\le t\le 1\end{aligned}$$

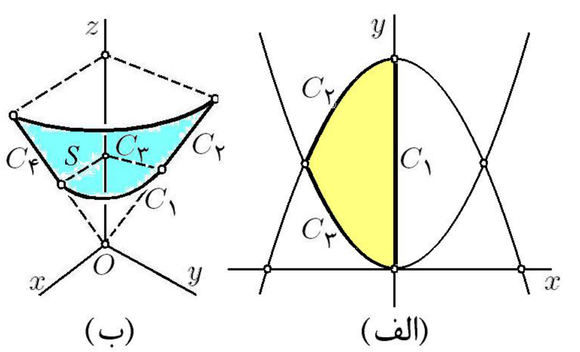
دو سهمی داده شده در نقاط $(-1,1)$ و $(1,1)$ قطع می‌کنند. پس در هر دو $-1\le x\le 0$. C_2 قسمتی از سهمی $y=2-x^2$ است. پس می‌توان فرض کرد $x=t$. در نتیجه $y=2-t^2$ و

$$C_2\ :\ \mathbf{r}(t)\ =\ \overrightarrow{(t,2-t^2)}\ ;\ -1\le t\le 0$$

به صورت مشابه

$$C_3\ :\ \mathbf{r}(t)\ =\ \overrightarrow{(t,t^2)}\ ;\ -1\le t\le 0$$

مثال ۱۱) فرض کنید S قسمتی از سطح مخروط $z^2=x^2+y^2$ است که در یک هشتم اول قرار دارد و توسط صفحات $z=1$ و $z=2$ جدا شده است. مرز C آن را پارامتره می‌کنید. فرض کنیم $C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$. به شکل ۵.۳—ب توجه شود.



شکل ۵.۳: قسمتهای ۱۰ و ۱۱ از مثال ۲.۲.۳

C_2 و C_4 پاره خط هستند، در نتیجه

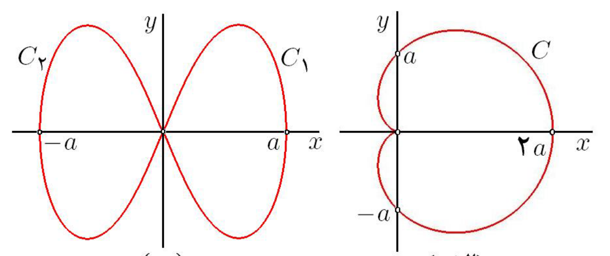
$$\begin{aligned} C_2\ :\ \mathbf{r}(t) &= (1-t)\,\overrightarrow{(0,1,1)} + t\,\overrightarrow{(0,2,2)}\ ;\ 0\le t\le 1\\ &= \overrightarrow{(0,1+t,1+t)}\ ;\ 0\le t\le 1\\ C_4\ :\ \mathbf{r}(t) &= (1-t)\,\overrightarrow{(1,0,1)} + t\,\overrightarrow{(2,0,2)}\ ;\ 0\le t\le 1\\ &= \overrightarrow{(1+t,0,1+t)}\ ;\ 0\le t\le 1\end{aligned}$$

C_1 و C_3 ربع دایره هستند. در نتیجه

$$\begin{aligned} C_1\ &:\ \begin{cases} x^2+y^2=z^2\\ z=1\\ 0\le x,y\end{cases}\ :\ \begin{cases} x^2+y^2=1\\ z=1\\ 0\le x,y\end{cases}\\ &:\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(\cos t,\sin t,1)}\ ;\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}\\ C_3\ &:\ \begin{cases} x^2+y^2=z^2\\ z=2\\ 0\le x,y\end{cases}\ :\ \begin{cases} x^2+y^2=4\\ z=2\\ 0\le x,y\end{cases}\\ &:\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(2\cos t,2\sin t,2)}\ ;\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

مثال ۱۲) منحنی دلنما $C: r=a(1+\cos\theta)\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi$ در صفحه مختلط را در نظر بگیرید ($a>0$). به شکل ۶.۳—الف توجه شود. با فرض $t=\theta$ و با توجه به اینکه $x=r\cos\theta$ و $x=r\sin\theta$ ملاحظه می‌گردد که:

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)=a(1+\cos t).\overrightarrow{(\cos t,\sin t)}\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$



(ب) (الف)

شکل ۶.۳: قسمتهای ۱۲ و ۱۳ از مثال ۲.۲.۳

مثال ۱۳) منحنی لمنیسکات

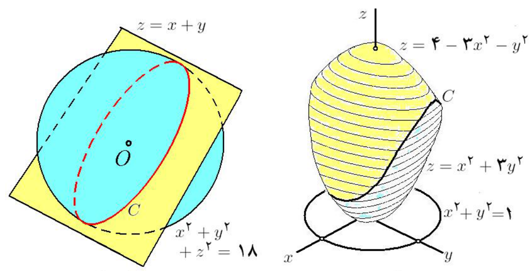
$$C: r^2=a^2\cos(2\theta)\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi$$

در صفحه مختلط را در نظر بگیرید ($a>0$). به شکل ۶.۳—ب توجه شود. روشن است که باید $\cos(2\theta)>0$. بنابراین $2k\pi-\pi/2\le 2\theta\le 2k\pi+\pi/2$ که $k\in\mathbb{N}$. در نتیجه با فرض $k=0$ و $k=1$ بترتیب داریم $-\pi/4\le\theta\le\pi/4$ و $3\pi/4\le\theta\le 5\pi/4$. یعنی، منحنی مورد نظر دو تکه است: $C=C_1\cup C_2$. با فرض $t=\theta$ و با توجه به اینکه $x=r\cos\theta$ و $x=r\sin\theta$ ملاحظه می‌گردد که:

$$\begin{aligned} C_1\ &:\ \mathbf{r}(t)=\sqrt{\cos(2t)}.\overrightarrow{(\cos t,\sin t)}\ ;\ -\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{4}\\ C_2\ &:\ \mathbf{r}(t)=\sqrt{\cos(2t)}.\overrightarrow{(\cos t,\sin t)}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}\end{aligned}$$

مثال ۱۴) منحنی C حاصل از برخورد دو سهمی‌گون بیضوی $z=x^2+3y^2$ و $z=4-3x^2+y^2$ را در نظر بگیرید. به شکل ۷.۳—الف توجه شود. از حل معادلهٔ این دو رویه در یک دستگاه ملاحظه می‌گردد که $x^2+3y^2=4-3x^2+y^2$ یا $x^2+y^2=1$. پس می‌توان فرض نمود $x=\cos t$ و $y=\sin t$. در این صورت $z=x^2+3y^2=1+2\cos^2 t$ و بنابراین

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(\cos t,\sin t,1+2\cos^2 t)}\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$



(ب) (الف)

شکل ۷.۳: قسمتهای ۱۴ و ۱۵ از مثال ۲.۲.۳

مثال ۱۵) منحنی C حاصل از برخورد کره $x^2+y^2+z^2=18$ و صفحهٔ $z=x+y$ را در نظر بگیرید. به شکل ۷.۳—ب توجه شود. از حل معادلهٔ این دو رویه در یک دستگاه ملاحظه می‌گردد که $x^2+y^2+(x+y)^2=18$ یا $2x^2+2y^2+2xy=18$. این را به صورت $4x^2+4y^2+4xy=36$ یا

$$(2x+y)^2+(\sqrt{3}y)^2=6^2$$

می‌توان نوشت. بنابراین، می‌توان فرض نمود $2x+y=6\cos t$ و $\sqrt{3}y=6\sin t$. در نتیجه

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{3}\sin t\\ x &= \frac{1}{2}(6\cos t-y)=3\cos t-\sqrt{3}\sin t\\ z &= x+y=3\cos t+\sqrt{3}\sin t\end{aligned}$$

و در مجموع داریم

$$\begin{aligned} C\ :\ \mathbf{r}(t) &= (3\cos t-\sqrt{3}\sin t)\,\mathbf{i}+(2\sqrt{3}\sin t)\,\mathbf{j}\\ &\quad +(3\cos t+\sqrt{3}\sin t)\,\mathbf{k}\ ;\ 0\le t\le 2\pi\end{aligned}$$

۳.۲.۳ یادداشت.

در بخش ۹.۲ چگونگی پارامتره نمودن منحنی‌های درجه دوم توضیح داده شده است.

۴.۲.۳ تمرین.

هر یک از منحنیها را پارامتره کنید:

۱) پاره خط $(2,-1)(3,2)$ در صفحه.

۲) دایرهٔ به مرکز $(1,-1)$ و شعاع ۳ در صفحه.

۳) $x^2+y^2=2x$

۴) $x+y=2, -1\leq x\leq 2$

۵) $x^2/4+y^2=1$

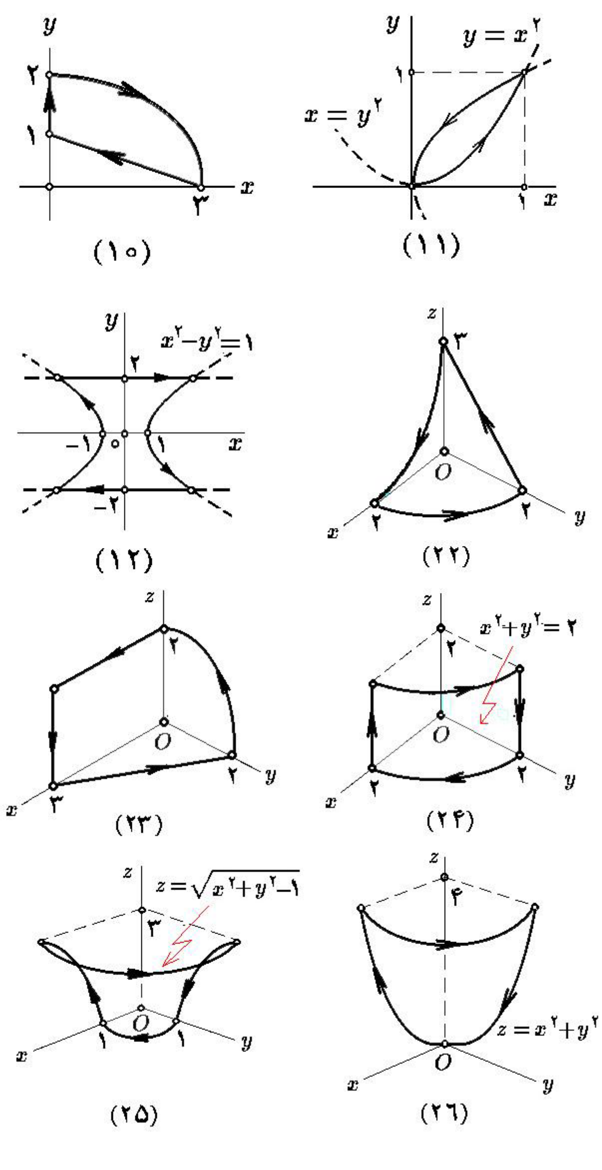
۶) $y=2x^2-1,\ y\leq 7$

۷) $x^2-y^2=1,\ |x|\leq 3$

۸) $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

۹) پاره خط $(1,2,-1)(3,4,2)$.

منحنیهای ۱۰ تا ۱۳ نشان داده شده در شکل ۸.۳ را پارامتره کنید.



شکل ۸.۳: مسایل ۱۰ تا ۱۲ و ۲۱ تا ۲۶

۱۳) مثلث باریوس $(1,-1,0)$، $(-1,1,1)$ و $(1,0,2)$.

۱۴) دایرهٔ واقع در صفحهٔ $z=4$ و با مرکز در $(1,-1,4)$ و شعاع ۵.

۱۵) $x=y=z,\ -1\leq x\leq 5$

۱۶) $x^2+y^2=1,\ x+y=z^2$

۱۷) $z=x^2,\ y=x^2,\ -1\leq x\leq 1$

۱۸) $4x^2=4+y^2+z^2,\ x=\sqrt{2}$

۱۹) $2x+4y+z=1,\ x^2+2y^2=z$

۲۰) $x^2+y^2=1,\ x^2+z^2=1$

۲۱*) $x^2+y^2+z^2=R^2,$
$$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2,\ \sqrt{2}|a|+|r|<R$$

منحنیهای ۲۲ تا ۲۶ در شکل ۸.۳ را پارامتره کنید.

۵.۲.۳ طول قوس یک منحنی. فرض کنید

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)\,;\, a\leq t\leq b$$

و $a<t_0<b$. طول قوس از $\mathbf{r}(t_0)$ تا $\mathbf{r}(t_0+dt)$ بر C چقدر است؟ برای پاسخ به این مساله، بجای طول مورد نظر $\triangle l$، طول بردار واصل بین آن دو نقطه $d\ell$ را محاسبه می‌کنیم (به شکل ۹.۳—الف توجه شود):

$$\begin{aligned}\triangle\ell &\approx d\ell=\|\overrightarrow{r(t_0)r(t_0+dt)}\|\\ &= \Big\{\big(x(t_0)-x(t_0+dt)\big)^2+\big(y(t_0)-y(t_0+dt)\big)^2\\ &\qquad +\big(z(t_0)-z(t_0+dt)\big)^2\Big\}^{1/2}\end{aligned}$$

اما بنابه قضیهٔ لاگرانژ و خواص معرف خم، اعداد t_1، t_2 و t_3 در بازهٔ $(t_0\ ;\ t_0+dt)$ چنان یافت می‌شوند که:

$$\triangle l\approx d\ell=\Big\{\big(x'(t_1)dt\big)^2+\big(y'(t_2)dt\big)^2+\big(z'(t_3)dt\big)^2\Big\}^{1/2}$$

پس اگر dt به اندازهٔ کافی کوچک باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\triangle l &\approx d\ell\approx\sqrt{\big(x'(t_0)\big)^2+\big(y'(t_0)\big)^2+\big(z(t_0)\big)^2}\,dt\\ &= \|\mathbf{r}'(t_0)\|\,dt\end{aligned}$$

عبارت آخر را دیفرانسیل طول قوس می‌نامند، یعنی $ds=\|\mathbf{r}'(t)\|dt$. اکنون برای محاسبهٔ **طول قوس** C کافی است از ds بربازهٔ $[a;b]$ انتگرال بگیریم:

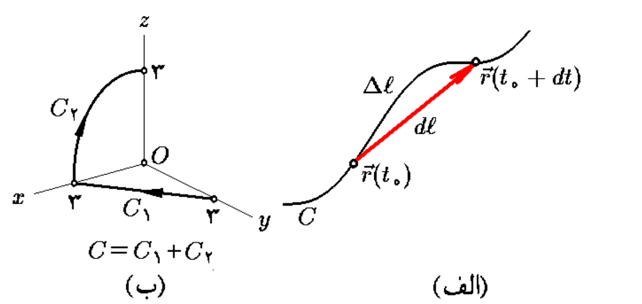
$$\ell=\int_0^b ds=\int_a^b\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

۶.۲.۳ مثال. ۱) در صورتی که

$$C\,;\,\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(3\cos t+3,3\sin t-2)}\ ;\ 0\leq t\leq\pi$$

طول قوس منحنی C برابر است با

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^\pi\|\overrightarrow{(-3\sin t,3\cos t)}\|\,dt\\ &= \int_0^\pi\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t}\,dt=3\pi\end{aligned}$$



شکل ۹.۳: الف) طول قوس
ب) قسمت ۳ از مثال ۶.۲.۳

مثال ۲) طول قوس پاره خط $C = (۱,۲,۳)(۱,۲,-۱)$ برابر است با طول بردار واصل بین این نقاط

$$\ell = \|\overrightarrow{(۱,۲,-۱)} - \overrightarrow{(۱,۲,۳)}\| = \|\overrightarrow{(۰,۰,-۴)}\| = ۴$$

از طرفی C را به شکل:

$$\begin{aligned} C\ :\ \mathbf{r}(t) &= (۱-t)\overrightarrow{(۱,۲,۳)} + t\overrightarrow{(۱,۲,-۱)} \\ &= \overrightarrow{(۱,۲,-۴t+۳)}\ ;\ ۰ \le t \le ۱ \end{aligned}$$

می‌توان پارامتره نمود. بنابراین

$$\ell = \int_۰^۱ \|\overrightarrow{(۰,۰,-۴)}\|\, dt = \int_۰^۱ ۴\, dt = ۴$$

مثال ۳) طول قوس منحنی نشان داده شده در ۹.۳—ب را محاسبه می‌کنیم. این منحنی از دو جزء $C_۱$ و $C_۲$ تشکیل شده است. $C_۱$ پاره خطی با ابتدای $(۰,۳,۰)$، و انتهای $(۳,۰,۰)$ است، بنابراین

$$C_۱\ :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۳t, ۳-۳t, ۰)}\ ;\ ۰ \le t \le ۱$$

از طرفی $C_۲$ ربع دایرهٔ به مرکز مبداء $X_۰ = ۰$، شعاع $R = ۳$ در صفحه $xz-$ است، بنابراین:

$$\begin{aligned} C_۲\ :\ \mathbf{r}(t) &= \vec{o} + (۳\cos t)\mathbf{i} + (۳\sin t)\mathbf{k} \\ &= \overrightarrow{(۳\cos t, ۰, ۳\sin t)}\ ;\ ۰ \le t \le \pi/۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell &= \ell_۱ + \ell_۲ \\ &= \int_۰^۱ \|\overrightarrow{(۳,-۳,۰)}\|\, dt \\ &\qquad + \int_۰^{\pi/۲} \|\overrightarrow{(-۳\sin t, ۰, ۳\cos t)}\|\, dt \\ &= \int_۰^۱ ۳\sqrt{۲}\, dt + \int_۰^{\pi/۲} ۳\, dt = ۳\sqrt{۲} + ۳\frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

۷.۲.۳ تمرین.

طول قوس هر یک از منحنیهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۳\sin t + ۱, ۳\cos t + ۲)}\ ;\ ۰ \le t \le \pi$

۲) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{۲}{۳}t^{۳/۲}\mathbf{k}\ ;\ ۰ \le t \le ۸$

۳) $\mathbf{r}(t) = ۶t^۳\mathbf{i} - ۲t^۳\mathbf{j} - ۳t^۳\mathbf{k}\ ;\ ۱ \le t \le ۲$

۴) $\mathbf{r}(t) = (t, \cosh t)\ ;\ -\ln ۳ \le t \le \ln ۵$

۵) $\mathbf{r}(t) = (۲\cos t)\mathbf{i} + (۲\sin t)\mathbf{j} + \sqrt{۵}t\mathbf{k}\ ;\ ۰ \le t \le \pi$

۶) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t\sin t + \cos t, t\cos t - \sin t)}\ ;\ \sqrt{۲} \le t \le ۲$

۷) $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + ۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}t^{۳/۲}\mathbf{k}\ ;\ ۰ \le t \le \pi$

۸.۲.۳ پارامتر طبیعی.

فرض کنید

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)\ ;\ a \le t \le b$$

یک منحنی پارامتره شده باشد. تابع صعودی s را بصورت

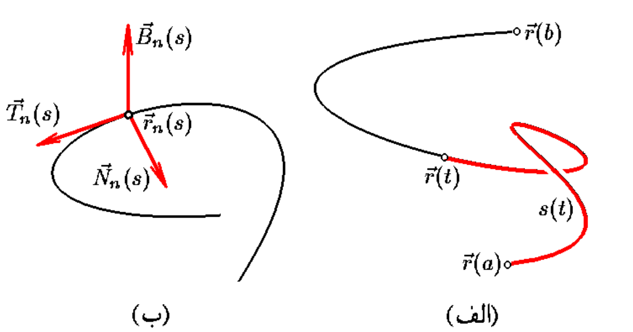
$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt\ ,\ a \le t \le b$$

تعریف می‌کنیم. به شکل ۱۰.۳—الف توجه شود. این تابع معکوسپذیر است، زیرا $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'\| > ۰$. پس می‌توان t را بر حسب s بدست آورد: $t = t(s)$ که $۰ \le s \le l$ و l طول قوس C است. اکنون می‌توان در $\mathbf{r}$ بجای t از s استفاده کرده و نوشت:

$$C\ :\ \mathbf{r}_n(s) = \mathbf{r}(t(s))\ ;\ ۰ \le s \le l$$

اصطلاحاً $\mathbf{r}_n(s)$ را **پارامتر طبیعی** C می‌نامند. حسن این پارامتر در آن است که سرعت آن در همه جا برابر یک است:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_n'(s)\| &= \|\frac{d}{ds}\mathbf{r}(t(s))\| \\ &= \|\frac{dt}{ds}\frac{d}{ds}\mathbf{r}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| \div \frac{ds}{dt} \\ &= \|\mathbf{r}'(t)\| \div \|\mathbf{r}'(t)\| = ۱ \end{aligned}$$



شکل ۱۰.۳: الف) پارامتر طبیعی   ب) کنج فرنه

۹.۲.۳ کنج فرنه. از مفروضات قسمت ۸.۲.۳ استفاده می‌کنیم. بردار

$$\mathbf{T}_n(s) := \mathbf{r}'_n(s)$$

در نقطهٔ $\mathbf{r}_n(s)$ بر منحنی C مماس است و طول آن برابر یک می‌باشد و آن را **بردار یکهٔ مماس بر منحنی** می‌نامیم. بعلاوه، جهت آن در راستای ازدیاد پارامتر s می‌باشد (به شکل ۱۰.۳–ب توجه شود).

چون طول $\mathbf{T}_n(s)$ برابر یک است، بر مشتقش عمود می‌باشد. بردار یکهٔ

$$\mathbf{N}_n(s) := \frac{\mathbf{T}'_n(s)}{\|\mathbf{T}'_n(s)\|} = \frac{\mathbf{r}''_n(s)}{\|\mathbf{r}''_n(s)\|}$$

را **قائم اصلی منحنی** C در نقطهٔ $\mathbf{r}_n(s)$ می‌نامیم. این بردار در نقطهٔ $\mathbf{r}_n(s)$ به منحنی عمود است و به سمت مرکز انحناء منحنی هدف دارد. حاصلضرب خارجی:

$$\mathbf{B}_n(s) := \mathbf{T}_n(s) \times \mathbf{N}_n(s)$$

را **قائم دوم** C در نقطهٔ $\mathbf{r}_n(s)$ می‌نامیم. سه تایی مرتب

$$F_n(s) := \Big(\mathbf{T}_n(s), \mathbf{N}_n(s), \mathbf{B}_n(s)\Big)$$

را **کنج فرنهٔ** C در نقطهٔ $\mathbf{r}_n(s)$ می‌نامیم. این کنج یک کنج متعامد یکه و راستگرد است، به این معنی که طول هر سه برابر یک است، دو به دو عمودند و حاصلضرب سه تایی آنها مثبت است.

بدون استفاده از پارامتر طبیعی نیز می‌توان کنج فرنه را بدست آورد: این قضیه را در ۹.۴.۳ اثبات می‌کنیم.

۱۰.۲.۳ قضیه. اگر $\mathbf{r}$ یک خم دلخواه با دامنهٔ $[a;b]$ باشد و $t \in (a;b)$، آنگاه

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\,, \quad \mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}\,,$$
$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t)$$

۱۱.۲.۳ مثال. ۱) فرض کنید

$$C\ :\ \mathbf{r}(t) = (۳\sin t)\mathbf{i} + (۳\cos t)\mathbf{j} + ۴t\mathbf{k}\ ;\ -\pi \le t \le \pi$$

در این صورت تابع طول قوس C عبارت است از:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\pi}^{t} \|\overrightarrow{(۳\cos t, -۳\sin t, ۴)}\|dt \\ &= \int_{-\pi}^{t} ۵dt = ۵(t+\pi) \end{aligned}$$

بنابراین $t = s/۵ - \pi$ که $۰ \le s \le ۱۰\pi$. در نتیجه:

$$\begin{aligned} C\ :\ \mathbf{r}_n(s) &= \mathbf{r}\left(\frac{s}{۵}-\pi\right) \\ &= ۳\sin\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{i} + ۳\cos\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{j} \\ &\quad + ۴\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{k} \end{aligned}$$

اکنون، بنابه تعریف:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n(s) &= \mathbf{r}'_n(s) \\ &= \frac{۳}{۵}\cos\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{i} - \frac{۳}{۵}\sin\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{j} + \frac{۴}{۵}\mathbf{k} \\ \mathbf{r}''_n(s) &= -\frac{۳}{۲۵}\sin\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{i} - \frac{۳}{۲۵}\cos\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{j} \\ \mathbf{N}_n(s) &= \frac{\mathbf{r}''_n(s)}{\|\mathbf{r}''_n(s)\|} = -\sin\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{i} - \cos\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{j} \\ \mathbf{B}_n(s) &= \mathbf{T}_n(s)\times\mathbf{N}_n(s) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{۳}{۵}\cos\left(\frac{s}{۵}-\pi\right) & -\frac{۳}{۵}\sin\left(\frac{s}{۵}-\pi\right) & \frac{۴}{۵} \\ -\sin\left(\frac{s}{۵}-\pi\right) & -\cos\left(\frac{s}{۵}-\pi\right) & ۰ \end{vmatrix} \\ &= \frac{۴}{۵}\cos\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{i} - \frac{۴}{۵}\sin\left(\frac{s}{۵}-\pi\right)\mathbf{j} - \frac{۳}{۵}\mathbf{k} \end{aligned}$$

مثال ۲) کنج فرنهٔ منحنی مثال یک را بدون استفاده از پارامتر طبیعی محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{r}'(t) = (۳\cos t)\mathbf{i} + (-۳\sin t)\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = (-۳\sin t)\mathbf{i} + (-۳\cos t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = (۱۲\cos t)\mathbf{i} + (-۱۲\sin t)\mathbf{j} - ۹\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = ۵ \qquad \|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\| = ۱۵$$

به کمک فرمولهای مربوطه داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = (\frac{۳}{۵}\cos t)\mathbf{i} + (-\frac{۳}{۵}\sin t)\mathbf{j} + \frac{۴}{۵}\mathbf{k} \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|} \\ &= (\frac{۴}{۵}\cos t)\mathbf{i} + (-\frac{۴}{۵}\sin t)\mathbf{j} - \frac{۳}{۵}\mathbf{k} \\ \mathbf{N}(t) &= \mathbf{B}(t)\times\mathbf{N}(t) = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

مثال ۳) کنج فرنهٔ منحنی

$$C\ :\ x^۲+y^۲ = ۱\,,\ x^۲+z^۲ = ۱$$

را در نقطهٔ $X_۰ = \left(\sqrt{۲}/۲, \sqrt{۲}/۲, \sqrt{۲}/۲\right)$ بیابید.

حل. ابتدا C را پارامتره می‌کنیم: $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\cos t, \sin t, \sin t)}$. البته C دو دایرهٔ متقاطع است و پارامتر مذکور تنها یکی از آنها را پارامتره می‌کند. بعلاوه روشن است که $X_۰ = \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{۴}\right)$. بنابراین:

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \overrightarrow{(-\sin t, \cos t, \cos t)}\Big|_{\frac{\pi}{۴}}$$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}\\
\mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{۴}\right) &= \overrightarrow{(-\cos t, -\sin t, -\sin t)}\Big|_{\frac{\pi}{۴}}\\
&= \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{۴}\right) \times \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \overrightarrow{(۰, -۱, ۱)}$$

$$\left\|\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right\| = \frac{\sqrt{۶}}{۲} \qquad \left\|\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{۲}\right) \times \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{۲}\right)\right\| = \sqrt{۲}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{۴}\right) &= \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{۴}\right) \div \left\|\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right\|\\
&= \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}\\
\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{۴}\right) &= \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{۴}\right) \times \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{۴}\right) \div \left\|\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{۴}\right) \times \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right\|\\
&= \overrightarrow{\left(۰, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}\\
\mathbf{N}\left(\frac{\pi}{۴}\right) &= \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{۴}\right) \times \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{۴}\right)\\
&= \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۶}}{۳}, -\frac{\sqrt{۶}}{۶}, -\frac{\sqrt{۶}}{۶}\right)}
\end{aligned}$$

۱۲.۲.۳ تمرین. هر یک از منحنیهای زیر را به شکل طبیعی پارامتره کرده، کنج فرنهٔ آنها را بدست آورید:

۱) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۲\cos t, ۲\sin t\,,\ \sqrt{۵}t)}\ ;\ ۰ \leq t \leq ۲\pi$

۲) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۴t + ۱, ۱ - ۳t)}\ ;\ -۱ \leq t \leq ۲$

۳) $C\ :\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱\ ,\ z = \sqrt{۳}y$

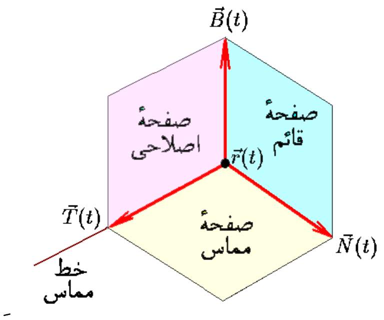
۴) $C\ :\ x^۲ + y^۲ + ۲x + ۶y = ۶$

کنج فرنهٔ منحنی داده شده را در نقطهٔ $X_۰$ بیابید:

۵) $C\ :\ x = y = z^۲,\ \ X_۰ = (۴, ۴, -۲)$

۶) $C\ :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t^۲ - ۱, t^۳ + ۲t, t - ۵)},\ \ X_۰ = \mathbf{r}(۲)$

۱۳.۲.۳ تعریف. به دلیل وجود کنج فرنه در هر نقطه از یک منحنی، سه صفحه و یک خط به شرح زیر به هر نقطه از منحنی، نسبت داده می‌شود (به شکل ۱۱.۳ توجه شود):



شکل ۱۱.۳: صفحات اصلاحی، مماس و قائم و خط مماس

خط مماس: خط با تکیه‌گاه $\mathbf{r}(t)$ و هادی $\mathbf{T}(t)$ است. این خط نزدیکترین خط به منحنی C در نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ است.

صفحهٔ مماس: صفحهٔ با تکیه‌گاه $\mathbf{r}(t)$ و نرمال $\mathbf{B}(t)$ است. این صفحه نزدیکترین صفحه به منحنی C در نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ است. به این معنی که اگر بخواهد $\mathbf{r}(t)$ در یک صفحه بگنجد، آن صفحه همان صفحهٔ مماس می‌باشد. صفحه مماس را صفحهٔ بوسان نیز می‌نامند.

صفحهٔ قائم: صفحهٔ با تکیه‌گاه $\mathbf{r}(t)$ و نرمال $\mathbf{T}(t)$ است. بردار $\mathbf{v}$ وقتی و تنها وقتی در $\mathbf{r}(t)$ به C عمود است. که در صفحهٔ قائم قرار داشته باشد.

صفحهٔ اصلاحی: صفحهٔ با تکیه‌گاه $\mathbf{r}(t)$ و نرمال $\mathbf{N}(t)$ است.

۱۴.۲.۳ مثال. ۱) فرض کنید

$$\mathbf{r}(t) = (۵+۴\cos(\pi t))\mathbf{i}+۴\sin(\pi t)\mathbf{j}+۳\pi t\mathbf{k}\ ;\ -۲ \leq t \leq ۱۷$$

که در آن $\overrightarrow{(۱, ۰, ۳\pi)} = \mathbf{r}(۱) = X_۰$. به این ترتیب داریم $\mathbf{T}(۱) = \overrightarrow{(۰, -۴/۵, ۳/۵)}$، $\mathbf{N}(۱) = \overrightarrow{(۱, ۰, ۰)}$ و همچنین $\mathbf{B}(۱) = \overrightarrow{(۰, ۳/۵, ۴/۵)}$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
\text{خط مماس} &: \frac{x - ۱}{۰} = \frac{y - ۰}{-۴/۵} = \frac{z - ۳\pi}{۳/۵}\\
&: x = ۱, ۳y + ۴z = ۱۲\pi\\
\text{صفحه قائم} &: ۰(x - ۱) - (۴/۵)(y - ۰)\\
&\qquad +(۳/۵)(z - ۳\pi) = ۰\\
&: ۳z = ۴y + ۹\pi\\
\text{صفحه مماس} &: ۰(x - ۱) + (۳/۵)(y - ۰)\\
&\qquad +(۴/۵)(z - ۳\pi) = ۰\\
&: ۳y + ۴z = ۱۲\pi\\
\text{صفحه اصلاحی} &: ۱(x - ۱) + ۰(y - ۰)\\
&\qquad +۰(z - ۳\pi) = ۰\\
&: x = ۱
\end{aligned}$$

مثال ۲) زاویه بین دو منحنی زیر را در نقطهٔ $X_۰$ به مختصات $(۴, -۳, -۱)$ بیابید:

$$C_۱ \ : \ \mathbf{r}_۱(t) = \overrightarrow{\left(t^۲+۳, t-۲, ۲t+۱\right)}$$

$$C_۲ \ : \ \mathbf{r}_۲(t) = \overrightarrow{\left(t^۲, ۲t-۷, ۱-t\right)}$$

حل. این زاویه برابر زاویه بین بردارهای مماس بر آن دو برابر است. ولی $\mathbf{r}_۱(-۱) = \mathbf{r}_۲(۲) = X_۰$ بنابراین، زاویه خواسته شده α برابر است با

$$\begin{aligned} \angle\left(\mathbf{r}'_۱(-۱), \mathbf{r}'_۲(۲)\right) &= \\ &= \angle\left(\overrightarrow{(۲t, ۱, ۲)}\Big|_{t=-۱}, \overrightarrow{(۲t, ۲, -۱)}\Big|_{t=۲}\right) \\ &= \angle\left(\overrightarrow{(-۲, ۱, ۲)}, \overrightarrow{(۴, ۲, -۱)}\right) \\ &= \cos^{-۱}\left(\frac{-۸}{\sqrt{۹}\sqrt{۲۱}}\right) = \cos^{-۱}\left(\frac{۸}{۳\sqrt{۲۱}}\right) \end{aligned}$$

۱۵.۲.۳ تمرین. معادلهٔ خط مماس، صفحهٔ مماس، صفحهٔ قائم و صفحهٔ اصلاحی منحنی داده شده را در نقطهٔ $X_۰$ بدست بیاورید:

۱) $\mathbf{r}(t) = (t+۱)\mathbf{i} + ۲t\mathbf{j} + t^۲\mathbf{k}, \ X_۰ = \mathbf{r}(۱)$

۲) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\cos t, \sin t, t)}, \ X_۰ = (-۱, ۰, \pi)$

۳) $x = y^۲ + ۱, \ z = y + x \ ; \ X_۰ = (۲, -۱, ۱)$

۴) $x + y + z = ۱, \ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹, \ X_۰ = (۱, -۲, ۲)$

۵) نشان دهید که مماس بر $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(a\cos(wt), a\sin(wt), bt)}$ همواره زاویه‌ای ثابت با $xy-$صفحه می‌سازد.

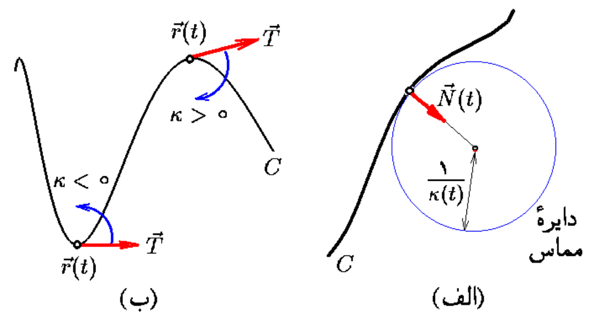
۶) a و b را طوری تعیین کنید که سهمی $y = x^۲ + ax + b$ با دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲$ مماس باشد.

۷) هذلولی‌های $xy = a$ و $x^۲ - y^۲ = b$ یکدیگر را با چه زوایایی قطع می‌کنند.

۱۶.۲.۳ انحناء و تاب. میزان تغییرات $\mathbf{T}_n(s)$ (راستای مماس) نسبت به طول قوس را **انحناء** $\kappa_n(s)$ (خوانده شود کاپا اندیس n در s) می‌نامیم: $\kappa_n(s) = \|\mathbf{T}'_n(s)\|$. از نظر هندسی، دایرهٔ به مرکز $\mathbf{r}_n(s) + \frac{۱}{\kappa_n(s)}\mathbf{N}_n(s)$ و شعاع $\frac{۱}{\kappa_n(s)}$ دارای حداکثر تماس با منحنی است. یعنی، اگر انحناء C در نقطهٔ $X_۰$ برابر k باشد، آنگاه C در همسایگی $X_۰$ شبیه به یک دایرهٔ به شعاع $\frac{۱}{\kappa}$ می‌باشد. به همین دلیل $\mathbf{r}_n(s) + \frac{۱}{\kappa_n(s)}\mathbf{N}_n(s)$ را **مرکز انحناء**، $۱/\kappa_n(s)$ را **شعاع انحناء** و دایرهٔ مذکور را **دایرهٔ مماس** بر C در نقطهٔ $\mathbf{r}_n(s)$ می‌نامیم. (به شکل ۱۲.۳—الف توجه شود). برای محاسبهٔ مقدار انحناء از فرمولهای زیر می‌توان استفاده نمود:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^۳}$$

به بیان دیگر:



شکل ۱۲.۳: الف) دایرهٔ مماس ب) علامت انحناء

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^۲ + \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}^۲ + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^۲}}{\left((x')^۲ + (y')^۲ + (z')^۲\right)^{۳/۲}}$$

در مورد منحنیهای مسطحه، می‌توان نوشت:

$$\kappa(t) = \frac{x''y' - x'y''}{\left((x')^۲ + (y')^۲\right)^{۳/۲}}$$

که دارای علامت است! علامت κ در صورتی مثبت است که با ازدیاد t، بردار $\mathbf{T}(t)$ در جهت عقربه‌های ساعت بچرخد. در غیر این صورت κ منفی خواهد بود (به شکل ۱۲.۳—ب توجه شود).

۱۷.۲.۳ مثال. ۱) انحناء، مرکز انحناء، شعاع انحناء و معادلهٔ دایرهٔ مماس به منحنی داده شده را در نقطهٔ $X_۰ = (۵, ۴)$ بدست آورید:

$$C \ : \ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(۲t+۳, ۵-t^۲\right)} \ ; \ -۲ \le t \le ۳$$

حل. با توجه به اینکه $X_۰ = (۵, ۴) = \mathbf{r}(۱)$، داریم:

$$\mathbf{r}'(۱) = \overrightarrow{(۲, -۲t, ۰)}\Big|_{t=۱} = \overrightarrow{(۲, -۲, ۰)}$$

$$\mathbf{r}''(۱) = \overrightarrow{(۰, -۲, ۰)} \qquad \mathbf{r}'(۱) \times \mathbf{r}''(۱) = \overrightarrow{(۰, ۰, -۴)}$$

$$\mathbf{T}(۱) = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰\right) \quad \mathbf{B}(۱) = \overrightarrow{(۰, ۰, -۱)}$$

$$\mathbf{N}(۱) = \mathbf{B}(۱) \times \mathbf{T}(۱) = \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰\right)}$$

$$\kappa(۱) = \frac{\|\mathbf{r}'(۱) \times \mathbf{r}''(۱)\|}{\|\mathbf{r}'(۱)\|^۳} = \frac{۴}{(۲\sqrt{۲})^۳} = \frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

پس شعاع انحناء برابر $R(۱) = ۱/\kappa(۱) = ۴\sqrt{۲}$ است و مرکز انحناء عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(۱) + R(۱)\mathbf{N}(۱) &= \overrightarrow{(۵, ۴, ۰)} + ۴\sqrt{۲}\overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰\right)} \\ &= \overrightarrow{(۱, ۰, ۰)} \end{aligned}$$

و معادلهٔ دایرهٔ مماس چنین است:

$$\begin{aligned} S &: (x-۱)^۲+(y-۰)^۲=(۴\sqrt{۲})^۲ \\ &: x^۲-۲x+y^۲=۳۱ \end{aligned}$$

مثال ۲) نشان دهید که منحنی زیر بخشی از یک دایره است:

$$C : \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(\cos t, ۲\sin t, \sqrt{۳}\cos t)} ; -\pi \le t \le \pi/۲$$

حل. کافی است ثابت شود که منحنی مسطحه است (یعنی $\mathbf{B}$ ثابت است) و شعاع انحناء آن نیز ثابت می‌باشد. اما در این جا، داریم:

$$\mathbf{T}=\overrightarrow{\left(\frac{-۱}{۲}\sin t, \cos t, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t\right)} \quad \mathbf{B}=\overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}\right)}$$

$$\mathbf{N}=\overrightarrow{\left(\frac{-۱}{۲}\cos t, \sin t, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos t\right)} \quad \kappa=\frac{۴}{(۲)^۳}=\frac{۱}{۲}$$

پس شعاع انحناء $R=۱/\kappa=۲$ است و مرکز انحناء منحنی زیر عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t)+R(t)\mathbf{N}(t) &= \overrightarrow{(\cos t, ۲\sin t, \sqrt{۳}\cos t)} \\ &+۲\overrightarrow{\left(\frac{-\cos t}{۲}, \sin t, \frac{-\sqrt{۳}}{۲}\cos t\right)}=\mathbf{0} \end{aligned}$$

پس C قطعه‌ای از دایرهٔ واقع در صفحهٔ مماس به خود است، که دارای معادلهٔ به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} P &: -\frac{\sqrt{۳}}{۲}(x-\cos t)+۰(y-۲\sin t) \\ &+\frac{۱}{۲}(z-\sqrt{۳}\cos t)=۰ ; z=\sqrt{۳}x \end{aligned}$$

C دایره‌ای به مرکز $(۰,۰,۰)$ و شعاع ۲ است. به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} C &: x^۲+y^۲+z^۲=۴, z=\sqrt{۳}x \\ &: ۴x^۲+y^۲=۴, z=\sqrt{۳}x \end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید C بیضی $x^۲/a^۲+y^۲/b^۲=۱$ است. مکان هندسی مراکز انحناء C را مشخص کنید.

حل. در این حالت $C : \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(a\cos t, b\sin t)} : ۰\le t\le ۲\pi$. بنابراین:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\overrightarrow{(-a\sin t, b\cos t)}}{\sqrt{a^۲\sin^۲ t+b^۲\cos^۲ t}} \\ \mathbf{N}(t) &= \frac{\overrightarrow{(-b\cos t, -a\sin t)}}{\sqrt{a^۲\sin^۲ t+b^۲\cos^۲ t}} \\ \kappa(t) &= \frac{|(-a\cos t)(b\cos t)-(-b\sin t)(-a\sin t)|}{\sqrt{a^۲\sin^۲ t+b^۲\cos^۲ t}} \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^۲\sin^۲ t+b^۲\cos^۲ t}} \end{aligned}$$

مرکز انحناء عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(t) &= \mathbf{r}(t)+R(t)\mathbf{N}(t) \\ &= \overrightarrow{(a\cos t, b\sin t)}+\frac{۱}{ab}\overrightarrow{(-b\cos t, -a\sin t)} \\ &= \overrightarrow{\left((a-\frac{۱}{a})\cos t, (b-\frac{۱}{b})\sin t\right)} \end{aligned}$$

اگر $a<b$ و بنویسیم

$$\kappa(t)=ab\div\sqrt{۱+(b^۲-a^۲)\cos^۲ t}$$

می‌توان نتیجه گرفت که: وقتی و تنها وقتی انحناء حداکثر است که $\cos^۲ t$ حداقل باشد، یعنی $\cos t=۰$. پس نقاط نظیر $t=\pi/۲$ و $t=۳\pi/۲$ با حداکثر انحناء هستند: $(۰,\pm b)$. با استدلال مشابه، نقاط $(\pm a, ۰)$ با حداقل انحناء می‌باشند.

۱۸.۲.۳ تمرین. انحناء، شعاع انحناء، مرکز انحناء و معادلهٔ دایرهٔ مماس منحنی داده شده را در نقطهٔ خواسته شده بدست آورید:

۱) $\mathbf{r}(t)=(e^t\cos t)\mathbf{i}+(e^t\sin t)\mathbf{j}+\sqrt{۲}e^t\mathbf{k}, \quad X_\circ=\mathbf{r}(۰)$

۲) $x=\ln y, \quad X_\circ=(۲,e^۲)$

۳) $\mathbf{r}(t)=(\cos^۳ t)\mathbf{i}+(\sin^۳ t)\mathbf{j}, \quad X_\circ=\mathbf{r}(\pi/۴)$

۴) $x^۲+y^۲=z^۲, z=\sqrt{۲}, \quad X_\circ=(۱,-۱,\sqrt{۲})$

٦) نمودار منحنی حاصل از مکان هندسی مرکز انحناء منحنی $y=x^۲$ را ترسیم کنید.

۷) نمودار منحنی حاصل از مکان هندسی مرکز انحناء منحنی $\mathbf{r}(t)=\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ را ترسیم کنید.

۱۹.۲.۳ تاب. می‌دانیم که صفحهٔ مماس بر C در نقطهٔ $\mathbf{r}_n(s)$ دارای نرمال $\mathbf{B}_n(s)$ می‌باشد. میزان تغییرات $\mathbf{B}_n(s)$ نسبت به طول قوس، که مبین میزان تغییرات صفحهٔ مماس نسبت به s می‌باشد، را تاب منحنی می‌نامیم: $\tau_n(s)=\mathbf{B}'_n(s)$ (خوانده شود تا و اندیس n در s). ثابت می‌شود که

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{[\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t)]}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|^۲} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^۲+\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}^۲+\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^۲} \end{aligned}$$

چنانچه $\tau(t)$ مثبت باشد، منحنی در امتداد $\mathbf{B}(t)$ بالا می‌رود و اگر منفی باشد، پائین خواهد رفت. تاب هر منحنی مسطحه برابر صفر است، زیرا در چنین وضعیتی، $\mathbf{B}(t)$ ثابت می‌باشد.

۲۰.۲.۳ مثال. ۱) تاب منحنی

$$C \,:\, \mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$$

را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{r}'(t) = \overrightarrow{(-3\sin t, 3\cos t, 4)}$$
$$\mathbf{r}''(t) = \overrightarrow{(-3\cos t, -3\sin t, 0)}$$
$$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = \overrightarrow{(12\sin t, -12\cos t, 9)}$$
$$\mathbf{r}'''(t) = \overrightarrow{(3\sin t, -3\cos t, 0)}$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\| = 15 \qquad [\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)] = 36$$

بنابراین $\tau(t) = 36/(15)^2 = 4/25$. یعنی تاب $\mathbf{r}$ در همه‌جا ثابت است. دلیل این امر، مارپیچ بودن منحنی مورد نظر می‌باشد.

مثال ۲) می‌خواهیم ثابت کنیم که منحنی

$$C \,:\, \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(3t-1, 2t^2+t+1, t^2-2t)}$$

مسطحه است. برای این منظور کافی است ثابت شود که تاب C در همه‌جا صفر است:

$$\tau(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|^2}\begin{vmatrix} 3 & 4t+1 & 2t-2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

دلیل این امر درجه دوم بودن مؤلفه‌های $\mathbf{r}$ می‌باشد.

۲۱.۲.۳ تمرین. تاب هر یک از منحنیهای زیر را در نقطهٔ داده شده محاسبه کنید:

۱) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(1+2t, 5t^2, t^3)}$, $X_0 = \mathbf{r}(-1)$

۲) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)}$, $X_0 = \mathbf{r}(0)$

۳) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t\sin t, t^2, t\cos t)}$, $X_0 = \mathbf{r}(\pi)$

۴) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\cosh t, -\sinh t, t)}$, $X_0 = \mathbf{r}(0)$

هندسهٔ منحنیهای مسطحه به کمک انحناء علامتدار (یعنی، بدون قدر مطلق در ۱۶.۲.۳) کاملاً مشخص می‌شود. به این معنی که

۲۲.۲.۳ قضیه. اگر $C_1 \,:\, \mathbf{r}_1(t) \;;\; a \le t \le b$ و $C_2 \,:\, \mathbf{r}_2(s) \;;\; c \le s \le d$ دو منحنی در صفحه باشند، شرط لازم و کافی برای قابل انطباق بودن C_1 و C_2 آن است که تابعی دو سویی $h \,:\, [a;b] \to [c;d]$ چنان یافت گردد که به ازاء هر $t \in (a;b)$ ای $\kappa_2(h(t)) = \pm\kappa_1(t)$. علامت در طول $(a;b)$ ثابت است.

هندسهٔ منحنیهای در فضا نیز به کمک انحناء و تاب کاملاً مشخص می‌شود. به این معنی که

۲۳.۲.۳ قضیه. اگر $C_1 \,:\, \mathbf{r}_1(t) \,:\, a \le t \le b$ و $C_2 \,:\, \mathbf{r}_2(s) \,:\, c \le s \le d$ دو منحنی در فضا باشند، آنگاه شرط لازم و کافی برای قابل انطباق بودن C_1 بر C_2 آن است که تابعی $h \,:\, [a;b] \to [c;d]$ چنان یافت گردد که به ازای هر $t \in (a;b)$ ای $k_2(h(t)) = k_1(t)$ و $\tau_2(h(t)) = \pm\tau_1(t)$. علامت در طول $(a;b)$ ثابت است.

۲۴.۲.۳ مثال. به عنوان کاربردی از دو قضیهٔ بالا، احکام زیر را مطرح می‌کنیم:

۱) شرط لازم و کافی برای اینکه یک منحنی مفروض قطعه‌ای از خط راست باشد، آن است که انحناء منحنی صفر باشد.

۲) شرط لازم و کافی برای اینکه یک منحنی مفروض قطعه‌ای از دایره باشد، آن است که تاب منحنی صفر و انحناء آن ثابت باشد.

۳) شرط لازم و کافی برای اینکه یک منحنی قطعه‌ای از مارپیچ باشد، آن است که انحناء و تاب منحنی ثابت باشند.

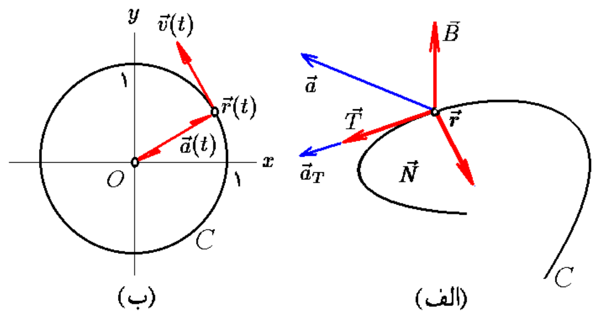
۳.۳ کاربرد در فیزیک

از دیدگاه مکانیک، خم یا پارامتر به معنی ضابطهٔ حرکت یک متحرک است و منحنی یا قوس به معنی مسیر حرکت آن می‌باشد. از خم یا ضابطهٔ حرکت می‌توان اطلاعاتی چون سرعت، شتاب، شتاب مماسی و شتاب قائم را بدست آورد. اما با معلوم بودن منحنی یا مسیر حرکت، مقادیر مذکور قابل تعیین نیستند. مثلاً، ممکن است بر یک جادهٔ مفروض دو اتومبیل با سرعتهای مختلف حرکت کنند.

۱.۳.۳ تعریف. اگر جسمی با ضابطهٔ $\mathbf{r}(t) \,:\, a \le t \le b$ در فضا حرکت کند، در این صورت بنا به اطلاعات از فیزیک تعاریف به شرح زیر را مطرح می‌کنیم (به شکل ۱۳.۳ —الف توجه شود).

سرعت لحظه‌ای را با نماد $\mathbf{v}(t)$ نشان داده و به صورت «میزان تغییر مکان نسبت به زمان t» تعریف می‌کنیم. به بیان دیگر به صورت $\mathbf{r}'(t)$.

شتاب لحظه‌ای را با نماد $\mathbf{a}(t)$ نشان داده و به صورت «میزان تغییر سرعت نسبت به زمان t» تعریف می‌کنیم. به بیان دیگر به صورت $\mathbf{r}''(t)$.



شکل ۱۳.۳: الف) مؤلفه‌های شتاب
ب) حرکت دایره‌ای

شتاب مماسی را با نماد $\mathbf{a}_T(t)$ نشان داده و به صورت «تصویر شتاب در امتداد حرکت» تعریف می‌کنیم. به بیان دیگر به صورت

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}\right)\mathbf{v}$$

شتاب قائم را با نماد $\mathbf{a}_N(t)$ نشان داده و به صورت «تصویر شتاب در امتداد عمود بر حرکت» تعریف می‌کنیم. به بیان دیگر به صورت $\mathbf{a}-\mathbf{a}_T$.

۲.۳.۳ مثال. ۱) فرض کنیم متحرکی با ضابطهٔ:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(۲t^۲-۱,۵t+۲, t^۲-t+۱\right)}\ ;\ ۰\leq t\leq ۳$$

حرکت کند. در این صورت در لحظهٔ $t=۱$ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(۱) &= \mathbf{r}'(۱) = \overrightarrow{(۴t,۵,۲t-۱)}|_{t=۱} = \overrightarrow{(۴,۵,۱)}\\
\mathbf{a}(۱) &= \mathbf{r}''(۱) = \overrightarrow{(۴,۰,۲)}\\
\mathbf{a}_T(۱) &= \frac{۱۶+۰+۲}{۱۶+۲۵+۱}\mathbf{v} = \frac{۳}{۷}\overrightarrow{(۴,۵,۱)}\\
\mathbf{a}_N(۱) &= \mathbf{a}(۱)-\mathbf{a}_T(۱) = \frac{۱}{۷}\overrightarrow{(۱۶,-۱۵,۱۱)}
\end{aligned}$$

مثال ۲) حرکت در مثال یک، با شتاب ثابت $\mathbf{a} = \overrightarrow{(۴,۰,۲)}$ می‌باشد. نقطهٔ حداقل آن هنگامی است که $z(t)$ حداکثر باشد، یعنی $z(t)=t^۲-t+۱$. اما مینیموم این تابع بر بازهٔ زمانی $[۰;۳]$ در لحظهٔ $t=۱/۲$ است. بنابراین لحظهٔ با حد اقل ارتفاع در حرکت، $t=۱/۲$ است و ارتفاع آن $z(۱/۲)=۳/۴$ می‌باشد. سرعت اولیهٔ این حرکت $\mathbf{v}(۰)=\overrightarrow{(۰,۵,۱)}$ بوده است.

مثال ۳) نشان دهید که شتاب قائم حرکت دایره‌ای $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(\cos t,\sin t)}$ همواره با $-\mathbf{r}(t)$ برابر است.

حل. برای مشاهدهٔ این امر توجه می‌کنیم که (به شکل ۱۳.۳—ب توجه شود):

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t) &= \mathbf{r}''(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{(-\sin t,\cos t)}\\
&= \overrightarrow{(-\cos t,-\sin t)} = -\mathbf{r}(t)\\
\mathbf{a}_N(t) &= \mathbf{a}(t)-\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}\mathbf{v}\\
&= -\mathbf{r}(t)-\frac{\cos t\sin t-\cos t\sin t}{\sin^۲ t-\cos^۲ t}\mathbf{v} = -\mathbf{r}(t)
\end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنیم متحرکی با مارپیچ

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos wt)\mathbf{i}+(a\sin wt)\mathbf{j}+bt\mathbf{k}$$

بالا رود. در این صورت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= -(aw\sin wt)\mathbf{i}+(aw\cos wt)\mathbf{j}+b\mathbf{k}\\
\mathbf{a}(t) &= -(aw^۲\cos wt)\mathbf{i}-(aw^۲\sin wt)\mathbf{j}\\
\mathbf{a}_T(t) &= ۰\\
\mathbf{a}_N(t) &= \mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_T(t) = \mathbf{a}(t)
\end{aligned}$$

بعلاوه $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^۲w^۲+b^۲}$ و $\|\mathbf{a}(t)\| = aw^۲$. یعنی $\mathbf{r}(t)$ حرکتی با اندازهٔ شتاب و سرعت ثابت است.

۳.۳.۳ تمرین. سرعت، شتاب، شتاب مماسی و شتاب قائم هر یک از متحرکهای زیر را مشخص کنید:

۱) $\mathbf{r}(t) = (t+۱)\mathbf{i}+۲t\mathbf{j}+t^۲\mathbf{k}$

۲) $\mathbf{r}(t) = \left(t\cos t, t\sin t, t^۲\right)$

۳) $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{i}-\mathbf{j})\cos t+(\sin ۲t)\mathbf{k}$

۴) $\mathbf{r}(t) = (\cos^۳ t)\mathbf{i}+(\sin^۳ t)\mathbf{j}$

۵) $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(t^۳/۳, t^۲/۲\right)}$

۶) $\mathbf{r}(t) = \ln\left(t^۲+۱\right)\mathbf{i}+۱t-۲\arctan(t)\mathbf{j}$

۴.۳ مباحث بیشتر در نظریهٔ منحنیها

۱.۴.۳ فرمولهای فرنه. هدف از این فرمولها، تعیین میزان تغییرات کنج فرنه نسبت به خودش می‌باشد. در ادامه خواهیم دید با داشتن این روابط می‌توان منحنی را باز سازی کرد. چون کنج فرنه از سه بردار مستقل تشکیل می‌شود بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}
\mathbf{T}'_n = a_{۱۱}\mathbf{T}_n+a_{۱۲}\mathbf{N}_n+a_{۱۳}\mathbf{B}_n\\
\mathbf{N}'_n = a_{۲۱}\mathbf{T}_n+a_{۲۲}\mathbf{N}_n+a_{۲۳}\mathbf{B}_n\\
\mathbf{B}'_n = a_{۳۱}\mathbf{T}_n+a_{۳۲}\mathbf{N}_n+a_{۳۳}\mathbf{B}_n
\end{cases}$$

اکنون لازم است تا ضرایب a_{ij} را بدست آورد.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_n\bullet\mathbf{T}_n = \|\mathbf{T}_n\|^۲ = ۱ \Rightarrow \mathbf{T}_n\bullet\mathbf{T}'_n = ۰ \Rightarrow a_{۱۱} = ۰\\
&\mathbf{N}_n\bullet\mathbf{N}_n = \|\mathbf{N}_n\|^۲ = ۱ \Rightarrow \mathbf{N}_n\bullet\mathbf{N}'_n = ۰ \Rightarrow a_{۲۲} = ۰\\
&\mathbf{B}_n\bullet\mathbf{B}_n = \|\mathbf{B}_n\|^۲ = ۱ \Rightarrow \mathbf{B}_n\bullet\mathbf{B}'_n = ۰ \Rightarrow a_{۳۳} = ۰\\
&\mathbf{T}_n\bullet\mathbf{N}_n = ۰ \Rightarrow \mathbf{T}'_n\bullet\mathbf{N}_n+\mathbf{T}_n\bullet\mathbf{N}'_n = ۰ \Rightarrow a_{۱۲} = -a_{۲۱}\\
&\mathbf{T}_n\bullet\mathbf{B}_n = ۰ \Rightarrow \mathbf{T}'_n\bullet\mathbf{B}_n+\mathbf{T}_n\bullet\mathbf{B}'_n = ۰ \Rightarrow a_{۱۳} = -a_{۳۱}\\
&\mathbf{N}_n\bullet\mathbf{B}_n = ۰ \Rightarrow \mathbf{N}'_n\bullet\mathbf{B}_n+\mathbf{N}_n\bullet\mathbf{B}'_n = ۰ \Rightarrow a_{۲۳} = -a_{۳۲}
\end{aligned}$$

بنابراین ماتریس ضرایب مورد نظر $[a_{ij}]$ پادمتقارن است. یعنی اینکه، ترانهدش برابر منهی خود ماتریس است. به بیان شهودیتر، عناصر قطر اصلی آن صفرند و عناصر بالای قطر نیز برابر منهی عناصر نظیر در پائین قطر اصلی هستند. به این ترتیب تنها سه ضرایب $a_{۱۲}$، $a_{۱۳}$ و $a_{۲۳}$ را باید مشخص کنیم. از طرفی، چون

$$\mathbf{T}_n' = (\mathbf{r}_n)' = \mathbf{r}_n'' = \vec{\kappa}_n = \kappa_n \mathbf{N}_n$$

بنابراین $a_{۱۲} = \kappa_n$ و $a_{۱۳} = ۰$. بعلاوه، داریم

$$\mathbf{B}_n' = a_{۳۲} \;\Rightarrow\; \tau_n = \|\mathbf{B}_n'\| = |a_{۳۲}|$$

بنابراین $a_{۳۲} = \pm\tau_n$. در اینجا یک آزادی عمل وجود دارد، و میتوانیم مثبت یا منفی را به دلخواه انتخاب کنیم. معمول این است که منفی انتخاب شود. پس در مجموع میتوان به جمعبندی زیر رسید:

۲.۴.۳ قضیه. در مورد مشتقات کنج فرنه نسبت به پارامتر طول قوس داریم

$$\begin{cases} \mathbf{T}_n' = \kappa_n \mathbf{N}_n \\ \mathbf{N}_n' = -\kappa_n \mathbf{T}_n + \tau_n \mathbf{B}_n \\ \mathbf{B}_n' = -\tau_n \mathbf{N}_n \end{cases}$$

۳.۴.۳ نمایش موضعی منحنیها.

برای این منظور فرض میکنیم نقطهٔ مورد نظر ما $X_۰ = \mathbf{r}_n(۰) \in C$ باشد. اکنون بسط تیلور تابع $\mathbf{r}_n(s)$ را در حوالی نقطهٔ صفر $s = ۰$ مینویسیم:

$$\mathbf{r}_n(s) \;=\; \mathbf{r}_n(۰) + s\mathbf{r}_n'(۰) + \frac{s^۲}{۲}\mathbf{r}_n''(۰) + \frac{s^۳}{۳}\mathbf{r}_n'''(۰) + O(۳)$$

پس لازم است که مشتقات مرتبهٔ اول تا سوم $\mathbf{r}_n(۰)$ را بر حسب کنج فرنه محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n(۰) &= \mathbf{X}_۰ \\ \mathbf{r}_n'(۰) &= \mathbf{T}_n'(۰) \\ \mathbf{r}_n''(۰) &= \kappa_n(۰)\mathbf{N}_n(۰) \\ \mathbf{r}_n'''(۰) &= -\kappa_n(۰)\mathbf{N}_n(۰) - \kappa_n^۲(۰)\mathbf{T}_n(۰) \\ &\quad +\kappa_n(۰)\tau_n(۰)\mathbf{B}_n(۰) \end{aligned}$$

بنابراین، با قرار دادن در بسط تیلور نتیجه میگیریم که

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n(s) \;=\; & \mathbf{X}_۰ + s\mathbf{T}_n'(۰) + \frac{s^۲}{۲}\left(\kappa_n(۰)\mathbf{N}_n(۰)\right) \\ & + \frac{s^۳}{۳}\Big(-\kappa_n^۲(۰)\mathbf{T}_n(۰) + \kappa_n'(۰)\mathbf{N}_n(۰) \\ & + \kappa_n(۰)\tau_n(۰)\mathbf{B}_n(۰)\Big) + O(۳) \end{aligned}$$

پس اگر فرض کنیم

$$\mathbf{r}_n(s) = x(s)\mathbf{T}_n(۰) + y(s)\mathbf{N}_n(۰) + z(s)\mathbf{B}_n(۰)$$

در این صورت، با توجه به بسط بالا داریم

$$\begin{aligned} &۱)\quad x(t) = s + O(۱) \\ &۲)\quad y(t) = \frac{s^۲}{۲}\kappa_n(۰) + O(۲) \\ &۳)\quad z(t) = \frac{s^۳}{٦}\kappa_n(۰)\tau_n(۰) + O(۳) \end{aligned}$$

اکنون برای تجسم وضعیت منحنی نسبت به کنج فرنه، تصویر این منحنی را در صفحات ساخته شده توسط کنج فرنه را مییابیم. برای این منظور، سعی میکنیم پارامتر طول قوس s را بین هر دو انتخاب از سه معادلهٔ $x(s)$، $y(s)$ و $z(s)$ حذف کنیم:

۴.۴.۳ تصویر بر صفحهٔ شامل $\mathbf{T}_n(۰)$ و $\mathbf{N}_n(۰)$.

با توجه به اینکه

$$x \approx s \;,\; y \approx \frac{\kappa_n(۰)}{۲}s^۲$$

نتیجه میگیریم $y \approx \frac{\kappa_n(۰)}{۲}x^۲$ که یک سهمی است. به شکل ۱۱.۳ توجه شود.

۵.۴.۳ تصویر بر صفحهٔ شامل $\mathbf{T}_n(۰)$ و $\mathbf{B}_n(۰)$.

با توجه به اینکه

$$x \approx s \;,\; z \approx \frac{\kappa_n(۰)\tau_n(۰)}{٦}s^۳$$

نتیجه میگیریم $z \approx \frac{\kappa_n(۰)\tau_n(۰)}{٦}x^۳$، که یک منحنی درجهٔ سوم است. به شکل ۱۱.۳ توجه شود.

٦.۴.۳ تصویر بر صفحهٔ شامل $\mathbf{N}_n(۰)$ و $\mathbf{B}_n(۰)$.

با توجه به اینکه

$$y \approx \frac{\kappa_n(۰)}{۲}s^۲ \;,\; z \approx \frac{\kappa_n(۰)\tau_n(۰)}{٦}s^۳$$

نتیجه میگیریم که اگر $\tau_n(۰) \neq ۰$، آنگاه $y^۳ \approx \frac{۹\kappa_n(۰)}{۲\tau_n^۲(۰)}z^۲$ که یک منحنی مکعبی است. به شکل ۱۴.۳ توجه شود.

مطالب بالا را در قضیهٔ زیر میتوان خلاصه نمود:

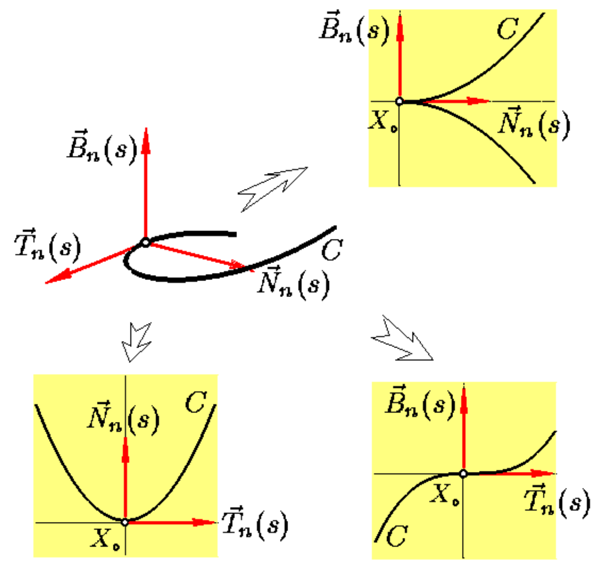
۷.۴.۳ قضیهٔ بنیادی هندسهٔ موضعی منحنیها.

فرض کنیم منحنی C به صورت طبیعی پارامتره شده است و $X_۰ = \mathbf{r}(۰)$ نقطهای منظم و دلخواه از C است. فرض کنیم منحنی را در حوالی نقطهٔ $X_۰$ و نسبت به کنج فرنهٔ در $X_۰$ به صورت

$$\mathbf{r}_n(s) = x(s)\mathbf{T}_n(۰) + y(s)\mathbf{N}_n(۰) + z(s)\mathbf{B}_n(۰)$$

نوشته‌ایم. در این صورت

$$y \approx \frac{\kappa_n(0)}{2}x^2 \qquad z \approx \frac{\kappa_n(0)\tau_n(0)}{6}x^3 \qquad y^3 \approx \frac{9\kappa_n(0)}{2\tau_n^2(0)}z^2$$



شکل ۱۴.۳: نمایش موضعی منحنیها

۸.۴.۳ قضیهٔ تعمیم یافتهٔ فرنه. در مورد مشتقات کنج فرنه نسبت به پارامتر دلخواه داریم

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(t) = v(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t) \\ \mathbf{N}'(t) = -v(t)\kappa(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{B}(t) \\ \mathbf{B}'(t) = -v(t)\tau(t)\mathbf{N}(t) \end{cases}$$

که در اینجا $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{ds}{dt}$.

اثبات: توجه داریم که

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{T}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{T}_n(s) \\ &= \frac{ds}{dt} \times \frac{d}{ds}\mathbf{T}_n(s) = v(t) \times \mathbf{T}_n'(s) \\ &= v(t)\left(\kappa_n(s)\mathbf{N}_n(s)\right) = v(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{N}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{N}_n(s) \\ &= \frac{ds}{dt} \times \frac{d}{ds}\mathbf{N}_n(s) = v(t) \times \mathbf{N}_n'(s) \\ &= v(t)\left(-\kappa_n(s)\mathbf{T}_n(s) + \tau_n(s)\mathbf{B}_n(s)\right) \\ &= -v(t)\kappa(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{B}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{B}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{B}_n(s) \\ &= \frac{ds}{dt} \times \frac{d}{ds}\mathbf{B}_n(s) = v(t) \times \mathbf{B}_n'(s) \\ &= v(t)\left(-\tau_n(s)\mathbf{N}_n(s)\right) = -v(t)\tau(t)\mathbf{N}(t) \end{aligned}$$

و به این ترتیب برهان تمام است. □

۹.۴.۳ قضیه. چنانچه منحنی C توسط $\mathbf{r}(t)$ پارامتره شده باشد آنگاه

۱) $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ ۲) $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$

۳) $\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}$ ۴) $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

۵) $\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \bullet \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}$

اثبات: با توجه به اینکه $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \mathbf{T}_n(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{r}_n(s) = \frac{dt}{ds} \times \frac{d}{dt}\mathbf{r}_n(s) \\ &= v(t)\frac{1}{v(t)} \times \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} \end{aligned}$$

و فرمول (۱) اثبات شد. یک نتیجهٔ خاص از آن عبارت است از $\mathbf{r}' = v\mathbf{T}$. بنابراین

$$\mathbf{r}'' = (v\mathbf{T})' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}' = v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}$$
$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (v\mathbf{T}) \times (v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}) = \kappa v^3\mathbf{B}$$

بنابراین $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = \|\kappa v^3\mathbf{B}\| = |\kappa|v^3$، و در نتیجه فرمول (۴) اثبات گردید. با قرار دادن این مقدار در عبارت بالا، فرمول (۳) نیز نتیجه می‌گردد. بعلاوه

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''' &= (\mathbf{r}'')' = (v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N})' \\ &= v''\mathbf{T} + v'\mathbf{T}' + \kappa' v^2\mathbf{N} + 2\kappa v\mathbf{N} + \kappa v^2\mathbf{N}' \\ &= v''\mathbf{T} + v'(v\kappa\mathbf{N}) + \kappa' v^2\mathbf{N} + 2\kappa v\mathbf{N} \\ &\quad + \kappa v^2(-v\kappa\mathbf{T} + v\tau\mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \bullet \mathbf{r}'''(t) = \kappa^2 v^6 \tau = \|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|\tau$$

و فرمول (۶) اثبات گردید. فرمول (۲) بدیهی است. □

۱۰.۴.۳ نتیجه. در مورد منحنی مسطحهٔ C با پارامتر $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ داریم

۱) $\mathbf{T}(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$

۲) $\mathbf{N}(t) = \mathrm{sgn}(\kappa(t))\frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$

۳) $\kappa(t) = \frac{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)}{\left(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\right)^3}$

اگر کنج فرنهٔ یک منحنی مسطحهٔ مفروض C داده شده باشد و نیز اگر انحناء این منحنی در همهٔ لحظات آن مشخص باشد در این صورت می‌توان منحنی C را به صورت منحصر بفردی یافت.

یک نتیجهٔ این مطلب آن است که اگر انحناء یک منحنی مسطح داده شده باشد، آن منحنی (صرف نظر از یک تبدیل اقلیدسی) مشخص است.

۱۱.۴.۳ قضیهٔ بنیادی هندسهٔ فراگیر منحنیهای مسطحه. فرض کنید $f(t)$ تابعی بر بازهٔ $I\subseteq\mathbb{R}$ بوده و $\langle X_\circ,\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ یک کنج آفین باشد (یعنی، $\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=1$ و $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$) و $t_\circ\in I$ عددی دلخواه است. در این صورت، یک و تنها یک منحنی مسطحه $\mathbf{r}(t)$ با دامنهٔ I وجود دارد که

۱) $\forall t\in I\ :\ \kappa(t)=f(t)$ ۲) $\mathbf{r}(t_\circ)=X_\circ$

۳) $\mathbf{T}(t_\circ)=\mathbf{u}$ ۴) $\mathbf{N}(t_\circ)=\mathbf{v}$

۱۲.۴.۳ نتیجه. اگر دو منحنی مسطحه طوری متناظر باشند که در نقاط متناظر دارای انحناء برابرند، در این صورت آن دو منحنی قابل انطباقند.

در مورد منحنیهای غیر مسطح لازم است که علاوه بر کنج فرنه و انحناء، تاب نیز داده شود. کوتاه سخن اینکه

۱۳.۴.۳ قضیهٔ بنیادی هندسهٔ فراگیر منحنیهای فضایی. فرض کنید $f(t)\geq 0$ و $g(t)$ توابعی بر بازهٔ $I\subseteq\mathbb{R}$ هستند و $<X_\circ,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}>$ یک کنج آفین راستگرد باشد (یعنی، طول این سه بردار برابر یک بوده و دو به دو هم عمود باشند و بعلاوه $\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$) و $t_\circ\in I$ عددی دلخواه است. در این صورت، یک و تنها یک منحنی $\mathbf{r}(t)$ با دامنهٔ I وجود دارد که

۱) $\forall t\in I\ :\ \kappa(t)=f(t)$ ۲) $\forall t\in I\ :\ \tau(t)=g(t)$

۳) $\mathbf{r}(t_\circ)=X_\circ$ ۴) $\mathbf{T}(t_\circ)=\mathbf{u}$

۵) $\mathbf{N}(t_\circ)=\mathbf{v}$ ۶) $\mathbf{B}(t_\circ)=\mathbf{w}$

۱۴.۴.۳ نتیجه. اگر دو منحنی طوری متناظر باشند که در نقاط متناظر دارای انحناء و تاب برابرند، در این صورت آن دو منحنی قابل انطباقند.

۱۵.۴.۳ یادداشت. برای مطالعهٔ بیشتر در این خصوص می‌توانید به کتاب «هندسه دیفرانسیل ساده، مهدی نجمی‌خواه، ساحل اندیشه تهران، تهران، ۱۳۸۳» مراجعه کنید.

۵.۳ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل `doc.pdf` مراجعه شود. در ادامه از بستهٔ نرم افزاری `linalg` استفاده می‌کنیم. این نرم افزار را با دستور `with(linalg)` می‌توان در محیط میپل حاضر نمود.

۱.۵.۳ تعریف تابع برداری. تابع برداری

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(f(t),g(t),h(t))}$$

را با دستور `r:=vector([f(f),g(t),h(t)])` می‌توان در محیط میپل وارد نمود.

۲.۵.۳ اعمال معمولی بر توابع برداری. درست همانند بردارها که در انتهای فصل قبل شرح آن داده شد، می‌توان با توابع برداری عمل کرد.

۳.۵.۳ محاسبهٔ مشتق و یا انتگرال تابع برداری. فرض کنید تابع برداری r قبلاً در محیط میپل تعرف شده باشد. در این صورت

مشتق تابع برداری r نسبت به t $\xmapsto{\text{میپل}}$ $\mathrm{map(diff,r,t)}$

انتگرال نامعین تابع برداری r نسبت به t $\xmapsto{\text{میپل}}$ $\mathrm{map(int,r,t)}$

انتگرال تابع برداری r از a تا b $\xmapsto{\text{میپل}}$ $\mathrm{map(int,r,t=a..b)}$

۴.۵.۳ ترسیم منحنی. فرض کنید بخواهیم تابع برداری $\mathrm{r(t)}=\mathrm{(f(t),g(t),h(t))}$ را بر بازهٔ $\mathrm{[a;b]}$ ترسیم کنیم. در این صورت از دستور

```
plots[spacecurve]([f(t),g(t),h(t)],t=a..b)
```

استفاده می‌کنیم. با دستورات `color`، `numpoints` و `thickness` بترتیب می‌توان رنگ، تعداد نقاط و قطر منحنی ترسیم شده را کنترل نمود.

۵.۵.۳ یادداشت. در آدرس اینترنتی `http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm` مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.

فصل ۴

توابع چند متغیره و حد آنها

هدف از این فصل، معرفی مفهوم تابع چند متغیره و حد آن می‌باشد. عمدهٔ مطالب بعدی کتاب به مطالعهٔ این گونه توابع اختصاص دارد و بر همین اساس، مطالعهٔ فصل حاضر را کلیدی برای فهم سایر فصول می‌توان تلقی نمود. این گونه توابع تعمیم طبیعی توابع معمولی $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هستند.

۱.۴ تعریف تابع چند متغیره

۱.۱.۴ تعریف. هر تابع که از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ باشد را **تابع n–متغیره** می‌نامند. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی n–متغیره باشد، مجموعهٔ همهٔ $X \in \mathbb{R}^n$ هایی که f به ازای آنها تعریف می‌گردد را **دامنهٔ** f نامیده و با نماد D_f نشان می‌دهیم؛ و مجموعهٔ همهٔ $f(X)$ ها که $X \in D_f$ را **برد** f نامیده و با نماد R_f نشان می‌دهیم: $D_f := \left\{X \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(X) \in \mathbb{R}\right\}$.

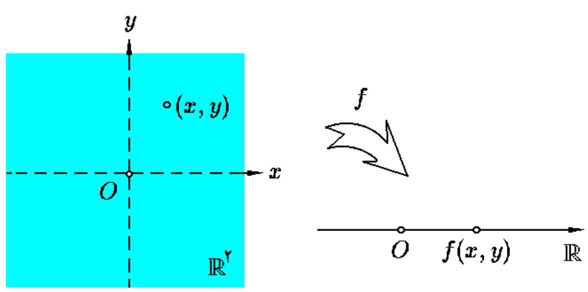
۲.۱.۴ یادداشت. از نقطه نظر تئوری پذیرش اصطلاح «تابع چند متغیره» کمی دشوار است، در واقع بهتر است این گونه گفته شود که متغیر تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک بردار است. یعنی «f تابعی با متغیر بردار n–مؤلفه‌ای است».

۳.۱.۴ مثال. ۱) تابع دو متغیرهٔ $f(x,y) = ۱/xy$ را در نظر بگیرید. برای تعریف شدن $f(x,y)$ باید xy مخالف صفر باشد، بنابراین دامنهٔ f عبارت است از

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \,\middle|\, xy \neq ۰\right\} = \mathbb{R}^۲ - \left\{(x,y) \,\middle|\, xy = ۰\right\} \\ &= \mathbb{R}^۲ - \left\{(x,y) \,\middle|\, x = ۰ \text{ یا } y = ۰\right\} \\ &= \mathbb{R}^۲ - \{y - \text{محور}\} \cup \{x - \text{محور}\} \end{aligned}$$

برای تعیین بر f توجه می‌کنیم که اگر قرار باشد $f(x,y) = a$، آنگاه باید $xy = ۱/a$. پس حتماً $a \neq ۰$. بعلاوه، با فرض $x = ۱$، داریم $y = ۱/a$. در نتیجه $f(۱, ۱/a) = a$. یعنی برد f عبارت است از $R_f = \mathbb{R} - \{۰\}$ (به شکل ۱.۴ توجه شود).

در مورد این تابع ملاحظه می‌شود که $f(۱, -۱) = -۱$، $f(۲, ۵) = ۱/۱۰$ و $f(۱/x, x) = f(x, ۱/x) = ۱$.



شکل ۱.۴: تابع دو متغیرهٔ $z = f(x,y)$

مثال ۲) تابع دو متغیرهٔ $f(x,y) = \log_y x$ را در نظر بگیرید. در این صورت دامنهٔ f عبارت است از

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \,\middle|\, x > ۰ \,,\, y > ۰ \,,\, y \neq ۱\right\} \\ &= \left\{\text{ربع اول}\right\} - \{y = ۱ \text{ خط}\} \end{aligned}$$

(به شکل ۲.۴ توجه شود). بعلاوه، برای تعیین برد f توجه می‌کنیم که اگر $f(x,y) = a$، آنگاه $x = y^a$. با فرض $y = e$ داریم $x = e^a$ و لذا $f(e^a, e) = a$. یعنی، برد f برابر کل $\mathbb{R}$ است. در اینجا، به عنوان مثال ملاحظه می‌گردد که اگر x، y و z اعداد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند، آنگاه

$$f(۱۰۰, ۱۰) = \log_{۱۰} ۱۰۰ = \log_{۱۰} ۱۰^۲ = ۲$$

$$f(۱, y) = \log_y ۱ = ۰$$

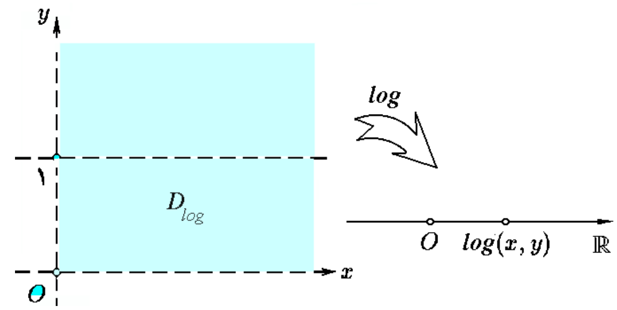
$$f(x, x) = \log_x x = ۱$$

$$f(۱/x, y) = \log_y ۱/x = -\log_y x = -f(x,y)$$

$$f(xy, z) = \log_z xy = \log_z x + \log_z y = f(x,z) + f(y,z)$$

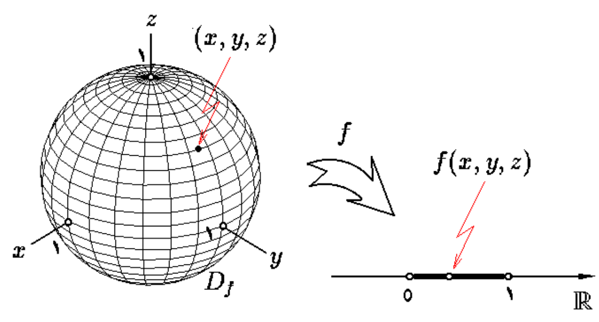
مثال ۳) تابع سه متغیرهٔ $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ را در نظر بگیرید. در این صورت، دامنهٔ f برابر

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y,z)\,\middle|\, 1-x^2-y^2-z^2\ge 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2+z^2\le 1\right\}\end{aligned}$$



شکل ۲.۴: دامنهٔ تابع $f(x,y)=\log_y x$

است، که کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع یک می‌باشد. بعلاوه، چون $0\le x^2+y^2+z^2\le 1$، پس $0\le 1-x^2-y^2-z^2\le 1$ و با جزر گرفتن، داریم $0\le f(x,y,z)\le 1$. بنابراین، برد f عبارت است از $R_f=[0;1]$ (به شکل ۳.۴ توجه شود). در اینجا، ملاحظه می‌گردد که به ازای هر $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ای داریم $f(x,y,z)=f(\pm x,\pm y,\pm z)=f(\pm y,\pm x,\pm z)$.



شکل ۳.۴: نمودار تابع مثال ۳

مثال ۴) فرض کنیم $f(x,y,z)=\frac{1}{z}\sqrt{x^2+y^2}$، در این صورت:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+} f\left(3t\,,\,5t^2\,,\,t\right) &= \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\sqrt{9t^2+25t^4}\\ &= \lim_{t\to 0+}\sqrt{9+25t^2}=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f\left(1-2t\,,\,3t+2\,,\,t-1\right)\Big|_{t=-1} &=\\ &=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t-1}\sqrt{(1-2t)^2+(3t+2)^2}\right\}_{t=-1}\\ &=\frac{1}{(t-1)^2}\left\{\frac{26t+8}{2\sqrt{13t^2+8t+5}}(t-1)\right.\\ &\left.-\sqrt{13t^2+8t+5}\right\}_{t=-1}=\frac{4}{5}\sqrt{10}\end{aligned}$$

۴.۱.۴ تمرین. دامنه و برد هر یک از توابع زیر را مشخص کنید:

۱) $f=\sqrt{x^2+y}$ ۲) $f=\ln\left(x^2+y^2\right)$

۳) $f=\arcsin\left(x^2-y^2\right)$ ۴) $f=x+\sqrt{y}$

۵) $f=\ln(1-xy)$ ۶) $f=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$

۷) $f=\sqrt{x}+\sqrt{yz}$ ۸) $f=\ln(xyz)$

۹) $f=\arccos(x+2y+3z)$

۱۰) $f=\sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)}$

۱۱) در صورتی که $f(x,y)=x/y-x^2y$، $X_0=(-1,2)$ و $\mathbf{v}=(2,3)$، مطلوبست محاسبهٔ:

الف) $\lim_{t\to 2} f\left(X_0+t\mathbf{v}\right)$ ب) $\lim_{t\to 0} f\left(X_0+t\mathbf{v}\right)$

ج) $\lim_{t\to -1} f\left(X_0+t\mathbf{v}\right)$ د) $\frac{d}{dt}f\left(X_0+t\mathbf{v}\right)\Big|_{t=2}$

ح) $\frac{d}{dt}f\left(X_0+t\mathbf{v}\right)\Big|_{t=0}$ و) $\frac{d}{dt}f\left(X_0-\sin(t^2)\mathbf{v}\right)\Big|_{t=-1}$

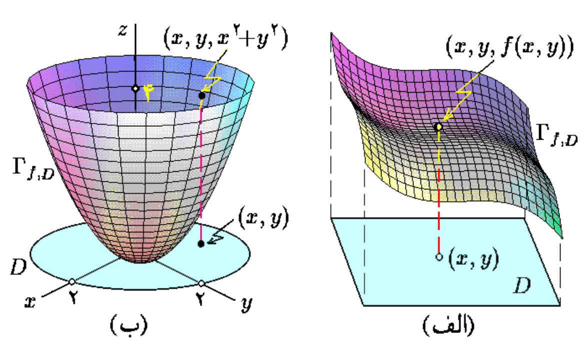
۱۲) فرض کنید $f(x+y\,,\,y/x)=x^2-y^2$. تابع $f(x,y)$ را بیابید.

۱۳) فرض کنید $f(r\sin\theta\,,\,r\cos\theta)=r\tan\theta$ و $r\ge 0$. تابع $f(x,y)$ را بیابید.

۱۴) چنانچه $f\left(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi\right)=\rho^2$، تابع $f(x,y,z)$ را بیابید.

۱۵) در صورتی که $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$، حدود زیر محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\right\}$ ب) $\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to x}f(x,y)\right\}$



شکل ۴.۴: الف) نمودار تابع دو متغیرهٔ $z=f(x,y)$ بر مجموعهٔ D ب) نمودار تابع $f=x^2+y^2$ بر مجموعهٔ $D: x^2+y^2\le 4$

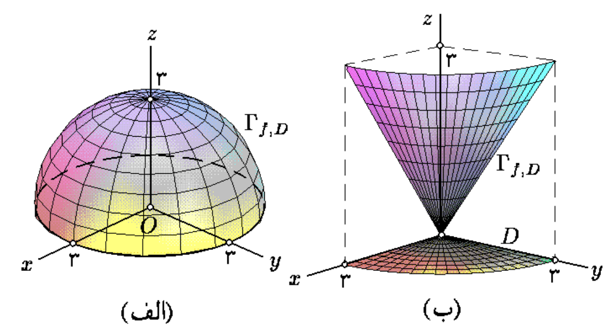
۵.۱.۴ نمودار تابع دو متغیرهٔ. فرض کنیم $z=f(x,y)$ تابعی دو متغیره است و $D\subseteq D_f$. منظور از نمودار f بر D، مجموعهٔ همهٔ نقاطی چون (x,y,z) از فضا است که $z=f(x,y)$:

$$\Gamma_{f,D} := \left\{(x,y,z)\,\middle|\,(x,y)\in D\,,\ z=f(x,y)\right\}$$

یا در نمایش مختصر $\Gamma_{f,D}\ :\ (x,y)\in D\,,\ z=f(x,y)$. اگر $D=D_f$ از ذکر D خود داری می‌کنیم (شکل ۴.۴–الف).

۶.۱.۴ مثال. ۱) فرض کنید $f(x,y)=x^2+y^2$ و $D\ :\ x^2+y^2\le 4$. در این صورت $(x,y,z)\in\Gamma_{f,D}$ اگر و فقط اگر $z=x^2+y^2$؛ به این ترتیب نمودار f بر D قسمتی از یک سهمی‌گون بیضوی است که تصویر آن بر xy–صفحه $x^2+y^2\le 4$ است. به شکل ۴.۴–ب توجه کنید:

$$\Gamma_{f,D}\ :\ x^2+y^2\le 4\,,\ z=x^2+y^2$$



شکل ۵.۴: الف) نمودار تابع $\sqrt{x^2+y^2}$ بر مجموعهٔ $0\le x\,,\ 0\le y\,,\ x^2+y^2\le 9$
ب) نمودار تابع دو متغیرهٔ $\sqrt{4-x^2-y^2}$ بر مجموعهٔ $x^2+y^2\le 9$

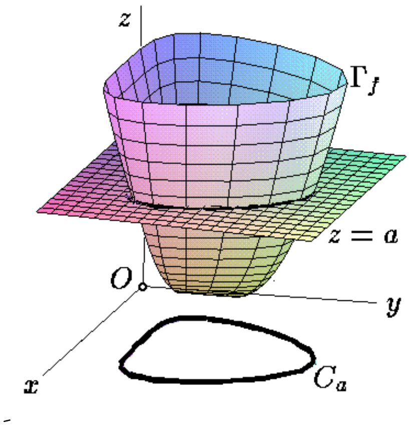
مثال ۲) فرض کنید $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ و

$$D\ :\ 0\le x\,,\ 0\le y\,,\ x^2+y^2\le 9$$

در این صورت، به شرطی $(x,y,z)\in\Gamma_{f,D}$، که $z=\sqrt{x^2+y^2}$. به بیان دیگر، $z^2=x^2+y^2$ که یک مخروط به موازات محور z ها است. چون $z\le 0$، پس قسمتی از نیمهٔ بالایی آن مورد نظر است که تصویر آن بر xy–صفحه برابر D می‌گردد. (به شکل ۵.۴–الف توجه شود). در نتیجه، نمودار f بر D عبارت است از

$$\Gamma_{f,D}\ :\ 0\le x\,,\ 0\le y\,,\ x^2+y^2\le 9\,,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$$

مثال ۳) فرض کنید $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$. در این صورت، $D_f\ :\ x^2+y^2\le 9$ و وقتی و تنها وقتی $(x,y,z)\in\Gamma_f$ که $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$. توجه شود که $x^2+y^2+z^2=9$، کره‌ای به مرکز مبداء و شعاع ۳ می‌باشد (به شکل ۵.۴–ب توجه شود).



شکل ۶.۴: منحنی تراز یک تابع دو متغیره

۷.۱.۴ تمرین. در هر مورد، نمودار $z=f(x,y)$ بر D را ترسیم کنید:

۱) $f=4-x^2-y^2,\ \ D\ :\ x^2+y^2\le 4\,,\ 0\le y$

۲) $f=1-\sqrt{1-x^2-y^2},\ \ D\ :\ x^2+y^2\le 1$

۳) $f=\sqrt{x^2+y^2},\ \ D\ :\ 1\le x^2+y^2\le 4$

۴) $f=\sqrt{1+x^2+y^2},\ \ D\ :\ x^2+y^2\le 8$

۵) $f=\sqrt{x^2+y^2-1},\ \ D\ :\ 1\le x^2+y^2\le 4$

۶) $f=2,\ \ D\ :\ 0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1$

۷) $f=\sqrt{y-x^2},\ \ D\ :\ x^2\le y\le 4$

۸) $f=x,\ \ D\ :\ 0\le x\le 2\,,\ 0\le y\le 5$

۹) $f=1-x-y,\ \ D\ :\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$

۱۰) $f=\sin x,\ \ D\ :\ 0\le x\le 2\pi\,,\ 0\le y\le 1$

۱۱) $f=\cos(x^2+y^2),\ \ D\ :\ x^2+y^2\le 16\pi^2$

۱۲) $f=1-|x|-|y|,\ \ D\ :\ |x|+|y|\le 1$

۸.۱.۴ منحنی تراز. فرض کنید $z=f(x,y)$ و $a\in R_f$. مجموعهٔ همهٔ (x,y) هایی که به ازای آنها f برابر a است را منحنی تراز f نظیر به a نامیده و با نماد C_a نشان می‌دهیم. در واقع، C_a محل برخورد صفحهٔ $z=a$ با نمودار تابع f می‌باشد (به شکل ۶.۴ توجه شود): $C_a\ :\ f(x,y)=a$. به کمک منحنیهای تراز می توان نمو دار تابع را تجسم کرد.

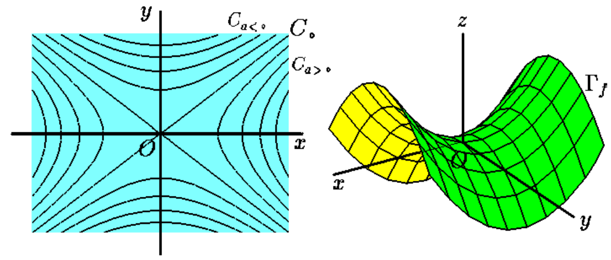
۹.۱.۴ مثال. ۱) تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ را در نظر بگیرید. اگر $a\in\mathbb{R}$، سه حالت ممکن است رخ دهد:

الف) $0<a$: در این صورت $C_a\ :\ x^2-y^2=a$ یک هذلولی در راستای x– محور است.

ب) $a=0$: در این صورت $C_0\ :\ x^2=y^2$ اجتماع دوخط

$y = x$ و $y = -x$ است.

ج) $a < 0$: در این صورت $C_a : x^2 - y^2 = a$ یک هذلولی در راستای $y-$ محور است (به شکل ۷.۴ توجه شود).

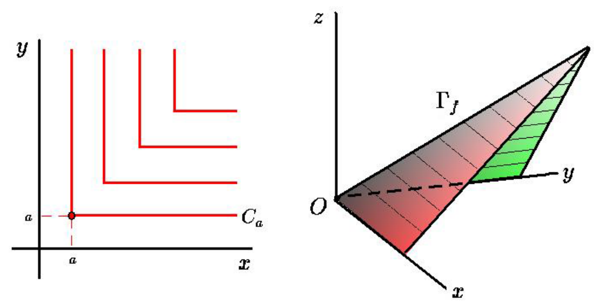


شکل ۷.۴: منحنیهای تراز تابع $f = x^2 - y^2$

مثال ۲) تابع $f(x, y) = \min\{x, y\}$ را در نظر بگیرید. اگر $a \in \mathbb{R}$، آنگاه:

$$C_a : \min\{x, y\} = a : a = x \le y \quad \text{یا} \quad a = y \le x$$

که دو نیم خط با شروع از نقطهٔ (a, a) می‌باشند (به شکل ۸.۴ توجه شود).



شکل ۸.۴: منحنیهای تراز $f = \min\{x, y\}$

۱۰.۱.۴ تمرین. منحنیهای تراز هر یک از توابع زیر را رسم کرده، نمودار آنها را تجسم کنید:

۱) $f = x + y^2$ ۲) $f = (x + y)^2$

۳) $f = x^2 + y^2$ ۴) $f = y/x$

۵) $f = |x| + |y| - |x + y|$ ۶) $f = \sqrt{xy}$

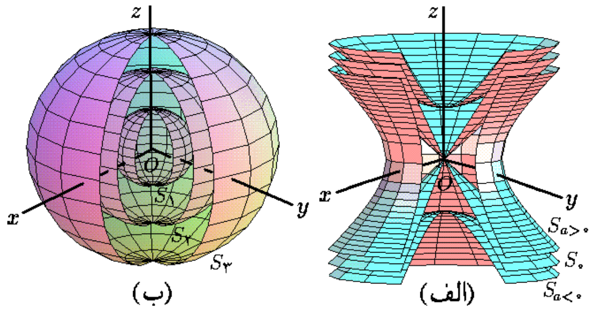
۷) $f = \max\{x, y\}$ ۸) $f = \sin\left(\pi\left(x^2 + y^2\right)\right)$

۹) $f = x \sin y$ ۱۰) $f = |x^2 - y^2|$

۱۱.۱.۴ سطوح تراز. به دلیل سه‌بعدی بودن فضا $\mathbb{R}^3$، امکان ترسیم نمودار تابع سه متغیره وجود ندارد. حداقل کاری که می‌توان انجام داد، ترسیم سطوح تراز آن است. مطابق تعریف، سطح تراز نظیر به عدد a از تابع $f(x, y, z)$، مجموعهٔ همهٔ سه‌تایی‌های مرتب (x, y, z) است که $f(x, y, z) = a$. یعنی:

$$S_a : f(x, y, z) = a$$

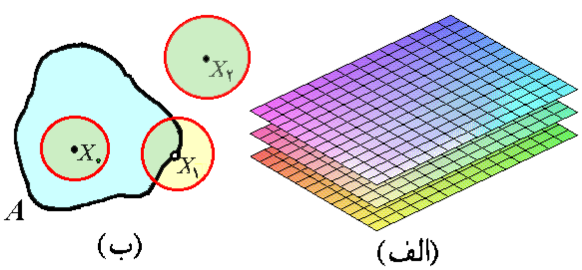
۱۲.۱.۴ مثال. ۱) تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ را در نظر بگیرید. در این صورت، اگر $a > 0$، آنگاه S_a یک هذلولی گون یک پارچه است؛ اگر $a = 0$، آنگاه S_a مخروط است و اگر $a < 0$، آنگاه S_a یک هذلولی گون دو پارچه می‌باشد (به شکل ۹.۴—الف توجه شود).



شکل ۹.۴: الف) سطوح تراز تابع $f = x^2 + y^2 - z^2$ ب) سطوح تراز تابع $f = x^2 + y^2 + z^2$

مثال ۲) تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ را در نظر بگیرید. در این صورت، اگر $a < 0$، آنگاه S_a تهی است. اگر $a = 0$، آنگاه S_a تک نقطهٔ $\{(0, 0, 0)\}$ است؛ و بالاخره، اگر $a > 0$، آنگاه S_a کره‌ای به مرکز مبداء و شعاع $\sqrt{a}$ می‌باشد (به شکل ۹.۴—ب توجه شود).

مثال ۳) تابع $f = x + 2y - 3z$ را در نظر بگیرید. در این صورت S_a عبارت از صفحهٔ به معادلهٔ $x + 2y - 3z = a$ می‌باشد (به شکل ۱۰.۴—الف توجه شود).



شکل ۱۰.۴: الف) سطوح تراز تابع $f = x + 2y - 3z$ ب) X_0، X_1 و X_2 بترتیب نقطهٔ درونی، مرزی و بیرونی مجموعهٔ A هستند.

۱۳.۱.۴ تمرین. سطوح تراز هر یک از توابع داده شده را ترسیم کنید:

۱) $u = x + y + z$ ۲) $u = z - x^2 - y^2$

۳) $u = x^2 - y^2 - z^2$ ۴) $u = z - x^2 + y^2$

۵) $u = |x + y| + |z|$ ۶) $u = z - xy$

۷) $u = \arcsin\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

۸) $u = \operatorname{sgn}\left(\sin\left(x^2 + y^2 - z^2\right)\right)$

۲.۴ اثبات حد

حد یکی از سه مفهوم اصلی در حساب دیفرانسیل و انتگرال است. قبلاً با مفهوم حد توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ آشنا شده‌اید. هدف از این بخش تعمیم آن به توابع از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ می‌باشد. قبل از پرداختن به تعریف حد، به اصطلاح نقطهٔ چسبیده نیاز داریم.

۱.۲.۴ تعریف. اگر $X_\circ \in \mathbb{R}^n$ و $\circ < r \in \mathbb{R}$، منظور از **گوی** به مرکز $X_\circ$ و شعاع r، مجموعهٔ همهٔ نقاطی X از $\mathbb{R}^n$ است که فاصلهٔ آنها تا $X_\circ$ کمتر از r می‌باشد، یعنی $\|X - X_\circ\| < r$. این مجموعه را با نماد $B_r(X_\circ)$ نشان می‌دهیم. **گوی سفتهٔ** به مرکز $X_\circ$ و شعاع r، عبارت از مجموعهٔ $B_r(X_\circ)$ منهی نقطهٔ $X_\circ$ است:

$$B_r^\star(X_\circ) = B_r(X_\circ) - \{X_\circ\}$$

در صورتی می‌گوئیم $X_\circ$ **نقطهٔ چسبیدهٔ** مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ است که به ازای هر $r > \circ$، گوی سفتهٔ به مرکز $X_\circ$ و شعاع r، مجموعهٔ A را قطع کند. در شکل ۱۰.۴—ب، نقاط $X_\circ$ و $X_۱$ چسبیده هستند ولی $X_۲$ نیست، زیرا حداقل یک گوی به مرکز $X_۲$ وجود دارد که A را قطع نمی‌کند.

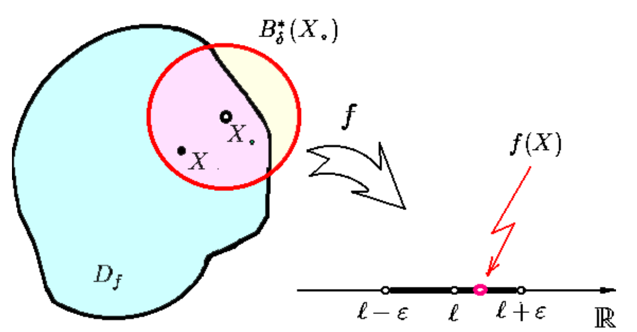
۲.۲.۴ مثال. ۱) مجموعهٔ نقاط چسبیده به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ با خود دایره برابر است.

مثال ۲) مجموعه نقاط چسبیده به گوی باز $x^۲ + (y-۱)^۲ < ۹$ برابر گوی بستهٔ $x^۲ + (y-۱)^۲ \leq ۹$ می‌باشد.

مثال ۳) اگر $A : \circ \leq x \leq ۱ \,,\, x \leq y < ۱ \,,\, ۱ \leq z \leq ۲$ آنگاه مجموعهٔ نقاط چسبیده به A عبارتست از

$$\overline{A} : \circ \leq x \leq ۱ \,,\, x \leq y \leq ۱ \,,\, ۱ \leq z \leq ۲$$

مثال ۴) اگر $A = \{۱/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$، آنگاه مجموعهٔ نقاط چسبیده به A عبارتست از $\overline{A} = A \cup \{\circ\}$. در مورد $\circ$ باید توجه شود که هر بازهٔ باز به شکل $(-\varepsilon;\varepsilon)$ عملاً بینهایت عدد به شکل $۱/n$ وجود دارد. کافی است فرض شود که $n \geq [۱/\varepsilon]$.



شکل ۱۱.۴: اثبات حد

۳.۲.۴ تعریف. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی چند متغیره، $X_\circ \in \mathbb{R}^n$ نقطه‌ای چسبیده به دامنهٔ f و ℓ عددی حقیقی است. در صورتی می‌گوئیم **حد** f در $X_\circ$ **برابر** ℓ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{X \to X_\circ} f(X) = \ell$ که به ازاء هر $\varepsilon > \circ$، یک $\delta > \circ$ ای یافت شود که به ازای هر $X \in B_\delta^\star(X_\circ) \cap D_f$ ای قدر مطلق تفاضل $f(X)$ و $f(X_\circ)$ از ε کمتر شود (به شکل ۱۱.۴ توجه شود). به بیان دیگر

$$\forall\varepsilon > \circ\exists\delta > \circ\forall X \in D_f \quad (۱.۴)$$
$$\Big(\circ < \|X - X_\circ\| < \delta \Rightarrow |f(X) - f(X_\circ)| < \varepsilon\Big)$$

چون بررسی شرط $\circ < \|X - X_\circ\| < \delta$ کمی وقتگیر است، از شرط معادل زیر می‌توان استفاده نمود:

$$|x - x_\circ| < \delta \;,\; |y - y_\circ| < \delta \;,\; |z - z_\circ| < \delta \cdots \quad (۲.۴)$$

۴.۲.۴ مثال. ۱) فرض کنید $f = xy^۲$ و $X_\circ$ نقطهٔ $(-۱, ۲)$ است. در این صورت، ثابت کنید $\ell = -۴$. یعنی $\lim\limits_{(x,y)\to(-۱,۲)} xy^۲ = -۴$.

حل. برای اثبات این مطلب، باید نشان دهیم

$$\forall\varepsilon > \circ\exists\delta > \circ\forall(x,y) \in \mathbb{R}^۲$$
$$\Big(\{|x+۱| < \delta, |y-۲| < \delta\} \Rightarrow |xy^۲ + ۴| < \varepsilon\Big)$$

از قدر مطلق $|xy^۲ + ۴|$ شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |xy^۲ + ۴| &= |(x+۱)y^۲ + ۴ - y^۲| \\ &= |y^۲(x+۱) + (y+۲)(y-۲)| \\ &\leq y^۲|x+۱| + |y+۲||y-۲| \\ &\leq y^۲\delta + |y+۲|\delta \end{aligned}$$

برای حذف ضرایب δ، از تکنیک شعاع همسایگی (که در فصل ۳ بسیار تجربه شده است) استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\delta \leq ۱$ بنابراین $|x+۱| < ۱$ و $|y-۲| < ۱$. پس $۱ < y < ۳$ و لذا $y^۲ < ۹$ و $|y+۲| < ۵$. بنابراین

$$|xy^۲ + ۴| \leq ۹\delta + ۵\delta = ۱۴\delta$$

پس برای $|xy^۲ + ۴| < \varepsilon$ کافی است فرض شود $۱۴\delta \leq \varepsilon$. به بیان دیگر $\delta \leq \varepsilon/۱۴$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که $\delta = \min\{۱, \varepsilon/۱۴\}$. اکنون به ابتدای مسأله می‌توان رفت، و رابطهٔ شرطی مورد نظر را اثبات نمود.

مثال ۲) فرض کنید $f(x,y) = \dfrac{x+۲y}{x^۲ - y^۲}$ و $X_\circ = (۲,۱)$، در این صورت ثابت کنید که $\ell = ۴/۳$. به عبارت دیگر

. $\lim\limits_{(x,y)\to(۲,۱)} \dfrac{x+۲y}{x^۲-y^۲} = \dfrac{۴}{۳}$

حل. باید ثابت شود که

$$\forall\varepsilon>۰\,\exists\delta>۰\,\forall(x,y)\in D_f$$
$$\left((|x-۲|<\delta,|y-۱|<\delta)\Rightarrow\left|\frac{x+۲y}{x^۲-y^۲}-\frac{۴}{۳}\right|<\varepsilon\right)$$

که در اینجا $D_f=\mathbb{R}^۲-\{y=-x\}\cup\{y=x\}$ و $X_۰=(۲,۱)$ یک نقطهٔ چسبیده به D_f می‌باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+۲y}{x^۲-y^۲}-\frac{۴}{۳}\right| &= \left|\frac{۳x+۶y-۴x^۲+۴y^۲}{۳\left(x^۲-y^۲\right)}\right|\\ &= \frac{۱}{۳|x^۲-y^۲|}\Big|\left(۴x+۵\right)\left(x-۲\right)+\left(۴y+۱۰\right)\left(y-۱\right)\Big|\\ &\leq \frac{۱}{۳|x^۲-y^۲|}\Big\{|۴x+۵||x-۲|+۲|۲y+۵||y-۱|\Big\}\\ &\leq \frac{۱}{۳|x^۲-y^۲|}\Big\{|۴x+۵|+۲|۲y+۵|\Big\}\delta\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\delta\leq ۱/۴$ (زیرا باید فرض δ طوری باشد که $B^*_\delta\left(X_۰\right)\subseteq D_f$) در این صورت

$$\begin{cases} ۰<|x-۲|<\frac{۱}{۴}\\ ۰<|y-۱|<\frac{۱}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۷}{۴}<x<\frac{۹}{۴}\\ \frac{۳}{۴}<y<\frac{۵}{۴}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲۴}{۱۶}<x^۲-y^۲<\frac{۷۲}{۱۶}\\ ۱۲<۴x+۵<۱۴\\ \frac{۱۳}{۲}<۲y+۵<\frac{۱۵}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x^۲-y^۲|>\frac{۳}{۲}\\ |۴x+۵|<۱۴\\ |۲y+۵|<\frac{۱۵}{۲}\end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+۲y}{x^۲-y^۲}-\frac{۴}{۳}\right| &\leq \frac{۱}{۳\times(۳/۲)}\left\{۱۴+۲\times\frac{۱۵}{۲}\right\}\delta\\ &= \frac{۵۸}{۹}\delta\leq ۷\delta\end{aligned}$$

پس کافی است فرض شود $\varepsilon>۷\delta$، یا $\varepsilon/۷>\delta$. بنابراین $\delta=\min\{۱/۴\,,\,\varepsilon/۷\}$.

مثال ۳) فرض کنید $f(x,y,z)=\arcsin\left(xyz\right)$ و همچنین $X_۰=\left(-۱,۱/۲,\sqrt{۲}\right)$. ثابت کنید $\ell=\pi/۴$. به عبارت دیگر

. $\lim\limits_{(x,y,z)\to\left(-۱,۱/۲,\sqrt{۲}\right)}\arcsin(xyz)=-\pi/۴$

حل. باید ثابت شود که

$$\forall\varepsilon>۰\,\exists\delta>۰\,\forall(x,y,z)\in D_f$$
$$\left(\left\{|x+۱|<\delta\,,\,|y-۱/۲|<\delta\,,\,\left|z-\sqrt{۲}\right|<\delta\right\}\right.$$
$$\left.\Rightarrow|\arcsin(xyz)+\pi/۴|<\varepsilon\right)$$

که در اینجا $D_f=\{(x,y,z)\mid -۱\leq xyz\leq ۱\}$ و $X_۰$ به D_f چسبیده است (چرا؟). چون $\lim\limits_{x\to-\sqrt{۲}/۲}\arcsin x=-\pi/۴$،

بنابراین

$$\forall\varepsilon>۰\,\exists\delta>۰\,\forall x\in[-۱;۱]$$
$$\left(۰<\left|x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right|<\delta\Rightarrow\left|\arcsin x+\frac{\pi}{۴}\right|<\varepsilon\right)$$

با ترکیب این گزاره، با آنچه که می‌خواهیم ثابت کنیم، نتیجه می‌گیریم که باید ثابت شود

$$\forall\varepsilon>۰\,\exists\delta>۰\,\forall\left(x,y,z\right)\in D_f\Big(\Big\{۰<|x+۱|<\delta\,,$$
$$۰<\left|y-\frac{۱}{۲}\right|<\delta\,,\,۰<|z-\sqrt{۲}|<\delta\Big\}$$
$$\Rightarrow\left|xyz+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right|<\varepsilon\Big)$$

برای اثبات این امر، توجه می‌کنیم که:

$$\begin{aligned}\left|xyz+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right| &= \left|yz\left(x+۱\right)-z\left(y-\frac{۱}{۲}\right)-\frac{۱}{۲}\left(z-\sqrt{۲}\right)\right|\\ &\leq |yz||x+۱|+|z|\left|y-\frac{۱}{۲}\right|+\frac{۱}{۲}\left|z-\sqrt{۲}\right|\\ &= \left\{|yz|+|z|+\frac{۱}{۲}\right\}\delta\end{aligned}$$

با فرض $\delta<۱/۸$، داریم:

$$\begin{cases}|x+۱|<\frac{۱}{۸}\\ \left|y-\frac{۱}{۲}\right|<\frac{۱}{۸}\\ \left|z-\sqrt{۲}\right|<\frac{۱}{۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۷}{۸}<x<\frac{۹}{۸}\\ \frac{۳}{۸}<y<\frac{۵}{۸}\\ -\frac{۱}{۸}+\sqrt{۲}<z<\frac{۱}{۸}+\sqrt{۲}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-۱\leq\frac{۲۱}{۵۱۲}\left(۸\sqrt{۲}-۱\right)<xyz\\ \qquad<\frac{۴۵}{۵۱۲}\left(۸\sqrt{۲}+۱\right)<۱\\ \frac{۳}{۶۴}\left(۸\sqrt{۲}-۱\right)<yz<\frac{۵}{۶۴}\left(۸\sqrt{۲}+۱\right)<۱\\ \frac{۱}{۸}\left(۸\sqrt{۲}-۱\right)<z<\frac{۱}{۸}\left(۸\sqrt{۲}+۱\right)<۲\end{cases}$$

بنابراین $B^*_\delta\left(X_۰\right)\in D_f$ و

$$\left|xyz+\sqrt{۲}/۲\right|<\{۱+۲+۱/۲\}\,\delta<۴\delta$$

پس کافی است فرض شود $\varepsilon\leq ۴\delta$ یا $\varepsilon/۴\leq\delta$. بنابراین $\delta=\min\{۱/۸,\varepsilon/۴\}$.

مثال ۴) فرض کنیم $f(x,y,z)=\dfrac{\sin\left(x^۴+y^۴+z^۴\right)}{x^۲+y^۲+z^۲}$ و $X_۰=(۰,۰,۰)$، در این صورت نشان دهید که $\ell=۰$. یعنی

$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)}\frac{\sin\left(x^۴+y^۴+z^۴\right)}{x^۲+y^۲+z^۲}=۰$$

حل. باید نشان دهیم که:

$$\forall\varepsilon>۰\,\exists\delta>۰\,\forall\left(x,y,z\right)\in D_f$$

$$\left(\{|x|<\delta, |y|<\delta\,,\ |z|<\delta\} \Rightarrow \left|\frac{\sin\left(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}\right)}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\right|<\varepsilon\right)$$

که در اینجا $D_f=\mathbb{R}^{۳}$. می‌دانیم که $\sin\alpha\le\alpha\le ۰$ به ازای هر $\alpha\ge ۰$، بنابراین:

$$\left|\frac{\sin\left(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}\right)}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\right| \le \frac{x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$

حال فرض کنیم $u=\max\{|x|,|y|,|z|\}$، پس نباید فرض $u<\delta$. بعلاوه:

$$\frac{\sin\left(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}\right)}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} \le \frac{u^{۴}+u^{۴}+u^{۴}}{۰+۰+u^{۲}}=۳u^{۲}<۳\delta^{۲}$$

پس کافی است فرض شود $\varepsilon=۳\delta^{۲}$ یا $\delta=\sqrt{\varepsilon/۳}$.

۵.۲.۴ تمرین. به کمک تعریف حد، ثابت کنید $\lim\limits_{X\to X_{\circ}} f(X)=\ell$، به شرطی که:

۱) $f=xy^{۲}-y/x,\ \ X_{\circ}=(۲,-۳)\,,\ \ \ell=۳۹/۲$

۲) $f=\sin(x-۲y)\,,\ \ X_{\circ}=(\pi/۲,۲\pi)\,,\ \ \ell=۱$

۳) $f=\dfrac{x+۲y}{x^{۲}+y^{۲}},\ \ X_{\circ}=(۳,۲)\,,\ \ \ell=۷/۱۳$

۴) $f=۲x+y^{۲}+xyz,\ \ X_{\circ}=(۱,۰,-۱)\,,\ \ \ell=۲$

۵) $f=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}},\ \ X_{\circ}=(۱,۲,۵)\,,\ \ \ell=\sqrt{۳۰}$

۶) $f=\tan(x+۲y)-\tan z,\ \ X_{\circ}=\left(\frac{\pi}{۴},۰,\frac{\pi}{۴}\right),\ \ \ell=۰$

۶.۲.۴ روش جبری حدگیری. درست شبیه توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$، در این حالت نیز یک روش موزون برای محاسبهٔ حدود می‌توان طرح نمود. این روش را روش جبری می‌نامند. اصول آن چنین است: تعدادی حد به عنوان مبنی مطرح می‌شود (و بصورت $\varepsilon-\delta$ اثبات می‌گردد) و سپس تعدادی قضیه که به کمک آنها حدود پیچیده‌تر را بر حسب حدود ساده‌تر می‌توان بیان نمود، مطرح می‌شود. اکنون برای محاسبهٔ یک حد دلخواه، کافی است آنقدر از قضیه‌ها استفاده کنیم تا به جدول (حدود مفروض اولیه) برسیم.

۷.۲.۴ جدول حدود. به ازاء هر تابع یک متغیرهٔ f و هر عدد ثابت k ای داریم:

۱) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})} f(x)=\lim\limits_{x\to x_{\circ}} f(x)$

۲) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})} f(y)=\lim\limits_{y\to y_{\circ}} f(y)$

۳) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})} f(z)=\lim\limits_{z\to z_{\circ}} f(z)$

۴) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})} k=k$

۸.۲.۴ قضیه. اگر $\square$ یکی از اعمال $+$، $-$، $\times$ و $\div$ باشد و f و g توابع چند متغیره باشند و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه:

۱) $\lim\limits_{X\to X_{\circ}} af(X)=a\lim\limits_{X\to X_{\circ}} f(X)$

۲) $\lim\limits_{X\to X_{\circ}} (f\square g)(x)=\lim\limits_{X\to X_{\circ}} f(X)\square\lim\limits_{X\to X_{\circ}} g(X)$

۳) اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$، $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{X\to X_{\circ}} f(x)=\ell$، آنگاه
$$\lim_{X\to X_{\circ}} g(f(X))=\lim_{t\to\ell} g(t)$$

۴) اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ و $\lim\limits_{t\to t_{\circ}} g(t)=X_{\circ}$، آنگاه
$$\lim_{t\to t_{\circ}} f(g(t))=\lim_{X\to X_{\circ}} f(X)$$

۵) اگر $r>۰$ ای‌یافت شود که به ازای هر X از مجموعهٔ $D_f\cap D_g\cap B^*_r(X_{\circ})$ نامساوی $f(X)\le g(X)$ برقرار باشد، در این صورت
$$\lim_{X\to X_{\circ}} f(X)\le\lim_{X\to X_{\circ}} g(X)$$

۹.۲.۴ مثال. با توجه به ۸.۲.۴ داریم:

۱)
$$\lim_{(x,y)\to(۱,۲)} x^{۲}y^{۳}=\left(\lim_{(x,y)\to(۱,۲)} x^{۲}\right)\left(\lim_{(x,y)\to(۱,۲)} y^{۳}\right) =\lim_{x\to ۱} x^{۲}\left(\lim_{y\to ۲} y^{۳}\right)=۸$$

۲)
$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,۱,-۱)} \arcsin\left(۲\left(x^{۲}+y^{۲}\right)^{۲}+z\right)= =\lim_{t\to ۱}\arcsin(t)=\frac{\pi}{۲}$$

۳)
$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,۱,-۱)} \left(x^{۲}+y^{۲}\right)z^{۲}= =\left(\lim_{x\to ۰} x^{۲}+\lim_{y\to ۱} y^{۲}\right)\lim_{z\to -۱} z^{۲}=۱$$

۴)
$$\lim_{(x,y)\to(۱,-۱)} \frac{x^{۲}-y^{۲}}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(۱,-۱)} (x+y) =\lim_{x\to ۰} x+\lim_{y\to ۰} y=۰$$

۵)
$$\lim_{(x,y,z)\to(۱,۱,-۲)} \frac{\sin\left(x^{۲}+y^{۲}+z\right)}{x^{۲}+y^{۲}+z}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}=۱$$

زیرا $\lim\limits_{(x,y,z)\to(۱,۱,-۲)} x^{۲}+y^{۲}+z=۱+۱-۲=۰$.

مثال ۷) فرض کنیم $u=\max\{|x|,|y|\}$، در این صورت بنابه قسمت ۵ از ۸.۲.۴ داریم:

$$۰\le\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^{۲}y^{۲}}{|x|^{۳}+|y|^{۳}}\le\lim_{u\to ۰}\frac{u^{۲}u^{۲}}{۰+u^{۳}}=\lim_{u\to ۰} u=۰$$

زیرا همواره $u=|x|$ یا $u=|y|$. بنابراین

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^{۲}y^{۲}}{|x|^{۳}+|y|^{۳}}=۰$$

۱۰.۲.۴ تمرین. مقدار هر یک از حدود را محاسبه کنید:

$$1)\quad \lim_{(x,y)\to(2,-1)} x^3 \sin(\pi y)$$

$$2)\quad \lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \tan\left(\frac{x^2+y}{x-y}\right)$$

$$3)\quad \lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} \frac{3x^2-5y+3z}{x^2+y^2-z^2}$$

$$4)\quad \lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \left(x+\frac{1}{y}\right)^{zxy}$$

$$5)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2+y^3}{x+y+1}\right)^{xy+2}$$

$$6)\quad \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$$

$$7)\quad \lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,3)} ze^{-2(x+y)}\cos^2(z)$$

$$8)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$$

$$9)\quad \lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \ln\left(x^2+y^3+z^4\right)$$

$$10)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$11)\quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin\left(\arctan x - y^2 z\right)$$

$$12)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

۱۱.۲.۴ تبدیل به مختصات قطبی، استوانه‌ای و یا کروی. چنانچه محاسبهٔ حد به روش مستقیم و در مختصات دکارتی میسر نباشد، از سایر مختصات می‌توان استفاده نمود. سه قضیه به شرح زیر می‌توان مطرح نمود:

$$1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x\,,\,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)$$

مشروط به آنکه، حد سمت راست به θ بستگی نداشته باشد:

$$2)\quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,z_0)} f(x,y,z) = \lim_{(r,z)\to(0,z_0)} f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta\,,\,z)$$

مشروط به این که حد سمت راست به θ بستگی نداشته باشد:

$$3)\quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\phi\cos\theta, \rho\cos\phi\sin\theta\,,\,\rho\sin\phi)$$

مشروط به این که حد سمت راست به θ و ϕ بستگی نداشته باشد.

۱۲.۲.۴ مثال. با توجه به ۱۱.۲.۴ داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,-1)} \left(\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right)^z = \lim_{(r,z)\to(0,-1)} \left(\frac{\sin r^2}{r^2}\right)^z = 1^{-1} = 1$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\phi\cos\theta)(\rho\cos\phi\sin\theta)(\rho\sin\phi)}{(\rho\cos\phi\cos\theta)^2+(\rho\cos\phi\sin\theta)^2+(\rho\sin\phi)^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho\left(\cos^2\phi\sin\phi\cos\theta\sin\theta\right) = 0$$

۱۳.۲.۴ تمرین. حدود زیر را به کمک ۱۱.۲.۴ محاسبه کنید:

$$1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad 2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

$$3)\quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{x\sin y - y\cos z}{|x|+|y|+|z|}$$

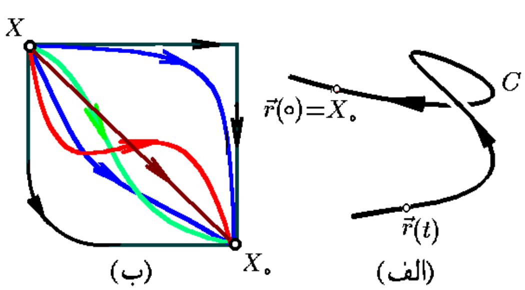
$$4)\quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{|x|^3+|y|^2+|z|^2}$$

$$5)\quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \arctan\left(\sqrt{x^2+y^3+z^4}+1\right)$$

$$6)\quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,2)} \left(x^2+y^2+z^2\right)^{x+y+z}$$

۳.۴ ابطال حد

دو روش مهم برای اثبات عدم وجود (یعنی، ابطال) حدود وجود دارد. حد مسیری و دنباله‌ها. حد مسیری تعمیم مفهوم حد یکطرفه در مورد توابع چند متغیره است.



شکل ۱۲.۴: الف) یک مسیر در X_0.
ب) مسیرهای مختلف در نقطهٔ X_0

۱.۳.۴ تعریف. منظور از مسیر در نقطهٔ $X_0 \in \mathbb{R}^n$، تابعی برداری $\mathbf{r}\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ است که در $t=0$ پیوسته است و $\mathbf{r}(t_0)=X_0$ (به شکل ۱۲.۴—الف توجه شود). در صورتی که $f\ :\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$، X_0 نقطه‌ای چسبیده به D_f و $\mathbf{r}\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

مسیری در $X_۰$ (و تماماً در D_f) باشد، آنگاه حد مسیری f در $X_۰$ بر مسیر $\mathbf{r}$ را بصورت $\lim_{t\to ۰} f\left(\mathbf{r}(t)\right)$ تعریف می‌کنیم. اگر $n \leq ۲$، بینهایت حد مسیری در $X_۰$ وجود دارد، در حالی که برای $n = ۱$، تنها دو حد مسیری می‌توان متصور شد (حد چپ و حد راست).

۲.۳.۴ قضیه. شرط لازم و کافی برای این که حد تابع $u = f(x)$ در نقطهٔ $X_۰$ موجود و برابر ℓ باشد، آن است که کلیهٔ حدود مسیری f در $X_۰$ موجود و برابر ℓ باشند.

۳.۳.۴ نتیجه. اگر مسیری در $X_۰$ یافت شود که حد مسیری f بر آن وجود نداشته باشد، آنگاه حد f در $X_۰$ موجود نیست.

۴.۳.۴ نتیجه. اگر دو مسیر در $X_۰$ یافت شوند که حد مسیری f بر آنها متفاوت باشد، آنگاه حد f در $X_۰$ نیز موجود نیست.

۵.۳.۴ مثال. ۱) فرض کنید $f(x,y) = \sin x/xy$ و $X_۰ = (۰,۰)$. در وجود و یا عدم وجود حد f در نقطهٔ $X_۰$ بحث کنید.

حل. برای این منظور مسیر $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t,t)}$ در $X_۰$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت حد f بر مسیر $\mathbf{r}$ برابر است با

$$\begin{aligned}\lim_{t\to ۰} f\left(\mathbf{r}(t)\right) &= \lim_{t\to ۰} f(t,t) = \lim_{t\to ۰} \frac{\sin t}{t^۲} \\ &= \left(\lim_{t\to ۰} \frac{\sin t}{t}\right)\left(\lim_{t\to ۰} \frac{۱}{t}\right) = \pm\infty\end{aligned}$$

که وجود ندارد. در نتیجه $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \sin x/xy$ بنابه ۳.۳.۴ وجود ندارد.

مثال ۲) فرض کنید $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^۲+y^۴}$ و $X_۰ = (۰,۰)$. در وجود و یا عدم وجود حد f در نقطهٔ $X_۰$ بحث کنید.

حل. برای این منظور مسیر $\mathbf{r}_m(t) = \overrightarrow{(t,mt)}$ را انتخاب می‌کنیم که نمودار آن خط $y = mx$ می‌باشد. در این صورت، حد مسیری f برمسیر $\mathbf{r}_m$ برابر

$$\begin{aligned}\lim_{t\to ۰} f(\mathbf{r}_m(t)) &= \lim_{t\to ۰} f(t,mt) = \lim_{t\to ۰} \frac{tmt}{t^۲+m^۴t^۴} \\ &= \lim_{t\to ۰} \frac{m}{۱+m^۲t^۲} = m\end{aligned}$$

است، که به m بستگی دارد. بنابراین، مطابق ۴.۳.۴، حد $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \dfrac{xy}{x^۲+y^۲}$ وجود ندارد.

مثال ۳) فرض کنید $f(x,y) = \dfrac{xy^۲}{x^۲+y^۴}$ و $X_۰ = (۰,۰)$. در وجود و یا عدم وجود حد f در نقطهٔ $X_۰$ بحث کنید.

حل. برای این منظور مسیر $\mathbf{r}_m(t) = (t,mt)$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت حد مسیری f بر $\mathbf{r}_m$ برابر

$$\begin{aligned}\lim_{t\to ۰} f\left(\mathbf{r}_m(t)\right) &= \lim_{t\to ۰} f(t,mt) = \lim_{t\to ۰} \frac{tm^۲t^۲}{t^۲+m^۲t^۴} \\ &= \lim_{t\to ۰} \frac{m^۲t}{۱+m^۴t^۲} = ۰\end{aligned}$$

است، که به m بستگی ندارد! اما حد وجود ندارد. با انتخاب مسیر $\mathbf{r}(t) = \left(t^۲,t\right)$ که به موجب آن توان x و y یکسان می‌شود، داریم:

$$\lim_{t\to ۰} f\left(\mathbf{r}(t)\right) = \lim_{t\to ۰} f\left(t^۲,t\right) = \lim_{t\to ۰} \frac{t^۴}{t^۴+t^۴} = \frac{۱}{۲} \neq ۰$$

مثال ۴) فرض کنید $f(x,y,z) = \dfrac{x^۲-۲y^۲+z^۲}{x^۲+y^۲-۲z^۲}$ و $X_۰ = (۱,۱,۱)$. در وجود و یا عدم وجود حد f در نقطهٔ $X_۰$ بحث کنید.

حل. برای این منظور مسیرهای $\mathbf{r}_۱(t) = \overrightarrow{(۱,۱,۱+t)}$ و $\mathbf{r}_۲(t) = \overrightarrow{(۱,۱+t,۱)}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، حد f در $X_۰$ وجود ندارد. زیرا

$$\begin{aligned}\lim_{t\to ۰} f\left(\mathbf{r}_۱(t)\right) &= \lim_{t\to ۰} \frac{۱-۲+(t+۱)^۲}{۱+۱-۲(t+۱)^۲} \\ &= \lim_{t\to ۰} \frac{t^۲+۲t}{-۲t^۲-۴t} = \frac{-۱}{۲} \\ \lim_{t\to ۰} f\left(\mathbf{r}_۲(t)\right) &= \lim_{t\to ۰} \frac{۱-۲(t+۱)^۲+۱}{۱+(t+۱)^۲-۲} \\ &= \lim_{t\to ۰} \frac{-۲t^۲-۴t}{t^۲+۲t} = -۲\end{aligned}$$

مثال ۵) فرض کنید $f(x,y,z) = (\sin x/y)^{۱/z}$ و $X_۰ = (۰,۰,۰)$. در وجود و یا عدم وجود حد f در نقطهٔ $X_۰$ بحث کنید.

حل. برای این منظور مسیر $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۲t,t,t)}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، حد f در $X_۰$ وجود ندارد، زیرا

$$\begin{aligned}\lim_{t\to ۰+} f\left(\mathbf{r}(t)\right) &= \lim_{t\to ۰+} \left(\frac{\sin(۲t)}{t}\right)^{۱/t} \\ &\overset{(۱)}{=} \lim_{t\to ۰+} \left(\frac{۲t-(۲t)^۳/۶}{t}\right)^{۱/t} = \lim_{t\to ۰+} \left(۲-\frac{۴t^۲}{۳}\right)^{۱/t} \\ &\geq \lim_{t\to ۰+} \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۱/t} = +\infty\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از هم ارزی $\sin t \sim t - t^۳/۶$ استفاده نموده‌ایم.

۶.۳.۴ تمرین. نشان دهید که هیچ یک از حدود زیر وجود ندارند:

$$۱)\ \lim_{(x,y)\to(۱,۱)} \frac{x-y}{x^۳-y} \qquad ۲)\ \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$$

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{|x|^3+2|y|^3}$ ۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} y^{1/x}$

۵) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y^2}$ ۶) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$

۷) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\dfrac{|x|+y^2}{x^2+y^2}\right)$

۸) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3-y^3+xz^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$

۹) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz+zx}{x^3+y^3+z^3}$

۱۰) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2-2xy+2y^2}$

۱۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2}$

روش دیگر برای ابطال حد، استفاده از حد دنباله‌ها است.

۷.۳.۴ قضیه. شرط لازم و کافی برای این که حد تابع $u=f(X)$ در X_0 موجود و برابر ℓ باشد، آن است که به ازای هر دنبالهٔ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به X_0، دنبالهٔ $\{f(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ به ℓ همگرا باشد.

۸.۳.۴ مثال. ۱) تابع $f(x,y)=\tan(1/xy)$ و نقطهٔ $X_0=(0,1)$ را در نظر بگیرید. در وجود و یا عدم وجود حد f در نقطهٔ X_0 بحث کنید.

حل. دنبالهٔ $X_n=(1/(n\pi+\pi/2+1/n),1)$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی ملاحظه می‌شود که $\lim X_n=(0,1)$ در حالی که

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(X_n) &= \lim_{n\to\infty} \tan\left(n\pi+\pi/2+1/n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \tan(\pi/2+1/n)=\infty\end{aligned}$$

پس حد f در X_0 وجود ندارد.

مثال ۲) تابع $f(x,y)=\sqrt[y]{x}$ و نقطهٔ $X_0=(1,0)$ را در نظر بگیرید. در وجود و یا عدم وجود حد f در نقطهٔ X_0 بحث کنید.

حل. برای این منظور، به ازای عدد مثبت دلخواه a فرض می‌کنیم $X_n=(1+a/n,1/n)$. در این صورت، به سادگی ملاحظه می‌گردد که $\lim\limits_{n\to\infty} X_n=(1,0)$. در حالی که

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(X_n) &= \lim \sqrt[1/n]{1+a/n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{(1+a/n)^{n/a}\right\}^a=e^a\end{aligned}$$

که به a بستگی دارد. پس حد $\sqrt[y]{x}$ در $(1,0)$ وجود ندارد.

مثال ۳) حد $\lim\limits_{n,m\to\infty}(\sin m)/n$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور تابع $f(x,y)=y\sin(1/x)$ و نقطهٔ $X_0=(0,0)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \lim_{y\to 0}|y|=0$$

بنابراین $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\sin(1/x)$ موجود و برابر صفر است. از طرفی $\lim\limits_{n\to\infty}(1/m,1/n)=(0,0)$، لذا بنابه ۷.۳.۴ داریم $\lim\limits_{(m,n)\to\infty}(\sin m)/n=0$.

۹.۳.۴ تمرین. نشان دهید که هیچ یک از حدود زیر وجود ندارد:

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\cos x)^{1/x}$ ۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^y$

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x)^{1/y}$ ۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xe^{1/y}$

۵) فرض کنید m، n و p اعداد حقیقی باشند. چه شرایطی باید بر این اعداد اعمال شود تا حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^ny^m}{|x|^p+|y|^p}$ موجود باشد. مقدار حد را در صورت وجود بیابید.

۴.۴ پیوستگی

۱.۴.۴ تعریف. در صورتی می‌گوئیم تابع $u=f(X)$ در X_0 **پیوسته** است که حد f در X_0 موجود و برابر $f(X_0)$ باشد. در صورتی می‌گوئیم f (بر D) **پیوسته** است که به‌ازای هر X (متعلق به D) ای f در X پیوسته باشد.

۲.۴.۴ تعریف. توابع ثابت، چند جمله‌ای، کسری، رادیکالی، توانی، نمایی، لگارتیمی، مثلثاتی، معکوس مثلثاتی و قدر مطلق را **مقدماتی** می‌نامیم.

اعمال ضرب یک عدد در یک تابع، جمع دو تابع با هم، تفریق دو تابع از هم، ضرب دو تابع در هم، تقسیم یک تابع در تابعی دیگر، ترکیب دو تابع، معکوس گیری از یک تابع، تابعی را به توان تابع دیگر رسانیدن را **اعمال مقدماتی** می‌نامیم.

اگر تابعی با استفاده از تعدادی متناهی تابع مقدماتی و تعدادی متناهی عمل مقدماتی ساخته شود، آنرا نیز مقدماتی می‌نامیم.

۳.۴.۴ قضیه. اگر $u=f(X)$ مقدماتی باشد و $X_0\in D_f$، آنگاه f در X_0 پیوسته است.

۴.۴.۴ مثال. ۱) تابع $f(x,y)=x^2\sin(x/y)$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ پیوستگی f را تعیین کنید.

حل. این تابع مقدماتی است و دامنهٔ آن $D_f=\{(x,y)|y\neq 0\}$ است. پس f بر D_f پیوسته است.

مثال ۲) تابع $f(x,y,z)=\ln\left(\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ پیوستگی f را تعیین کنید.

حل. این تابع مقدماتی است و دامنهٔ آن برابر مجموعهٔ $D_f=\{(x,y,z)\,|\,z>0\}$ است. پس f بر D_f پیوسته است.

مثال ۳) تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ پیوستگی f را تعیین کنید.

حل. این تابع مقدماتی نیست. چون عمل تابع دو ضابطه‌ای تعریف کردن، مقدماتی نیست، بنابراین تابع f مقدماتی نیست. دامنهٔ f برابر $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. اگر f بجز مبداء باشد، آنگاه f بر یک همسایگی از X_0 برابری $\dfrac{xy}{(x^2+y^2)}$ می‌باشد، که تابعی مقدماتی است. پس f در نقطهٔ X_0 پیوسته است. بعلاوه، به وضوح حد f در $(0,0)$ وجود ندارد (چرا؟). پس f بر $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود ولی تنها بر $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ پیوسته است.

مثال ۴) تابع $f(x,y)=\operatorname{sgn}\left(x^2-y^2\right)$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ پیوستگی f را تعیین کنید.

حل. این تابع مقدماتی نیست و دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}^2$ است، اما تابع علامت در بین توابع مقدماتی نبود و لذا f نیز مقدماتی نیست. بسته به انتخاب $X_0\in\mathbb{R}^2$ سه حالت ممکن است رخ دهد:

الف) اگر $x_0^2-y_0^2>0$، آنگاه f در یک همسایگی از X_0 برابر یک است و لذا در X_0 پیوسته است.

ب) اگر $x_0^2-y_0^2<0$، آنگاه f در یک همسایگی از X_0 برابر منفی یک است و لذا در X_0 پیوسته است.

ج) اگر $x_0^2=y_0^2$، آنگاه f در یک طرف خط $y=\pm x$ برابر یک و در سمت دیگر آن برابر منفی یک است پس مسیری همگرا به X_0 که f بر آن برابر یک است و نیز مسیری که f بر آن برابر منفی یک می‌باشد، می‌توان یافت. بنابراین f در X_0 ناپیوسته است.

پس در مجموع، f بر $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود، ولی تنها بر مجموعهٔ $\mathbb{R}^2-\{y=x\}\cup\{y=-x\}$ پیوسته است.

مثال ۵) فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

دامنهٔ پیوستگی f را بدست آورید.

حل. این تابع مقدماتی نیست. دامنهٔ f برابر $\mathbb{R}^2$ است. اگر X_0 بجز مبداء باشد، آنگاه f در یک همسایگی از X_0 برابر با $xy^2/(x^2+y^2)$ می‌باشد و بنابراین در X_0 پیوسته است. اما، اگر $X_0=(0,0)$، آنگاه حد f در X_0 برابر صفر (که مقدار تابع در X_0 است) می‌باشد. پس f در $(0,0)$ نیز پیوسته است. بنابراین f بر کل $D_f=\mathbb{R}^2$ پیوسته است!

۵.۴.۴ تمرین. دامنهٔ پیوستگی هر یک از توابع زیر را مشخص کنید:

۱) $f=1/x-1/y+\sqrt{xy}$ ۲) $f=\arcsin\left(x^2-y^2\right)$

۳) $f=x\sqrt{1-y}$ ۴) $f=\ln(-x-y)$

۵) $f=\cos\sqrt{|xy|-1}$ ۶) $f=\ln(xyz)$

۷) $f=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$

*۸) $f=\operatorname{sgn}\left(\tan\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)$

۹) $f=\arccos\left(x^2+y^2-z^2\right)$

۱۰) $f=\sin(x+\cos(y+\tan z))$

۱۱) $f=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2-y^2} & x\neq\pm y\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$

۱۲) $f=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$

۱۳) $f=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

۱۴) $f=\begin{cases}\ln\left(1-x^2-y^2-z^2\right) & x^2+y^2+z^2<1\\ 0 & x^2+y^2+z^2\geq 1\end{cases}$

در هر مورد، در پیوستگی و یا عدم پیوستگی تابع داده شده در مبداء مختصات بحث کنید.

۱۵) $f=\begin{cases}(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y) & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$

۱۶) $f=\begin{cases}\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$

۱۷) $f=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2e^x} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$

۵.۴ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل doc.pdf مراجعه شود.

۱.۵.۴ تعریف تابع چند متغیره. با استفاده از دستور `f:=(x,y,z)->F(x,y,z)` می‌توان تابع سه متغیرهٔ f با متغیرهای x، y و z و ضابطهٔ $F(x,y,z)$ را تعریف نمود.

۲.۵.۴ مقداریابی توابع چند متغیره. چنانچه تابع f را قبلاً تعریف نموده باشیم و بخواهیم مقدار آن را در سه تایی مرتب (a,b,c) محاسبه کنیم، کافی است دستور `f(a,b,c)` را در محیط میپل درج کنیم.

۳.۵.۴ ترسیم نمودار تابع دو متغیره. فرض کنید تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ قبلاً در محیط میپل تعریف شده باشد. آنگاه، برای ترسیم آن بر مستطیل $D: a \le x \le b, c \le y \le d$ از دستور `plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d)` استفاده می‌کنیم. با دستورات `color=c`، `thickness=a` و `gride=[n,m]` بترتیب می‌توان رنگ را `c`، قطر خطوط ترسیم شده را `a`، تعداد تقسیمات در امتداد $x-$محور را `n` و تعداد تقسیمات در امتداد $y-$محور را `m` تنظیم نمود.

۴.۵.۴ ترسیم منحنیهای تراز. فرض کنید بخواهیم منحنیهای تراز تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ را به ازای `z=a_1`، `z=a_2`، . . . و `z=a_n` بر مستطیل $D: a \le x \le b, c \le y \le d$ ترسیم کنیم. در این صورت از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{plots[contourplot](f(x,y) , x = a..b , y = c..d , contours = [a\_1, a\_2, ... , a\_n])}$$

۵.۵.۴ ترسیم سطوح تراز. فرض کنید بخواهیم سطوح تراز تابع سه متغیرهٔ $f(x,y,z)$ را به ازای $\mathrm{u = a\_1}$، $\mathrm{u = a\_2}$، . . . و $\mathrm{u = a\_n}$ بر مکعب مستطیل

$$\Omega: a \le x \le b, c \le y \le d, h \le z \le l$$

ترسیم کنیم. در این صورت از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{plots[contourplot3d](f(x,y,z) , x = a..b , y = c..d , z = h..l , contours = [a\_1, a\_2, ..., a\_n])}$$

۶.۵.۴ حد گیری. فرض کنید که تابع سه متغیرهٔ $f(x,y,z)$ را قبلاً در محیط میپل تعریف نموده باشیم، در این صورت برای حد گیری از f در نقطهٔ (a,b,c) (که البته می‌تواند a، b و یا c بینهایت باشند)، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
limit(f(x,y,z),{x=a,y=b,z=c})
```

۷.۵.۴ محاسبهٔ حد مسیری. فرض کنید که تابع سه متغیرهٔ f را قبلاً در محیط میپل تعریف نموده باشیم، در این صورت برای حد گیری از f در امتداد مسیر $C: \mathbf{r}(t)$ به معادلهٔ $\overrightarrow{(x(t), y(t), z(t))}$، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{limit(f(x(t), y(t), z(t)), t = 0)}$$

۸.۵.۴ یادداشت. در آدرس اینترنتی
`http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm`
مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.

فصل ۵

مشتق و کاربردهایش

دومین موضوع اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مشتق است. مشتق وسیله‌ای برای تعیین میزان تغییرات تابع نسبت به متغیر و یا متغیرهایش می‌باشد. به همین دلیل کاربرد زیادی در مسایل عملی و نظری دارد.

اکثر قوانین فیزیک به بیان مطالعه تغییرات یک کمیت نسبت به سایر کمیات اختصاص دارد. پس از بیان این قوانین به شکل ریاضی، معادلاتی بنام معادلات دیفرانسیل مطرح می‌شود که در آنها یک تابع و یا چند تابع با مشتقاتشان و نیز متغیرهایشان درگیر هستند. مطالب این فصل دارای اهمیت ذاتی است و بعلاوه به عنوان زمینه‌ای برای مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل (معمولی و یا با مشتقات جزئی) لازم می‌باشد.

۱.۵ تعریف مشتق

فرض کنید $y = f(x)$ تابع یک متغیرهٔ حقیقی است و $x_\circ$ نقطه‌ای از دامنه تعریف $y = f(x)$ می‌باشد. در فصل چهارم از جلد اول، مشتق f در $x_\circ$ عددی $f'(x_\circ)$ بود که به شکل

$$f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

تعریف می‌شد. بدون کاسته شدن از کلیت بحث، تساوی بالا را به شکل معادل

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(x - x_\circ)}{|x - x_\circ|} = \circ$$

می‌توان نوشت. این تعریف را به صورت زیر می‌توان تعمیم داد.

۱.۱.۵ تعریف. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $X_\circ$ پیوسته است. در صورتی می‌گوییم $u = f(X)$ در $X_\circ$ مشتقپذیر است که بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ای چنان یافت گردد که:

$$\lim_{X \to X_\circ} \frac{f(X) - f(X_\circ) - \mathbf{v} \boldsymbol{\cdot} (X - X_\circ)}{\|X - X_\circ\|} = \circ$$

در این صورت $\mathbf{v}$ را مشتق $u = f(X)$ در نقطه $X_\circ$ نامیده و با نماد $f'(X_\circ)$ نشان می‌دهیم. در برخی مراجع $f'(X_\circ)$ را **گرادیان** f در $X_\circ$ نامیده و با نماد $\mathrm{grad}\,(f)|_{X_\circ}$ نشان می‌دهند و یا **نابلا** f در $X_\circ$ نامیده و با نماد $\bigtriangledown f(X_\circ)$ نشان می‌دهند.

۲.۱.۵ مثال. ۱) تابع $f(x, y) = x^۳ y^۲$ و نقطهٔ $X_\circ = (-۱, ۱)$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که f در $X_\circ$ مشتقپذیر است و مشتق آن $f'(X_\circ) = \overrightarrow{(۳, -۲)}$ می‌باشد.

حل. برای این منظور، باید اثبات شود که

$$\lim_{(x,y) \to (-۱,۱)} \frac{x^۳ y^۲ + ۱ - \overrightarrow{(۳, -۲)} \boldsymbol{\cdot} \left(\overrightarrow{(x, y)} - \overrightarrow{(-۱, ۱)}\right)}{\left\|\overrightarrow{(x, y)} - \overrightarrow{(-۱, ۱)}\right\|} = \circ$$

حد سمت چپ را با فرض $u = x + ۱$ و $v = y - ۱$ به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\lim_{(u,v) \to (\circ,\circ)} \frac{(u - ۱)^۳ (v + ۱)^۲ + ۱ - ۳u + ۲v}{\sqrt{u^۲ + v^۲}} =$$
$$\lim_{(u,v) \to (\circ,\circ)} \frac{\left(u^۳ - ۳u^۲\right)(v + ۱)^۲ + ۳uv^۲ + ۶uv - v^۲}{\sqrt{u^۲ + v^۲}}$$

اکنون با فرض $u = r\cos\theta$ و $v = r\sin\theta$ و با استفاده از ۱۱.۲.۴ داریم:

$$= \lim_{r \to \circ} \Big\{ r\left(r\cos^۳\theta - ۳\cos^۲\theta\right)(r\sin\theta + ۱)^۲$$
$$+ ۳r^۲\cos\theta\sin^۲\theta + ۶r\cos\theta\sin\theta - r\sin^۲\theta \Big\} = \circ$$

مثال ۲) تابع
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^۲}{x^۲ + y^۲} & (x,y) \neq (\circ,\circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ,\circ) \end{cases}$$
را در نظر بگیرید. روشن است که f در همه جا و بخصوص در $X_\circ = (\circ, \circ)$ پیوسته است. ثابت کنید که f در $X_\circ$ مشتقپذیر نیست.

حل. به روش خلف عمل می‌کنیم. یعنی با این فرض آغاز

می‌کنیم که f در $X_\circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(X_\circ) = \overrightarrow{(a,b)}$. بنابراین، بایستی

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \frac{\frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} - \circ - \overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}}{\|\overrightarrow{(x,y)}\|} = $$

$$= \lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \frac{xy^۲ - (ax+by)\left(x^۲+y^۲\right)}{\left(x^۲+y^۲\right)^{۳/۲}} = \circ$$

حال سه مسیر $\mathbf{r}_۱(t) = \overrightarrow{(t,\circ)}$، $\mathbf{r}_۲(t) = \overrightarrow{(\circ,t)}$ و $\mathbf{r}_۳(t) = \overrightarrow{(t,t)}$ را در نظر می‌گیریم. بنا به فرض، بایستی حد تابع سمت چپ بر هر یک از این مسیرها صفر باشد. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\circ &= \lim_{t\to\circ} f\left(\mathbf{r}_۱(t)\right) = \lim_{t\to\circ} \frac{\circ - (at)\left(t^۲\right)}{t^۳} = -a \\
\circ &= \lim_{t\to\circ} f\left(\mathbf{r}_۲(t)\right) = \lim_{t\to\circ} \frac{\circ - (bt)\left(t^۲\right)}{t^۳} = -b \\
\circ &= \lim_{t\to\circ} f\left(\mathbf{r}_۳(t)\right) = \lim_{t\to\circ} \frac{t^۳ - (at+bt)\left(۲t^۲\right)}{۲\sqrt{۲}t^۳} \\
&= \frac{۱ - ۲(a+b)}{۲\sqrt{۲}}
\end{aligned}$$

از دو معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $a = \circ$ و $b = \circ$. در حالی که از معادلهٔ سوم نتیجه می‌شود $a + b = ۱/۲$ که تناقض است. پس فرض اولیه مبنی بر اینکه f در $X_\circ$ مشتق‌پذیر است، غلط می‌باشد.

مثال ۳) فرض کنید $f(x,y,z) = xy/z$ و $X_\circ = (۱,-۱,۲)$. روشن است که f در $X_\circ$ پیوسته است. ثابت کنید f در $X_\circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(X_\circ) = \overrightarrow{(-۱/۲, ۱/۲, ۱/۴)}$.

حل. برای این منظور باید ثابت شود که حد

$$\lim_{(x,y,z)\to(۱,-۱,۲)} \left\{ \left(\frac{xy}{z}\right) - \left(\frac{-۱}{۲}\right) - \overrightarrow{\left(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}\right)} \cdot \left(\overrightarrow{(x,y,z)} - \overrightarrow{(۱,-۱,۲)}\right) \right\} \div \|\overrightarrow{(x,y,z)} - \overrightarrow{(۱,-۱,۲)}\|$$

صفر است. این حد را با فرض $u = x - ۱$، $v = y + ۱$ و $w = z - ۲$ به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\lim_{(u,v,w)\to(\circ,\circ,\circ)} \frac{\frac{(u+۱)(v-۱)}{(w+۲)} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}u - \frac{۱}{۲}v - \frac{۱}{۴}w}{\sqrt{u^۲+v^۲+w^۲}} =$$

$$= \lim_{(u,v,w)\to(\circ,\circ,\circ)} \frac{۴uv + ۲uw - ۲vw - w^۲}{۴(w+۲)\sqrt{u^۲+v^۲+w^۲}}$$

اکنون با فرض $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$، $y = \rho\cos\varphi\sin\theta$ و $z = \rho\sin\varphi$ و با استفاده از ۱۱.۲.۴ داریم:

$$= \lim_{\rho\to\circ} \frac{۱}{۴(\rho\sin\varphi + ۲)} \left\{ ۴\rho\cos^۲\varphi\cos\theta\sin\theta + ۲\rho\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta - ۲\rho\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi - \rho\sin^۲\varphi \right\} = \circ$$

و برهان تمام است.

مثال ۴) نشان دهید که تابع $f(x,y,z) = |x+y+z|$ در نقطه $X_\circ = (-۱,-۱,۲)$ مشتق‌پذیر نیست.

حل. برای این منظور نشان می‌دهیم که هیچ (a,b,c) ای یافت نمی‌شود که به ازای آنها حد زیر وجود داشته و برابر صفر باشد:

$$\lim_{(x,y,z)\to(-۱,-۱,۲)} \frac{|x+y+z| - a(x+۱) - b(y+۱) - c(z-۲)}{\sqrt{(x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ + (z-۲)^۲}}$$

برای اثبات این مطلب دو مسیر

$$\mathbf{r}_۱(t) = \overrightarrow{\left(t^۲-۱, -۱, ۲\right)}, \quad \mathbf{r}_۲(t) = \overrightarrow{\left(-t^۲-۱, -۱, ۲\right)}$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت حد مسیری تابع مورد نظر، بر این دو مسیر برابر است با

$$\begin{aligned}
\circ &= \lim_{t\to\circ} h(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to\circ} \frac{|t^۲| - at^۲}{t^۲} = ۱ - a \Rightarrow a = ۱ \\
\circ &= \lim_{t\to\circ} h(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to\circ} \frac{|-t^۲| + at^۲}{t^۲} = ۱ + a \Rightarrow a = -۱
\end{aligned}$$

که تناقض است.

۳.۱.۵ یادداشت.

تحقیق وجود حد به روش بالا، کاری بس دشوار است. بعلاوه معلوم نیست که حدس اولیه مشتق از کجا آورده شده است. برای حل این مشکل باید قضیه‌ای وجودی مطرح شود. این کار را در بخش بعدی انجام می‌دهیم.

۴.۱.۵ تمرین.

به کمک تعریف نشان دهید که f در $X_\circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(X_\circ)$ برابر بردار داده شده می‌باشد:

۱) $f = xy^۲ - yx^۲,\ X_\circ = (۱,-۱),\ f'(X_\circ) = \overrightarrow{(۳,-۳)}$

۲) $f = \dfrac{xy}{x^۲ - y^۲},\ X_\circ = (۲,۱),\ f'(X_\circ) = \overrightarrow{\left(\dfrac{-۵}{۹}, \dfrac{۱۰}{۹}\right)}$

۳) $f = x\sin y,\ X_\circ = (\circ,\pi),\ f'(X_\circ) = \overrightarrow{(\circ,\circ)}$

۴) $f = xy^۲z^۳,\ X_\circ = (\circ,۱,۲),\ f'(X_\circ) = \overrightarrow{(۸,\circ,\circ)}$

۵) $f = \dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{x},\ X_\circ = (-۱,۲,۱),$

$$f'(X_\circ) = \overrightarrow{(۳/۲, ۱/۴, ۱)}$$

٦) $f = \ln\left(x + y^۲ + z^۳\right),\ X_\circ = (۱,\circ,\circ),$

$$f'(X_\circ) = \overrightarrow{(۱,\circ,\circ)}$$

در هر مورد، نشان دهید که f در $X_\circ$ مشتق‌پذیر نیست:

۷) $f=\sqrt[۳]{xy},\ \ X_{۰}=(۰,۰)$,

۸) $f=[x^{۲}+y^{۲}],\ \ X_{۰}=(۲,-۱)$,

۹) $f=\sqrt{۱-x-y-z},\ \ X_{۰}=(۰,۱,۰)$,

۱۰) $f=\begin{cases} e^{-۱/(x^{۲}+y^{۲})} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$,

$X_{۰}=(۰,۰)$,

۱۱) $f=\begin{cases} \dfrac{xyz}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰) \\ ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰) \end{cases}$,

$X_{۰}=(۰,۰,۰)$

۵.۱.۵ قضیه. ۱) اگر f در $X_{۰}$ مشتقپذیر باشد و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه af در $X_{۰}$ مشتقپذیر است و بعلاوه

$$(af)'(X_{۰})=af'(X_{۰})$$

اگر f و g در $X_{۰}$ مشتقپذیر باشند، آنگاه $f+g$، $f-g$، fg و f/g نیز در $X_{۰}$ مشتقپذیرند و

۲) $(f+g)'(X_{۰})=f'(X_{۰})+g'(X_{۰})$

۳) $(f-g)'(X_{۰})=f'(X_{۰})-g'(X_{۰})$

۴) $(fg)'(X_{۰})=g(X_{۰})f'(X_{۰})+f(X_{۰})g'(X_{۰})$

۵) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(X_{۰})=\dfrac{g(X_{۰})f'(X_{۰})-f(X_{۰})g'(X_{۰})}{g^{۲}(X_{۰})}$

۶) اگر $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ در $t_{۰}$ و $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ در $X_{۰}=\mathbf{r}(t_{۰})$ مشتقپذیر باشند، آنگاه $f(\mathbf{r}(t))$ نیز در $t_{۰}$ مشتقپذیر است و بعلاوه $\{f(\mathbf{r})\}'(t_{۰})=f'(\mathbf{r}(t_{۰}))\bullet\mathbf{r}'(t_{۰})$.

۷) اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ در $X_{۰}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $f(X_{۰})$ مشتقپذیر باشند، آنگاه $g(f(X))$ نیز در $X_{۰}$ مشتقپذیر است و بعلاوه $\{g(f)\}'(X_{۰})=g'(f(X_{۰}))f'(X_{۰})$.

۶.۱.۵ یادداشت. قسمت ۶ از قضیهٔ ۵.۱.۵ بسیار با اهمیت است و قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق نامیده می‌شود. در بخش ۳ به مطالعهٔ بیشتر آن خواهیم پرداخت.

۷.۱.۵ تمرین. ۱) قسمت ۱ از قضیه ۵.۱.۵ را اثبات کنید.

۲) قسمت ۲ از قضیه ۵.۱.۵ را ثابت کنید.

۳) قسمت ۴ از قضیهٔ ۵.۱.۵ را ثابت کنید.

۲.۵ مشتق جزیی

مشتق جزئی مفهومی بسیار مهم در ریاضیات عمومی است، زیرا عملاً راهی برای برگشت مفهوم مشتق توابع چند متغیره به مشتق توابع یک متغیره می‌باشد. بعداً معلوم خواهد شد که در بسیاری از موارد مشتقات جزیی، اجزاء مشتق هستند!

۱.۲.۵ تعریف. ابتدا فرض کنیم $u=f(x,y,z)$ و $X_{۰}=(x_{۰},y_{۰},z_{۰})$. مشتق جزئی f نسبت به x در نقطهٔ $X_{۰}$ را به صورت

$$\lim_{x\to x_{۰}}\frac{f(x,y_{۰},z_{۰})-f(x_{۰},y_{۰},z_{۰})}{x-x_{۰}}=\frac{d}{dx}f(x,y_{۰},z_{۰})\Big|_{x=x_{۰}}$$

تعریف می‌کنیم (البته در صورت وجود!) و با یکی از نمادهای

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_{۰}}=\frac{\partial f}{\partial x}(X_{۰})=f_x(X_{۰})=f_{۱}(X_{۰})$$

نشان می‌دهیم. بصورت مشابه، مشتق جزیی f نسبت به y در نقطهٔ $X_{۰}$ و نیز مشتق جزیی f نسبت به z در نقطهٔ $X_{۰}$ را بترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{X_{۰}} &= \frac{\partial f}{\partial y}(X_{۰})=f_y(X_{۰}) \\ &= f_{۲}(X_{۰})=\frac{d}{dy}f(x_{۰},y,z_{۰})\Big|_{y=y_{۰}} \\ \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{X_{۰}} &= \frac{\partial f}{\partial z}(X_{۰})=f_z(X_{۰}) \\ &= f_{۳}(X_{۰})=\frac{d}{dz}f(x_{۰},y_{۰},z)\Big|_{z=z_{۰}}\end{aligned}$$

تعاریف مشابهی برای توابع دو، چهار و ... متغیره وجود دارد.

۲.۲.۵ مثال. ۱) فرض کنید $f(x,y,z)=xy^{۲}z^{۳}$ و $X_{۰}=(۳,۲,-۱)$. در این صورت، مقدار مشتقات جزئی f در $X_{۰}$ را محاسبه کنید.

حل. بنا به تعریف داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_{۰}} &= \frac{d}{dx}f(x,۲,-۱)\big|_{x=۳}=\frac{d}{dx}\{-۴x\}_{x=۳}=-۴ \\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{X_{۰}} &= \frac{d}{dy}f(۳,y,-۱)\Big|_{y=۲} \\ &= \frac{d}{dy}\left\{-۳y^{۲}\right\}_{y=۲}=\{-۶y\}_{y=۲}=-۱۲ \\ \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{X_{۰}} &= \frac{d}{dz}f(۳,۲,z)\Big|_{z=-۱} \\ &= \frac{d}{dz}\left\{۱۲z^{۳}\right\}_{z=-۱}=\left\{۳۶z^{۲}\right\}_{z=-۱}=۳۶\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید $f(x,y)=\arcsin(x/y)$ و نیز $X_{۰}=(\sqrt{۲},۲)$. در این صورت، مقدار مشتقات جزئی f در $X_{۰}$ را محاسبه کنید.

حل. بنابه تعریف، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_{۰}}=\frac{d}{dx}f(x,۲)\Big|_{x=\sqrt{۲}}=\frac{d}{dx}\left\{\arcsin\left(\frac{x}{۲}\right)\right\}_{x=\sqrt{۲}}$$

$$= \left.\frac{1/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\right|_{x=\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{X_\circ} = \left.\frac{d}{dy}f\left(\sqrt{2},y\right)\right|_{y=2} = \frac{d}{dy}\left\{\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{y}\right)\right\}_{y=2}$$

$$= \left.\frac{-\sqrt{2}/y^2}{\sqrt{1-(\sqrt{2}/y)^2}}\right|_{y=2} = -\frac{1}{2}$$

مثال ۳) فرض کنید $f(x,y) = y\sqrt[3]{x}$ و $X_\circ = (0,1)$. در این صورت، ثابت کنید $\left.\left(\partial f/\partial x\right)\right|_{X_\circ}$ موجود نیست.

حل. دلیل این امر آن است که

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_\circ} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

۳.۲.۵ یادداشت.

مشتقات جزیی را ساده‌تر می‌توان حساب کرد. در واقع، در محاسبهٔ $\left.\left(\partial f/\partial x\right)\right|_{X_\circ}$ سه مرحله وجود دارد:

۱) جاگذاری $y_\circ$، $z_\circ$،

۲) مشتق گیری نسبت به x و

۳) جاگذاری $x_\circ$.

این سه مرحله را به دو مرحله می‌توان کاهش داد:

الف) با فرض ثابت بودن y و z، نسبت به x مشتق می‌گیریم.

ب) تابع حاصل را در $X_\circ$ محاسبه کنیم.

۴.۲.۵ مثال.

۱) اگر $f(x,y,z) = xz - y/x$ و $X_\circ = (1,2,-1)$، آنگاه

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_\circ} = \left\{z+\frac{y}{x^2}\right\}_{X_\circ} = 1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{X_\circ} = \left\{\frac{-1}{x}\right\}_{X_\circ} = -1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{X_\circ} = \{x\}_{X_\circ} = 1.$$

مثال ۲) اگر $f(x,y) = y\sin(xy)$ و $X_\circ = (\pi, 1/2)$، آنگاه

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_\circ} = \left\{y^2\cos(xy)\right\}_{X_\circ} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{X_\circ} = \left\{\sin(xy) + xy\cos(xy)\right\}_{X_\circ} = 1$$

مثال ۳) اگر $f(x,y,z) = x^{y^z}$ و $X_\circ = (2,1,2)$، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial x^{(y^z)}}{\partial x} = y^z\,.\,x^{(y^z-1)}$$

و بنابراین $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_\circ} = 1$. با توجه به $\ln f = y^z\ln x$، با مشتق گیری از طرفین این رابطه نسبت به y داریم

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = z\,.\,y^{z-1}\,.\,\ln x \implies \frac{\partial f}{\partial y} = f\,.\,z\,.\,y^{z-1}\,.\,\ln x$$

و بنابراین $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{X_\circ} = 4\ln 2$. اگر از f دو بار $\ln$ بگیریم، خواهیم داشت $\ln(\ln f) = z\,.\,\ln y + \ln(\ln x)$ و با مشتق گیری از طرفین نسبت به z داریم

$$\frac{\frac{\partial f/\partial z}{f}}{\ln f} = \ln y \implies \frac{\partial f}{\partial z} = f\,.\,\ln f\,.\,\ln y$$

و بنابراین $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{X_\circ} = 0$.

مثال ۴) اگر $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ و $X_\circ = (2,3)$، آنگاه

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_\circ} = \left.\frac{\frac{(1)(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\right|_{X_\circ}$$

$$= \left.\frac{1}{x^2+1}\right|_{X_\circ} = \frac{1}{5}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{X_\circ} = \left.\frac{\frac{(1)(1-xy)-(x+y)(-x)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\right|_{X_\circ}$$

$$= \left.\frac{1}{y^2+1}\right|_{X_\circ} = \frac{1}{10}$$

۵.۲.۵ تمرین.

مشتقات جزیی تابع f را در نقطهٔ $X_\circ$ بیابید:

۱) $f = xy - x/y,\quad X_\circ = (2,-1)$

۲) $f = x\sin(y^2),\quad X_\circ = (1,\sqrt{\pi})$

۳) $f = \sqrt{x^2+y^3},\quad X_\circ = (\sqrt{2},1)$

۴) $f = x^y,\quad X_\circ = (1,2)$

۵) $f = \arctan(x/y),\quad X_\circ = (1,1)$

۶) $f = \log_y x,\quad X_\circ = (4,2)$

۷) $f = xy - xz,\quad X_\circ = (5,3,2)$

۸) $f = x^{y\ln z},\quad X_\circ = (2,2,e^2)$

۹) $f = \ln(x+y) - \sqrt{x^2+z^2},\quad X_\circ = (0,1,1)$

۱۰) $f = \arctan(x+2y+z^2),\quad X_\circ = (0,1,-1)$

۱۱) $f = e^{xyz},\quad X_\circ = (-1,2,1)$

۱۲) $f = x\sin(y+\cos z), \quad X_\circ = (۱, \pi/۲, \pi/۲)$

۱۳) $f = \int_x^y t\,dt, \quad X_\circ = (\circ, ۱)$

۱۴) $f = \int_\circ^{xy} \frac{dt}{z+t}, \quad X_\circ = (۱, ۱, ۱)$

۶.۲.۵ توابع مشتقات جزیی. اگر مشتق جزیی تابع $u = f(x,y,z)$ نسبت به x در کلیهٔ نقاط $X_\circ$ در $D \subseteq D_f$ موجود باشد، می‌توانیم تابع جدیدی به شرح زیر تعریف کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}\,, \qquad D \ni X_\circ \mapsto \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_\circ} \in \mathbb{R}$$

این تابع را مشتق جزیی f نسبت به x می‌نامند. بصورت مشابه، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ قابل تعریف هستند. برای محاسبهٔ $\frac{\partial f}{\partial x}$ کافی است مرحلهٔ دوم در محاسبهٔ $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_\circ}$ را انجام نداد!

۷.۲.۵ مثال. ۱) اگر $f(x,y,z) = \arcsin\left(xy^۲z^۳\right)$، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^۲z^۳}{\sqrt{۱-x^۲y^۴z^٦}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{۲xyz^۳}{\sqrt{۱-x^۲y^۴z^٦}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{۳xy^۲z^۲}{\sqrt{۱-x^۲y^۴z^٦}}$$

توجه شود که دامنهٔ f برابر $-۱ \leq xy^۲z^۳ \leq ۱$ است در حالی که دامنهٔ سه تابع مشتق جزیی حاصل برابر $-۱ < xy^۲z^۳ < ۱$ می‌باشد.

مثال ۲) اگر $f(x,y) = \sqrt{x^۲+y^۳}$، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۳}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{۳y^۲}{۲\sqrt{x^۲+y^۳}}$$

در این حالت دامنهٔ f برابر $x^۲+y^۳ \geq \circ$ است، در حالی که دامنهٔ دو تابع حاصل برابر $x^۲+y^۳ > \circ$ است.

۸.۲.۵ تمرین. مشتقات جزیی هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید:

۱) $f = x\sin(x+y)$ ۲) $f = x^۴+y^۴-۴x^۲y$

۳) $f = y\cos x^۲$ ۴) $f = xy + y/x$

۵) $f = \arctan(y/x)$ ٦) $f = \arcsin\left(\sqrt{x^۲+y^۲}\right)$

۷) $f = \sqrt{x^۲+y^۳+z^۴}$ ۸) $f = xy^۲+yz^۲+zx^۲$

۹) $f = \sqrt[x]{yz}$ ۱۰) $f = ze^x + xe^{۲y} + ye^{۳z}$

۱۱) $f = \ln\left(x+۲y+z^۲\right)$ ۱۲) $f = x^۳\cos y + z\ln(x+y)$

۹.۲.۵ مشتقات جزیی مراتب بالا. ممکن است $\frac{\partial f}{\partial x}$ تابعی مشتقپذیر باشد، لذا از آن مجدداً مشتق جزیی می‌توان گرفت. نماد گذاریهای زیر مرسومند:

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = f_{xx} = f_{۱۱} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y} = f_{yx} = f_{۲۱} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^۳ f}{\partial x\partial z^۲} = f_{z^۲x} = f_{۲۲۱} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}\right)$$
$$\vdots$$

در حالت کلی ترتیب مشتقات جزیی مهم است، یعنی مثلاً $\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x} \neq \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}$ (به تمرین ۵ توجه شود). یک شرط کافی برای بی اهمیت کردن ترتیب مشتقات جزیی به شرح زیر است.

۱۰.۲.۵ قضیه. اگر $\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}$ در یک همسایگی از $X_\circ$ پیوسته باشند، آنگاه مقدار آن دو در $X_\circ$ برابر است.

اثبات: فرض کنیم $\partial^۲ f/\partial y\partial x$ و $\partial^۲ f/\partial x\partial y$ در یک همسایگی شامل نقاط (x,y)، $(x+h,y)$، $(x,y+k)$ و $(x+h,y+k)$ پیوسته باشد. فرض کنیم $\varphi(x,y) = f(x+h,y) - f(x,y)$ و $\omega = \varphi(x,y+k) - \varphi(x,y)$.

بنابه قضیهٔ لاگرانژ $\theta_۱ \in (\circ;۱)$ ای وجود دارد که

$$\begin{aligned}\omega &= k\,.\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y+\theta_۱k)\\ &= k\,.\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y+\theta_۱k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta_۱k)\Big).\end{aligned}$$

باز هم با استفاده از قضیهٔ لاگرانژ، $\theta_۲ \in (\circ;۱)$ ای وجود دارد که

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y+\theta_۱k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta_۱k) =$$
$$= h\,.\,\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(x+\theta_۲h,y+\theta_۱k).$$

بنابراین، در مجموع داریم

$$\omega = kh\,.\,\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(x+\theta_۲h,y+\theta_۱k). \qquad (۱.۵)$$

حال فرض کنیم $\psi(x,y) = f(x,y+k) - f(x,y)$، آنگاه باز هم $\omega = \psi(x+h,y) - \psi(x,y)$ و به صورت مشابه اعداد $\theta_۳,\theta_۴ \in (\circ;۱)$ ای وجود دارند که

$$\begin{aligned}\omega &= h\,.\,\frac{\partial \psi}{\partial x}(x+\theta_۳h,y)\\ &= h\,.\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_۳h,y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_۳h,y)\Big)\\ &= kh\,.\,\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(x+\theta_۳h,y+\theta_۴k). \qquad (۲.۵)\end{aligned}$$

با مقایسهٔ (۱.۵) و (۲.۵) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k).$$

اکنون با توجه به شرط پیوستگی مشتقات جزئی در نقطهٔ (x,y)، نتیجه می‌گیریم که می بایستی حد دو طرف وقتی $(h,k)\to(0,0)$ برابر باشند، که این همان حکم قضیه است. □

این قضیه را به راحتی به قضیهٔ کلی زیر می‌توان تعمیم داد:

۱۱.۲.۵ قضیه. اگر مشتقات جزئی مراتب بالا در همسایگی نقطه‌ای پیوسته باشند، آنگاه ترتیب مشتق گیری اهمیتی ندارد.

۱۲.۲.۵ یادداشت. چون در بسیاری از موارد شرط پیوستگی مشتقات جزیی تأمین است، اهمیتی به ترتیب آنها نمی‌دهیم.

۱۳.۲.۵ مثال. ۱) فرض کنیم $f(x,y)=x^2y^3$، در این صورت

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{2xy^3\right\}=2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{3x^2y^2\right\}=6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{2xy^3\right\}=6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{3x^2y^2\right\}=6x^2y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{6xy^2\right\}=6y^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{6xy^3\right\}=6y^2$$

مثال ۲) فرض کنیم $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$، در این صورت

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\partial y\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^6 f}{\partial^3 x\partial^3 y}=\frac{\partial^3}{\partial^3 x}\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right\}$$
$$=\frac{\partial^3}{\partial^3 x}\left\{\frac{12x}{(x-y)^4}\right\}=\frac{-12\,(125x+79)}{(x-y)^7}$$

مثال ۳) فرض کنیم $f(x,y,z)=e^{ax+by+cz}$، در این صورت به ازای هر l، m و n ای $\dfrac{\partial^{l+m+n} f}{\partial x^l\partial y^m\partial z^n}=a^lb^mc^ne^{ax+by+cz}$.

۱۴.۲.۵ تمرین. در هر مورد، مشتق جزیی خواسته شده را محاسبه کنید:

۱) $f=x^5-3xy+y^2+2y^3,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=?$

۲) $f=x\ln(y+z),\quad \dfrac{\partial^5 f}{\partial x\partial y\partial z^3}=?$

۳) $f=x^y,\quad \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,-1)}=?$

۴) $f=e^{xy^2z^3},\quad \dfrac{\partial^6 f}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}=?$

۵) $f=(x-a)^p\,(y-b)^q,\quad \dfrac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p\partial y^q}=?$

۶) $f=xyz+e^{x+y+z},\quad \dfrac{\partial^{m+n+k} f}{\partial x^m\partial y^n\partial z^k}=?$

۷) تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را به صورت

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \text{ اگر} \\ 0 & (x,y)=(0,0) \text{ اگر}\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت نشان دهید که

الف) به ازای هر x ای $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,0)}=x$.

ب) به ازای هر y ای $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}=-y$.

ج) $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}\neq\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

اکنون امکان بیان قضیه‌ای را داریم که به کمک آن مشتقپذیری توابع چند متغیره را به راحتی می‌توان تحقیق نمود. بعلاوه، امکان محاسبهٔ سریع مشتق نیز فراهم می‌شود.

۱۵.۲.۵ قضیه. اگر تابع $u=f(x,y,z)$ و تمام مشتقات جزیی مرتبهٔ اول آن در نقطهٔ X_0 پیوسته باشند، آنگاه این توابع در X_0 مشتقپذیر است و بعلاوه

$$f'(X_0)=\overrightarrow{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_0},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{X_0},\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{X_0}\right)}$$

اثبات: با استفاده از قضیهٔ لاگرانژ برای تابع $h(x)=f(x,y,z)$ بر بازهٔ $[x_0;x]$ نتیجه می‌گیریم که $t_1\in(x_0;x)$ ای چنان وجود دارد که اگر $X_1=(t_1,y,z)$، آنگاه

$$\begin{aligned} f(x,y,z)-f(x_0,y,z)&=h(x)-h(x_0)\\ &=h'(t_1).(x-x_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_1}.(x-x_0)\end{aligned} \tag{۳.۵}$$

به صورت مشابه اعداد $t_2\in(y_0;y)$ و $t_3\in(z_0;z)$ چنان وجود دارند که

$$f(x_0,y,z)-f(x_0,y_0,z)=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{X_2}.(y-y_0) \tag{۴.۵}$$

$$f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{X_3}.(z-z_0) \tag{۵.۵}$$

که در آنها $X_۲=(t_۱,y,z)$ و $X_۳=(x_\circ,y_\circ,t_۳)$. در نتیجه، با استفاده از (۳.۵)، (۴.۵) و (۵.۵)، داریم

$$\begin{aligned} f(x,y,z)-f(x_\circ,y_\circ,z_\circ) &= \big(f(x,y,z)-f(x_\circ,y,z)\big) \\ &+\big(f(x_\circ,y,z)-f(x_\circ,y_\circ,z)\big) \\ &+\big(f(x_\circ,y_\circ,z)-f(x_\circ,y_\circ,z_\circ)\big) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(t_۱,y,z)}.(x-x_\circ)+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_\circ,t_۲,z_\circ)}.(y-y_\circ) \\ &+\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(x_\circ,y_\circ,t_۳)}.(z-z_\circ) \end{aligned} \tag{۶.۵}$$

اکنون با استفاده از پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial x}$ در نقطهٔ $X_\circ$ نتیجه می‌گیریم که $\delta_۱>\circ$ ای چنان وجود دارد که اگر $|x-x_\circ|<\delta_۱$، آنگاه

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_۱}-\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_\circ}\Big|<\frac{\varepsilon}{۳} \tag{۷.۵}$$

به صورت مشابه $\delta_۲>\circ$ و $\delta_۳>\circ$ ای وجود دارند که اگر $|y-y_\circ|<\delta_۲$ و $|z-z_\circ|<\delta_۳$، آنگاه

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_۲}-\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_\circ}\Big|<\frac{\varepsilon}{۳} \tag{۸.۵}$$

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_۳}-\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_\circ}\Big|<\frac{\varepsilon}{۳} \tag{۹.۵}$$

در این صورت، اگر $\delta=\min\{\delta_۱,\delta_۲,\delta_۳\}$ و $\|X-X_\circ\|<\delta$، آنگاه با قرار دادن (۷.۵)، (۸.۵) و (۹.۵) در (۵.۵) داریم

$$\begin{aligned} &\Big\|f(X)-f(X_\circ)-\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{X_\circ}.(x-x_\circ) \\ &\qquad -\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{X_\circ}.(y-y_\circ)-\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{X_\circ}.(z-z_\circ)\Big\|< \\ &< \Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_۱}-\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_\circ}\Big|.|x-x_\circ| \\ &\qquad +\Big|\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{X_۲}-\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{X_\circ}\Big|.|y-y_\circ| \\ &\qquad +\Big|\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{X_۳}-\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{X_\circ}\Big|.|z-z_\circ| \\ &< \frac{\varepsilon}{۳}\Big(|x-x_\circ|+|y-y_\circ|+|z-z_\circ|\Big) \\ &< \frac{\varepsilon}{۳}\times ۳\times\|X-X_\circ\|=\varepsilon.\|X-X_\circ\| \end{aligned}$$

و حکم از تعریف مشتق نتیجه می‌گردد. □

۱۶.۲.۵ یادداشت. این قضیه برای هر تابع با هر تعداد متغیر نیز درست است و به صورت مشابه اثبات می‌گردد.

۱۷.۲.۵ مثال. ۱) فرض کنید $f=\sqrt{۱+x^۲-y^۲}$ و $X_\circ=(۳,-۱)$. در این صورت f و توابع مشتقات جزئی آن

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲-y^۲}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{۱+x^۲-y^۲}}.$$

مقدماتی هستند و در $X_\circ$ تعریف می‌شوند. در نتیجه، هر سه در $X_\circ$ پیوسته‌اند و بنابراین f در $X_\circ$ مشتق‌پذیر است. بعلاوه

$$\begin{aligned} f'(X_\circ) &= \overrightarrow{\Big(\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲-y^۲}}\Big|_{X_\circ},\frac{-x}{\sqrt{۱+x^۲-y^۲}}\Big|_{X_\circ}\Big)} \\ &= \overrightarrow{\Big(۱,\frac{۱}{۳}\Big)} \end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید $f=xy^۲z^۳$ و $X_\circ=(۱,۲,-۱)$. در این صورت f و توابع مشتقات جزئی آن

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^۲z^۳,\ \frac{\partial f}{\partial y}=۲xyz^۳,\ \frac{\partial f}{\partial z}=۳xy^۲z^۲$$

مقدماتی هستند و در $X_\circ$ تعریف می‌شوند. در نتیجه، هر چهار تابع در $X_\circ$ پیوسته‌اند و بنابراین f در $X_\circ$ مشتق‌پذیر است. بعلاوه

$$\begin{aligned} f'(X_\circ) &= \overrightarrow{\Big(y^۲z^۳|_{X_\circ},۲xyz^۳|_{X_\circ},۳xy^۲z^۲|_{X_\circ}\Big)} \\ &= \overrightarrow{(-۴,-۴,۱۲)} \end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید $f=\ln(۱+xy)$. در این صورت f و توابع مشتقات جزئی آن

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{۱+xy},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{۱+xy}$$

مقدماتی هستند و بر مجموعهٔ $D_f:۱+xy>\circ$ تعریف می‌شوند. در نتیجه، هر سه بر این مجموعه پیوسته‌اند. بنابراین f بر این مجموعه مشتق‌پذیر است و به ازای هر $(x,y)\in D_f$ ای

$$f'(x,y) = \overrightarrow{\Big(\frac{y}{۱+xy},\frac{x}{۱+xy}\Big)}$$

توجه شود که $f':\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ با دامنهٔ D_f است.

مثال ۴) فرض کنید $f=\arcsin(x+y+z)$. در این صورت f مشتقات جزئی آن

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{۱}{\sqrt{۱-(x+y+z)^۲}}$$

مقدماتی هستند. دامنهٔ f برابر $D_f:-۱\le x+y+z\le ۱$ است؛ در حالی که دامنهٔ توابع مشتقات جزئی آن برابر مرز D است، یعنی $D:-۱<x+y+z<۱$. در نتیجه، هر چهار تابع بر مجموعهٔ D تعریف می‌شوند، و لذا همگی بر این مجموعه پیوسته‌اند. بنابراین f بر این مجموعه مشتق‌پذیر است و به ازای هر $(x,y,z)\in D_f$ ای

$$f'(x,y,z) = \frac{۱}{\sqrt{۱-(x+y+z)^۲}}.\overrightarrow{(۱,۱,۱)}$$

توجه شود که $f':\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۳$ با دامنهٔ D است.

۱۸.۲.۵ تمرین. در تمرینات ۱ تا ۶، نشان دهید تابع f در نقطهٔ $X_\circ$ مشتقپذیر است و سپس $f'(X_\circ)$ را محاسبه کنید.

۱) $f = x - y^2\sin(\pi x), \qquad X_\circ = (1, -1)$

۲) $f = \ln(xy), \qquad X_\circ = (-2, -1)$

۳) $f = \arctan(x+y), \qquad X_\circ = (2, 1)$

۴) $f = \sqrt{xyz}, \qquad X_\circ = (3, 2, 6)$

۵) $f = z\sqrt{4 - x^2 - 4y^2}, \qquad X_\circ = \left(-1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$

۶) $f = \dfrac{x-y+z}{x+y-z}, \qquad X_\circ = (2, 1, 2)$

در تمرینات ۷ تا ۱۲، مشخص کنید که تابع f در کدام نقاط مشتقپذیر است و سپس ضابطهٔ f' را مشخص کنید.

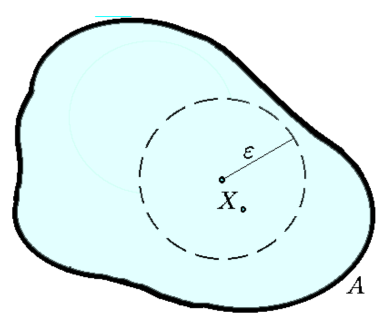
۷) $f = yx^2 - xy^2$, ۸) $f = \ln(1 + x^2 - y^2)$,

۹) $f = (x - y^3)^{3/2}$, ۱۰) $f = xy^2 + yz^2 + zx^2$,

۱۱) $f = \dfrac{x}{yz}$, ۱۲) $f = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}}$.

۱۹.۲.۵ تعریف. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}^n$. در صورتی می‌گوئیم $X_\circ$ یک **نقطهٔ درونی** A است که $r > 0$ ای با خاصیت $B_r(X_\circ) \subseteq A$ یافت گردد (به شکل ۱.۵ توجه شود). مجموعه همهٔ نقاط درونی A را **درون** A نامیده و با نماد $\mathrm{Int}\,(A)$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ A را در صورتی **باز** گوئیم که همهٔ نقاطش درونی باشند. یعنی $\mathrm{Int}\,(A) = A$.

۲۰.۲.۵ قضیه. ۱) $\emptyset$ و $\mathbb{R}^n$ بازند؛
۲) اجتماع هر عدد دلخواه از مجموعه‌های باز، باز است؛
۳) اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز، باز است.



شکل ۱.۵: $X_\circ$ نقطهٔ درونی A است

۲۱.۲.۵ تعریف. در قسمت ۴.۴.۴ تابع مقدماتی تعریف شده است، اگر در ساخت تابع مقدماتی $u = f(X)$ از تابع قدر مطلق استفاده نشود، تابع $u = f(X)$ را **مقدماتی خاص** می‌نامیم. پس تابع مقدماتی خاص تنها از توابع چند جمله‌ای، کسری، مثلثاتی، نمایی ، لگاریتمی و کلیهٔ توابع حاصل از آنها با تعدادی متناهی عمل مقدماتی، تشکیل می‌گردد. این اعمال در ۴.۴.۴ بیان شده‌اند.

۲۲.۲.۵ قضیه. اگر تابع $u = f(X)$ مقدماتی خاص باشد و $X_\circ$ نقطه‌ای درونی از دامنهٔ تعریف آن باشد، آنگاه $u = f(X)$ در $X_\circ$ مشتقپذیر است. به بیان دیگر $u = f(X)$ بر $\mathrm{Int}\,(D_f)$ مشتقپذیر است.

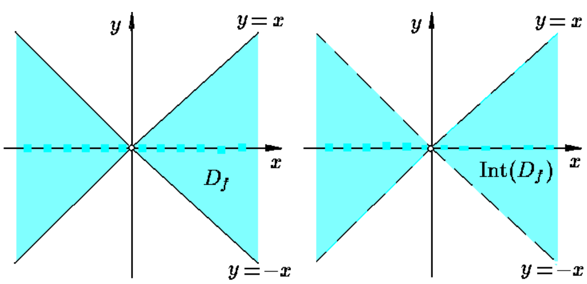
۲۳.۲.۵ مثال. ۱) فرض کنیم $f(x,y) = \arcsin\,(x/y)$. در این صورت:

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y)\,\middle|\, -1 \le x/y \le 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\,\middle|\, 0 < y\,,\ -y \le x \le y\right\} \\ &\qquad \cup \left\{(x,y)\,\middle|\, y < 0\,,\ y \le x \le -y\right\} \end{aligned}$$

پس چون f بر D_f پیوسته است و چون f مقدماتی خاص است، پس بر مجموعهٔ:

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}\,(D_f) &= \left\{(x,y)\,\middle|\, 0 < y\,,\ -y < x < y\right\} \\ &\qquad \cup \left\{(x,y)\,\middle|\, 0 > y\,,\,,y < x < -y\right\} \end{aligned}$$

(به شکل ۲.۵ توجه شود) مشتقپذیر است.



شکل ۲.۵: دامنهٔ مشتقپذیری تابع مقدماتی خاص
$f(x,y) = \arcsin\,(x/y)$

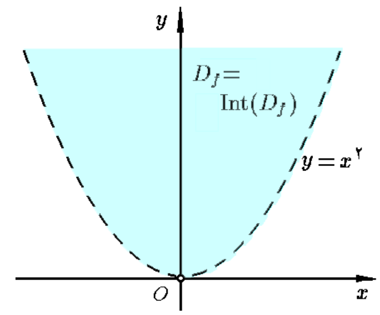
مثال ۲) فرض کنید $f(x,y) = x\ln(x^2 - y)$. در این صورت f مقدماتی خاص است و $\mathrm{Int}\,(D_f) = D_f$ برابر $\left\{(x,y)\,\middle|\, y < x^2\right\}$ است. یعنی، D_f باز است (به شکل ۳.۵ توجه شود). بنابراین، f بر دامنه‌اش D_f پیوسته و مشتقپذیر می‌باشد.

مثال ۳) گیریم $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
تابع f مقدماتی نیست. در حالی که، بر کل $D_f = \mathbb{R}^2$ پیوسته است (چرا؟). از طرفی بر مجموعهٔ باز $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ با تابع مقدماتی خاص $\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ برابر است. پس، f بر $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ مشتقپذیر است. از طرفی، f در $(0,0)$ مشتقپذیر

نیست (چرا؟). پس با اینکه پیوسته بودن f در $X_\circ$ یک شرط لازم برای مشتقپذیری f در $X_\circ$ است، اما شرط کافی نیست. بعلاوه

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\circ,\circ)} = \lim_{x\to\circ}\frac{f(x,\circ)-f(\circ,\circ)}{x-\circ} = \lim_{x\to\circ}\frac{\circ-\circ}{x} = \circ$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\circ,\circ)} = \lim_{y\to\circ}\frac{f(\circ,y)-f(\circ,\circ)}{y-\circ} = \lim_{y\to\circ}\frac{\circ-\circ}{y} = \circ$$

یعنی مشتقات جزئی f در $(\circ,\circ)$ موجودند، ولی f در $(\circ,\circ)$ مشتقپذیر نیست.



شکل ۳.۵: دامنهٔ مشتقپذیری تابع
$f(x,y)=x\ln(x^۲-y)$

مثال ۴) فرض کنید $f(x,y) = |x+y|$. در این صورت f مقدماتی است، $D_f = \mathbb{R}^۲$ و پس f بر کل $\mathbb{R}^۲$ پیوسته است، ولی مقدماتی خاص نیست. f بر مجموعهٔ باز $\left\{(x,y)\,\middle|\,\circ < x+y\right\}$ با تابع مقدماتی خاص $x+y$ و بر مجموعهٔ باز $\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y<\circ\right\}$ با تابع مقدماتی خاص $-x-y$ برابر است. بنابراین f بر $\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y\neq\circ\right\}$ مشتقپذیر است. از طرفی، اگر $X_\circ = (x_\circ, -x_\circ)$ و $f'(X_\circ) = \overrightarrow{(a,b)}$، آنگاه بایستی:

$$\lim_{(x,y)\to(x_\circ,-x_\circ)}\frac{|x+y|-\circ-\overrightarrow{(a,b)}\bullet\overrightarrow{(x-x_\circ,y+x_\circ)}}{\left\|\overrightarrow{(x-x_\circ,y+x_\circ)}\right\|} = \circ$$

اکنون دو مسیر

$$\mathbf{r}_۱(t) = \overrightarrow{\left(x_\circ+t^۲\,,\,-x_\circ\right)} \quad,\quad \mathbf{r}_۲(t) = \overrightarrow{\left(x_\circ-t^۲\,,\,-x_\circ\right)}$$

را در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\begin{aligned}
\circ &= \lim_{t\to\circ}\frac{|x_\circ-t^۲-x_\circ|-(a,b)\bullet\left(t^۲,\circ\right)}{\left\|\left(t^۲,\circ\right)\right\|}\\
&= \lim_{t\to\circ}\frac{t^۲-at^۲}{t^۲} = ۱-a\\
\circ &= \lim_{t\to\circ}\frac{|x_\circ+t^۲-x_\circ|-(a,b)\bullet\left(-t^۲,\circ\right)}{\left\|\left(-t^۲,\circ\right)\right\|}\\
&= \lim_{t\to\circ}\frac{t^۲+at^۲}{t^۲} = ۱+a
\end{aligned}$$

که تناقض است. پس در مجموع، f فقط و فقط بر $\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y\neq\circ\right\}$ مشتق پذیر است.

۲۴.۲.۵ تمرین. مشخص کنید که هر یک از توابع زیر در کدام نقاط مشتقپذیرند:

۱) $f = x\sin\left(\sqrt{xy}\right)$ ۲) $f = \arctan(x+y)$

۳) $f = \dfrac{۱}{y}\cos\left(x^۲\ln x\right)$ ۴) $f = \dfrac{x+y}{x^۳+y^۳}$

۵) $f = \log_z(x+y)$ ۶) $f = \dfrac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲-z^۲}}$

۷) $f = \sqrt{\dfrac{x+y+z}{x-y-z}}$ ۸) $f = \arcsin(xyz)$

۹) $f = |x^۲-y^۲|$ ۱۰) $f = \operatorname{sgn}(x+۲y+۳z)$

۱۱) $f = \sqrt{۱-x^۲-y^۲-z^۲}$

۱۲) $f = -z\ln\left(۱+x^۲+z^۲\right)$

۱۳) نشان دهید تابع $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ در نقطهٔ $(\circ,\circ)$ پیوسته است و مشتقات جزیی $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\circ,\circ)$ موجودند، ولی f در $(\circ,\circ)$ مشتقپذیر نیست.

۱۴) نشان دهید تابع داده شده در $(\circ,\circ)$ پیوسته است و توابع مشتقات جزیی $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ کراندارند، اما f در $(\circ,\circ)$ مشتقپذیر نیست:

$$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y)\neq(\circ,\circ)\\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ)\end{cases}.$$

*۱۵) نشان دهید تابع داده شده در $(\circ,\circ)$ مشتقپذیر است، اما توابع مشتق جزیی $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در $(\circ,\circ)$ پیوسته نیستند:

$$f(x,y) = \begin{cases}(x^۲+y^۲)\sin(x^۲+y^۲)^{-۱/۲} & (x,y)\neq(\circ,\circ)\\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ)\end{cases}$$

۲۵.۲.۵ مثال. ۱) اگر $z = x^n f\left(y/x^۲\right)$ و f تابعی مشتقپذیر باشد، ثابت کنید $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+۲y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz$.

حل. کافی است سمت چپ تساوی بالا را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial z}{\partial x}+۲y\frac{\partial z}{\partial y} &= x\left(nx^{n-۱}f\left(\frac{y}{x^۲}\right)+x^n\frac{-۲y}{x^۳}f'\left(\frac{y}{x^۲}\right)\right)\\
&+۲y\left(x^n\frac{۱}{x^۲}f'\left(\frac{y}{x^۲}\right)\right) = nx^nf\left(\frac{y}{x^۲}\right) = nz
\end{aligned}$$

مثال ۲) نشان دهید تابع $z = yf\left(x^۲-y^۲\right)$ در معادلهٔ $y^۲\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xz$ صدق می‌کند، که در آن f تابعی مشتقپذیر

است.

حل. کافی است سمت چپ تساوی بالا را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} & y^{۲}\left(y \times ۲xf'\left(x^{۲}-y^{۲}\right)\right)+xy\left(f\left(x^{۲}-y^{۲}\right)\right. \\ & \qquad \left.+y \times(-۲y) f'\left(x^{۲}-y^{۲}\right)\right)= \\ & = \quad xyf\left(x^{۲}-y^{۲}\right)=xz \end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید تابع $z = z(x,y)$ بشکل ضمنی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۳xyz$ تعریف شده باشد. مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در نقطهٔ $X_{\circ}=(-۱,۱,-۱)$ محاسبه کنید.

حل. از طرفین رابطهٔ داده شده نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$۲x+\circ+۲z\frac{\partial z}{\partial x}=۳yz+۳xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

بنابراین $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۲x-۳yz}{۳xy-۲z}$ و با محاسبهٔ در نقطهٔ $X_{\circ}$، نتیجه می‌گیریم که $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{X_{\circ}} = -۱$.

مثال ۴) ثابت کنید اگر f و g توابع مشتقپذیر باشند و بعلاوه $u=f(x-at)+g(x+at)$، آنگاه $\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=a^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}$.

حل. با توجه به فرض، داریم:

$$\begin{aligned} a^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}} &= a^{۲}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} \\ &= a^{۲}\frac{\partial}{\partial x}\left\{۱f'(x-at)+۱g(x+at)\right\} \\ &= a^{۲}\left\{f''(x-at)+g''(x+at)\right\} \\ \frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{-af'(x-at)+ag'(x+at)\right\} \\ &= a^{۲}f''(x-at)+a^{۲}g''(x+at) \end{aligned}$$

مثال ۵) با مشتق گیری پیاپی و با فرض $z = x+f(xy)$، رابطه‌ای بدون حضور f بین x، y و z بیابید.

حل. با مشتق گیری از دو طرف تساوی داده شده نسبت به x و y، داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=۱+yf'(xy), \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\circ+xf'(xy)$$

حال $f'(xy)$ را بین این دو رابطه حذف کرده و بدست می آوریم $x\frac{\partial z}{\partial x}=x+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

مثال ۶) با مشتق گیری پیاپی و با فرض

$$z=xf\left(\frac{x}{y}\right)+yg\left(\frac{x}{y}\right)$$

رابطه‌ای بدون حضور f و g بین x، y و z بیابید.

حل. با مشتق گیری از دو طرف تساوی داده شده نسبت به x و y، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)+g'\left(\frac{x}{y}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{x^{۲}}{y^{۲}}f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}g'\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

اکنون $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در x و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را در y ضرب نموده و آنها را جمع می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

۲۶.۲.۵ تمرین.

با فرض اینکه f و g توابعی دیفرانسیل پذیرند، هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

۱) نشان دهید که اگر $z=\frac{y^{۲}}{x}+f(xy)$، آنگاه
$$x^{۲}\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=-۳y^{۲}$$

۲) نشان دهید که اگر $z=e^{y}f\left(ye^{x^{۲}/۲y^{۲}}\right)$، آنگاه
$$\left(x^{۲}-y^{۲}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$$

۳) نشان دهید که اگر $u=f(y-x)+g(y-۲x)$، آنگاه
$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+۳\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\partial y}+۲\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=\circ$$

۴) نشان دهید که اگر $z = f(x,y)e^{ax+by}$ و $\frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}=\circ$، آنگاه
$$\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}+abz=b\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}$$

۵) نشان دهید که اگر $z=xg(x+y)+yf(x+y)$، آنگاه
$$\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=۲\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}$$

۶) نشان دهید که اگر $z=yf\left(\frac{y}{x}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$، آنگاه
$$x^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+۲xy\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}+y^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=\circ$$

۷) نشان دهید که اگر $z=f(x+g(y))$، آنگاه
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}$$

۸) نشان دهید که اگر $z=x^{n}f\left(\frac{y}{x}\right)+x^{۱-n}g\left(\frac{y}{x}\right)$، آنگاه
$$x^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+۲xy\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}+y^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=n(n-۱)z$$

۹) نشان دهید که اگر $z=\frac{۱}{y}\left(f(ax+y)+g(ax-y)\right)$، در این صورت
$$\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}=\frac{a^{۲}}{y^{۲}}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{۲}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

در هر یک از تمرینات زیر، با مشتق گیری پیاپی، رابطه‌ای بدون حضور f و g بین x، y و z بیابید:

۱۰) $z=f(x)+g(y)$

۱۱) $z=f(x+y)+f(x-y)$

۱۲) $z=f\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\right)$

۱۳) $z=f(xy)+g\left(\frac{x}{y}\right)$

۱۴) اگر $x^2+y^2=xyz$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در نقطهٔ $(1,-1,-2)$ بیابید.

۱۵) در صورتی که $x^2+y^3+z^4=xy+yz+21$، مقدار عبارت $2xyz\frac{\partial z}{\partial x}+\left(x^2+y^3+z^4\right)\frac{\partial z}{\partial y}$ را در نقطهٔ $(2,1,-2)$ محاسبه کنید.

۱۶) در صورتی که $xyz=x^2+z^2$، عبارت $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ را محاسبه کنید.

۱۷*) فرض کنید که $x^2+y^2+z^2=\left(x^3+y^3+z^3\right)^2$، مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

۱۸) فرض کنید $ax+by+cz=f\left(x^2+y^2+z^2\right)$، که f تابعی مشتق‌پذیر است و a، b و c اعداد ثابتند. ثابت کنید:

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$$

۳.۵ قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق

از جلد اول بیاد داریم که اگر f و g توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشند، در این صورت $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\,g'(x)$ در این بخش صورت کلی این فرمول را برای توابع چند متغیره مطرح می‌کنیم. قسمت (۶) از قضیهٔ ۵.۱.۵ را به صورت زیر می‌توان بازنویسی نمود.

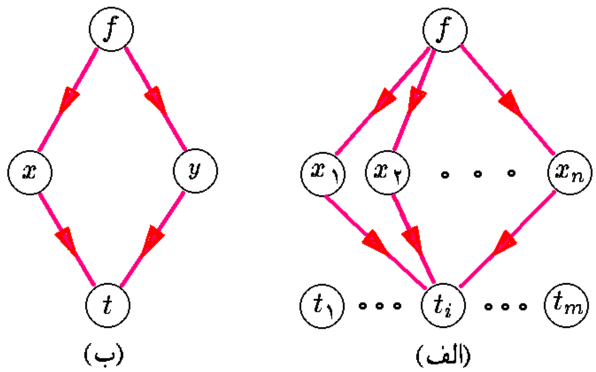
۱.۳.۵ قضیه. اگر f تابعی مشتق‌پذیر از متغیرهای x_1، x_2، $\cdots$ و x_n بوده و هر یک از x_i ها تابعی مشتق‌پذیر از متغیرهای t_1، t_2، $\cdots$ و t_m باشند، آنگاه f نسبت به هر یک از متغیرهای t_1، t_2، $\cdots$ و t_m مشتق‌پذیر است، بعلاوه

$$\frac{\partial f}{\partial t_i}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i} \qquad (۱۰.۵)$$

این فرمول را **قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق** می‌نامیم. برای سهولت در نوشتن این فرمول از نمودار توماس می‌توانیم استفاده کنیم؛ به شکل ۴.۵—الف توجه شود.

۲.۳.۵ نتیجه. اگر $u=f(x,y,z)$، $x=\varphi(t)$، $y=\psi(t)$ و $z=\theta(t)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه f نسبت به t نیز مشتق‌پذیر است، و بعلاوه

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (۱۱.۵)$$



شکل ۴.۵: قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق

۳.۳.۵ مثال. ۱) فرض کنید $f=zy^2x^3$، $x=\sin t$، $y=\cos t$ و $z=\ln t$. در این صورت به شکل مستقیم

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}&=\frac{d}{dt}\left\{(\ln t)(\cos t)^2(\sin t)^3\right\}\\&=\frac{1}{t}\cos^2 t\sin^3 t-2\ln t\cos t\sin^4 t\\&\quad+3\ln t\cos^3 t\sin^2 t=A\end{aligned}$$

و به کمک فرمول (۱۰.۵) (به شکل ۴.۵—ب توجه شود)، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\&=\left(3zy^2x^2\right)(\cos t)+\left(2zyx^3\right)(-\sin t)\\&\quad+\left(y^2x^3\right)(1/t)\\&=3\ln t\sin^2 t\cos^3 t-2\ln t\cos t\sin^4 t\\&\quad+\cos^2 t\sin^3 t(1/t)=A\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید $f=\arcsin(x/y)$، $x=\ln t$ و $y=1/t$. در این صورت

$$\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\arcsin(t\ln t)\right\}=\frac{\ln t+1}{\sqrt{1-(t\ln t)^2}}=A$$

در حالی که به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\&=\left(\frac{1/y}{\sqrt{1-(x/y)^2}}\right)\left(\frac{1}{t}\right)\\&\quad+\left(\frac{-x/y^2}{\sqrt{1-(x/y)^2}}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)=A\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید $f=\sqrt{x^2+y^3+z^4}$، $x=st$، $y=s/t$ و $z=s\ln t$. در این صورت

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}}(s) + \frac{3y^2}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}}\left(\frac{-s}{t^2}\right) \\
&\quad + \frac{4z^3}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}}\left(\frac{s}{t}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}}(t) + \frac{3y^2}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}}\left(\frac{1}{t}\right) \\
&\quad + \frac{4z^3}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}}(\ln t)
\end{aligned}
$$

مثال ۴) فرض کنید $z=f(x,y)$، $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$. در این صورت

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}
$$

مثال ۵) در صورتی که f تابعی از x، y و z باشد، و $x=st$، $y=s/t$ و $z=t^2/s$، مشتق جزئی f نسبت به s را بدون مشخص بودن f می‌توان محاسبه نمود:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\left(\frac{-t^2}{s^2}\right)
\end{aligned}
$$

مثال ۶) فرض کنید $u=f(y-z,z-x,x-y)$، نشان دهید $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

حل. فرض کنیم $a=y-z$، $b=z-x$ و $c=x-y$. در این صورت:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z} &= \left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\right) \\
&= \left(0\frac{\partial u}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial c}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial a} + 0\frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial c}\right) \\
&\quad + \left(-\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} + 0\frac{\partial u}{\partial c}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

مثال ۷) با مشتق گیری پیاپی از $u=f(x/y,y/z)$، رابطه‌ای بدون حضور f بین x، y، z و u بیابید.

حل. با مشتق گیری از طرفین رابطهٔ داده شده نسبت به x، y و z و با فرض $t=x/y$ و $s=y/z$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial t} + 0\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial t} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial s} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} = 0\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{y}{z^2}\frac{\partial f}{\partial s} = y\frac{\partial f}{\partial s}
\end{aligned}
$$

بنابراین از رابطه اول داریم $\frac{\partial f}{\partial t} = y\frac{\partial u}{\partial x}$ و از رابطهٔ سوم داریم $\frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{z^2}{y}\frac{\partial u}{\partial z}$. با جاگذاری این عبارت در معادلهٔ دوم، نتیجه می‌گیریم

$$
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{z}\left(-\frac{z^2}{y}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{z}{y}\frac{\partial u}{\partial z}
$$

نتیجه اینکه

$$
x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0
$$

۴.۳.۵ تمرین.

قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق را برای هر یک از موارد زیر تحقیق کنید:

۱) $f = x\sin(yz)$, $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $\frac{df}{dt}=?$

۲) $f = y\sqrt{x} + \arctan\left(\frac{z}{x}\right)$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $z=x^2$, $\frac{df}{dt}=?$

۳) $f = \frac{x+y}{x+z}$, $x=st$, $y=\frac{s}{t}$, $z=s\ln t$, $\frac{\partial f}{\partial s}=?$

۴) $f = \sqrt{x+y^2+z^3}$, $x=uvw$, $y=\frac{u}{v}$, $z=\frac{w}{u}$, $\frac{\partial f}{\partial u}=?$

۵) $f = \arctan\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $\frac{df}{dt}=?$

۶) $f = x^{1/3}+y^{1/3}$, $x=\ln t$, $y=e^t$, $\frac{df}{dt}=?$

۷) $f = x\sin y$, $x=st$, $y=\frac{s}{t}$, $\frac{\partial f}{\partial t}=?$

۸) $f = x\sqrt[3]{y}+y\sqrt[3]{x}$, $x=s\cos t$, $y=t\cos s$, $\frac{\partial f}{\partial s}=?$

۹) با فرض $u=\frac{1}{z}(xy\ln x)+xf\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$، ثابت کنید
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$$

۱۰) با فرض $u=x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha},\frac{z}{x^\beta}\right)$، ثابت کنید
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$$

۱۱) با فرض $w = f\left(x^2+y^2, xy\right)$، عبارت داده شده را محاسبه کنید: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

۱۲) با فرض $u=f(x,y)$، $x=e^r\cos\theta$ و $y=e^r\sin\theta$ ثابت کنید: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-2r}\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\}$

۱۳) با فرض $u=f\left(2r-s, r+2s\right)$، ثابت کنید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{25}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}-2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)$$

۱۴) با فرض $w=f\left(x+y,x-y\right)$، $u=x+y$ و $v=x-y$، ثابت کنید: $\dfrac{\partial w}{\partial x}\times\dfrac{\partial w}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2-\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2$

۱۵) با فرض اینکه f تابعی مشتقپذیر است و $u = f\left(y+2z-3x, z+2x-3y, x+2y-3z\right)$، ثابت کنید: $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

با مشتقگیری پی در پی، رابطه‌ای بدون حضور f و g بین x، y، z و u بیابید:

۱۶) $u=f\left(\dfrac{x}{y^2},\dfrac{z}{y^2}\right)$ ۱۷) $u=x^2f(x+y^2,z)$

۱۸) $u=f\left(x+\dfrac{y}{z},y+\dfrac{x}{z}\right)$ ۱۹) $u=f(x+y)+g(x-y)$

۲۰) $u=f\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+g\left(y+\dfrac{1}{z}\right)$

۲۱) $u=f(x-y,y-z,z-x)$

۴.۵ ژاکوبی

ژاکوبی تعمیمی از مشتق است! فرض کنید $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. چنین توابعی را نگاشت می‌نامیم. نگاشت $\mathbf{F}$ را به شکل

$$\mathbf{F}\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\Big(f_1\left(x_1,\cdots,x_n\right),\cdots,f_m\left(x_1,\cdots,x_n\right)\Big)$$

می‌توان نوشت، که f_1، f_2، $\cdots$ و f_m توابعی n−متغیره هستند و مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ نامیده می‌شوند.

۱.۴.۵ تعریف. فرض کنیم $\mathbf{F}=\Big(f_1,\cdots,f_m\Big)$ نگاشتی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ باشد. در صورتی می‌گوئیم $\mathbf{F}$ مشتقپذیر است که ماتریس $m\times n$ مانند A یافت گردد که

$$\lim_{X\to X_0}\frac{\|\mathbf{F}(X)-\mathbf{F}(X_0)-A(X-X_0)\|}{\|X-X_0\|}=0$$

ماتریس A را **مشتق** $\mathbf{F}$ در X_0 نامیده و با نماد $\mathbf{F}'(X_0)$ نشان می‌دهیم. **ژاکوبی** $\mathbf{F}$ را به صورت:

$$\begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_m' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \cdots & \partial f_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \partial f_m/\partial x_2 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n \end{bmatrix}$$

تعریف نموده و با نماد $\dfrac{\Delta\left(f_1,f_2,\cdots,f_m\right)}{\Delta\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}$ نشان می‌دهیم.

۲.۴.۵ قضیه. اگر $\mathbf{F}=\left(f_1,\cdots,f_m\right)$ نگاشتی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ باشد و هر یک از توابع مولفه‌ای آن (یعنی، f_1، f_2، $\cdots$ و f_m) مشتقپذیر باشند. در این صورت، $\mathbf{F}'(X_0)$ برابر ژاکوبی $\mathbf{F}$ در X_0 است.

۳.۴.۵ یادداشت. توجه شود که ژاکوبین $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ یک ماتریس $m\times n$ می‌باشد. اگر $m=n$، آنگاه **دترمینان ژاکوبین** $\mathbf{F}$ را با نماد $\dfrac{\partial\left(f_1,f_2,\cdots,f_m\right)}{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}$ نشان می‌دهیم.

۴.۴.۵ مثال. ۱) فرض کنیم $x=st$، $y=s^2$ و $z=t^2$، در این صورت

$$\frac{\Delta\left(x,y,z\right)}{\Delta\left(s,t\right)}=\begin{bmatrix} \partial x/\partial s & \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial s & \partial y/\partial t \\ \partial z/\partial s & \partial z/\partial t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t & s \\ 2s & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix}$$

مثال ۲) فرض کنیم $x=uv$، $y=u^2-w^2$ و $z=uvw$. در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(u,v,w\right)} &= \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} v & u & 0 \\ 2u & 0 & -2w \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}=-2u^3v\end{aligned}$$

۵.۴.۵ تمرین. ۱) فرض کنید گه $x=uvw$ و نیز $y=u^2-v^2+w^2$، مطلوبست ژاکوبین x و y نسبت به u، v و w.

۲) فرض کنید $a=uv^2w^3$، $b=vw^2u^3$ و $c=wu^2v^3$. مطلوبست دترمینان ژاکوبین a، b و c نسبت به u، v و w.

۶.۴.۵ قضیه. به فرض وجود مشتقها داریم

۱) $\dfrac{\Delta\left(x_1,\cdots,x_n\right)}{\Delta\left(x_1,\cdots,x_n\right)}=I_n$ (ماتریس همانی $n\times n$)

۲) $\dfrac{\Delta\left(z_1,\cdots,z_l\right)}{\Delta\left(x_1,\cdots,x_n\right)}=\dfrac{\Delta\left(z_1,\cdots,z_l\right)}{\Delta\left(y_1,\cdots,y_m\right)}\cdot\dfrac{\Delta\left(y_1,\cdots,y_m\right)}{\Delta\left(x_1,\cdots,x_n\right)}$

۳) $\dfrac{\Delta\left(x_1,\cdots,x_n\right)}{\Delta\left(y_1,\cdots,y_n\right)}=\left\{\dfrac{\Delta\left(y_1,\cdots,y_n\right)}{\Delta\left(x_1,\cdots,x_n\right)}\right\}^{-1}$

توضیح اینکه، رابطهٔ (۲) را قاعدهٔ زنجیره‌ای تعمیم یافتهٔ مشتق می‌گویند. مطابق این قاعده، اگر z_i ها نسبت به y_i ها مشتقپذیر باشند و y_i ها نیز نسبت به x_i ها مشتقپذیر باشند، آنگاه

z_i ها نیز نسبت به x_i ها مشتق‌پذیرند و تساوی (۲) را داریم. تساوی (۳) را قضیهٔ نگاشت وارون می‌نامند. مطابق این قضیه، اگر دترمینان ژاکوبین y_i ها نسبت به x_i ها مخالف صفر باشد آنگاه (حداقل به شکل موضعی) x_i ها را بر حسب y_i ها می‌توان بیان نمود و بعلاوه تساوی (۳) را داریم. به بیان دیگر، نگاشت $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(y_1,\cdots,y_n)$ معکوس‌پذیر است.

۷.۴.۵ نتیجه. به فرض وجود مشتقها داریم

$$1)\quad \frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=1$$

$$2)\quad \frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=1\div\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

۸.۴.۵ مثال. ۱) فرض کنید که $x=uv^2w^3$، $y=(u+v)/w$، $u=t$، $v=t^2$ و $w=t^3$ در این صورت

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta(x,y)}{\Delta(u,v,w)}\frac{\Delta(u,v,w)}{\Delta(t)}=\\
&=\begin{bmatrix} v^2w^3 & 2uvw^3 & 3uv^2w^2\\ 1/w & 1/w & -(u+v)/w^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2t\\3t^2\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} v^2w^3+4tuvw^3+9uv^2w^2\\ \dfrac{w+2tw-3t^2u-3t^2v}{w^2}\end{bmatrix}=\frac{\Delta(x,y)}{\Delta(t)}
\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید $u=x^2+y^3$ و $v=xy-x/y$. مطلوبست $\partial x/\partial u$.

حل. با توجه به قسمت ۳ از قضیهٔ ۶.۴.۵ داریم

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(x,y)}{\Delta(u,v)}&=\left\{\frac{\Delta(u,v)}{\Delta(x,y)}\right\}^{-1}=\begin{bmatrix}2x & 3y^2\\ y-1/y & x+x/y^2\end{bmatrix}^{-1}\\
&=\frac{1}{2x^2-3y^3+3y+2x^2/y^2}\begin{bmatrix}x+x/y^2 & -3y^2\\ -y+1/y & 2x\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

در نتیجه $\partial x/\partial u$ عبارت از مولفهٔ $(1,1)$ ماتریس بالا است، یعنی

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u}&=\frac{x+x/y^2}{2x^2-3y^3+3y+2x^2/y^2}\\
&=\frac{xy^2+x}{2x^2y^2-3y^5+3y^3+2x^2}
\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید $u=xy^2-y^3$، $v=yx^2-x^3$، $u=s^2-t^2$ و $v=s^3+t^3$. مطلوبست $\partial y/\partial t$.

حل. از دو معادلهٔ اول x و y را توابعی از u و v می‌توان دانست. با توجه به دو معادلهٔ آخر نیز u و v را توابعی از s و t می‌توان دانست. پس x و y توابعی از s و t می‌باشند. بعلاوه

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(x,y)}{\Delta(s,t)}&=\frac{\Delta(x,y)}{\Delta(u,v)}\frac{\Delta(u,v)}{\Delta(s,t)}=\left\{\frac{\Delta(u,v)}{\Delta(x,y)}\right\}^{-1}\frac{\Delta(u,v)}{\Delta(s,t)}\\
&=\begin{bmatrix}2xy-3x^2 & x^2\\ y^2 & 2xy-3y^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2s & -2t\\ 3s^2 & 3t^2\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{-6xy(x-y)^2}\times\\
&\quad\begin{bmatrix}2xy-3y^2 & -2t\\ -3s^2 & 2xy-3x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2s & -2t\\ 3s^2 & 3t^2\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{-6xy(x-y)^2}\times\\
&\quad\begin{bmatrix}4sxy-6sy^2-6ts^2 & 6ty^2-4txy-6t^3\\ 6s^2xy-6s^3-9s^2x^2 & 6ts^2+6t^2xy+9t^2x^2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

در نتیجه $\partial y/\partial t$ درآیهٔ $(2,2)$ از ماتریس بالا است، یعنی

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t}&=\frac{-6ts^2+6t^2xy+9t^2x^2}{-6xy(x-y)^2}\\
&=-\frac{t\left(2s^2+2xyt+3tx^2\right)}{2xy(x-y)^2}
\end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنید $x=\rho\cos\varphi\cos\theta$، $y=\rho\cos\varphi\sin\theta$ و $z=\rho\sin\varphi$ (تغییر مختصات کروی) در این صورت

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\\
&=\begin{vmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta & -\rho\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\end{vmatrix}\\
&=\sin\varphi\left(-\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta-\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\right)\\
&\qquad-\rho\cos\varphi\left(\rho\cos^2\varphi\cos^2\theta+\rho\cos^2\varphi\sin^2\theta\right)\\
&=-\rho^2\cos\varphi\sin^2\varphi-\rho^2\cos^3\varphi=-\rho^2\cos\varphi
\end{aligned}$$

۹.۴.۵ تمرین.

۱) فرض کنید $u=x^2+y^2+z^2$، $v=x^3+y^3+z^3$ و $w=x^4+y^4+z^4$. مطلوبست $\partial x/\partial v$ و $\partial y/\partial v$.

۲) در صورتی که $x=uvw^2$، $y=u^2-w^2$، $z=u/vw$، $u=st$، $v=s/t$ و $w=t/s$، مطلوبست محاسبهٔ $\partial x/\partial t$ و $\partial y/\partial s$.

۳) در صورتی که $f=x^2-y^2z$، $x=\arcsin(u/v)$، $y=\tan(u/w)$، $z=uvw$، $u=t^2$، $v=t$ و $w=-t^3$، مطلوبست df/dt.

۴) فرض کنید $u=x^2+y^2$ و $v=\cos(x+y)+y/x$. مطلوبست مشتقات جزئی x و y نسبت به u.

۵) فرض کنید $f=x^2+y^3$، $u=x^3-y^3$، $v=\sin(xy)$، $u=t$ و $v=\sin t$. در این صورت df/dt را محاسبه کنید.

۶) فرض کنید $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ (مختصات قطبی). دترمینان ژاکوبین x و y نسبت به r و θ را محاسبه کنید.

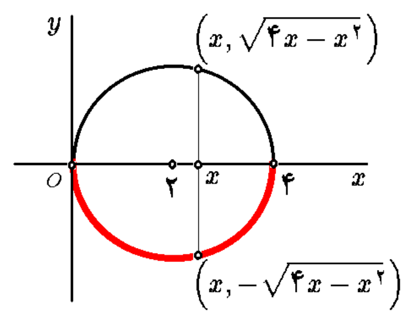
۷) آیا می‌توان گفت x و y توابعی از u و v هستند؟ در صورتی که $u=\arcsin(x/y-x)$ و $v=x^2/y^2-2/y+x^2$. چرا؟

۵.۵ تابع ضمنی

یکی از روشهای رایج معرفی توابع، استفاده از روابط میان تابع و یا توابع و متغیر و یا متغیرها می‌باشد. به عنوان مثال، رابطهٔ $x^۲+y^۲=۴x$ می‌تواند y را به عنوان تابعی از x معرفی کند. اما در همه جا خیر! همان طوری که در شکل ۵.۵ ملاحظه می‌شود، اگر $x=\pm ۲$ آنگاه نمی‌توان y را در یک همسایگی از x، تابعی از متغیر x دانست! هدف از این بخش، تعیین شرط و یا شرایطی است که طی آنها بتوان توابع ضمنی را تعریف نمود.

۱.۵.۵ قضیهٔ تابع ضمنی. فرض کنید m معادلهٔ با $m+n$ مجهول

$$\begin{cases} f_۱(y_۱,y_۲,\cdots,y_m,x_۱,x_۲,\cdots,x_n)=c_۱\\ f_۲(y_۱,y_۲,\cdots,y_m,x_۱,x_۲,\cdots,x_n)=c_۲\\ \qquad\vdots\\ f_m(y_۱,y_۲,\cdots,y_m,x_۱,x_۲,\cdots,x_n)=c_m\end{cases}$$



شکل ۵.۵: تابع ضمنی

داده شده باشند، که f_i ها تابع و c_i ها عدد می‌باشند. فرض کنید $X_۰=(x_{۰۱},x_{۰۲},\cdots,x_{۰n})$، $Y_۰=(y_{۰۱},y_{۰۲},\cdots,y_{۰m})$، $Z_۰=(Y_۰,X_۰)$ و کلیهٔ توابع $f_۱$، $f_۲$، . . . و f_m در نقطهٔ $Z_۰$ مشتقپذیرند. در این صورت، شرط لازم و کافی برای اینکه در یک همسایگی از نقطهٔ $X_۰$ بتوان $y_۱$، $y_۲$، . . . و y_m را به شکل توابعی از $x_۱$، $x_۲$، . . . و x_n تعریف نمود، آن است که $\frac{\partial(f_۱,f_۲,\cdots,f_m)}{\partial(y_۱,y_۲,\cdots,y_m)}\Big|_{Z_۰}\neq ۰$. بعلاوه، $y_۱$، $y_۲$، . . . و y_m توابع هموار از $x_۱$، $x_۲$، . . . و x_n هستند و

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=-\frac{\dfrac{\partial(f_۱,f_۲,\cdots,f_m)}{\partial(y_۱,\cdots,y_{i-۱},x_j,y_{i+۱},\cdots,y_m)}}{\dfrac{\partial(f_۱,f_۲,\cdots,f_m)}{\partial(y_۱,y_۲,\cdots,y_m)}}$$

۲.۵.۵ مثال. ۱) فرض کنید $x^۲+y^۲+z^۲=۱۷$، $xyz=۱۲$ و $Z_۰=(-۲,-۳,۲)$. در این صورت می‌توان x و y را تابعی از z دانست، زیرا با فرض $f=x^۲+y^۲+z^۲$ و $g=xyz$ داریم

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\Big|_{Z_۰} = \begin{vmatrix} ۲x & ۲y\\ yz & xz\end{vmatrix}_{Z_۰}$$

$$= ۲z\left(x^۲-y^۲\right)\Big|_{Z_۰}=-۲۰\neq ۰$$

بنابراین x و y را در یک همسایگی از $z_۰=۲$ بر حسب z می‌توان بیان نمود. بعلاوه

$$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(z,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=\frac{-\begin{vmatrix} ۲z & ۲y\\ xy & xz\end{vmatrix}}{۲z(x^۲-y^۲)}=\frac{x\left(y^۲-z^۲\right)}{x(x^۲-y^۲)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=\frac{-\begin{vmatrix} ۲x & ۲z\\ yz & xy\end{vmatrix}}{۲z(x^۲-y^۲)}=\frac{y\left(z^۲-x^۲\right)}{z(x^۲-y^۲)}$$

مثال ۲) فرض کنید $x^۲+y^۳+z^۴=۱۶$ و $Z_۰=(۱,-۱,۲)$. اگر فرض شود که $f=x^۲+y^۳-z^۴-۱۶$، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{Z_۰}=۲x\Big|_{Z_۰}=۲$$

و لذا x را تابعی از y و z می‌توان دانست. بعلاوه:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x}=-\frac{۳y^۲}{۲x}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\partial f/\partial z}{\partial f/\partial x}=-\frac{۴z^۳}{۲x}=-۲\frac{z^۳}{x}$$

مثال ۳) فرض کنید $f(x,y,z)=c$. نشان دهید که $\frac{\partial x}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=-۱$.

حل. با توجه به قضیهٔ ۱.۵.۵ داریم

$$\frac{\partial x}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x}\right).\left(-\frac{\partial f/\partial z}{\partial f/\partial y}\right).\left(-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}\right)=(-۱)^۳=-۱$$

مثال ۴) فرض کنید $x^۲+y^۲=u^۲+v^۲$ و $xy+y^۳=uv+v^۳$. مطلوبست $\partial x/\partial u$.

حل. فرض کنیم

$$f=x^۲+y^۲-u^۲-v^۲\quad,\quad g=xy+y^۳-uv-v^۳$$

در این صورت

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix} -۲u & ۲y\\ -v & x+۳y^۲\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲x & ۲y\\ y & x+۳y^۲\end{vmatrix}}=\frac{۲ux+۶uy^۳-۲vy}{۲x^۲+۶xy^۲-۲y^۲}$$

مثال ۵) در صورتی که $xy^۲z^۳=x+y+z$، $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$ را محاسبه کنید.

حل. اولاً، روشن است که اگر $f=xy^۲z^۳-x-y-z$، آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}=-\frac{y^۲z^۳-۱}{۳xy^۲z^۲-۱}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\ &= \frac{-۱}{\left(۳xy^۲z^۲-۱\right)^۲}\left\{\left(۳y^۲z^۲\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(۳xy^۲z^۲-۱\right)\right.\\ &\quad\left.-\left(۳y^۲z^۲+۶xy^۲z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(y^۲z^۳-۱\right)\right\}\end{aligned}$$

حال کافی است بجای $\partial z/\partial x$ از تساوی قبلی، قرار دهیم.

۳.۵.۵ تمرین.

۱) فرض کنید $xy^۲z^۳=۲۵$ و $xy+yz+zx=۱$. مطلوبست محاسبهٔ dz/dx، dx/dy و dy/dz.

۲) فرض کنید $xy^۲+yz^۲+xz^۲=۱$ و $xyz=z^۲+۱$. مطلوبست dz/dx و dx/dz.

۳) فرض کنید $x\arcsin(y+z)=۱$، مطلوبست $\partial z/\partial x$، $\partial x/\partial y$، $\partial x/\partial z$ و $\partial y/\partial x$.

۴) فرض کنید $xy^۲z+\sin(xyz)=۲$، مطلوبست محاسبهٔ $\partial^۲z/\partial x^۲$ و $\partial^۲z/\partial x\partial y$.

۵) ثابت کنید که اگر $f(x,y,z)=c$، آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y} &= \left\{\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^۲\right.\\ &\quad\left.-\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\div\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^۳\end{aligned}$$

۶) فرض کنید داشته باشیم $u^۲+v^۲=\ln(x+y)$ و بعلاوه $u^۲v^۲=\sin\left(x^۲+y^۲\right)$. مطلوبست $\partial u/\partial x$ و $\partial y/\partial v$.

۷) فرض کنید $z=x^۳+y^۳$، $u^۲+v^۲=xy$ و $u^۳+v^۳=x/y$. مطلوبست $\partial z/\partial u$ و $\partial z/\partial v$.

*۸) مطلوبست محاسبهٔ $\dfrac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}$ در حالی که

$$f\left(x+y+z,x^۲+y^۲+z^۲\right)=۰$$

۹) مطلوبست محاسبهٔ $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ به شرطی که

$$f(x-y,y-z,z-x)=۰$$

۱۰) در صورتی که بدانیم $f(xz,yz)=۰$، مطلوبست محاسبهٔ $\partial^۲z/\partial x^۲$.

۱۱) dx/dz و dy/dz را در حالی بیابید که بدانیم

$$g\left(xyz,x^۲,z^۲\right)=f\left(xyz,x^۲,y^۲\right)=۰$$

۱۲) فرض کنید $f(x,y,z)=c$، آیا درست است که بگوئیم $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x}=۱$؟

۱۳) در صورتی که $xy^۲z^۳=۱$ و $X_۰=(-۱,۱,-۱)$، مطلوبست محاسبهٔ $\left.\dfrac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}\right|_{X_۰}$.

۶.۵ تغییر متغیر

این بخش زمینه‌ای برای موضوع معادلات دیفرانسیل (معمولی و یا با مشتقات جزیی) است، و در دور اول مطالعه می‌توان از آن صرف نظر کرد، زیرا در بخشهای بعدی استفاده نخواهد شد.

۱.۶.۵ تعویض متغیرها در عبارت شامل یک تابع یک متغیره و مشتقات آن.

فرض کنیم $f(x,y,y_x,y_{xx},\cdots)=۰$ عبارتی بر حسب متغیر x، تابع y و مشتقات y نسبت به x است ($y_x=y'$، $y_{xx}=y''$ و $\cdots$). اگر $x=\varphi(t,u)$ و $y=\psi(t,u)$، بترتیب بیان x و y بر حسب متغیر جدید t و تابع جدید $u=u(t)$ باشد، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق E را بر حسب t و u می‌توان نوشت؛ زیرا، به عنوان مثال:

$$\begin{aligned}y_x &= y_tt_x=\frac{y_t}{x_t}=\frac{t_t\psi_t+u_t\psi_u}{t_t\varphi_t+u_t\varphi_u}=\frac{\psi_t+u_t\psi_u}{\varphi_t+u_t\varphi_u}\\ y_{xx} &= (y_x)_x=(y_x)_t\,t_x=\frac{۱}{x_t}\left\{\frac{\psi_t+u_t\psi_u}{\varphi_t+u_t\varphi_u}\right\}_t\\ &= \frac{۱}{(\varphi_t+u_t\varphi_u)^۳}\Big\{(\psi_{tt}+u_{tt}\psi_u+u_t\psi_{ut})(\varphi_t+u_t\varphi_u)\\ &\quad-(\varphi_{tt}+u_{tt}\varphi_u+u_t\varphi_{ut})(\psi_t+u_t\psi_u)\Big\}\end{aligned}$$

۲.۶.۵ مثال. ۱) معادلهٔ دیفرانسیل $x^۲y''+xy'+y=۰$ را با فرض $x=e^t$، بر حسب تابع y و متغیر جدید t بازنویسی کنید.

حل. در مقایسه با ۱.۶.۵ داریم $x=e^t$ و $y=u$. بنابراین

$$y_x=y_tt_x=\frac{y_t}{x_t}=\frac{y_t}{e^t}=\frac{y_t}{x}$$

و لذا

$$\begin{aligned}y_{xx} &= (y_x)_x=\frac{(y_x)_t}{x_t}=\frac{۱}{e^t}\left(\frac{۱}{x}y_t\right)_t\\ &= \frac{۱}{x}\frac{y_{tt}x-x_ty_t}{x^۲}=\frac{y_{tt}-y_t}{x^۲}\end{aligned}$$

در نتیجه $x^۲y''+xy'+y=y_{tt}-y_t+y_t+y=y_{tt}+y$. یعنی، معادلهٔ مذکور به شکل $y_{tt}+y=۰$ تبدیل می‌گردد.

مثال ۲) نقش تابع و متغیر را در معادلهٔ $y'' - xy' + y = x$ عوض کنید.

حل. به بیان دیگر باید فرض کنیم $x = u$ و $y = t$، بنابراین با توجه به ۱.۶.۵، داریم:

$$\begin{aligned} y_x &= \frac{1 + 0 u_t}{0 + 1 u_t} = \frac{1}{u_t} \\ y_{xx} &= \frac{(y_x)_t}{x_t} = \frac{1}{u_t}\frac{-u_{tt}}{(u_t)^2} = -\frac{u_{tt}}{(u_t)^3} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$y'' - xy' + y = y_{xx} - xy_x + y = -\frac{u_{tt}}{(u_t)^3} - u\frac{1}{u_t} + t$$

پس معادلهٔ مذکور به شکل

$$u_{tt} + u\,(u_t)^2 + t\,(u_t)^3 = u\,(u_t)^3$$

تبدیل می‌گردد. چون $t = y$ و $u = x$، پس

$$x'' + x\,(x')^2 + y\,(x')^3 = x\,(x')^3$$

مثال ۳) در معادلهٔ $y'' - y' = 2x$ مفروضات $x = ut$ و $y = u^2 + t^2$ را وارد کنید، که u تابعی از متغیر t فرض شده است. به بیان دیگر، آنرا بر حسب تابع جدید u و متغیر جدید t بازنویسی کنید.

حل. با توجه به فرمولهای ۱.۶.۵ داریم

$$\begin{aligned} y' &= y_x = \frac{(2t) + (2u)\,u_t}{(u) + (t)\,u_t} = 2\frac{t + uu'}{u + tu'} \\ y'' &= y_{xx} \\ &= \frac{1}{(u + tu')^3}\Big\{ \Big((2) + (2u)\,u'' + 2u'^2\Big)(u + tu') \\ &\qquad - (u' + tu'' + u')\,((2t) + (2u)\,u')\Big\} \\ &= \frac{2}{(u + tu')^3}\left\{u + tu' - t^2u''\right\} \end{aligned}$$

در نتیجه، معادلهٔ مفروض را به شکل

$$\frac{2(u + tu' - t^2u'')}{(u + tu')^3} - \frac{2\,(t + uu')}{u + tu'} = 2ut$$

می‌توان نوشت. در نتیجه، داریم

$$t^2u'' - tu' - u + (t + uu')\,(u + tu')^2 = 2ut\,(u + tu')^3$$

۳.۶.۵ تمرین.

۱) $x^2y'' - 2xy' + 5y = 0$ را با فرض $x = e^t$ بر حسب t بنویسید.

۲) با فرض اینکه x تابع و $t = xy$ متغیر است، معادلهٔ $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ را باز نویسی کنید.

۳) معادلهٔ $x^3y''' = 6y$ را بر حسب متغیر $t = \ln|x|$ بنویسید.

۴) $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y^2 = 0$ را بر حسب t در حالی بنویسید که $x = \cos t$.

۵) فرض کنید u تابعی از t است، $x = \tan t$ و $y = u/\cos t$. معادلهٔ $\left(1 + x^2\right)^2 y'' = y$ را بر حسب u و t باز بنویسید.

۶) فرض کنید u تابعی از t است، $xt = 1$ و $yt = u$. معادلهٔ $y''' - x^3y'' + xy' = y$ را بر حسب u و t باز بنویسید.

۷) معادلهٔ استوکس $y'' = \dfrac{Ay}{((x-a)(x-b))^2}$ را با فرض $t = \ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|$ و $u = \dfrac{y}{x-b}$ و با اختیار u بعنوان تابعی از t، تبدیل کنید.

۸*) ثابت کنید که معادلهٔ $y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$ نسبت به تغییر تابع و متغیر

$$x = \frac{a_1u + b_1t + c_1}{au + bt + c} \quad , \quad y = \frac{a_2u + b_2t + c_2}{au + bt + c}$$

که در آن $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$، تغییر شکل نمی‌دهد (یعنی، به همان صورت $u'''(1 + u'^2) - 3u'u''^2 = 0$ تبدیل می‌شود).

۹) معادلهٔ $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$ را بر حسب r و θ بنویسید، که $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ و r تابعی از θ فرض می‌شود.

۱۰) فرمول انحناء $\kappa = y''/(1 + y^2)^{3/2}$ منحنی $y = f(x)$ را در مختصات قطبی بنویسید.

۴.۶.۵ تعویض متغیرهای مستقل در عبارتی شامل یک تابع چند متغیره.

فرض کنید z تابعی از متغیرهای مستقل x و y است و

$$B = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \cdots\right)$$

عبارتی بر حسب x، y و z و مشتقات جزیی z بر حسب x و y باشد. فرض کنید x و y بر حسب متغیرهای مستقل جدید u و v به شکل $x = \varphi(u,v)$ و $y = \psi(u,v)$ معرفی شده‌اند. در این صورت، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق عبارت B را بر حسب u و v می‌توان نوشت زیرا، مثلاً

$$\begin{aligned} z_u &= z_xx_u + z_yy_u = \varphi_uz_x + \psi_uz_y \\ z_v &= z_xx_v + z_yy_v = \varphi_vz_x + \psi_vz_y \\ z_{uu} &= (z_u)_u = (z_u)_x\,x_u + (z_u)_y\,y_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \varphi_u\left(\varphi_u z_x+\psi_u z_y\right)_x + \psi_u\left(\varphi_u z_x+\psi_u z_y\right)_y \\ &= \varphi_u\left(\left(\varphi_u\right)_x z_x + \varphi_u z_{xx} + \left(\psi_u\right)_x z_y + \psi_u z_{xy}\right) \\ &\quad +\psi_u\left(\left(\varphi_u\right)_y z_x + \varphi_u z_{xy} + \left(\psi_u\right)_y z_y + \psi_y z_{yy}\right) \\ &= \varphi_u z_x\left(u_x\varphi_{uu}+v_x\varphi_{uv}\right) + \varphi_u^2 z_{xx} \\ &\quad + \varphi_u z_y\left(u_x\psi_{uu}+v_x\psi_{uv}\right) + \varphi_u\psi_u z_{xy} \\ &\quad +\psi_u z_x\left(u_y\varphi_{uu}+v_y\varphi_{uv}\right) + \varphi_u\psi_u z_{xy}\\ &\quad + \psi_u z_y\left(u_y\psi_{uu}+v_y\psi_{uv}\right) + \psi_y^2 z_{yy}\end{aligned}$$

۵.۶.۵ مثال. ۱) فرض کنید $u=x+y$ و $v=x-y$. معادلهٔ $\partial z/\partial x=\partial z/\partial y$ را بر حسب u و v نوشته و سپس آن را حل کنید.

حل. با توجه به مفروضات مسأله، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

با برابر قرار دادن اینها، به معادلهٔ $\partial z/\partial v=0$ می‌رسیم که جواب آن $z=f(u)$ است. به بیان دیگر $z=f(x+y)$، که f تابعی دلخواه می‌باشد.

مثال ۲) فرض کنید $u=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ و $v=\arctan(y/x)$. معادلهٔ دیفرانسیل $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ را بر حسب u و v بنویسید.

حل. با توجه به مفروضات مسأله، داریم

$$\begin{aligned} z_x &= z_u u_x + z_v v_x \\ &= \frac{x}{x^2+y^2}z_u+\frac{x}{x^2+y^2}z_v=\frac{x\left(z_u+z_v\right)}{x^2+y^2} \\ z_y &= z_u u_y+z_v v_y \\ &= \frac{y}{x^2+y^2}z_u-\frac{y}{x^2+y^2}z_v=\frac{y\left(z_u-z_v\right)}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

پس در معادله قرار می‌دهیم

$$(x+y)\frac{x\left(z_u+z_v\right)}{x^2+y^2}-(x-y)\frac{y\left(z_u-z_v\right)}{x^2+y^2}=0$$

یا $z_u+z_v=0$ که جواب عمومی آن $z=f(u-v)$ می‌باشد، یعنی $z=f\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-\arctan(y/x)\right)$.

۶.۶.۵ تمرین. با انتخاب u و v به عنوان متغیرهای جدید، هر یک از معادلات زیر را بازنویسی کنید:

۱) $yz_x-xz_y=0$، که $u=x$ و $v=x^2+y^2$.

۲) $xz_x+yz_y=z$، که $u=x$ و $v=y/x$.

۳) $xz_x+\sqrt{1+y^2}z_y=xy$، که در آن $u=\ln x$ و نیز $v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$.

۴) $xz_x+yz_y=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$، که در آن $xv=y$ و $u=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

۵) $(x+z)z_x+(y+z)z_y=x+y+z$، که $u=y+z$ و $v=x+z$.

۷.۶.۵ تعویض متغیرها و تابع در عبارتی بر حسب متغیرها، تابع و مشتقات جزیی آنها.

اگر عبارت

$$B=f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\cdots\right)$$

در اختیار بوده و متغیرهای جدید u و v و تابع جدید $w=w(u,v)$ به شکل $x=\varphi(u,v,w)$، $y=\psi(u,v,w)$ و $z=\eta(u,v,w)$ مطرح شده باشند، آنگاه B را بر حسب u، v و w می‌توان نوشت؛ زیرا، مثلاً از دستگاه

$$\begin{cases} z_x\left(\varphi_u+\varphi_w w_u\right)+z_y\left(\psi_u+\psi_w w_u\right)=\eta_u+\eta_w w_u \\ z_x\left(\varphi_v+\varphi_w w_v\right)+z_y\left(\psi_v+\psi_w w_v\right)=\eta_v+\eta_w w_v\end{cases}$$

می‌توان z_x و z_y را بر حسب u، v، w_u و w_v محاسبه کرد.

۸.۶.۵ مثال. ۱) در معادلهٔ $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y+x)z^2$ فرض کنید $x=u^2+v^2$، $y=1/u+1/v$ و $z=uv+vw$. با فرض اینکه u و v متغیرهای جدید و w تابع جدید است، معادله را بر حسب u، v و w بنویسید.

حل. با توجه به ۷.۶.۵ داریم

$$\begin{aligned} & z_x\left((2u)+(0)w_u\right)+z_y\left(\left(-1/u^2\right)+(0)w_u\right)= \\ &\quad = (v)+(v)w_u \\ & z_x\left((2v)+(0)w_v\right)+z_y\left(\left(-1/v^2\right)+(0)w_v\right)= \\ &\quad = (u+w)+(v)w_v\end{aligned}$$

و یا به شکل ماتریسی، داریم

$$\begin{pmatrix} 2u & -1/u^2 \\ 2v & -1/v^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_x \\ z_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v+v_u \\ u+v+v_v\end{pmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{v^2\left(u+v+w_v\right)-u^2\left(v+vw_u\right)}{2v^3-2u^3} \\ z_y &= \frac{u^3v^2\left(u+v+w_v\right)-u^2v^3\left(v+vw_u\right)}{v^3-u^3}\end{aligned}$$

پس از جاگذاری در معادلهٔ داده شده، داریم:

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)\left(v^2\left(u+v+w_v\right)-u^2\left(v+vw_u\right)\right) \\ &\quad +\left(u^2+v^2\right)\left(u^3v^2\left(u+v+w_v\right)-u^2v^3\left(v+vw_u\right)\right)= \\ &= 2\left(u^3-v^3\right)\left(u^2+v^2+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)(uv+vw)^2\end{aligned}$$

مثال ۲) معادلهٔ $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(۱-y^۲\right)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$ را با فرض $u=yz-x$، $v=xz-y$ و $w=xy-z$، بر حسب تابع جدید w و متغیرهای جدید u و v بنویسید.
حل. با توجه به مفروضات مساله، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(x,y,z)}{\Delta(u,v,w)} &= \left\{\frac{\Delta v(u,v,w)}{\Delta(x,y,z)}\right\}^{-۱}\\ &= \begin{bmatrix}-۱ & z & y\\ z & -۱ & x\\ y & x & -۱\end{bmatrix}^{-۱}\\ &= \frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲+۲xyz-۱}\times\\ &\quad\begin{bmatrix}۱-x^۲ & xy+z & xz+y\\ xy+z & ۱-y^۲ & yz+x\\ xz+y & yz+x & ۱-z^۲\end{bmatrix}\end{aligned}$$

بعلاوه z_v را به دو طریق می‌توان محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}z_xx_v+z_yy_v &= z_v\\ &= (xy-w)_v\frac{(xy+z)z_x+\left(۱-y^۲\right)z_y}{x^۲+y^۲+z^۲+۲xyz-۱}\\ &= \frac{(xy+z)y+\left(۱-y^۲\right)x}{x^۲+y^۲+z^۲+۲xyz-۱}-w_v\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&(xy+z)z_x+\left(۱-y^۲\right)z_y=\\ &=(yz+x)-\left(x^۲+y^۲+z^۲+۲xyz-۱\right)w_v\end{aligned}$$

اما مطابق فرض، سمت چپ تساوی بالا برابر $x+yz$ است، پس بایستی $w_v=۰$. یعنی تابع f وجود دارد که $w=f(u)$. به بیان دیگر $xy-z=f(yz-x)$ جواب معادله است.

مثال ۳) معادله $y\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}+۲\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۲}{x}$ را با فرض $u=x/y$، $v=x$ و $w=xy-z$ بر حسب تابع جدید w و متغیرهای جدید u و v باز نویسی کنید.
حل. با توجه به مفروضات مسأله، $x=v$، $y=v/u$ و $z=v^۲/u$. z_u را به دو شکل می‌توان محاسبه نمود

$$z_xx_u+z_yy_u=\frac{v^۲}{u^۲}-w_u\Rightarrow ۰z_x-\frac{v}{u^۲}z_y=-\frac{v^۲}{u^۲}-w_u$$

بنابراین $z_y=v+\frac{u^۲}{v}w_u$. اکنون z_{yu} را به دو طریق زیر محاسبه می‌کنیم

$$z_{xy}x_u+z_{yy}y_u=۰\frac{۲u}{v}w_u+\frac{u^۲}{v}w_{uu}$$

بنابراین $-\frac{v}{u^۲}z_{yy}=\frac{۲u}{v}w_u+\frac{u^۲}{v}w_{uu}$ یا

$$z_{yy}=-۲\frac{u^۳}{v^۲}w_u-\frac{u^۴}{v^۲}w_{uu}$$

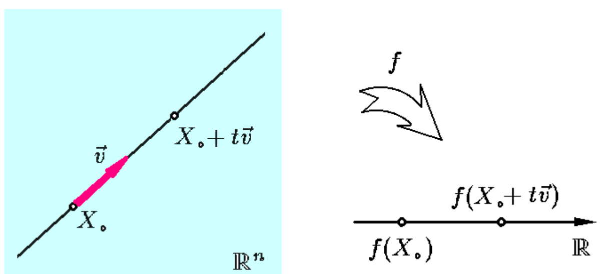
و لذا معادلهٔ داده شده را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$\left(\frac{v}{u}\right)\left(-۲\frac{u^۳}{v^۲}w_u-\frac{u^۴}{v^۲}w_{uu}\right)+۲\left(v+\frac{u^۲}{v}w_u\right)=\frac{۲}{v}$$

که به شکل $w_{uu}=-۲/u^۳$ ساده می‌شود. بنابراین، تابع f ای هست که $w_u=۱/u^۲+f(v)$، و تابع g ای هست که $w=-۱/u+uf(v)+g(v)$. یعنی جواب معادله

$$z=xy+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}f(x)-g(x)$$

است، که f و g توابع دلخواهند.



شکل ۶.۵: مشتق امتدادی

۹.۶.۵ تمرین.
هر یک از معادلات داده شده را بر حسب تابع جدید w و متغیرهای جدید u و v بنویسید:

۱) $x^۲z_x+y^۲z_y=z^۲$، که $u=x$، $v=۱/y-۱/x$ و $w=۱/z-۱/x$.

۲) $(xz_x)^۲+(yz_y)^۲=z^۲z_xz_y$، که $x=ue^w$، $y=ve^w$ و $z=we^w$.

۳) معادلهٔ $xu_x+yu_y+zu_z=u+xy/z$ را بر حسب تابع جدید w و متغیرهای جدید α، β و γ در حالی بنویسید که $\alpha=x/z$، $\beta=y/z$، $\gamma=z$ و $w=u/z$.

۴) فرض کنید $u=x+y$، $v=y/x$ و $w=z/x$. معادلهٔ با مشتقات جزئی $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}-۲\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$ را بر حسب تابع جدید w و متغیرهای جدید u و v بازنویسی کنید.

۵) فرض کنید $u=x$، $v=x+y$ و $w=x+y+z$. معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}-۲\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}+\left(۱+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$$

را بر حسب تابع جدید w و متغیرهای u و v بازنویسی کنید.

۷.۵ مشتق امتدادی

فرض کنید $u = f(x)$ تابعی چند متغیره است و $X_\circ \in D_f$. از نقطهٔ $X_\circ$ بینهایت شعاع خارج می‌شود (یعنی، نیم خط با شروع از $X_\circ$). هر شعاع را با یک بردار هادی یکه $\mathbf{v}$ می‌توان مشخص نمود (یکه یعنی با طول یک). معادلهٔ پارامتری این نیم خط به شکل $t \mapsto X_\circ + t\mathbf{v}$ است که $\circ \le t$. به شکل ۶.۵ توجه شود.

۱.۷.۵ تعریف. میزان تغییرات تابع $u = f(X)$ هنگامی که متحرک Xاز نقطهٔ $X_\circ$ در امتداد بردار $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ شروع به حرکت می‌کند را مشتق امتدادی f در $X_\circ$ و در راستای $\mathbf{v}$ نامیده و با نماد $D_{\mathbf{v}}f(X_\circ)$ نشان می‌دهیم. نظر به بحث بالا

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(X_\circ) &:= \lim_{t\to\circ}\frac{۱}{t}\left\{f\left(X_\circ + t\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) - f(X_\circ)\right\} \\ &= \frac{d}{dt}f\left(X_\circ + t\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\Big|_{t=\circ} \end{aligned}$$

و با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق برای تابع $u = f(X)$ و خم $\mathbf{r}(t) = X_\circ + t\mathbf{v}$، داریم

$$D_{\mathbf{v}}f(X_\circ) = f'(X_\circ)\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \qquad (۱۲.۵)$$

بنابراین اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ همجهت باشند (یعنی، $t > \circ$ ای باشد که $\mathbf{w} = t\mathbf{v}$) آنگاه مشتق f در $X_\circ$ و امتداد $\mathbf{v}$ و در امتداد $\mathbf{w}$ برابرند.

۲.۷.۵ مثال. ۱) میزان تغییرات $f = x^۲\sin(yz)$ را در نقطهٔ $X_\circ = (۱,۲,\pi)$ و در راستای $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۳,\circ,۴)}$ محاسبه کنید.

حل. با توجه به تعریف ۱.۷.۵ داریم:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(X_\circ) &= f'(X_\circ)\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \overrightarrow{\left(۲x\sin(yz), x^۲z\cos(yz), x^۲y\cos(yz)\right)}\Big|_{X_\circ}\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \overrightarrow{(\circ,\pi,۲)}\bullet\frac{\overrightarrow{(۳,\circ,۴)}}{۵} = \frac{۸}{۵} \end{aligned}$$

مثال ۲) مشتق امتدادی تابع $f = \arctan(y/x)$ را در نقطهٔ $X_\circ = (۲,۱)$ و امتداد بردار $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-۳,۵)}$ محاسبه کنید.

حل. با توجه به تعریف، داریم:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(X_\circ) &= f'(X_\circ)\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \overrightarrow{\left(\frac{-y}{x^۲+y^۲}, \frac{x}{x^۲+y^۲}\right)}\Big|_{X_\circ}\bullet\frac{\overrightarrow{(-۳,۵)}}{\sqrt{۳۴}} = \frac{۱۳}{۵\sqrt{۳۴}} \end{aligned}$$

مثال ۳) در مطالعهٔ یک ماشین افزار از متغیرهای x و y استفاده شده است، و نتیجهٔ تحقیقات این بوده است که تعداد قطعات خراب برابر $f = x^۲y - y^۲$ است. اگر وضعیت کنونی ماشین $X_\circ = (۲,۱)$ باشد و مسؤلین قصد افزایش متغیرهای x و y به نسبت ۳ : ۴ را داشته باشند، مشخص کنید که در پی اجرای این سیاست، چه تغییراتی در تعداد قطعات خراب ایجاد خواهد شد.

حل. پاسخ مسأله عبارت از مشتق امتدادی تابع $f = x^۲y - y^۲$ در نقطهٔ $X_\circ = (۲,۱)$ و امتداد $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۴,۳)}$ می‌باشد، یعنی:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(X_\circ) &= \overrightarrow{\left(۲xy, x^۲ - ۲y\right)}\Big|_{X_\circ}\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \overrightarrow{(۴,۲)}\bullet\frac{\overrightarrow{(۴,۳)}}{۵} = \frac{۲۲}{۵} = ۴/۴ \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به وضعیت کنونی ماشین مورد نظر، تصمیم اتخاذ شده درست نبوده است، زیرا باعث افزایش قطعات خراب با سرعت ۴/۴ شده است!

مثال ۴) فرض کنید در مطالعهٔ سود و زیان یک شرکت از متغیرهای x، y و z استفاده شده است و پس از مطالعه، سود شرکت به صورت $f = x^۲ - yz$ معرفی شده است. اگر وضعیت کنونی شرکت $X_\circ = (۱,۲,-۱)$ باشد و هیأت مدیره تصمیم داشته باشد تا متغیرها را با نسبت ۳ : ۲ : ۱− افزایش دهد، میزان تغییر سود شرکت پس از اجرای این تصمیم را مشخص کنید.

حل. پاسخ مسأله عبارت از مشتق امتدادی $f = x^۲ - yz$ در نقطهٔ $X_\circ = (۱,۲,-۱)$ و در راستای بردار $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-۱,۲,۳)}$ می‌باشد. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(X_\circ) &= \overrightarrow{(۲x,-z,-y)}\Big|_{X_\circ}\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \overrightarrow{(۲,۱,-۲)}\bullet\frac{\overrightarrow{(-۱,۲,۳)}}{\sqrt{۱۴}} = \frac{-۶}{\sqrt{۱۴}} \end{aligned}$$

یعنی، تصمیم مورد نظر اشتباه بوده، و موجب زیان شرکت می‌شود.

۳.۷.۵ تمرین. مشتق امتدادی تابع f را در نقطهٔ $X_\circ$ و در امتداد بردار $\mathbf{v}$ محاسبه کنید:

۱) $f = x^۲\arctan(y/z),\ \ X_\circ = (\circ,۱,۱),\ \ \mathbf{v} = \overrightarrow{(-۱,۲,-۲)}$

۲) $f = \sqrt{x^۲+y^۲},\ \ X_\circ = (-۱,۲),\ \ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۵,-۵)}$

۳) $f = \ln|x + ۲y + z^۲|,\ \ X_\circ = (۱,-۱,۲),\ \ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۳,-۴,۵)}$

۴) $f = ۲xy - ۳y^۲,\ \ X_\circ = (۵,۵),\ \ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۴,۳)}$

۵) $f = xy + yz + zx,\ \ X_\circ = (۱,-۱,۲),\ \ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۳,۶,-۲)}$

۶) $f = x^۲\sin(x/y),\ \ X_\circ = (۲,۱/\pi),\ \ \mathbf{v} = \overrightarrow{(۲,-۲)}$

۷) نشان دهید که به ازای هر تابع دو متغیرهٔ f که در نقطهٔ $X_\circ$ مشتق پذیر است، داریم $D_{\mathbf{i}}f(X_\circ) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X_\circ}$ و $D_{\mathbf{j}}f(X_\circ) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{X_\circ}$.

۸) حکم مشابه تمرین ۷ برای توابع سه متغیره بیان، و سپس ثابت آن را کنید.

هنگامی که پاسخ مثال ۲.۷.۵ (۴) را ملاحظه می‌کنیم، این سؤال مطرح می‌شود که: اگر سیاست انتخاب شده اشتباه است، پس سیاست صحیح کدام است؟ بهترین سیاست کدام است؟ جواب این دو پرسش در قضیهٔ زیر است.

۴.۷.۵ قضیه. فرض کنید تابع $u = f(X)$ در $X_\circ$ مشتق‌پذیر است. در این صورت، حداکثر تغییرات تابع f در نقطهٔ $X_\circ$ در امتداد بردار $\mathbf{v}_{\max} = f'(X_\circ)$ صورت می‌پذیرد؛ و نتیجهٔ کار برابر با $D_{\max} = \|f'(X_\circ)\|$ می‌باشد. به صورت مشابه، نتیجه می‌گردد که حداقل تغییرات تابع f در نقطهٔ $X_\circ$ در امتداد بردار $\mathbf{v}_{\min} = -f'(X_\circ)$ صورت می‌پذیرد؛ و نتیجهٔ کار برابر با $D_{\min} = -\|f'(X_\circ)\|$ می‌باشد.

اثبات: کافی است به فرمول (۱۲.۵) توجه شود. از طرفی، سمت راست آن برابر $\|f'(X_\circ)\|\cos\alpha$ است، که α زاویهٔ بین $\mathbf{v}$ و $f'(X_\circ)$ می‌باشد. چون f ثابت است، $\|f'(X_\circ)\|$ نیز ثابت است، و در نتیجه حاصلضرب در صورتی حد اکثر است که $\cos\alpha = ۱$، یا $\alpha = ۰$. بنابراین باید $\mathbf{v}$ و $\|f'(X_\circ)\|$ هم جهت باشند. چون طول بردار در مشتق امتدادی مهم نیست، می‌توانیم $\mathbf{v}$ را برابر $f'(X_\circ)$ بگیریم. در این حالت، مقدار مشتق امتدادی $\|f'(X_\circ)\| \times ۱ = \|f'(X_\circ)\|$ می‌شود. حالت حد اقل به صورت مشابه بحث می‌گردد. □

۵.۷.۵ مثال. ۱) ادامهٔ مثال ۲.۷.۵ (۳). بهترین تصمیم که موجب حداقل قطعات خراب می‌گردد، عبارت است از

$$\mathbf{v}_{\min} = -f'(X_\circ) = \overrightarrow{(-۴,-۲)}$$

نتیجهٔ اعمال این سیاست در شروع کار

$$D_{\min} = -\|f'(X_\circ)\| = -۲\sqrt{۵}$$

خواهد بود. یعنی، با اتخاذ این تصمیم، تعداد قطعات خراب با سرعت $-۲\sqrt{۵} \approx -۴/۲$ کاهش می‌یابد!

مثال ۲) ادامهٔ مثال ۲.۷.۵ (۴). بهترین تصمیم که موجب حداکثر سود برای شرکت مورد نظر می‌شود، عبارت است از $\mathbf{v}_{\max} = f'(X_\circ) = \overrightarrow{(۲,۱,-۲)}$ است. نتیجهٔ اعمال این سیاست در شروع کار $D_{\max} = \|f'(X_\circ)\| = ۳$ خواهد بود. یعنی، با اتخاذ این تصمیم، سود شرکت با سرعت ۳ افزایش خواهد یافت!

۶.۷.۵ تمرین. $\mathbf{v}_{\max}$، $D_{\max}$، $\mathbf{v}_{\min}$ و $D_{\min}$ را در هر مورد بیابید:

۱) $f = x^۲ + xy + y^۲,\quad X_\circ = (-۱, ۱)$

۲) $f = \ln\left(x^۲ + y^۲ - ۱\right) + y\sin z,\quad X_\circ = (۲, ۱, \pi)$

۳) $f = x^۲\sqrt{y} + y^۲\sqrt{x},\quad X_\circ = (۴, ۳)$

۴) $f = \ln(xy) + \ln(y/z) - x,\quad X_\circ = (۱, ۵, ۳)$

۵) $f = x^۲/۴ - y^۲/۹ + ۲xy,\quad X_\circ = (۵, -۲)$

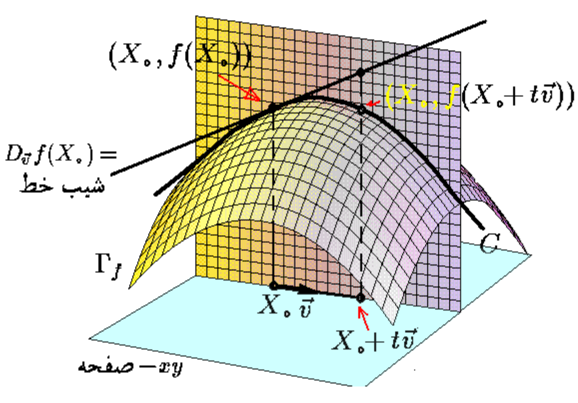
۶) $f = z\arctan(x/y) + xyz,\quad X_\circ = (-۱, ۲, -۲)$

۷.۷.۵ تعبیر هندسی مشتق امتدادی. فرض کنید $z = f(x,y)$، $X_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ نقطه‌ای از دامنهٔ f است و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a,b)} \neq \mathbf{0}$. از نقطهٔ $X_\circ$ صفحه‌ای عمود بر صفحهٔ xy که بردار $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a,b,\circ)}$ را نیز شامل باشد، می‌توان گذراند (در واقع، نرمال آن $\mathbf{v}\times\mathbf{k}$ است) به شکل ۶.۵ توجه شود. فرض کنیم محل برخورد نمودار f و این صفحه را (منحنی) C بنامیم. در این صورت منحنی C را به شکل

$$C\ :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x_\circ + at, y_\circ + bt, f(x_\circ + at, y_\circ + bt))}$$

می‌توان پارامتره کرد. اکنون $D_{\mathbf{v}}f(X_\circ)$ عبارت خواهد بود از شیب خط مماس بر C در نقطهٔ $\mathbf{r}(\circ)$ یعنی، با تانژانت زاویه‌ای که مماس بر C در نقطهٔ $\mathbf{r}(\circ)$ با صفحهٔ xy می‌سازد، برابر است. به شکل ۷.۵ توجه شود.

چنانچه تصور فضاهای با بعد بالاتر مقدور بود، این تعبیر برای توابع سه، چهار و ... متغیره در فضاهای چهار، پنج و ... بعدی درست بود!



شکل ۷.۵: تعبیر هندسی مشتق امتدادی

۸.۵ دیفرانسیل و بسط تیلور

دیفرانسیل وسیله‌ای برای بیان تغییرات یک تابع نسبت به متغیرهای آن می‌باشد. شرط لازم برای تعریف دیفرانسیل، مشتقپذیری تابع می‌باشد.

۱.۸.۵ تعریف. فرض کنید $z = f(x,y)$ در نقطهٔ $X_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ پیوسته و دارای مشتقات جزیی تا مرتبهٔ k ام پیوسته در $X_\circ$ می‌باشد. در این صورت، اگر $dx = \triangle x = x - x_\circ$ و $dy = \triangle y = y - y_\circ$ **دیفرانسیل** f در $X_\circ$ را به صورت

$$df\Big|_{X_\circ} := \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_\circ} dx + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{X_\circ} dy$$

تعریف می‌کنیم. در ادامه، دیفرانسیل مرتبهٔ دوم f در $X_\circ$ را به صورت

$$d^{۲} f\Big|_{X_\circ} := \frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}\Big|_{X_\circ} dx^{۲} + ۲\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}\Big|_{X_\circ} dxdy + \frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}\Big|_{X_\circ} dy^{۲}$$

تعریف می‌کنیم. در حالت کلی‌تر، دیفرانسیل مرتبهٔ k ام f در $X_\circ$ را به شکل

$$d^k f\Big|_{X_\circ} := \sum_{i=\circ}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial^i x \partial^{k-i} y}\Big|_{X_\circ} dx^i dy^{k-i}$$

تعریف می‌کنیم، که $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ انتخاب m شیء از بین n شیء می‌باشد.

توجه شود که $d^k f$ چهار متغیره است، به این معنی که دو متغیر $(x_\circ, y_\circ)$ برای ضرایب و دو متغیر (x,y) برای دیفرانسیلهای dx و dy. به بیان دیگر، اگر مثلاً $k = ۱$، آنگاه ضابطهٔ $df : \mathbb{R}^{۴} \to \mathbb{R}$ چنین است:

$$(x_\circ, y_\circ; x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_\circ, y_\circ)} (x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_\circ, y_\circ)} (y - y_\circ)$$

بعلاوه، $d^k f$ نسبت به متغیر

$$\Delta X := X - X_\circ = (x,y) - (x_\circ, y_\circ) = (dx, dy)$$

چند جمله‌ای همگن مرتبهٔ k ام می‌باشد.

۲.۸.۵ مثال. ۱) فرض کنید که $f = x^{۲} y^{۳}$ و $X_\circ = (-۱, ۱)$. در این صورت:

$$\begin{aligned}
df\Big|_{X_\circ} &= \left\{۲xy^{۳}\right\}_{X_\circ} dx + \left\{۳x^{۲}y^{۲}\right\}_{X_\circ} dy \\
&= -۲dx + ۳dy \\
d^{۲} f\Big|_{X_\circ} &= \left\{۲y^{۳}\right\}_{X_\circ} dx^{۲} + ۲\left\{۶xy^{۲}\right\}_{X_\circ} dxdy \\
&\quad + \left\{۶x^{۲}y\right\}_{X_\circ} dy^{۲} \\
&= ۲dx^{۲} - ۱۲dxdy + ۶dy^{۲} \\
d^{۳} f\Big|_{X_\circ} &= \{\circ\}_{X_\circ} dx^{۳} + ۳\left\{۶y^{۲}\right\}_{X_\circ} dx^{۲}dy \\
&\quad + ۳\{۱۲xy\}_{X_\circ} dxdy^{۲} + \left\{۶x^{۲}\right\}_{X_\circ} dy^{۳} \\
&= ۱۸dx^{۲}dy - ۳۶dxdy^{۲} + ۶dy^{۳} \\
d^{۴} f\Big|_{X_\circ} &= \{\circ\}_{X_\circ} dx^{۴} + ۴\{\circ\}_{X_\circ} dx^{۳}dy \\
&\quad + ۶\{۱۲y\}_{X_\circ} dx^{۲}dy^{۲} + ۴\{۱۲x\}_{X_\circ} dxdy^{۳} \\
&\quad + \{\circ\}_{X_\circ} dy^{۴} \\
&= ۷۲dx^{۲}dy^{۲} - ۴۸dxdy^{۳} \\
d^{۵} f\Big|_{X_\circ} &= \{\circ\}_{X_\circ} dx^{۵} + ۵\{\circ\}_{X_\circ} dx^{۴}dy \\
&\quad + ۱۰\{\circ\}_{X_\circ} dx^{۳}dy^{۲} + ۱۰\{۱۲\}_{X_\circ} dx^{۲}dy^{۳} \\
&\quad + ۵\{\circ\}_{X_\circ} dxdy^{۴} + \{\circ\}_{X_\circ} dy^{۵} \\
&= ۱۲۰dx^{۲}dy^{۳} \\
d^{۶} f\Big|_{X_\circ} &= d^{۷} f\Big|_{X_\circ} = \cdots = \circ
\end{aligned}$$

که در اینجا $dx = x + ۱$ و $dy = y - ۱$.

مثال ۲) فرض کنید $f = x/y$ و $X_\circ = (۱, ۱)$. در این صورت

$$\begin{aligned}
df\Big|_{X_\circ} &= \left\{\frac{۱}{y}\right\}_{X_\circ} dx + \left\{\frac{-x}{y^{۲}}\right\}_{X_\circ} dy = dx - dy \\
d^{۲} f\Big|_{X_\circ} &= \{\circ\}_{X_\circ} dx^{۲} + ۲\left\{\frac{-۱}{y^{۲}}\right\}_{X_\circ} dxdy \\
&\quad + \left\{\frac{۲x}{y^{۳}}\right\}_{X_\circ} dy^{۲} \\
&= -۲dxdy + ۲dy^{۲} \\
d^{۳} f\Big|_{X_\circ} &= \{\circ\}_{X_\circ} dx^{۳} + ۳\{\circ\}_{X_\circ} dx^{۲}dy \\
&\quad + ۳\left\{\frac{۲}{y^{۳}}\right\}_{X_\circ} dxdy^{۲} + \left\{\frac{-۶x}{y^{۴}}\right\}_{X_\circ} dy^{۳} \\
&= ۶dxdy^{۲} - ۶dy^{۳}
\end{aligned}$$

که در اینجا $dx = x - ۱$ و $dy = y - ۱$.

۳.۸.۵ تمرین. دیفرانسیل تا مرتبهٔ k ام تابع $z = f(x,y)$ را در نقطهٔ $X_\circ$ بیابید:

۱) $f = x \arctan y,\ \ X_\circ = (۲, -۱),\ \ k = ۳$

۲) $f = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}},\ \ X_\circ = (\circ, ۱),\ \ k = ۴$

۳) $f = x^{۲}y^{۳} - x/y,\ \ X_\circ = (۱, -۱),\ \ k = ۲$

۴) $f = \ln|x^{۲} - y^{۲}|,\ \ X_\circ = (۲, ۱),\ \ k = ۳$

۵) $f = e^{x^{۲}+y^{۲}},\ \ X_\circ = (\circ, \circ),\ \ k = ۱۰$

۶) $f = \tan(x/y),\ \ X_\circ = (\circ, ۱),\ \ k = ۴$

*۷) دیفرانسیل مرتبهٔ k ام و بسط تیلور مرتبهٔ k ام را برای توابع سه متغیره تعریف کرده و از هریک مثالی ذکر کنید. در حالت کلی

چه می‌توان گفت؟

۴.۸.۵ قضیهٔ تیلور. اگر تمام مشتقات جزیی تا مرتبهٔ $(k+1)$ ام تابع $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی $X_\circ$ موجود و پیوسته باشند، آنگاه تابعی $z = h(x,y)$ وجود دارد که:

$$\text{(الف)}\quad f(X) = f(X_\circ) + df\Big|_{X_\circ} + \frac{1}{2}d^2 f\Big|_{X_\circ} + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{k!}d^k f\Big|_{X_\circ} + h(X)$$

$$\text{(ب)}\quad \lim_{X\to X_\circ} \frac{h(X)}{\|X - X_\circ\|^k} = 0$$

تابع $z = h(x,y)$ را **تابع خطای مرتبهٔ** k**ام** f **در** $X_\circ$ می‌نامند. در این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_\circ) + df\Big|_{X_\circ} + \frac{1}{2}d^2 f\Big|_{X_\circ} + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{k!}d^k f\Big|_{X_\circ} + O\left((X - X_\circ)^k\right) \end{aligned}$$

و عبارت حاصل را بسط تیلور مرتبهٔ k ام در $X_\circ$ می‌نامیم.

اثبات: فرض کنیم $\varphi(t) = f(x_\circ + t\Delta x, y_\circ + t\Delta y)$. در این صورت، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق داریم

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f_x(x_\circ + t\,\Delta x, y_\circ + t\,\Delta y)\,.\,\Delta x \\ &\quad + f_y(x_\circ + t\,\Delta x, y_\circ + t\,\Delta y)\,.\,\Delta y \\ \varphi''(t) &= f_{xx}(x_\circ + t\,\Delta x, y_\circ + t\,\Delta y)\,.\,\Delta x^2 \\ &\quad + 2\,.\,f_{xy}(x_\circ + t\,\Delta x, y_\circ + t\,\Delta y)\,.\,\Delta x\Delta y \\ &\quad + f_{yy}(x_\circ + t\,\Delta x, y_\circ + t\,\Delta y)\,.\,\Delta y^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

که اگر آنها را $t = 0$ محاسبه کنیم، بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f(x_\circ, y_\circ) \\ \varphi'(0) &= f_x(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta x + f_y(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta y \\ \varphi''(0) &= f_{xx}(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta x^2 + 2\,.\,f_{xy}(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta x\Delta y \\ &\quad + f_{yy}(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta y^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} & f(x_\circ + t\,\Delta x, y_\circ + t\,\Delta y) = \varphi(t) \\ &= \varphi(0) + \varphi'(0)\,.\,t + \varphi''(0)\,.\,\frac{t^2}{2} + \cdots \\ &= f(x_\circ, y_\circ) + \Big(f_x(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta x + f_y(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta y\Big)\,.\,t \\ &\quad + \Big(f_{xx}(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta x^2 + 2\,.\,f_{xy}(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta x\Delta y \\ &\quad + f_{yy}(x_\circ, y_\circ)\,.\,\Delta y^2\Big)\,.\,\frac{t^2}{2} + \cdots \end{aligned}$$

اکنون کافی است در این تساوی قرار دهیم $t = 1$. □

۵.۸.۵ مثال. ۱) بسط تیلور مرتبهٔ سوم تابع $f = x^2y^3$ را در نقطهٔ $X_\circ = (-1, 1)$ بیابید.

حل. از محاسبات در مثال ۲.۸.۵ (۱) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^2y^3 &= \{1\} + \{-2dx + 3dy\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{2dx^2 - 12dxdy + 6dy^2\right\} \\ &\quad + \frac{1}{6}\left\{18dx^2dy - 36dxdy^2 + 6dy^3\right\} \\ &\quad + O\left((X - X_\circ)^3\right) \\ &= 1 - 2dx + 3dy + dx^2 - 6dxdy + 3dy^2 \\ &\quad + 3dx^2dy - 6dxdy^2 + dy^3 \\ &\quad + O\left((X - X_\circ)^3\right) \end{aligned}$$

مثال ۲) بسط تیلور مرتبهٔ سوم تابع $f = x/y$ را در نقطهٔ $X_\circ = (1, 1)$ بیابید.

حل. از محاسبات در مثال ۳.۸.۵ (۲) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \{1\} + \{dx - dy\} + \frac{1}{2}\left\{-2dxdy + 2dy^2\right\} \\ &\quad + \frac{1}{6}\left\{6dxdy^2 - 6dy^3\right\} + O\left((X - X_\circ)^3\right) \\ &= 1 + dx - dy - dxdy + dy^2 + dxdy^2 \\ &\quad - dy^3 + O\left((X - X_\circ)^3\right) \end{aligned}$$

به عنوان مثال:

$$\begin{aligned} \frac{1/01}{0/99} &\approx 1 + dx - dy \\ &= 1 + (0/01) - (-0/01) = 1/02 \\ \frac{1/01}{0/99} &\approx 1 + dx - dy - dxdy + dy^2 \\ &= 1/02 - (0/01)(-0/01) + (-0/01)^2 \\ &= 1/0202 \\ \frac{1/01}{0/99} &\approx 1 + dx - dy - dxdy + dy^2 + dxdy^2 - dy^3 \\ &= 1/0202 + (0/01)(-0/01)^2 - (-0/01)^3 \\ &= 1/020202 \end{aligned}$$

مثال ۳) مقدار تقریبی $((3/9)^2 + (2/9)^2)^{1/2}$ را با دقت مرتبهٔ دوم محاسبه کنید.

حل. در اینجا $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$، $X_\circ = (3, 4)$ و $k = 2$. در نتیجه $\sqrt{x^2 + y^2}$ تقریباً برابر است با

$$\begin{aligned} & \left\{\sqrt{x^2 + y^2}\right\}_{X_\circ} + \left(\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right\}_{X_\circ} dx + \left\{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right\}_{X_\circ} dy\right) \\ & + \frac{1}{2}\Bigg(\left\{\frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}\right\}_{X_\circ} dx^2 \\ & + 2\left\{\frac{-xy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}\right\}_{X_\circ} dxdy + \left\{\frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}\right\}_{X_\circ} dy^2\Bigg) \end{aligned}$$

$$= ۵ + \frac{۳}{۵}dx + \frac{۴}{۵}dy + \frac{۸}{۱۲۵}dx^{۲} - \frac{۱۲}{۱۲۵}dxdy + \frac{۹}{۱۲۵}dy^{۲}$$

و در این مورد خاص، $dx = dy = -۰/۱$ و لذا:

$$\begin{aligned} \sqrt{(۲/۹)^{۲} + (۳/۹)^{۲}} &\approx ۵ + \left(\frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۵}\right)\frac{-۱}{۱۰} \\ &+ \left(\frac{۸}{۱۲۵} - \frac{۱۲}{۱۲۵} + \frac{۹}{۱۲۵}\right)\frac{۱}{۱۰۰} \\ &= ۵ - \frac{۱۴}{۱۰۰} + \frac{۴}{۱۰۰۰۰} = ۴/۸۶۰۴ \end{aligned}$$

مثال ۴) بسط تیلور مرتبهٔ پنجم تابع $f = \sin\left(x^{۲} + y\right)$ را در نقطهٔ $X_{۰} = (۰, ۰)$ بیابید.

حل. از بسط مک لورن تابع $y = \sin x$ استفاده می‌کنیم. اگر $u = x^{۲} + y$، آنگاه:

$$\begin{aligned} f &= \sin u = u - \frac{u^{۳}}{۶} + \frac{u^{۵}}{۱۲۰} + O\left((X - X_{۰})^{۶}\right) \\ &= (x^{۲} + y) - \frac{۱}{۶}\left(x^{۲} + y\right)^{۳} \\ &\quad + \frac{۱}{۱۲۰}\left(x^{۲} + y\right)^{۵} + O\left((X - X_{۰})^{۶}\right) \\ &= y + x^{۲} - \frac{۱}{۶}y^{۳} - \frac{۱}{۲}x^{۲}y^{۲} - \frac{۱}{۲}x^{۴}y \\ &\quad + \frac{۱}{۱۲۰}y^{۵} + O\left((X - X_{۰})^{۶}\right) \\ &= dy + dx^{۲} - \frac{۱}{۶}dy^{۳} - \frac{۱}{۲}dx^{۲}dy^{۲} - \frac{۱}{۲}dx^{۴}dy \\ &\quad + \frac{۱}{۱۲۰}dy^{۵} + O\left((X - X_{۰})^{۶}\right) \end{aligned}$$

مثال ۵) بسط تیلور مرتبهٔ چهارم تابع $f = \dfrac{\ln(x + ۱)}{y}$ در نقطهٔ $X_{۰} = (۰, ۱)$ را بیابید.

حل. با توجه به اطلاعات ریاضی ۱، داریم:

$$\begin{aligned} f &= \frac{۱}{y}\ln(x + ۱) = \frac{۱}{۱ + dy}\ln(dx + ۱) \\ &= \left(۱ - dy + dy^{۲} - dy^{۳} + \cdots\right) \times \\ &\quad \times \left(dx - \frac{۱}{۲}dx^{۲} + \frac{۱}{۳}dx^{۳} - \cdots\right) \\ &= dx - \frac{۱}{۲}dx^{۲} - dxdy + \frac{۱}{۳}dx^{۳} + dxdy^{۲} \\ &\quad + \frac{۱}{۲}dydx^{۲} + O\left((X - X_{۰})^{۳}\right) \end{aligned}$$

۶.۸.۵ تمرین. بسط تیلور مرتبهٔ k ام تابع $z = f(x, y)$ در نقطهٔ $X_{۰}$ را بیابید، سپس مقدار تقریبی $f(X)$ را محاسبه کنید:

۱) $f = x\arctan y, \quad X_{۰} = (۲, -۱),$

$k = ۳ \quad X = (۲/۱, ۱)$

۲) $f = x^{۲}y^{۳} - x/y, \quad X_{۰} = (۱, -۱),$

$k = ۲ \quad X = (۱/۲, -۱/۲)$

۳) $f = e^{x^{۲} + y^{۲}}, \quad X_{۰} = (۰, ۰),$

$k = ۱۰ \quad X = (۰, ۰/۰۰۱)$

۴) $f = \ln(x + y + ۱), \quad X_{۰} = (۱, -۱),$

$k = ۳ \quad X = (۱/۰۱, -۱/۰۰۱)$

۵) $f = x/(x + ۲y), \quad X_{۰} = (-۱, ۱),$

$k = ۵ \quad X = (-۱/۱, ۱/۲)$

۹.۵ اکسترموم موضعی

یکی از مهمترین کاربردهای مشتق، استفاده از آن در حل مسألهٔ اکسترموم می‌باشد. ابتدا باید منظور از اکسترموم موضعی را روشن کنیم.

۱.۹.۵ تعریف. فرض کنیم $u = f(X)$ در یک همسایگی از نقطهٔ $X_{۰}$ تعریف شود. در صورتی می‌گوئیم $X_{۰}$ یک نقطهٔ **ماکزیموم موضعی** f است که به ازای $r > ۰$ ای و به ازای هر $X \in B_r(X_{۰})$ ای $f(X) \leq f(X_{۰})$. به شکل ۸.۵—الف توجه شود. به صورت مشابه، نقطهٔ **مینیموم موضعی** قابل تعریف است. اصطلاح **اکسترموم موضعی** به معنی ماکزیموم یا مینیموم موضعی است.

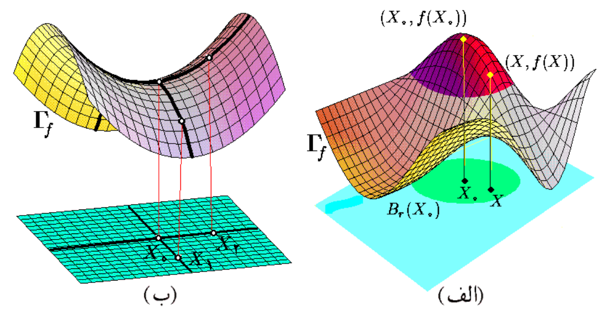
۲.۹.۵ تعریف. در صورتی می‌گوئیم $X_{۰}$ **نقطهٔ تکین** تابع $u = f(X)$ است که $u = f(X)$ در $X_{۰}$ مشتق‌پذیر نباشد، و یا در صورت مشتق‌پذیر بودن، $f'(X_{۰}) = \mathbf{0}$.

۳.۹.۵ قضیه. اگر $X_{۰}$ نقطهٔ اکسترموم موضعی تابع $u = f(X)$ باشد، آنگاه $X_{۰}$ نقطهٔ تکین آن تابع خواهد بود. عکس این مطلب غلط است.

اثبات: فرض کنیم تابع دو متغیره است، $X_{۰} = (x_{۰}, y_{۰})$ و $g(x) := f(x, y_{۰})$. چون f در $X_{۰}$ اکسترموم موضعی دارد، باید g نیز در $x = x_{۰}$ دارای اکسترموم موضعی باشد. اما، بنابه قضیه‌ای از ریاضی عمومی یک، این تنها در صورتی ممکن است که $g'(x_{۰}) = ۰$. اما

$$g'(x_{۰}) = \frac{d}{dx}f(x, y_{۰})\Big|_{x_{۰}} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_{۰}}$$

برای متغیر y، به صورت مشابه می‌توان بحث نمود. حالت تابع با بیش از دو متغیر نیز، به صورت مشابه قابل بحث است. □



شکل ۸.۵: الف) ماکزیموم موضعی
ب) نقطهٔ زینی

چون ممکن است نقطهٔ تکینی، نقطهٔ اکسترموم موضعی نباشد، لازم است تا روشی غیر مستقیم برای تحقیق این مطلب وجود داشته باشد «که کدام نقاط تکین ماکزیموم هستند، مینیموم هستند و یا هیچکدام؟!»

۴.۹.۵ آزمون مشتق دوم. فرض کنید مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم تابع $u = f(x,y)$ در نقطهٔ تکین X_0 موجود و پیوسته‌اند. بعلاوه، فرض کنید

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{X_0} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{X_0} \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{X_0}$$

و $D = AB - C^2$. در این صورت

الف) اگر $A > 0$ (یا $B > 0$) و $D > 0$، آنگاه X_0 یک نقطهٔ مینیموم موضعی $u = f(X)$ است.

ب) اگر $A < 0$ (یا $B < 0$) و $D > 0$، آنگاه X_0 یک نقطهٔ ماکزیموم موضعی $u = f(X)$ است.

ج) اگر $D < 0$، آنگاه X_0 یک نقطهٔ زینی تابع $u = f(X)$ است.

اثبات: بسط تیلور مرتبهٔ دوم f را در نقطهٔ X_0 می‌نویسیم:

$$f(X) \approx f(X_0) + \frac{1}{2}\Big(A\,dx^2 + 2C\,dx\,dy + B\,dy^2\Big)$$

که در آن $A = f_{xx}(X_0)$، $B = f_{yy}(X_0)$ و $C = f_{xy}(X_0)$. چنانچه $A \neq 0$، آن را به صورت

$$f(X) - f(X_0) \approx \frac{1}{2A}\Big((A\,dx + C\,dy)^2 + D\,dy^2\Big)$$

می‌توان نوشت. ملاحظه می‌شود که اگر $D > 0$ و $A > 0$، آنگاه عبارت سمت راست در یک همسایگی از X_0 مثبت است، و بنابراین X_0 یک نقطهٔ مینیموم موضعی است. در حالت $D < 0$، عبارت داخل پرانتز تغییر علامت می‌دهد. □

توضیح اینکه، **نقطهٔ زینی** نقطه‌ای است که در هر همسایگی دلخواه از آن، نقاط X_1 و X_2 طوری وجود دارد که

$$f(X_1) \leq f(X) \leq f(X_2)$$

به شکل ۸.۵—ب توجه شود. در قضیهٔ بالا، حالت $D = 0$ بحث نشده است. واقعیت این است که در این مورد باید از قضایای از مرتبهٔ بالاتر استفاده شود. مطالعهٔ همهٔ حالتهای ممکن خود یک شاخهٔ گسترده از ریاضیات را تشکیل می‌دهد و از حوصلهٔ این کتاب خارج است.

۵.۹.۵ مثال. ۱) فرض کنید $f = x^4 + y^4 + 4xy$. در این صورت f بر کل $\mathbb{R}^2$ مشتق‌پذیر است. پس نقاط تکین از نوع دوم می‌توانند باشند (یعنی، $f' = \mathbf{0}$). بنابراین، شرط $f'(x,y) = \mathbf{0}$ را تحقیق می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4x^3 + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = -y \\ y^3 = -x \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^9 = x \\ y^3 = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1, 0 \\ y = -x \end{cases}$$

پس این تابع دارای سه نقطهٔ تکین $X_1 = (0,0)$، $X_2 = (1,-1)$ و $X_3 = (-1,1)$ می‌باشد. حال آزمون مشتق دوم را به کار می‌گیریم. با توجه به اینکه

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \ , \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \ , \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

داریم (به شکل ۹.۵—الف توجه شود):

i	A	B	C	D	یک نقطهٔ X_i	$f(X_i)$
۱	۰	۰	۴	-16	زینی است	۰
۲	۱۲	۱۲	۴	۱۲۸	مینیموم موضعی است	-2
۳	۱۲	۱۲	۴	۱۲۸	مینیموم موضعی است	-2

مثال ۲) فرض کنید $f = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. در این صورت دامنهٔ f برابر با $D : x^2 + y^2 \leq 1$ است. پس بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که (چون f مقدماتی است، پس) f در نقاط $C : x^2 + y^2 = 1$ مشتق‌پذیر نیست و همهٔ نقاط C، نقاط تکین f هستند. بعلاوه، شرط $f' = \mathbf{0}$ بر $\mathrm{Int}(D) : x^2 + y^2 < 1$ به این معنی است که

$$\begin{cases} y\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \dfrac{x^2 y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0 \\ x\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \dfrac{x y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ x(1 - x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

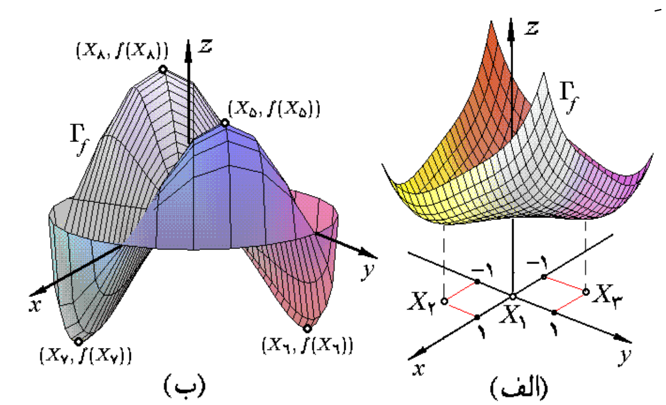
اگر $x = 0 \neq y$، آنگاه باید $1 - 2y^2 = 0$ یا $y = \pm\sqrt{2}/2$ باشد. اگر $y = 0 \neq x$، آنگاه باید $1 - 2x^2 = 0$ یا $x = \pm\sqrt{2}/2$ باشد. اگر $x \neq 0 \neq y$، آنگاه باید $2x^2 + y^2 = x^2 + 2y^2 = 1$

یعنی $y = \pm x$ و $x^۲ = ۱/۳$. پس $y = \pm x = \pm\sqrt{۳}/۳$. پس در مجموع نقاط تکین f عبارتند از: $X_۱ = \left(۰, \sqrt{۲}/۲\right)$، $X_۲ = \left(۰, -\sqrt{۲}/۲\right)$، $X_۳ = \left(\sqrt{۲}/۲, ۰\right)$، $X_۴ = \left(-\sqrt{۲}/۲, ۰\right)$، $X_۵ = \left(\sqrt{۳}/۳, \sqrt{۳}/۳\right)$، $X_٦ = \left(-\sqrt{۳}/۳, \sqrt{۳}/۳\right)$، $X_۷ = \left(\sqrt{۳}/۳, -\sqrt{۳}/۳\right)$، $X_۸ = \left(-\sqrt{۳}/۳, -\sqrt{۳}/۳\right)$ و $X_۹ = (۰, ۰)$. حال آزمون مشتق دوم را برای $X_۱$ تا $X_۹$ بکار می‌گیریم، زیرا می‌دانیم f بر C برابر صفر است و لذا نیازی به مطالعهٔ چنین نقاطی نیست. توجه به اینکه

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} &= \frac{xy(۲x^۲ + ۳y^۲ - ۳)}{(۱ - x^۲ - y^۲)^{۳/۲}} \\
\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} &= \frac{xy(۲x^۲ + ۳y^۲ - ۳)}{(۱ - x^۲ - y^۲)^{۳/۲}} \\
\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} &= \frac{۱ - ۳y^۲ - ۳y^۲ + ۲x^۴ + ۲y^۴ + ۳x^۲y^۲}{(۱ - x^۲ - y^۲)^{۳/۲}}
\end{aligned}$$

(به شکل ۹.۵—ب توجه شود)، داریم

i	A	B	C	D	نتیجه
۱	۰	۰	$-۲\sqrt{۲}$	-۸	نقطهٔ زینی
۲	۰	۰	$-۲\sqrt{۲}$	-۸	نقطهٔ زینی
۳	۰	۰	$-۲\sqrt{۲}$	-۸	نقطهٔ زینی
۴	۰	۰	$-۲\sqrt{۲}$	-۸	نقطهٔ زینی
۵	$-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$	۱۲۸	ماکزیموم موضعی
٦	$\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$	۱۲۸	مینیموم موضعی
۷	$\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$	۱۲۸	مینیموم موضعی
۸	$-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$	۱۲۸	ماکزیموم موضعی
۹	۰	۰	۱	-۱	نقطهٔ زینی



شکل ۹.۵: اکسترمومهای فراگیر

مثال ۳) از بین همهٔ مکعب مستطیل‌های با مساحت جانبی برابر، کدام یک دارای حجم حداکثر است؟

حل. فرض کنیم ابعاد مکعب مستطیل x، y و z باشد و مساحت جانبی این مکعب مستطیل برابر $۲S$ باشد، به بیان دیگر $۲xy + ۲xz + ۲yz = ۲S$. بنابراین $z = (S - xy)/(x + y)$. به این ترتیب، حجم مکعب مستطیل عبارت است از

$$V(x, y) = xyz = xy\frac{S - xy}{x + y}$$

اکنون کافی است ماکزیموم موضعی V را با شرط $x > ۰$، $y > ۰$ و $V > ۰$ محاسبه کنیم. ابتدا نقاط تکین V را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} y^۲(S - x^۲ - ۲xy)/(x + y)^۲ = ۰ \\ x^۲(S - y^۲ - ۲xy)/(x + y)^۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ + ۲xy = S \\ y^۲ + ۲xy = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ ۳x^۲ = S \end{cases}$$

در نتیجه $x = y = \sqrt{S/۳}$. یعنی تنها نقطهٔ تکین V (با شرط $x > ۰$ و $y > ۰$) نقطهٔ $X_۰ = \left(\sqrt{S/۳}, \sqrt{S/۳}\right)$ می‌باشد. اما در این صورت

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{-۲y^۲(y^۲ + S)}{(x + y)^۳}\right|_{X_۰} = -\frac{\sqrt{۳S}}{۳}, \\
B &= \left.\frac{-۲x^۲(x^۲ + S)}{(x + y)^۳}\right|_{X_۰} = -\frac{\sqrt{۳S}}{۳}, \\
C &= \left.\frac{۲xy(S^۲ - x^۲ - y^۲ - ۳xy)}{(x + y)^۳}\right|_{X_۰} = -\frac{\sqrt{۳S}}{٦}, \\
D &= AB - C^۲ = \frac{۱}{۴}S
\end{aligned}$$

بنابراین $X_۰$ یک نقطهٔ ماکزیموم موضعی است. یعنی حداکثر حجم به ازای ابعاد $x = y = z = \sqrt{S/۳}$ صورت می‌گیرد و برابر $V = (\sqrt{S/۳})^۳$ است، که S نصف مساحت جانبی مکعب است. نتیجهٔ بخصوص این محاسبات، مکعب بودن جواب است!

مثال ۴) فرض کنید $z = f(x, y)$ تابعی از x و y است که به شکل ضمنی و به صورت $x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲x + ۲y - ۴z - ۱۰ = ۰$ تعریف شده است. اکسترمومهای موضعی آنرا مشخص کنید.

حل. می‌دانیم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(x - ۱)}{(z - ۲)} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(y + ۱)}{(z - ۲)}$$

پس اگر $z = ۲$، یعنی اگر $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۱۴$، آنگاه در (x, y) مشتق‌پذیر نیست. بعلاوه، شرط $z' = \mathbf{0}$ به این معنی است که $x = ۱$ و $y = -۱$. در نتیجه $z^۲ - ۴z = ۱۲$ یا $z = ٦$ و $z = -۲$. بنابراین نقاط تکین z، نقاط بر دایرهٔ

$$C : z = ۲, (x - ۱)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۴^۲$$

و دو نقطهٔ $X_۱ = (۱, -۱, ٦)$ و $X_۲ = (۱, -۱, -۲)$ هستند. در مورد دستهٔ اول (نقاط بر C) بحث تمام است، زیرا همواره z برابر ۲ می‌باشد. در مورد $X_۱$ و $X_۲$ نیز، با توجه به اینکه

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = -\frac{(z - ۲)^۲ + (x - ۱)^۲}{(z - ۲)^۳},$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = \frac{(y+۱)^۲-(z-۲)^۲}{(z-۲)^۳}$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = (۱-x)/(z-۲)^۳$$

یک نقطهٔ $X_۱$	D	C	B	A	i
ماکزیموم موضعی است	۱/۱۶	۰	−۱/۴	−۱/۴	۱
مینیموم موضعی است	۱/۱۶	۴	۱/۴	۱/۴	۲

البته، با توجه به اینکه نمودار z یک کرهٔ به مرکز $(۱,-۱,۲)$ و شعاع ۴ می‌باشد، نتایج حاصل بدیهی است!

۶.۹.۵ تمرین.

در هر مورد، اکسترمومهای موضعی تابع $z=f(x,y)$ را بیابید:

۱) $f=x^۲+xy+y^۲+۳x-۳y+۴$

۲) $f=۲xy-۵x^۲-۲y^۲+۴x-۴$

۳) $f=x^۲+xy+y^۲-۴\ln x-۱۰\ln y$

۴) $f=۲x^۴+y^۴-x^۲-۲y^۲$

۵) $f=x^۲+۲xy$ ۶) $f=x^۳+۳xy+y^۳$

۷) $f=۴xy-x^۴-y^۴$ ۸) $f=\frac{۱}{x}+۳xy+\frac{۱}{y}$

۹) $f=y\sin x$ ۱۰) $f=e^{۲x}\cos y$

۱۱) $f=xy\ln(x^۲+y^۲)$ ۱۲) $f=\frac{x+y+۱}{\sqrt{۱+x^۲+y^۲}}$

۱۳) به کمک بسط تیلور مرتبهٔ دوم تابع $z=f(x,y)$ در نقطهٔ تکین $X_۰$، قضیهٔ ۴.۹.۵ را اثبات کنید.

*۱۴) به کمک بسط تیلور مرتبهٔ دوم تابع $u=f(x,y,z)$ در نقطهٔ تکین $X_۰$، شبیه قضیهٔ ۴.۹.۵ را برای توابع سه متغیره بیان نموده و سپس ثابت کنید.

اکسترمومهای موضعی هر یک از توابع زیر را بیابید:

۱۳) $f=۲xy-۵x^۲-۲y^۲+۴x-۴$

۱۴) $f=x^۲+y^۲+z^۲+۲x+۴y-۶z$

۱۵) $f=x+\frac{y^۲}{۴x}+\frac{z^۲}{y}+\frac{۲}{z}$

۱۶) $f=xy^۲z^۳(۱-x-۲y-۳z)$

۱۷) $f=\frac{a^۲}{x}+\frac{x^۲}{y}+\frac{y^۲}{z}+\frac{z^۲}{b}$

۱۸) $f=xyz\sqrt{۱-x-y-z}$

۱۹) یک استخر با حجم ثابت و مساحت حداقل طراحی کنید.

در هر مورد اکسترممهای موضعی تابع ضمنی $z=f(x,y)$ را بیابید:

۲۰) $x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz+۲x+۲y+۲z-۲=۰$

۲۱) $(x^۲+y^۲+z^۲)^۲=a^۲(x^۲+y^۲-z^۲)$

۱۰.۵ اکسترموم فراگیر

در اکسترموم موضعی تنها خود تابع اهمیت داشت. چنانچه مجموعه‌ای مشخص شود تا حداقل و حداکثر تابعی بر آن مجموعه بدست آید، مسالهٔ جدیدی بنام مسألهٔ اکسترموم فراگیر بوجود می آید.

۱.۱۰.۵ مسالهٔ اکسترموم فراگیر. فرض کنید $u=f(X)$ یک تابع است و $D\subseteq D_f$. مطلوبست تعیین همهٔ نقاطی چون $X_۱$ و $X_۲$ از D به گونه‌ای که به ازای هر $X\in D$ ای $f(X_۱)\leq f(X)\leq f(X_۲)$.

۲.۱۰.۵ تعریف. چنانچه مساله اکسترموم فراگیر $u=f(X)$ بر D دارای جواب باشد، $X_۱$ و $X_۲$ را به ترتیب **نقاط مینیموم** و **ماکزیموم** $u=f(X)$ بر D می‌نامیم و $f(X_۱)$ و $f(X_۲)$ را نیز به ترتیب **مینیموم** و **ماکزیمم** $u=f(X)$ بر D می‌نامیم، و می‌نویسیم $\min\limits_{X\in D} f(X)=f(X_۱)$ و $\max\limits_{X\in D} f(X)=f(X_۲)$.

توجه شود که ماکزیموم و مینیموم (فراگیر) در صورت وجود، منحصر بفرد هستند، در حالی که نقاط ماکزیموم و یا مینیموم می‌توانند بیش از یکی باشند. برای پاسخ به مسالهٔ وجود جواب برای مسالهٔ اکسترموم فراگیر، به تعریف زیر نیاز داریم.

۳.۱۰.۵ تعریف. فرض کنید $D\subseteq\mathbb{R}^n$ و $X_۰\in\mathbb{R}^n$. در صورتی می‌گوئیم $X_۰$ یک **نقطهٔ مرزی** D است که به ازای هر $r>۰$ ای گوی به مرکز $X_۰$ و شعاع r، مجموعه‌های D و D^c (یعنی، متمم D) را قطع کند (به شکل ۱۰.۵—الف توجه شود):

$$\forall r>۰\ \exists X_۱\ \exists X_۲ :\ \Big(X_۱\in B_r(X_۰)\cap D\ ,\ X_۲\in B_r(X_۰)\cap D^c\Big)$$

مجموعهٔ همهٔ نقاط مرزی D را **مرز** D نامیده و با نماد ∂D نشان می‌دهیم. مجموعهٔ D را در صورتی **بسته** گوئیم که همهٔ نقاط مرزی خود را در بر داشته باشد: $\partial D\subseteq D$. می‌توان اثبات نمود:

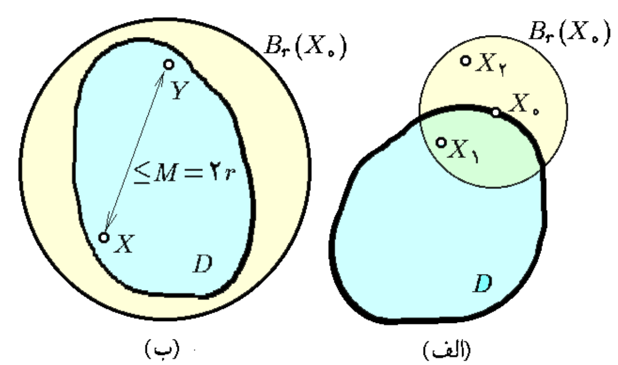
۴.۱۰.۵ قضیه. ۱) D بسته است $\Leftrightarrow$ D^c باز باشد؛
۲) به ازای هر n ای $\varnothing$ و $\mathbb{R}^n$ بسته‌اند؛
۳) اشتراک هر تعداد مجموعهٔ بسته، بسته است؛
۴) اجتماع هر تعداد متناهی مجموعهٔ بسته، بسته است؛
۵) D باز است $\Leftrightarrow$ $\partial D \cap D = \varnothing$.

برای مشاهدهٔ تعریف مجموعهٔ باز به ۱۵.۲.۵ مراجعه شود.

۵.۱۰.۵ تعریف. زیر مجموعهٔ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ را در صورتی **کراندار** گوئیم که در یک گوی جابگیرد؛ یعنی، فاصلهٔ نقاطش محدود باشد (به شکل ۱۰.۵—ب توجه شود). به بیان دیگر

$$\exists M > ۰ \ \forall X, Y \in D : \|X - Y\| \leq M$$

زیر مجموعهٔ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ را در صورتی **فشرده** گوئیم که بسته و کراندار باشد.



شکل ۱۰.۵: الف) $X_۰$ نقطهٔ مرزی D است.
ب) مجموعهٔ کراندار D در یک گوی جا می‌گیرد.

۶.۱۰.۵ مثال. ۱) فرض کنیم $D : x^۲ + y^۲ \leq ۴$.
در این صورت $\partial D : x^۲ + y^۲ = ۴$ و چون بدیهی است که D کراندار است، پس D فشرده می‌باشد.

مثال ۲) فرض کنیم D محور x ها در $\mathbb{R}^۳$ باشد. در این صورت $\partial D \subseteq D$ و لذا D بسته است. اما D کراندار نیست، زیرا فاصلهٔ نقاطش بی کران است. پس D فشرده نیست.

مثال ۳) فرض کنیم $D : -۱ \leq x \leq ۳, ۱ \leq y < ۲$. در این صورت مرز D عبارت است از مستطیل با رئوس در $(-۱,۱)$، $(-۱,۲)$، $(۳,۱)$ و $(۳,۲)$. چون ضلع $(-۱,۲)(۳,۲)$ به D تعلق ندارد، پس D بسته نیست. در حالی که D کراندار است. بنابراین، D فشرده نیست.

۷.۱۰.۵ قضیه. اگر تابع $u = f(X)$ بر مجموعهٔ فشردهٔ D پیوسته باشد، آنگاه مسالهٔ اکسترموم $u = f(X)$ بر D دارای جواب است. بعلاوه، اگر $X_۰$ یک جواب مسالهٔ اکسترموم $u = f(X)$ بر D باشد، آنگاه $X_۰ \in \partial D$ و یا اینکه $X_۰ \in \mathrm{Int}(D)$ و یک نقطهٔ تکین تابع $u = f(X)$ است.

نظر به قضیهٔ ۷.۱۰.۵، اکسترمومهای فراگیر تابع $u = f(X)$ بر مجموعهٔ D، در همه جا امکان ظهور ندارد؛ بلکه، یا بر مرز D واقعند، و یا اینکه نقطهٔ تکین درونی هستند. این امر با تجربهٔ ما از طبیعت سازگاری دارد.

الگوریتمی به شرح زیر برای حل مسالهٔ اکسترموم فراگیر پیشنهاد می‌شود:

۸.۱۰.۵ الگوریتم حل مسالهٔ اکستروموم فراگیر.

فرض کنید $u = f(X)$ و $D \subseteq D_f$. برای حل مسالهٔ اکسترموم فراگیر $u = f(X)$ بر D مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) تحقیق می‌کنیم که آیا $u = f(X)$ فشرده است. اگر چنین بود، ادامه می‌دهیم.

۲) تحقیق می‌کنیم که آیا $u = f(X)$ بر D پیوسته است. اگر چنین بود، ادامه می‌دهیم.

۳) نقاط تکین $u = f(X)$ که در D واقع هستند را یافته و مقدار $u = f(X)$ را در هر یک از آنها محاسبه می‌کنیم.

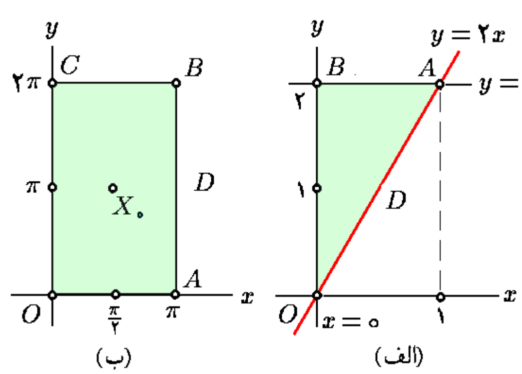
۴) اکسترومومهای فراگیر $u = f(X)$ را بر مرز مجموعهٔ D (یعنی، ∂D) می‌یابیم.

۵) با مقایسهٔ اعداد بدست آمده در مرحلهٔ ۳ و ۴، بزرگترین مقدار را ماکزیموم و کوچکترین آنها را مینیموم تابع مفروض $u = f(X)$ بر مجموعهٔ D اعلام می‌کنیم.

۹.۱۰.۵ مثال. ۱) اکسترمومهای فراگیر تابع $f = ۲x^۲ - ۴x + y^۲ - ۴y + ۱$ بر مجموعهٔ D محدود به سه خط $x = ۰$، $y = ۲$ و $y = ۲x$ را بدست آورید.

حل. ابتدا مجموعهٔ D را در $\mathbb{R}^۲$ ترسیم می‌کنیم؛ به شکل ۱۱.۵—الف توجه شود. چون D بسته و کراندار است و f تابعی مقدماتی است و بر کل D تعریف می‌گردد، پس «D فشرده و f بر آن پیوسته است». بنابراین، مساله دارای جواب می‌باشد. برای یافتن نقاط تکین f بر $\mathrm{Int}(D)$، شرط $f' = \mathbf{0}$ را تحقیق می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۴x - ۴ = ۰ \\ ۲y - ۴ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۲ \end{cases} \Longrightarrow X_۰ = (۱, ۲)$$



شکل ۱۱.۵: اکسترموم فراگیر

که چون بر مرز D قرار دارد، نیازی به بحث مجزا ندارد. مرز D را به سه پاره‌خط OA، AB و OB می‌توان تقسیم نمود. هر یک از این پاره‌خطها را جداگانه مطالعه می‌کنیم:

ضلع OA مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, 2x)$ است که $0 \le x \le 1$. اما $f(x, 2x) = 6x^2 - 12x + 1$. بنابراین، کافی است که اکسترمومهای فراگیر تابع $g(x) = 6x^2 - 12x + 1$ را بر بازهٔ $[0;1]$ بیابیم. شرط $g' = 0$ یعنی $x = 1$؛ و چون $g(0) = 1$ و $g(1) = -5$، پس ماکزیموم f بر AB برابر ۱ است و در $(0, 0)$ اختیار می‌شود و مینیموم f بر OA برابر -5 است و در $(1, 2)$ اختیار می‌گردد.

ضلع AB مجموعهٔ همهٔ نقاط به شکل $(x, 2)$ است که $0 \le x \le 1$. اما $f(x, 2) = 2x^2 - 4x - 3$. بنابراین، کافی است که اکسترمومهای فراگیر تابع $g(x) = 2x^2 - 4x - 3$ را بر بازهٔ $[0;1]$ بیابیم. شرط $g' = 0$ یعنی $x = 1$؛ و چون $g(0) = -3$ و $g(1) = -5$، پس ماکزیموم f بر AB برابر -3 است و در $(0, 2)$ اختیار می‌شود و مینیموم f بر AB برابر -5 است و در $(1, 2)$ اختیار می‌گردد.

ضلع OB مجموعهٔ همهٔ نقاط $(0, y)$ با $0 \le y \le 2$ است. اما $f(0, y) = y^2 - 4y + 1$. بنابراین، کافی است که اکسترمومهای فراگیر تابع $g(y) = y^2 - 4y + 1$ را بر بازهٔ $[0;2]$ بیابیم. شرط $g' = 0$ یعنی $y = 2$؛ و چون $g(0) = 1$ و $g(2) = -3$، پس ماکزیموم f بر OB برابر ۱ است و در $(0, 0)$ اختیار می‌شود و مینیموم f بر OB برابر -3 است و در $(0, 2)$ اختیار می‌گردد.

نتیجه اینکه ماکزیموم f بر D برابر ۱ است و در $(0, 0)$ اختیار می‌شود و مینیموم f بر D برابر -5 است و در $(1, 2)$ اختیار می‌گردد.

مثال ۲) اکسترمومهای فراگیر تابع $f = \sin x \cos y$ را بر مجموعهٔ $D : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 2\pi$ بیابید.

حل. ابتدا توجه می‌کنیم که D یک مستطیل توپر در $\mathbb{R}^2$ می‌باشد و بنابراین بسته و کراندار است؛ به شکل ۱۱.۵—ب توجه شود. چون D بسته و کراندار است و f تابعی مثلثاتی (و بنابراین، مقدماتی) است و بر کل D تعریف می‌گردد، پس «D فشرده و f بر آن پیوسته است». بنابراین، مسأله دارای جواب می‌باشد. برای یافتن نقاط تکین f بر $\mathrm{Int}(D)$، شرط $f' = \mathbf{0}$ را تحقق می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos x \cos y = 0 \\ -\sin x \sin y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x \text{ یا } \cos y = 0 \\ \sin x \text{ یا } \sin y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \sin y = 0 \\ \cos y = \sin x = 0 \end{array}\right.$$

پس با توجه به اینکه $\partial D : 0 < x < \pi, 0 < y < 2\pi$، تنها نقطهٔ تکین f موجود در ∂D عبارت از $X_0 = (\pi/2, \pi)$ می‌باشد، که $f(X_0) = -1$. مرز D یک مستطیل توخالی با رئوس $(0, 0)$، $(0, 2\pi)$، $(\pi, 2\pi)$ و $(\pi, 0)$ می‌باشد. هر یک از چهار ضلع ∂D را به طور جداگانه مطالعه می‌کنیم:

$$\begin{array}{lll} OA & : & (x, 0);\ 0 \le x \le \pi \\ & & f(\pi, 0) = f(0, 0) = 0 \le f(x, 0) = \sin x \\ & & \qquad \le 1 = f(\pi/2, 0) \\ AB & : & (\pi, y);\ 0 \le y \le 2\pi\ ,\ f(\pi, y) = 0 \\ BC & : & (x, 2\pi);\ 0 \le x \le \pi \\ & & f(\pi, 2\pi) = f(0, 2\pi) = 0 \le f(x, 2\pi) = \sin x \\ & & \qquad \le 1 = f(\pi/2, 2\pi) \\ CO & : & (0, y);\ 0 \le y \le 2\pi\ ,\ f(0, y) = 0 \end{array}$$

پس در مجموع، ماکزیموم f بر D برابر ۱ است که در نقاط $(\pi/2, 0)$ و $(\pi/2, 2\pi)$ اختیار می‌شود و مینیموم f بر D برابر -1 است که در نقطهٔ $(\pi/2, \pi)$ اختیار می‌شود.

مثال ۳) اکسترمومهای فراگیر تابع $f = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ را بر مجموعهٔ $D : x^2 + y^2 \le 4$ بیابید.

حل. چون D بسته و کراندار است و f بر D پیوسته است، بنابراین، مسالهٔ اکسترموم f بر D دارای جواب است. شرط $f' = \mathbf{0}$ به معنی

$$\left\{\begin{array}{l} 2 - 2x = 0 \\ 2 - 2y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow X_0 = (1, 1)$$

است، بعلاوه $f(X_0) = 4$. مرز D عبارت است از

$$\partial D : x^2 + y^2 = 4$$

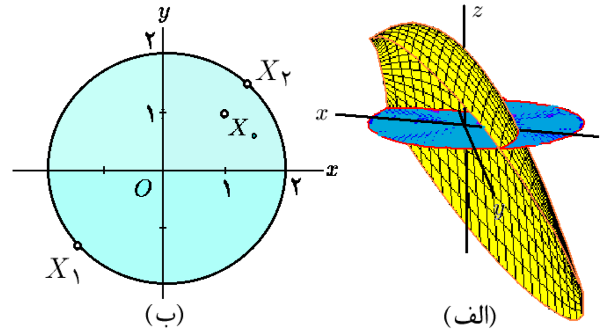
که به صورت

$$\partial D : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\big(2\cos t, 2\sin t\big)};\ 0 \le t \le 2\pi$$

پارامتره می‌شود. به این ترتیب، تعریف می‌کنیم

$$g(t) := f\big(\mathbf{r}(t)\big) = -2 + 4\cos t + 4\sin t$$

که بایستی بر $[0;2\pi]$ مطالعه شود. شرط $g'(t) = 0$ بر $(0;2\pi)$ به معنی $-\cos t + \sin t = 0$ است، و لذا $t = \partial\pi/4$ و یا $t = 5\pi/4$. چون $g(0) = g(2\pi) = 3$، $g(\pi/4) = -2 + 4\sqrt{2}$ و $g(5\pi/4) = -2 - 4\sqrt{2}$، پس ماکزیموم f بر مرز D برابر $-2 + 4\sqrt{2}$ است که در $\big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$ اختیار می‌شود و مینیموم f بر مرز D برابر $-2 - 4\sqrt{2}$ است که در $\big(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big)$ اختیار می‌شود. پس در مقایسه با مقدار $f(X_0)$، نتیجه می‌گیریم که، ماکزیمم f بر D برابر $-2 + 4\sqrt{2}$ است که در نقطهٔ $\big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$ اختیار می‌شود و مینیموم f بر D برابر $-2 - 4\sqrt{2}$ است که در $\big(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big)$ اختیار می‌گردد. به شکل ۱۲.۵—الف توجه شود.



شکل ۱۲.۵: الف) اکسترموم فراگیر. ب) $X_۱$ و $X_۲$ نقاط اکسترموم مشروط f به شرط $g=۰$ هستند.

۱۰.۱۰.۵ تمرین. اکسترمممهای فراگیر تابع f بر مجموعهٔ D را بیابید:

۱) $f=x^۲+y^۲+۲xy-x-y+۱,$

$D: ۰\leq x\leq ۱, ۰\leq y\leq ۱$

۲) $f=۲x^۲+xy-y,\ D: x^۲+y^۲\leq ۲y$

۳) $f=\sin x+\sin(x+y),\ D: ۰\leq x\leq \pi, ۰\leq y\leq ۲\pi$

۴) $f=\sin x\sin y\sin(x+y),\ D: ۰\leq x\leq \pi, ۰\leq y\leq \pi$

۵) $f=\sin x\cos y,\ D: ۰\leq x\leq \pi, ۰\leq y\leq \pi-x$

۶) $f=x^۲-۲xy+y^۲+x-۲,$

$D: ۰\leq x\leq ۱, x\leq y\leq ۲$

۷) $f=x^۲+y^۲-۱۲x+۱۶y,\ D: x^۲+y^۲\leq ۲۵$

۸) $f=x^۲+۲y^۲+۳z^۲,\ D: x^۲+y^۲+z^۲\leq ۱۰۰$

۹) $f=x+y+z,\ D: x^۲+y^۲\leq z\leq ۱$

۱۰) $f=x^۲+y^۲+z^۲+۲x+۴y-۶z,$

$D: x^۲+y^۲+z^۲\leq ۶۴$

۱۱.۵ اکسترموم مشروط

همانطور که قبلاً در بخش ۱۰.۵ دیدیم، در مسالهٔ اکسترموم یک تابع مفروض، قسمتی از دامنهٔ f را می‌توان مشخص نمود و اکسترمومهای تابع را بر آن طلب کرد. این محدودیتها می‌توانند به کمک معادلات مطرح شوند، مانند کره‌ای که در یک محیط گرمایی قرار گرفته است، و مسالهٔ عبارت از یافتن گرمترین و سردترین نقطهٔ آن است. اکسترموم مشروط را در دو مرحله توضیح می‌دهیم.

۱.۱۱.۵ مسالهٔ اکسترموم مشروط. فرض کنید توابع $f,g:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ مشتقپذیرند. مطلوبست اکسترمومهای تابع $u=f(X)$ بر مجموعهٔ $S: g(X)=۰$. جواب مسأله را اکسترموم مشروط f به شرط $g=۰$ می‌نامیم.

۲.۱۱.۵ تعبیر هندسی. فرض کنید $g=۰$ را ترسیم کرده‌ایم. در این صورت، منحنی‌های تراز f را در همان صفحه می‌توان ترسیم نمود. ملاحظه می‌گردد که در این صورت، اکسترمومهای f به شرط $g=۰$ نقاطی چون $X_۰$ هستند که به ازاء آنها یک منحنی تراز از f بر منحنی $g=۰$ مماس می‌گردد. به شکل ۱۲.۵—ب توجه شود.

۳.۱۱.۵ قضیهٔ لاگرانژ. اگر $X_۰$ یک جواب مسألهٔ اکسترموم f با شرط $g=۰$ باشد و g' بر مجموعهٔ $S:g=۰$ مخالف صفر باشد، در این صورت عددی λ وجود خواهد داشت که $f'(X_۰)=\lambda g'(X_۰)$.

۴.۱۱.۵ مثال. ۱) اکسترمومهای تابع $f=xy$ را به شرط $x+y=۱$ بیابید.

حل. در اینجا $g=x+y-۱$ و شرط لاگرانژ عبارت است از $\overrightarrow{(y,x)}=\lambda\overrightarrow{(۱,۱)}$. بنابراین،

$$\begin{cases} y=\lambda \\ x=\lambda \\ x+y=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ ۲\lambda=۱ \end{cases} \Rightarrow X_۰=\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$$

که $f(X_۰)=۱/۴$. این نقطه یک ماکزیمم موضعی است، زیرا در اطراف آن f مقدار کمتری را نیز اختیار می‌کند؛ مثلاً $f(۰,۱/۲)=۰$. آیا این دلیل کافی است؟

مثال ۲) اکسترمومهای تابع $f=x-۲y+۲z$ را به شرط $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ بیابید.

حل. در اینجا $g=x^۲+y^۲+z^۲-۴$ و شرط لاگرانژ عبارت است از $\overrightarrow{(۱,-۲,۲)}=\lambda\overrightarrow{(۲x,۲y,۲z)}$. بنابراین، چون روشن است که باید $\lambda\neq ۰$، داریم

$$\begin{cases} ۲\lambda x=۱ \\ ۲\lambda y=-۲ \\ ۲\lambda z=۲ \\ x^۲+y^۲+z^۲=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱/۲\lambda \\ y=-۱/\lambda \\ z=۱/\lambda \\ ۱۷/۴\lambda^۲=۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_۱=\frac{۲\sqrt{۱۷}}{۱۷}\overrightarrow{(۱,-۲,۲)} \\ X_۲=-\frac{۲\sqrt{۱۷}}{۱۷}\overrightarrow{(۱,-۲,۲)} \end{cases}$$

اما $f(X_۱)=۱۸\sqrt{۱۷}/۱۷$ و $f(X_۲)=-۱۸\sqrt{۱۷}/۱۷$. پس مینیموم موضعی f به شرط $g=۰$ برابر $-۱۸\sqrt{۱۷}/۱۷$ است که در نقطهٔ $-۲\sqrt{۱۷}/۱۷\overrightarrow{(۱,-۲,۲)}$ اختیار می‌شود و ماکزیموم موضعی f به شرط $g=۰$ نیز برابر $۱۸\sqrt{۱۷}/۱۷$ است که در نقطهٔ $۲\sqrt{۱۷}/۱۷\overrightarrow{(۱,-۲,۲)}$ اختیار می‌شود.

مثال ۳) مکعب مستطیل با حجم حداکثر و محاط در بیضی‌گون به معادلهٔ $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ را بیابید.

حل. می‌توانیم فرض کنیم که در هر یک هشتم از فضا تنها یک رأس از مکعب مستطیل قرار دارد؛ و به دلیل تقارن، کافی است شکل را در یک هشتم اول در نظر بگیریم. فرض کنیم مختصات آن رأس از مکعب مستطیل که در یک هشتم اول قرار دارد، (x_0,y_0,z_0) است. در این صورت، حجم مکعب مستطیل حاصل برابر $f=8x_0y_0z_0$ است. پس کافی است که ماکزیموم f را به شرط $g=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ بیابیم. شرط لاگرانژ به این معنی است که عدد λ ای وجود دارد که

$$\overrightarrow{(yz,xz,xy)}=\lambda\overrightarrow{\left(2x/a^2,2y/b^2,2z/c^2\right)}$$

بنابراین، اگر $\lambda\neq 0$، آنگاه

$$\begin{cases} yz=2x\lambda/a^2\\ xz=2y\lambda/b^2\\ xy=2z\lambda/c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} xyz=2\lambda x^2/a^2\\ xyz=2\lambda y^2/b^2\\ xyz=2\lambda z^2/c^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2\lambda/3=2\lambda x^2/a^2\\ 2\lambda/3=\lambda y^2/b^2\\ 2\lambda/3=2\lambda z^2/c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2=a^2/3\\ y^2=b^2/3\\ z^2=c^2/3\end{cases}$$

که چون فرض کرده بودیم (x,y,z) در یک هشتم اول واقع است، بنابراین $x=a\frac{\sqrt{3}}{3}$، $y=b\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $z=c\frac{\sqrt{3}}{3}$. به بیان دیگر $X_0=\frac{\sqrt{3}}{3}(a,b,c)$، که $f(X_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}abc$. یعنی، مکعب مستطیل با حداکثر حجم باید به ابعاد $\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{3}b\times\frac{\sqrt{3}}{3}c$ باشد و حجم آن برابر $\frac{8}{9}\sqrt{3}abc$ خواهد بود (به شکل ۱۳.۵–الف توجه شود).

مثال ۴) اکسترموم تابع $f=x^2+2y^2+3z^2$ بر گوی $D: x^2+y^2+z^2\leq 100$ را بیابید.

حل. ابتدا نقاط تکین f در $\mathrm{Int}(D)$ را می‌یابیم:

$$f'=0\Leftrightarrow 2x=4y=6z=0\Leftrightarrow X_1=(0,0,0)$$

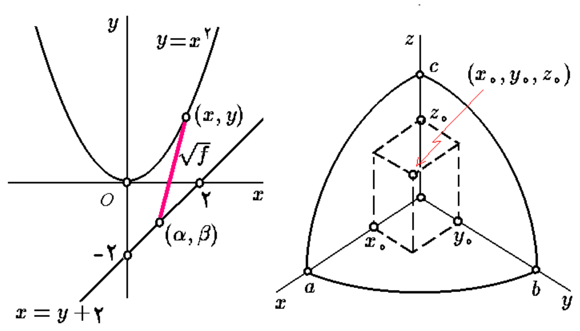
که $f(X_1)=0$. حال اکسترموم f بر لبهٔ D را می‌یابیم که یک کره است: $\partial D: x^2+y^2+z^2=100$. این مسأله به معنی یافتن اکسترموم f به شرط

$$g=x^2+y^2+z^2-100=0$$

است، که یک مسألهٔ اکسترموم مشروط می‌باشد. در این حالت، داریم

$$\begin{cases} f'=\lambda g'\\ g=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x=2\lambda x & (1)\\ 4y=2\lambda y & (2)\\ 6z=2\lambda z & (3)\\ x^2+y^2+z^2=100 & (4)\end{cases}$$

اگر $\lambda=0$، آنگاه از معادلات (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $x=y=z=0$ که با معادلهٔ (۴) تضاد دارد. پس باید $\lambda\neq 0$. اما در این صورت از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود که یا $x=0$ و یا در غیر این صورت $\lambda=1$. اما از شرط $\lambda=1$ و معادلات (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $y=z=0$. بنابراین، از معادلهٔ (۴) داریم $x^2=100$ یا $x=\pm 10$. یعنی، نقاط $X_2=(10,0,0)$ و $X_3=(-10,0,0)$ حاصل می‌شود. به صورت مشابه، نقاط $X_4=(0,10,0)$، $X_5=(0,-10,0)$، $X_6=(0,0,10)$ و $X_7=(0,0,-10)$ حاصل می‌گردد. از طرفی $f(X_2)=f(X_3)=100$، $f(X_4)=f(X_5)=200$ و $f(X_6)=f(X_7)=300$. پس در مجموع، ماکزیموم f بر D برابر ۳۰۰ و در نقاط X_6 و X_7 رخ می‌دهد و مینیموم آن برابر ۰ و در نقطهٔ X_1 رخ می‌دهد.



شکل ۱۳.۵: الف) مکعب مستطیل محاط در بیضی‌گون ب) کمترین فاصلهٔ بین خط و سهمی

۵.۱۱.۵ تمرین. اکسترموم تابع f را به شرط داده شده محاسبه کنید:

۱) $f=xy,\quad x^2/8+y^2/2=1$

۲) $f=3x+4y,\quad x^2+y^2=1$

۳) $f=x^2+y^2,\quad x/a+y/b=1$

۴) $f=Ax^2+2Bxy+Cy^2,\quad x^2+y^2=1$

۵) $f=\cos^2 x+\cos^2 y,\quad x-y=\pi/4$

۶) $f=x+2y+3z,\quad x^2+y^2+z^2=1$

۷) $f=\sin x\sin y\sin z,\quad x+y+z=\pi/2$

۸) $f=x^2+y^2+z^2,\quad x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,$

$$0<a<b<c$$

۹) $f=x^my^nz^\ell,\quad x+y+z=a,\quad 0<m,n,\ell,a$

۱۰) $f=x+y+z-3\sqrt[3]{xyz},\quad \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=1$

۱۱) نزدیکترین نقطه از خط $ax+by+c=0$ تا مبدأ مختصات را بیابید.

۱۲) دو عدد مثبت طوری بیابید که حاصلضربشان برابر ۱۰ و مجموعشان حداقل باشد.

۱۳) فاصلهٔ خط $x + ۲y = ۴۰$ تا دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۸x + ۱۷$ را بیابید.

۱۴) مستطیل با حداکثر مساحت در بیضی $x^۲/a^۲ + y^۲/b^۲ = ۱$ محاط کنید.

۱۵) شعاع و ارتفاع استوانهٔ رو بازی را بیابید که در کره‌ای به شعاع R محاط می‌توان نمود.

۱۶) اگر نقطهٔ به مختصات (x, y, z) از کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲ = ۲۵$ دارای دمای $T = x - ۲y + ۵z$ باشد، گرمترین و سردترین نقطهٔ سطح کره را بیابید.

۱۷) مکعب مستطیلی را بیابید که سه وجه آن بر صفحات مختصاتی است، در یک هشتم اول قرار دارد و یک رأس آن بر صفحهٔ $x/a + y/b + z/c = ۱$ قرار دارد، که $a, b, c > ۰$.

۱۸) سه عدد مثبت طوری بیابید که مجموع آنها ثابت و حاصلضربشان حداکثر است.

۱۹) استخر به شکل مکعب مستطیل را طوری طراحی کنید که حجم آن $V_۰$ بوده و مساحت سطح آن حداقل مقدار ممکن باشد.

۲۰) فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۰, y_۰, z_۰)$ تا صفحهٔ داده شده را بیابید:
$Ax + By + Cz + D = ۰$

اکنون شکل تعمیم یافتهٔ مسألهٔ اکسترموم مشروط را بیان می‌کنیم.

۶.۱۱.۵ مسأله. فرض کنید $۱ \leq k < n$ و f، $g_۱$، . . . و g_k توابعی مشتقپذیر از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ هستند. مطلوبست اکسترمومهای تابع f بر مجموعهٔ

$$S : g_۱(X) = \cdots = g_k(X) = ۰$$

جواب مسأله را **اکسترموم مشروط تابع f به شرط** $g_۱(X) = ۰$، ... و $g_k(X) = ۰$ می‌نامیم.

۷.۱۱.۵ قضیهٔ تعمیم یافتهٔ لاگرانژ. اگر $X_۰$ یک جواب مسألهٔ اکسترموم تابع f به شرایط $g_۱(X) = ۰$، ... و $g_k(X) = ۰$ باشد و به ازای هر $X \in S$ ای بردارهای $g'_۱(X)$، ... و $g'_k(X)$ مستقل خطی باشند، آنگاه اعداد $\lambda_۱$، ... و λ_k طوری یافت می‌شوند که

$$f'(X_۰) = \lambda_۱ g'_۱(X_۰) + \cdots + \lambda_k g'(X_۰)$$

۸.۱۱.۵ مثال . ۱) اکسترمومهای تابع $f = xyz$ را به شرط اینکه $x + y + z = ۰$ و نیز $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ بیابید.

حل. در اینجا $g_۱ = x+y+z$ و $g_۲ = x^۲+y^۲+z^۲ - ۱$. شرط لاگرانژ به معنی

$$\overrightarrow{(yz, xz, xy)} = \lambda\overrightarrow{(۱, ۱, ۱)} + \mu\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۲z)}$$

است، به بیان دیگر

$$\left\{\begin{array}{l} yz = \lambda + ۲\mu x \\ xz = \lambda + ۲\mu y \\ xy = \lambda + ۲\mu z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} xyz = \lambda x + ۲\mu x^۲ \\ xyz = \lambda y + ۲\mu y^۲ \\ xyz = \lambda z + ۲\mu z^۲ \end{array}\right. \quad (۱۳.۵)$$

که چون $x + y + z = ۰$ و $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$، از جمع کردن این سه تساوی، بدست می آوریم که $۲\mu = ۳xyz$. بنابراین x، y و z در معادلهٔ درجهٔ دوم $۲\mu x^۲ + \lambda x = ۲/۳\mu$ صدق می‌کنند. حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $\lambda = \mu = ۰$، آنگاه $xy = xz = yz = ۰$ و لذا لااقل دو تا از اعداد x، y و z صفرند، و چون باید $x+y+z = ۰$، عدد بعدی نیز صفر است، در حالی که این محال است، زیرا بایستی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$. پس این حالت ممکن نیست.

ب) اگر $\lambda \neq \mu = ۰$، آنگاه جواب معادلهٔ بر حسب x برابر $x = ۰$ است، پس باز هم $x = y = z = ۰$ که ممکن نیست.

ج) اگر $\mu \neq \lambda = ۰$، آنگاه $x = y = z = ۲\sqrt{۳}/۲$ که ممکن نیست، زیرا در این صورت $x + y + z = ۲\sqrt{۳}$.

د) اگر $\mu \neq ۰ \neq \lambda$، آنگاه از معادلات (۱۳.۵) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \lambda(x - y) &= -۲\mu(x^۲ - y^۲)\,, \\ \lambda(x - z) &= -۲\mu(x^۲ - z^۲)\,, \\ \lambda(y - z) &= -۲\mu(y^۲ - z^۲) \end{aligned}$$

اکنون حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم

a) اگر x، y و z متفاوت باشند، آنگاه

$$x + z = x + y = y + z = -\frac{\lambda}{۲\mu}$$

پس با تفاضل نتیجه می‌شود که

$$x - y = y - z = z - x = ۰$$

که تناقض است.

b) اگر $x = y \neq z$، آنگاه $x + z = y + z = -\lambda/۲\mu$ یا $z = -x - \lambda/۲\mu$. اکنون از شرط $x + y + z = ۰$ نتیجه می‌گردد که $x = \lambda/۲\mu$ و از شرط

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$$

نتیجه می‌شود که $(۳/۴)(\lambda^۲/\mu^۲) = ۱$. بنابراین $\lambda/\mu = \pm\sqrt{۳}/۳$. در نتیجه $-\frac{z}{۲} = x = y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و یا $-\frac{z}{۲} = x = y = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ که به دلیل تقارن شش نقطه حاصل می‌شود:

$$X_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱, ۱, -۲) \quad X_۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱, -۲, ۱)$$

$$X_۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(-۲, ۱, ۱) \quad X_۴ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱, ۱, -۲)$$

$$X_۵ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱, -۲, ۱) \quad X_۶ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}(-۲, ۱, ۱)$$

که $f(X_۱) = f(X_۲) = f(X_۳) = -۲\sqrt{۳}/۹$ و همچنین $f(X_۴) = f(X_۵) = f(X_۶) = ۲\sqrt{۳}/۹$.

c) اگر $x = y = z = ۰$، آنگاه شرط $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ نتیجه می‌دهد $۱ = ۰$ که غلط است.

پس در مجموع، ماکزیمم f به شرط $g_۱ = g_۲ = ۰$ برابر $۲\sqrt{۳}/۹$ است که در نقاط $X_۴$، $X_۵$ و $X_۶$ رخ می‌دهند و مینیموم آن برابر $-۲\sqrt{۳}/۹$ است که در نقاط $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ رخ می‌دهد.

مثال ۲) کوتاهترین فاصله بین سهمی $y = x^۲$ و خط $x = y + ۲$ را پیدا کنید.

حل. فرض کنیم (x, y) نقطهٔ دلخواهی بر سهمی $y = x^۲$ و (α, β) نقطه‌ای دلخواه بر خط $x = y + ۲$ باشد. اکنون تابع مربع فاصلهٔ (x, y) تا (α, β) را در نظر می‌گیریم

$$f = d^۲ = (x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲$$

و شرایط مسأله را بترتیب

$$g_۱ = y - x^۲ = ۰ \quad , \quad g_۲ = \alpha - \beta - ۲ = ۰$$

می‌گیریم. اکنون شرط لاگرانژ به معنی

$$\overrightarrow{(۲(x - \alpha), ۲(y - \beta), -۲(x - \alpha), -۲(y - \beta))} = \lambda\overrightarrow{(-۲x, ۱, ۰, ۰)} + \mu\overrightarrow{(۰, ۰, ۱, -۱)}$$

است. بنابراین

$$\begin{cases} ۲(x - \alpha) = -۲\lambda x \\ ۲(x - \beta) = \lambda \\ -۲(x - \alpha) = \mu \\ -۲(y - \beta) = -\mu x \\ y = x^۲ \\ \alpha = \beta + ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = (۱ + \lambda)x \\ \beta = y - \lambda/۲ \\ \alpha = x + \mu/۲ \\ \beta = y - \mu/۲ \\ y = x^۲ \\ \alpha = \beta + ۲ \end{cases}$$

$$\overset{(۱)}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha = (۱ + \lambda)x \\ \beta = y - \lambda/۲ \\ \alpha = x + \lambda/۲ \\ y = x^۲ \\ \alpha = \beta + ۲ \end{cases} \qquad (۱۴.۵)$$

در (۱) از تساوی دوم و چهارم استفاده شده است. دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف $\lambda = ۰$: در این صورت $\alpha = x$، $\beta = y$، $x = y + ۲$ و $x^۲ + x = ۲$ که ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب $\lambda \neq ۰$: در این صورت از تساوی اول و سوم در مجموعه فرمولهای (۱۴.۵) داریم $x = ۱/۲$. بنابراین $y = ۱/۴$، $\alpha = ۱/۲(\lambda + ۱)$، $\beta = ۱/۴ + \lambda/۲$ و $\alpha = \beta + ۲$. پس $\lambda = ۷/۴$، $\alpha = ۱۱/۸$ و $\beta = -۵/۸$. در این حالت $f(x, y, \alpha, \beta) = ۴۹/۳۲$ نتیجه اینکه، حداقل فاصلهٔ سهمی تا خط برابر $\sqrt{۴۹/۳۲} = ۷\sqrt{۲}/۸$ است که عبارت است از فاصلهٔ نقطهٔ $(۱/۲, ۱/۴)$ از سهمی $y = x^۲$ تا نقطهٔ $(۱۱/۸, -۵/۸)$ از خط $x = y + ۲$ (به شکل ۱۳.۵—ب توجه شود).

۹.۱۱.۵ تمرین. در هر مورد، اکسترموم تابع f را با شرایط داده شده بیابید:

۱) $f = xy + yz \quad , \quad y + z = ۲ \quad , \quad x^۲ + y^۲ = ۲ \quad ,$
$x > ۰ \quad , \quad y > ۰ \quad , \quad z > ۰$

۲) $f = x^۲ + y^۲ + z^۲ \quad , \quad x + ۲y + ۳z = ۶ \quad ,$
$x + ۳y + ۹z = ۹$

۳) $f = x^۲yz + ۱ \quad , \quad ۲x - y = y + z = ۰$

۴) $f = xyz \quad , \quad x + y + z = ۴۰ \quad , \quad x + y = z$

۵) $f = xy + z^۲ \quad , \quad y = x \quad , \quad x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$

۶) $f = x^۲ + y^۲ + z^۲ + w^۲ \quad , \quad x + y - z + w = ۱ \; ,$
$۲x - y + z - w - ۱ = ۰$

۷) فاصلهٔ دو سهمی $y = x^۲$ و $x = y^۲ + ۲$ را بدست آورید.

۸) ماکزیموم تابع $f = \alpha x + \beta y$ را به شرطی بیابید که داشته باشیم $\alpha^۲ + \beta^۲ = x^۲ + y^۲ = ۱$

۹) ماکزیموم تابع $f = \alpha x + \beta y + \gamma z$ را به شرطی بیابید که $\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$.

۱۲.۵ فرم دیفرانسیلی

موضوع این بخش فرم «دیفرانسیلی» است، مفهومی که بعداً در قسمت انتگرال خط نوع دوم و نیز انتگرال سطح نوع دوم بکار می‌رود. مطالعهٔ این اشیاء را در دو مرحله انجام می‌دهیم: در صفحه و فضا.

۱.۱۲.۵ قرار داد. در این بخش $dx = \Delta x = x - x_\circ$، و

$$dy = \Delta y = y - y_\circ \ , \ \ dz = \Delta z = z - z_\circ$$

که $x_\circ$، $y_\circ$ و $z_\circ$ اعداد دلخواه و از این پس ثابت می‌باشند.

۲.۱۲.۵ تعریف. منظور از «۱—فرم» در $\mathbb{R}^۲$، عبارتی است به شکل

$$\theta = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

که $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ توابعی مشتق پذیرند. اشتراک دامنهٔ این توابع را دامنهٔ θ می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ ۱—فرمهای در $\mathbb{R}^۲$ را با نماد $\bigwedge^۱ \mathbb{R}^۲$ نشان می‌دهیم.

۳.۱۲.۵ مثال. ۱) $\theta = d(x^۲ + y^۲) = ۲x\,dx + ۲y\,dy$ یک ۱—فرم در $\mathbb{R}^۲$ است.

مثال ۲) $\theta = dx/x + x^۲\,dy$ یک ۱—فرم با دامنهٔ $D\ :\ x \neq \circ$ است.

۴.۱۲.۵ تعریف. منظور از «۲—فرم» در $\mathbb{R}^۲$، عبارتی است به شکل $\omega = f(x,y)\,dx\wedge dy$ که $f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر است. دامنهٔ $f(x,y)$ را دامنهٔ ω می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ ۲—فرمهای در $\mathbb{R}^۲$ را با نماد $\bigwedge^۲ \mathbb{R}^۲$ نشان می دهیم.

۵.۱۲.۵ تعریف. ضرب گوه‌ای ($\wedge$—ضرب) بین ۱—فرمها را به شکل

$$dy\wedge dy = dx \wedge dx = \circ \quad , \quad dx\wedge dy = -dy\wedge dx$$

تعریف نموده و به صورت خطی به کل ۱—فرمها تعمیم می‌دهیم. بنابراین، اگر $\theta = P\,dx + Q\,dy$ و همچنین $\eta = R\,dx + S\,dy$، آنگاه

$$\begin{aligned}\theta\wedge\eta &= \big(P\,dx + Q\,dy\big)\wedge\big(R\,dx + S\,dy\big)\\ &= (PS - QR)\,dx\wedge dy\end{aligned}$$

۶.۱۲.۵ مثال. با توجه به تعریف بالا، داریم

۱) $(x\,dx + y\,dy)\wedge\Big(x\sin y\,dx + \dfrac{y}{x}\,dy\Big) =$

$$= \Big(\frac{x^۲}{y} - xy\sin y\Big)dx\wedge dy$$

۲) $\big(a\,dx + b\,dy\big)\wedge\big(a\sin y\,dx - b\,dy\big) =$

$$= -ab(۱ + \sin y)\,dx\wedge dy$$

۷.۱۲.۵ قضیه. فرض کنید θ، η و α ۱—فرم و $z = f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر باشند، آنگاه

۱) $(f\theta)\wedge\eta = \theta\wedge(f\eta) = f\big(\theta\wedge\eta\big)$

۲) $\theta\wedge\eta = -\eta\wedge\theta$ ۳) $\theta\wedge\theta = \circ$

۴) $\theta\wedge(\eta+\alpha) = \theta\wedge\eta + \theta\wedge\alpha$

۸.۱۲.۵ تمرین.

۱) نشان دهید که

$$\big(P\,dx + Q\,dy\big)\wedge\big(R\,dx + S\,dy\big) = \begin{vmatrix} P & Q\\ R & S\end{vmatrix}\,dx\wedge dy$$

۲) فرض کنید که $\theta = \sin(xy)\,dx + \sqrt{x^۲+۱}\,dy$، $\eta = y/x\,dx + x/y\,dy$، $\alpha = x^۲\,dx - y\,dy$ و $f = \arcsin(x/y)$. روابط ۱، ۲، ۳ و ۴ از ۷.۱۲.۵ را تحقیق کنید.

۳) ثابت کنید $\theta = P\,dx + Q\,dy$ و $\eta = R\,dx + S\,dy$ وقتی و فقط وقتی در نقطهٔ $X_\circ$ مستقل خطی هستند که $\theta\wedge\eta$ در نقطهٔ $X_\circ$ مخالف صفر باشد.

۹.۱۲.۵ تعریف. اگر $\theta = P\,dx + Q\,dy$، در این صورت

$$d\theta := dP\wedge dx + dQ\wedge dy$$

را دیفرانسیل θ تعریف می‌کنیم، در واقع

$$\begin{aligned} d\theta &:= \Big(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\Big)\wedge dx\\ &\qquad + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\Big)\wedge dy\\ &= \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\wedge dy\end{aligned}$$

۱۰.۱۲.۵ مثال. با توجه به تعریف بالا، داریم

۱) $d\Big(x\,dx - \dfrac{x}{y}\,dy\Big) = -\dfrac{۱}{y}dx\wedge dy$

۲) $d\Big(\dfrac{۱}{x}\,dx - \dfrac{۱}{y^۲}\,dy\Big) = \circ$

۳) $d\big(\arctan(x+y)\,dx + \arcsin(x+y)\,dy\big)$

$$= \left(\frac{۱}{\sqrt{۱-(x+y)^۲}} - \frac{۱}{۱+(x+y)^۲}\right)\,dx\wedge dy$$

۱۱.۱۲.۵ قضیه. اگر θ و η ۱—فرم باشند و f تابعی مشتق‌پذیر، آنگاه

۱) $d(\theta+\eta)=d\theta+d\eta$ ۲) $d(f\theta)=df\wedge\theta+f\,d\theta$

۳) $d(df)=۰$ ۴) $d(d\theta)=۰$

۱۲.۱۲.۵ تمرین.

۱) فرض کنید $f=\tan(x+y)$، $\theta=x/y\,dx+xy\,dy$ و $\eta=xe^{y}\,dx+\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\,dy$. روابط ۱، ۲، ۳ و ۴ در ۱۱.۱۲.۵ را نشان دهید.

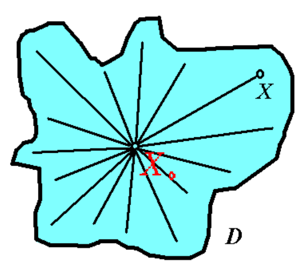
۲) فرض کنید $f=xe^{y}$، $\eta=dx+\arcsin(x/y)\,dy$ و $\theta=\cos x\,dx-x\sin y\,dy$، روابط ۱، ۲ و ۳ در ۱۱.۱۲.۵ را نشان دهید.

۱۳.۱۲.۵ تعریف. در صورتی می‌گوئیم ۱—فرم مفروض $\theta=P\,dx+Q\,dy$ **کامل** است که تابعی $z=f(x,y)$ وجود داشته باشد که $\theta=df$. در این صورت f را پتانسیل θ می‌نامیم. در صورتی ۱—فرم θ را دقیق گوئیم که $d\theta=۰$.

۱۴.۱۲.۵ تعریف. زیر مجموعهٔ $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ را در صورتی **ستاره شکل** گوئیم که نقطه‌ای $X_{۰}\in D$ با خاصیت زیر را بتوان یافت:

«به ازای هر نقطهٔ دلخواه $X\in D$، پاره‌خط $X_{۰}X$ تماماً در D قرار دارد.»

توجه شود که در تعریف بالا $X_{۰}$ وجودی است، ولی X دلخواه است (به شکل ۱۴.۵ توجه شود). با توجه به قسمت ۳ از قضیهٔ ۱۱.۱۲.۵، اگر θ کامل باشد، آنگاه دقیق است. اما، عکس این مطلب در حالت کلی غلط است. قضیهٔ زیر یک شرط کافی برای برقراری عکس این حکم را ارائه می‌دهد.



شکل ۱۴.۵: مجموعهٔ ستاره شکل

۱۵.۱۲.۵ قضیهٔ پوانکاره. اگر ۱—فرم θ بر مجموعهٔ ستاره شکل D دقیق باشد، آنگاه θ بر D کامل است.

۱۶.۱۲.۵ مثال. ۱) فرم $\theta=y\,dx+dy$ کامل نیست، با اینکه دامنهٔ آن $D=\mathbb{R}^{۲}$ ستاره شکل می‌باشد؛ زیرا $d\theta=-dx\wedge dy$ و لذا θ دقیق نیست.

مثال ۲) ۱—فرم $\theta=y^{۲}\,dx+(۲xy+۲y)\,dy$ بر $D=\mathbb{R}^{۲}$ دقیق است (یعنی، $d\theta=۰$) و لذا کامل می‌باشد. پس $z=f(x,y)$ ای هست که بر D داریم $\theta=df$. اما این بدان معنی است که $\partial f/\partial x=y^{۲}$ و $\partial f/\partial y=۲xy+۲y$. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int (y^{۲})\,dx = xy^{۲}+A(y)\\
f(x,y) &= \int (۲xy+۲y)\,dy = xy^{۲}+y^{۲}+B(x)
\end{aligned}
$$

که A و B توابع دلخواهند. با مقایسهٔ دو عبارت مساوی بالا برای f، نتیجه می‌گیریم که $A(y)=y^{۲}+C_{۱}$ و $B(x)=C_{۲}$، که $C_{۱}$ و $C_{۲}$ اعداد ثابت دلخواهند. بنابراین **پتانسیل** θ عبارت است از $f=xy^{۲}+y^{۲}+C$ که C عددی ثابت است.

مثال ۳) $\theta=\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$ بر $D=\mathbb{R}^{۲}-(۰,۰)$ کامل است، زیرا برابر دیفرانسیل تابع $f=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ می‌باشد. اما D ستاره شکل نیست، زیرا پاره خط $(۱,۰)(-۱,۰)$ تماماً در D قرار نمی‌گیرد. پس شرط ستاره بودن D در قضیهٔ پوانکاره لازم نیست و تنها یک شرط کافی است.

مثال ۴) ۱—فرم $\theta=(x^{۲}+۲xy-y^{۲})\,dx+(x^{۲}-۲xy-y^{۲})\,dy$ بر $D=\mathbb{R}^{۲}$ دقیق و بنابراین کامل است. برای یافتن پتانسیل θ، از ضریب dx نسبت به x و از ضریب dy نسبت به y انتگرال جزئی می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int (x^{۲}+۲xy-y^{۲})\,dx\\
&= \frac{x^{۳}}{۳}+x^{۲}y-xy^{۲}+A(y)\\
f(x,y) &= \int (x^{۲}-۲xy-y^{۲})\,dy\\
&= x^{۲}y-xy^{۲}-\frac{y^{۳}}{۳}+B(x)
\end{aligned}
$$

که A و B توابع دلخواهند. با مقایسهٔ دو عبارت مساوی بالا برای f، نتیجه می‌گیریم عددی ثابت مانند C وجود دارد که

$$f(x,y)=\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{y^{۳}}{۳}+x^{۲}y-xy^{۲}+C$$

۱۷.۱۲.۵ تمرین. مشخص کنید که کدام ۱—فرمهای زیر کاملند و در صورت کامل بودن، پتانسیل ۱—فرم داده شده را بیابید:

۱) $(x^{۲}-۲xy)\,dx+(y^{۲}-۲xy)\,dy$

۲) $\dfrac{y\,dx-x\,dy}{۳x^{۲}-۲xy+۳y^{۲}+۱}$

۳) $(x^{۲}\sin(xy))\,dx+(x+y+x^{۲}+y^{۲}+xy)\,dy$

۴) $\dfrac{(x^2+2xy+5y^2)\,dx+(x^2-2xy+y^2)\,dy}{(x+y)^3}$

۵) $e^x\big(e^y(x-y+2)+y\big)\,dx+e^x\big(e^y(x-y)+1\big)\,dy$

اکنون مرحلهٔ دوم را آغاز نموده و مباحث بالا را به $\mathbb{R}^3$ تعمیم می‌دهیم.

۱۸.۱۲.۵ تعریف. منظور از ۱—فرم در $\mathbb{R}^3$، عبارتی است به شکل $\theta = P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ که P، Q و R توابع سه متغیرهٔ مشتقپذیرند. دامنهٔ مشترک این توابع را دامنهٔ θ می‌نامیم.

منظور از ۲—فرم در $\mathbb{R}^3$، عبارتی است به شکل

$$\omega = P\,dx\wedge dy + Q\,dy\wedge dz + R\,dz\wedge dx$$

که P، Q و R توابعی سه متغیره و مشتق پذیرند. دامنهٔ مشترک این توابع را دامنهٔ ω می‌نامیم.

منظور از ۳—فرم در $\mathbb{R}^3$، عبارتی است به شکل

$$\Omega = f\,dx\wedge dy\wedge dz$$

که f تابعی سه متغیره و مشتق‌پذیر می‌باشد. دامنهٔ f را دامنهٔ Ω می‌نامیم.

مجموعهٔ همهٔ ۱—فرمها، ۲—فرمها و ۳—فرمهای در $\mathbb{R}^3$ را بترتیب با نماد $\bigwedge^1\mathbb{R}^3$، $\bigwedge^2\mathbb{R}^3$ و $\bigwedge^3\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهیم. ضرب گوه‌ای (یا، $\wedge$—ضرب) بین ۱—فرمهای اساسی dx، dy و dz را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0 \quad dx\wedge dy = -dy\wedge dx$$

$$dx\wedge dz = -dz\wedge dx \qquad dy\wedge dz = -dz\wedge dy$$

$$dx\wedge dy\wedge dz = dz\wedge dx\wedge dy = dy\wedge dz\wedge dx$$

$$= -dy\wedge dx\wedge dz = -dx\wedge dz\wedge dy = -dz\wedge dy\wedge dx$$

$$dx\wedge dx\wedge dy = dx\wedge dx\wedge dz = dy\wedge dy\wedge dz$$

$$= dz\wedge dz\wedge dx = dz\wedge dz\wedge dy = 0$$

$$dx\wedge dx\wedge dx = dy\wedge dy\wedge dy = dz\wedge dz\wedge dz\wedge = 0$$

۱۹.۱۲.۵ مثال. با توجه به تعریف بالا، داریم

$$\begin{aligned}(y\,dx+z\,dy+x^2\,dz)\wedge(z\,dx+y\,dy+z\,dz) &=\\ &= (y^2-z^2)\,dx\wedge dy + (z^2-x^2y)\,dy\wedge dz\\ &\quad +(x^2z-yz)\,dz\wedge dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(y\,dx+z\,dy+x^2\,dz)\wedge\big(x\,dx\wedge dy - y\,dy\wedge dz\\ +z\,dz\wedge dx\big)\\ = (x^3-y^2+z^2)\,dx\wedge dy\wedge dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(dx+dy-dz)\wedge(dx-dy+dz)\wedge(-dx+dy+dz)\\ = -4\,dx\wedge dy\wedge dz\end{aligned}$$

۲۰.۱۲.۵ تمرین. فرض کنید

$$\theta = x\,dx - y\,dy + z^2\,dz \qquad \alpha = dx+dy+dz$$

$$\eta = x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$$

$$\omega = y\,dx\wedge dy + x\,dy\wedge dz + y^2\,dz\wedge dx$$

در این صورت هر یک از عبارتهای $\theta\wedge\eta$، $\theta\wedge\omega$، $\theta\wedge\alpha$، $\eta\wedge\omega$، $\theta\wedge\eta\wedge\alpha$ و $\alpha\wedge\omega$ را محاسبه کنید.

۲۱.۱۲.۵ تعریف. اگر $\theta = P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ و $\omega = P\,dx\wedge dy+Q\,dy\wedge dz+R\,dz\wedge dx$، دیفرانسیل θ و ω را بترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}d\theta &= dP\wedge dx + dQ\wedge dy + dR\wedge dz\\ &= (Q_x-P_y)\,dx\wedge dy + (R_y-Q_z)\,dy\wedge dz\\ &\quad +(R_x-P_z)\,dz\wedge dx\\ d\omega &= dP\wedge dx\wedge dy + dQ\wedge dy\wedge dz + dR\wedge dz\wedge dx\\ &= (P_z+Q_x+R_y)\,dx\wedge dy\wedge dz\end{aligned}$$

۱—فرمی دقیق و کامل همانند در ۱۳.۱۲.۵ تعریف می‌شود. ۲—فرم ω را در صورتی **کامل** گوئیم که ۱—فرم θ چنان یافت گردد که $\omega = d\theta$. ۲—فرم ω را در صورتی **دقیق** گوئیم که دیفرانسیل آن صفر باشد.

نظر به قسمتهای ۴ و ۵ از قضیهٔ ۲۲.۱۲.۵، اگر یک ۱—فرم و یا ۲—فرم کامل باشد، آنگاه دقیق است. عکس این حکم در حالت کلی غلط است. قضیهٔ زیر یک شرط کافی برای برقراری عکس این حکم را ارائه می‌دهد.

۲۲.۱۲.۵ قضیه. اگر θ_1 و θ_2 دو ۱—فرم و ω یک ۲—فرم و f تابعی مشتق‌پذیر باشند، آنگاه

۱) $d(f\theta_1) = df\wedge\theta_1 + f\,d\theta_1$ ۴) $d(df) = 0$

۲) $d(f\omega) = df\wedge\omega + f dw$ ۵) $d(d\theta_1) = 0$

۳) $d(\theta_1\wedge\theta_2) = d\theta_1\wedge\theta_2 - \theta_1\wedge d\theta_2$ ٦) $d(d\omega) = 0$

۲۳.۱۲.۵ قضیهٔ پوانکاره. اگر ۱—فرم θ بر مجموعهٔ ستاره شکل D دقیق باشد، کامل است. اگر ۲—فرم ω بر مجموعهٔ ستاره شکل D دقیق باشد، کامل است.

۲۴.۱۲.۵ مثال. ۱) ۱–فرم $\theta = z\,dx + ۲y\,dy + x\,dz$ دقیق و لذا کامل است. برای یافتن پتانسیل θ (یعنی f ای که $df = \theta$) به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f &= \int P\,dx = \int z\,dx = xz + A(y,z) \\ f &= \int Q\,dy = \int ۲y\,dy = y^۲ + B(x,z) \\ f &= \int R\,dz = \int x\,dz = xz + C(x,y) \end{aligned}$$

درنتیجه $f = xz + y^۲ + D$، که A، B و C توابع دو متغیرهٔ دلخواه و D عددی دلخواه می‌باشد.

مثال ۲) ۱–فرم $\theta = y\,dx + y\,dy + z\,dz$ کامل نیست، زیرا دقیق نیست $d\theta = -dx \wedge dy$.

مثال ۳) ۱–فرم

$$\theta = \big(y \sin z\big)\,dx + \big(x \sin z\big)\,dy + \big(xy \cos z\big)\,dz$$

دقیق و لذا کامل است. بعلاوه، پتانسیل θ عبارت است از

$$\begin{aligned} f &= \int P\,dx = \int y \sin z\,dx = xy \sin z + A(y,z) \\ f &= \int Q\,dy = \int x \sin z\,dy = xy \sin z + B(x,z) \\ f &= \int R\,dz = \int xy \cos z\,dz = xy \sin z + C(x,y) \end{aligned}$$

درنتیجه $f = xy \sin z + D$، که D عددی ثابت است. **مثال ۴)** ۲–فرم $\omega = y^۲\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz - y\,dz \wedge dx$ دقیق است و لذا کامل می‌باشد. بنابراین، ۱–فرمی $\theta = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ای وجود دارد که $d\theta = \omega$. اما این شرط یعنی

$$Q_x - P_y = y^۲, \quad R_y - Q_z = x, \quad P_z - R_x = -y.$$

که یک دستگاه معادلات با مشتقات جزئی است و حل آنها در حد این کتاب نیست. معمولاً روشهای ابتکاری می‌تواند مفید باشد. مثلاً، فرض $Q \cong ۰$ مشکلی ایجاد نمی‌کند. پس بایستی $P_y = -y^۳$ و شاید $P = -y^۳/۳$. بنابراین، باید $R_y = x$ و $R_x = y$، یعنی، می‌تواند $R = xy$ باشد. بنابراین،

$$\theta = -\frac{y^۳}{۳}\,dx + xy\,dz$$

یک جواب مسأله است. جواب کلی عبارت است از

$$\theta = \left(-\frac{y^۳}{۳} + A(x)\right)\,dx + B(y)\,dy + \big(xy + C(z)\big)\,dz$$

که A، B و C توابع دلخواهند.

مثال ۵) ۲–فرم $\omega = y^۲\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx$ کامل نیست، زیرا: $d\omega = ۲\,dx \wedge dy \wedge dz \neq ۰$. و بنابراین دقیق نیست.

۲۵.۱۲.۵ تمرین. ضمن تحقیق کامل بودن ۱–فرم داده شده، پتانسیل ۱–فرمهای کامل را بیابید:

۱) $\theta = yz\,dx + (xz + ۱)\,dy + (xy + ۲z)\,dz$

۲) $\theta = xyz\,dx - x\,dy + dz$ ۳) $\theta = \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}$

۴) $\theta = (x^۲ - ۲yz)dx + (y^۲ - ۲xz)dx + (z^۲ - ۲xy)dz$

۵) $\theta = \left(۱ - \dfrac{۱}{y} + \dfrac{y}{z}\right)\,dx + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^۲}\right)\,dy - \dfrac{xy}{z^۲}\,dz$

تحقیق کنید که کدام ۲–فرم داده شده کامل است:

٦) $\omega = x^۲\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz + z\,dz \wedge dx$

۷) $\omega = \sin(xy)\,dx \wedge dy + x^۲\,dy \wedge dz - ۲xy\,dz \wedge dx$

۸) $\omega = z\,dx \wedge dy + \arcsin(x+y)\,dy \wedge dz + \dfrac{z}{x}\,dz \wedge dx$

۹) $\omega = \dfrac{۱}{x}\,dx \wedge dy - \left(\dfrac{x}{z^۲} + x\right)\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx$

۱۰) $\omega = \sin(xz)\,dx \wedge dy + \sin(zy)\,dy \wedge dz + \sin(xy)\,dz \wedge dx$

۱۱) نشان دهید ۱–فرم $\theta = P\,dx + Q\,dy$ که بر مجموعهٔ ستاره شکل $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ تعریف می‌گردد، در صورتی کامل است که $P_y = Q_x$.

۱۲) نشان دهید ۱–فرم $\theta = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ که بر مجموعهٔ ستاره شکل $D \subseteq \mathbb{R}^۳$ تعریف می‌گردد، در صورتی کامل است که $P_y = Q_x$، $P_z = R_x$ و $Q_z = R_y$. یا به بیان معادل

$$\mathrm{Curl}\overrightarrow{(P,Q,R)} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

۱۳) نشان دهید ۲–فرم $\omega = P\,dx \wedge dy + Q\,dy \wedge dz + R\,dz \wedge dx$ که بر مجموعهٔ ستاره شکل $D \subseteq \mathbb{R}^۳$ تعریف می‌شود، در صورتی کامل است که $P_z + Q_x + R_y = ۰$. یا به بیان معادل

$$\mathrm{div}\overrightarrow{(P,Q,R)} := \overrightarrow{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)} \bullet \overrightarrow{(P,Q,R)} = ۰$$

۲٦.۱۲.۵ قضیهٔ تغییر متغیر.

الف) اگر $x = f(u,v)$ و $y = g(u,v)$، آنگاه

۱) $dx = f_u\,du + f_v\,dv$ ۲) $dy = g_u\,du + g_v\,dv$

۳) $dx \wedge dy = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du \wedge dv$

ب) اگر $x = f(u,v,w)$، $y = g(u,v,w)$ و $z = h(u,v,w)$، آنگاه

۱) $dx = f_u\,du + f_v\,dv + f_w\,dw$

۲) $dy = g_u\,du + g_v\,dv + g_w\,dw$

۳) $dz = h_u\,du + h_v\,dv + h_w\,dw$

۴) $$dx \wedge dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du \wedge dv + \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)}\,dv \wedge dw + \frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)}\,dw \wedge du$$

۵) $$dy \wedge dz = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du \wedge dv + \frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}\,dv \wedge dw + \frac{\partial(y,z)}{\partial(w,u)}\,dw \wedge du$$

۶) $$dz \wedge dx = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,du \wedge dv + \frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)}\,dv \wedge dw + \frac{\partial(z,x)}{\partial(w,u)}\,dw \wedge du$$

۷) $$dx \wedge dy \wedge dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,du \wedge dv \wedge dw$$

۲۷.۱۲.۵ مثال.

۱) فرض کنید که $x = uv$ و $y = u^۲ + v^۳$، در این صورت، داریم $dx = vdu + udv$، و در نتیجه $dy = ۲udu + ۳v^۲dv$

$$dx \wedge dy = \begin{vmatrix} v & u \\ ۲u & ۳v^۲ \end{vmatrix} du \wedge dv = \left(۳v^۳ - ۲u^۲\right) du \wedge dv$$

مثال ۲) فرض کنید $x = u + v + w$، $y = uv + vw$ و $z = u^۲ + v^۲ + w^۲$، در این صورت، در مورد ۱ــفرمها داریم:

$$\begin{aligned} dx &= du + dv + dw \\ dy &= vdu + (u+w)\,dv + vdw \\ dz &= ۲udu + ۲vdv + ۲wdw \end{aligned}$$

در مورد ۲ــفرمها داریم:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ v & u+w \end{vmatrix} du \wedge dv \\ &\quad + \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ u+w & v \end{vmatrix} dv \wedge dw + \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ v & v \end{vmatrix} dw \wedge du \\ &= (u - v + w)\,du \wedge dv + (-u + v - w)\,dv \wedge dw \\ dy \wedge dz &= \begin{vmatrix} v & u+w \\ ۲u & ۲v \end{vmatrix} du \wedge dv \\ &\quad + \begin{vmatrix} u+w & v \\ ۲v & ۲w \end{vmatrix} dv \wedge dw + \begin{vmatrix} v & v \\ ۲w & ۲u \end{vmatrix} dw \wedge du \\ &= ۲\left(-u^۲ + v^۲ - uw\right) du \wedge dv \\ &\quad + ۲(uw - v^۲ + w^۲) dv \wedge dw + ۲(uv - w^۲) dw \wedge du \\ dz \wedge dx &= \begin{vmatrix} ۲u & ۲v \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} du \wedge dv + \begin{vmatrix} ۲v & ۲w \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} dv \wedge dw \\ &\quad + \begin{vmatrix} ۲w & ۲u \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} dw \wedge du \\ &= ۲\,(u - v)\,du \wedge dv + ۲\,(v - w)\,dv \wedge dw \\ &\quad + ۲\,(w - u)\,dw \wedge du \end{aligned}$$

در مورد ۳ــفرمها داریم:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dz &= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ v & u+w & v \\ ۲u & ۲v & ۲w \end{vmatrix} du \wedge dv \wedge dw \\ &= ۲\,(u - v + w)\,(w - u)\,du \wedge dv \wedge dw \end{aligned}$$

مثال ۳) در صورتی که $u = \ln x - \ln y$ و $v = x^۲ + y^۲ - xy$، $dx \wedge dy$ را بر حسب $du \wedge dv$ بدست آورید.

حل. با توجه به قضایای ۲۶.۱۲.۵ و ۷.۴.۵، داریم

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \frac{du \wedge dv}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \\ &= \frac{du \wedge dv}{\begin{vmatrix} ۱/x & ۱/y \\ ۲x - y & ۲y - x \end{vmatrix}} = \frac{xy}{۲\,(x+y)} du \wedge dv \end{aligned}$$

مثال ۴) در صورتی که $u = x + y + z$، $v = x^۲ + y^۲ + z^۲$ و $w = x^۳ + y^۳ + z^۳$، $dx \wedge dy \wedge dz$ را بر حسب $du \wedge dv \wedge dw$ محاسبه کنید.

حل. با استدلال شبیه قسمت (۳) داریم

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dz &= du \wedge dv \wedge dw \div \frac{\partial\,(u,v,w)}{\partial\,(x,y,z)} \\ &= du \wedge dv \wedge dw \div \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲u & ۲v & ۲w \\ ۳u^۲ & ۳v^۲ & ۳w^۲ \end{vmatrix} \\ &= \frac{du \wedge dv \wedge dw}{(v-u)\,(w-u)\,(w-v)} \end{aligned}$$

۲۸.۱۲.۵ تمرین.

۱) فرض کنید $x = u^۲ - v^۲$ و $y = u^۲v^۳$، مطلوبست محاسبهٔ dx، dy و $dx \wedge dy$.

۲) فرض کنید $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، مطلوبست محاسبهٔ dx، dy و $dx \wedge dy$.

۳) فرض کنید $x = uv$، $y = u^۲ + v^۲$ و $z = u^۳ - v^۳$، مطلوبست dx، dy، dz، $dx \wedge dy$، $dy \wedge dz$، $dz \wedge dx$ و $dx \wedge dy \wedge dz$.

۴) فرض کنید $x = ue^v$، $y = ve^u$ و $z = uv$، مطلوبست محاسبهٔ dx، dy، dz، $dx \wedge dy$، $dy \wedge dz$، $dz \wedge dx$ و $dx \wedge dy \wedge dz$.

۵) در صورتی که $u = x^۲ - y^۲$ و $v = \sin x/y$، $dx \wedge dy$ را بر حسب $du \wedge dv$ محاسبه کنید.

٦) فرض کنید $x = v\cosh u$، $y = v\sinh u$ و $z = v^2$، مطلوبست محاسبهٔ $dx \wedge dy$، $dy \wedge dz$ و $dz \wedge dx$.

۷) $x = uv^2$، $y = vu^2$ و $z = x^2 + y^2$، عبارتهای $dx \wedge dy$، $dy \wedge dz$ و $dz \wedge dx$ را بدست آورید.

۸) $d\rho \wedge d\varphi \wedge d\theta$ را بر حسب $dx \wedge dy \wedge dz$ در حالی بیابید که $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$، $y = \rho\cos\varphi\sin\theta$ و $z = \rho\sin\varphi$.

۹) $da \wedge db \wedge dc$ را بر حسب $dx \wedge dy \wedge dz$ در حالی بیابید که $u = a + b + c$، $v = a^2 + b^2 + c^2$، $w = a^3 + b^3 + c^3$، و بعلاوه $u = x + y + z$، $v = x^2 + y^2 + z^2$ و $w = x^3 + y^3 + z^3$.

۱۳.۵ استقلال متغیرها

قبلاً بسیار شنیده‌اید که «x و y متغیرهای مستقل هستند». این جمله دقیقاً به چه معنی است؟ برای پاسخ به این پرسش به تعریف زیر نیاز است.

۱.۱۳.۵ تعریف. فرض کنید f_1، f_2، ... و f_k توابعی بر مجموعهٔ D باشند. در صورتی می‌گوئیم این توابع **وابستهٔ تابعی** هستند که تابع k متغیره‌ای چون G یافت گردد که به ازای هر $X \in D$ ای $G(f_1(X), f_2(X), \cdots, f_k(X)) = 0$. توابعی که وابستهٔ تابعی نباشند، **مستقل تابعی** نامیده می‌شوند.

۲.۱۳.۵ مثال. ۱) فرض کنید $D = \mathbb{R}$، $f_1 = \sin x$ و $f_2 = \cos x$. در این صورت، f_1 و f_2 بر D وابستهٔ تابعی هستند. زیرا، اگر فرض شود $G(u,v) = u^2 + v^2 - 1$، در این صورت $G(f_1, f_2)$ بر D صفر است.

مثال ۲) فرض کنید که $f_1 = x + y$، $f_2 = x - y$، $f_3 = (x^2+y^2)/(x^2-y^2)$ و

$$D = \{(x,y) \,|\, x \neq y \,,\, x \neq -y\}$$

در این صورت، توابع f_1، f_2 و f_3 بر D وابستهٔ تابعی هستند. زیرا، اگر فرض شود $G(u,v,w) = (u^2+v^2)/(2uv) - w$، در این صورت، $G(f_1, f_2, f_3)$ بر D صفر است.

۳.۱۳.۵ قضیه. فرض کنید f_1، f_2، ... و f_k توابعی دیفرانسیلپذیر بر مجموعهٔ D باشند. در این صورتی، شرط لازم و کافی برای اینکه این توابع بر D وابستهٔ تابعی باشند این است که به ازای هر $X \in D$ ای $df_1\big|_X \wedge df_2\big|_X \wedge \cdots \wedge df_k\big|_X = 0$.

۴.۱۳.۵ مثال. ۱) توابع $f_1 = \tan x$ و $f_2 = \cos x$ بر $D = (0, \pi/2)$ وابستهٔ تابعی هستند، زیرا

$$df_1 \wedge df_2 = \frac{dx}{\cos^2 x} \wedge (-\sin x\, dx) = 0$$

مثال ۲) توابع $f_1 = x^2 - y^2$ و $f_2 = x^2 + y^2$ بر $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) | xy = 0\}$ مستقل تابعی هستند، زیرا

$$\begin{aligned} df_1 \wedge df_2 &= (2x\,dx - 2y\,dy) \wedge (2x\,dx + 2y\,dy) \\ &= 8xy\,dx \wedge dy \neq 0 \end{aligned}$$

مثال ۳) توابع $f_1 = x+y+z$، $f_2 = xy+xz+yz$ و $f_3 = xyz$ بر $D = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) | x = y \text{ یا } x = z \text{ یا } y = z\}$ مستقل تابعی هستند، زیرا

$$\begin{aligned} df_1 \wedge df_2 \wedge df_3 &= (dx + dy + dz) \\ &\quad \wedge ((y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz) \\ &\quad \wedge (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (x-y)(y-z)(z-x)\,dx \wedge dy \wedge dz \neq 0 \end{aligned}$$

۵.۱۳.۵ تمرین. در هر مورد تحقیق کنید که توابع داده شده بر کدام مجموعه مستقل تابعی هستند:

۱) $f_1 = x + y, \quad f_2 = x - y$

۲) $f_1 = xy, \quad f_2 = x/y, \quad f_3 = x^2 - y^2$

۳) $f_1 = x + y + z, \quad f_2 = x^3 + y^3 + z^3$

۴) $f_1 = xy^2z^3, \quad f_2 = yz^2x^3, \quad f_3 = zx^2y^3$

۵) $f_1 = x + y + z + u, \quad f_2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2, \quad f_3 = x^3 + y^3 + z^3 + u^3$

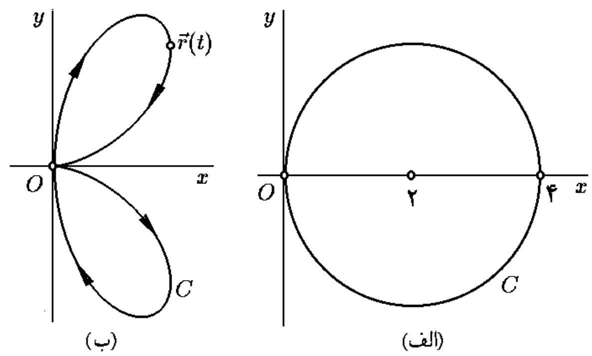
٦) $f_1 = x + y^2 + z^3 + u^4, \quad f_2 = y + z^2 + u^3 + x^4, \quad f_3 = z + u^2 + x^3 + y^4$

۱۴.۵ کاربرد در هندسه

اشیاء هندسی را به کمک معادلات جبری می‌توان تعریف نمود، مثلاً دایره شکلی است در صفحه به معادلهٔ $x^2+y^2 = 1$ و سهمی گون هذلولوی، شکلی به معادلهٔ $z = x^2 - y^2$ در فضا است. موضوع این بخش مطالعهٔ این گونه اشیاء می‌باشد.

۱.۱۴.۵ تعریف. فرض کنید $z = f(x,y)$ تابعی مشتق پذیر است و $C : f(x,y) = c$. در صورتی C را **منحنی جبری** گوئیم که به ازای هر $X \in C$ ای $f'(X) \neq \mathbf{0}$. در صورتی S را **منحنی جبری تکه‌ای** گوئیم که C صرف نظر از تعدادی متناهی نقطه، منحنی جبری باشد. منحنی (تکه‌ای) C را در صورتی **کراندار** گوئیم که به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ کراندار باشد.

۲.۱۴.۵ مثال. ۱) دایرهٔ $C : x^۲ + y^۲ = ۴x$ یک منحنی است، زیرا در این حالت $f(x,y) = x^۲+y^۲-۴x$ و لذا $f'(x,y) = \overrightarrow{(۲x-۴, ۲y)}$. شرط $f'(x,y) = \overrightarrow{(۰,۰)}$ به معنی $y = ۰$ و $x = ۲$ است و بعلاوه $(۲,۰)$ به C تعلق ندارد. C یک منحنی جبری کراندار است. به شکل ۱۵.۵—الف توجه شود.



شکل ۱۵.۵: الف) $x^۲ + y^۲ = ۴x$
ب) $(x^۲+y^۲)^۲ = xy^۲$

مثال ۲) خط $C : ۲x + ۳y = ۵$ یک منحنی جبری است، زیرا در این حالت $f(x,y) = ۲x + ۳y$ و در نتیجه مشتق آن $f'(x,y) = \overrightarrow{(۲,۳)}$ مخالف صفر است، و C کراندار نیست.

مثال ۳) مجموعهٔ $C : \left(x^۲+y^۲\right)^۲ = xy^۲$ را در نظر بگیرید. در این حالت $f(x,y) = \left(x^۲+y^۲\right)^۲ - xy^۲$ و

$$f'(x,y) = \overrightarrow{\left(۲x^۳ + ۲xy^۲ - y^۲, ۲y\left(x^۲+y^۲-xy\right)\right)}$$

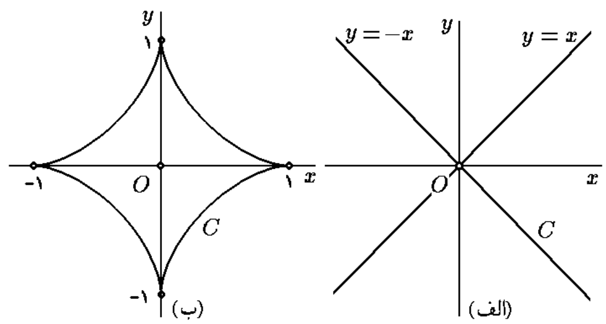
پس شرط $X \in C$ و $f'(X) = \mathbf{0}$ به معنی $(x^۲+y^۲)^۲ = xy^۲$، $۲y(x^۲+y^۲-xy) = ۰$ و $۲x^۳ + ۲xy^۲ - y^۲ = ۰$ است. اگر $y = ۰$، آنگاه از معادلهٔ اول نتیجه می‌گردد که $x = ۰$ و $(۰,۰) \in C$. اما، اگر $y \neq ۰$، از معادلهٔ دوم نتیجه می‌گردد که $x^۲ + y^۲ = xy$. اگر در معادلهٔ اول بجای $x^۲+y^۲$ قرار دهیم، بدست می‌آوریم $xy = xy^۲$ و لذا $x = xy$. پس یا $x = ۰$ و بنابراین $y = ۰$، یا اینکه $x \neq ۰$ و بنابراین $y = ۱$. در این حالت با فرض $y = ۱$ در معادلهٔ اول نتیجه می‌گیریم $x^۴ = x$ و یا $x = ۱$. اما $x = y = ۱$ در معادلهٔ سوم صدق نمی‌کند.

پس شرط $f'(X) \neq \mathbf{0}$ تنها در $O = (۰,۰) \in C$ برقرار نیست. بنابراین C یک منحنی جبری تکه‌ای است. برای ترسیم C از مختصات قطبی (به ۷.۴.۶ مراجعه شود) می‌توان کمک گرفت $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. با قرار دادن این عبارت در C، نتیجه می‌شود که $r = \sin\theta\cos^۲\theta$ و $\sin\theta \geq ۰$. بنابراین:

$$C : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(\sin\theta\cos^۳\theta, \sin^۲\theta\cos^۲\theta\right)}\ ;\ ۰ \leq \theta \leq \pi$$

به شکل ۱۵.۵—ب توجه شود. C منحنی تکه‌ای کراندار است.

مثال ۴) $C : x^۲ = y^۲$ یک منحنی تکه‌ای بی‌کران است، زیرا $f(x,y) = x^۲ - y^۲$، $f'(x,y) = \overrightarrow{(۲x, -۲y)}$ و f' تنها در $(۰,۰) \in C$ صفر می‌شود. بعلاوه، C اجتماع دو خط $y = x$ و $y = -x$ می‌باشد (شکل ۱۶.۵—الف).

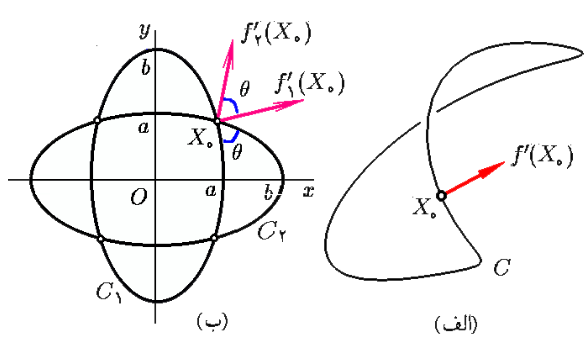


شکل ۱۶.۵: الف) یک منحنی جبری
ب) یک منحنی جبری تکه‌ای

مثال ۵) آستروئید $C : x^{۲/۳} + y^{۲/۳} = ۱$ یک منحنی تکه‌ای و کراندار است. زیرا، در این حالت $f(x,y) = x^{۲/۳} + y^{۲/۳}$ و $f'(x,y) = \overrightarrow{\left((۲/۳)x^{-۱/۳}, (۲/۳)y^{-۱/۳}\right)}$، مشروط به آنکه $x \neq ۰$ و $y \neq ۰$. پس چهار نقطهٔ $(\pm۱,۰)$ و $(۰,\pm۱)$ از C در شرط $f'(X) \neq \mathbf{0}$ صدق نمی‌کنند (شکل ۱۶.۵—ب). این منحنی را با بردن به مختصات قطبی، به شکل

$$C : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(\cos^۳ t, \sin^۳ t\right)}\ ;\ ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

می‌توان پارامتره نمود.



شکل ۱۷.۵: الف) عمود بر یک منحنی جبری
ب) زاویهٔ بین دو منحنی جبری

۳.۱۴.۵ قضیه. فرض کنید $C : f(x,y) = a$ یک منحنی تکه‌ای است. در این صورت، به ازای هر $X \in C$ ای که

$f'(X)\neq \mathbf{0}$، بردار $f'(X)$ در نقطهٔ X به C عمود است (شکل ۱۷.۵—الف). بعلاوه، انحناء C در نقطهٔ $X=(x,y)$ برابر

$$\kappa=\frac{f_{xx}f_y^{۲}+f_{yy}f_x^{۲}-۲f_xf_yf_{xy}}{\left(f_x^{۲}+f_y^{۲}\right)^{۳/۲}}$$

است. توجه شود که برای تعریف انحناء، شرط $f'(X)\neq\mathbf{0}$ الزامی است! طول قوس C از نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ تا $(x_۲,y_۲)$ برابر

$$\int_{y_۱}^{y_۲}\sqrt{(f_x)^{۲}+(f_y)^{۲}}\,\frac{dy}{|f_x|}\quad \text{یا}\quad \int_{x_۱}^{x_۲}\sqrt{(f_x)^{۲}+(f_y)^{۲}}\,\frac{dx}{|f_y|}$$

است، بسته به اینکه x را بر حسب y حل کنیم، یا y را بر حسب x.

۴.۱۴.۵ مثال. ۱) خط مماس بر منحنی

$$x^{۲}+y^{۳}+xy=۱۱x$$

در نقطهٔ $X_۰=(۱,۲)$ را مشخص کنید.

حل. در اینجا $f(x,y)=x^{۲}+y^{۳}+xy-۱۱x$ و $f'=\overrightarrow{\left(۲x+y-۱۱,۳y^{۲}\right)}$. پس $f'(۱,۲)=\overrightarrow{(-۷,۱۲)}$ در نقطهٔ $X_۰=(۱,۲)$ بر منحنی داده شده عمود است. بنابراین، بردار $\mathbf{v}=\overrightarrow{(۱۲,۷)}$ مماس است و معادلهٔ مماس خواسته شده عبارت است از $۱۲(x-۱)+۷(y-۲)=۰$ یا

$$\ell\ :\ ۱۲x+۷y=۲۵$$

مثال ۲) انحناء آستروئید قسمت (۵) از ۳.۱۴.۵ را در نقطهٔ $X_۰=\left(\sqrt{۲}/۴,\sqrt{۲}/۴\right)$ محاسبه کنید.

حل. با توجه به ۳.۱۴.۵، $\kappa(X_۰)$ برابر است با

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{-۲}{۹}x^{-۴/۳}\right)\left(\frac{۲}{۳}y^{-۱/۳}\right)^{۲}+\left(\frac{-۲}{۹}y^{-۴/۳}\right)\left(\frac{۲}{۳}x^{-۱/۳}\right)^{۲}\right.\\&\left.-۲\left(\frac{۲}{۳}x^{-۱/۳}\right)\left(\frac{۲}{۳}y^{-۱/۳}\right)\times ۰\right)\\&\div\left(\left(\frac{۲}{۳}x^{-۱/۳}\right)^{۲}+\left(\frac{۲}{۳}y^{-۱/۳}\right)^{۲}\right)^{۳/۲}\Big|_{X_۰}\end{aligned}$$

یعنی، برابر $-۱/۳$ است.

مثال ۳) طول قوس دایرهٔ ۳.۱۴.۵ (۱) از نقطهٔ $(۰,۰)$ تا $(۲,۲)$ و بر کمان کوچکتر را محاسبه کنید.

حل. چون $y^{۲}=۴x-x^{۲}$، داریم:

$$\begin{aligned}\ell&=\int_{۰}^{۲}\sqrt{(۲x-۴)^{۲}+(۲y)^{۲}}\,\frac{dx}{|۲y|}\\&=\int_{۰}^{۲}\sqrt{(x-۲)^{۲}+(۴x-x)}\frac{dx}{\sqrt{۴x-x^{۲}}}\\&=\int_{۰}^{۲}\frac{۲dx}{\sqrt{۴x-x^{۲}}}=۲\arcsin\left(\frac{x-۲}{۲}\right)\Big|_{۰}^{۲}=\pi\end{aligned}$$

مثال ۴) زاویهٔ برخورد دو بیضی $C_۱\ :\ \dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ و $C_۲\ :\ \dfrac{x^{۲}}{b^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{a^{۲}}=۱$ را که $a<b$، محاسبه کنید. به شکل ۱۷.۵—ب توجه شود.

حل. فرض کنید $f_۱(x,y)=\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}$ و $f_۲(x,y)=\dfrac{x^{۲}}{b^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{a^{۲}}$. در این صورت:

$$\begin{aligned}C_۱\cap C_۲\ &:\ f_۱(x,y)=f_۲(x,y)=۱\\&:\ \left(\frac{۱}{a^{۲}}-\frac{۱}{b^{۲}}\right)\left(x^{۲}-y^{۲}\right)=۰\end{aligned}$$

پس $x=\pm y$. با قرار دادن این مقادیر در معادلهٔ $f_۱(x,y)=۰$، نتیجه می‌گیریم $y=\pm x=\sqrt{۱/a^{۲}+۱/b^{۲}}=\alpha$ که دارای چهار جواب (α,α)، $(-\alpha,\alpha)$، $(\alpha,-\alpha)$ و $(-\alpha,-\alpha)$ می‌باشد. به دلیل تقارن، کافی است نقطهٔ $X_۰=(\alpha,\alpha)$ را بررسی کنیم. همان طوری که از شکل ۱۷.۵—ب نیز روشن است، زاویهٔ θ بین $C_۱$ و $C_۲$ در $X_۰$ با زاویهٔ بین $f'_۱(X_۰)$ و $f'_۲(X_۰)$ برابر می‌باشد، یعنی:

$$\begin{aligned}\theta&=\angle\Big(f'_۱(X_۰),f'_۲(X_۰)\Big)\\&=\angle\left(\overrightarrow{\left(\frac{۲x}{a^{۲}},\frac{۲y}{b^{۲}}\right)}\Big|_{X_۰},\overrightarrow{\left(\frac{۲x}{b^{۲}},\frac{۲y}{a^{۲}}\right)}\Big|_{X_۰}\right)\\&=\angle\left(۲\alpha\overrightarrow{\left(\frac{۱}{a^{۲}},\frac{۱}{b^{۲}}\right)},۲\alpha\overrightarrow{\left(\frac{۱}{b^{۲}},\frac{۱}{a^{۲}}\right)}\right)\\&=\cos^{-۱}\left(\frac{۲/a^{۲}b^{۲}}{۱/a^{۴}+۱/b^{۴}}\right)=\cos^{-۱}\left(\frac{۲a^{۲}b^{۲}}{a^{۴}+b^{۴}}\right)\end{aligned}$$

۵.۱۴.۵ تمرین.

۱) انحناء $C\ :\ x^{۳}+xy+y^{۳}=۵$ را در نقطهٔ $(-۱,۲)$ بیابید.

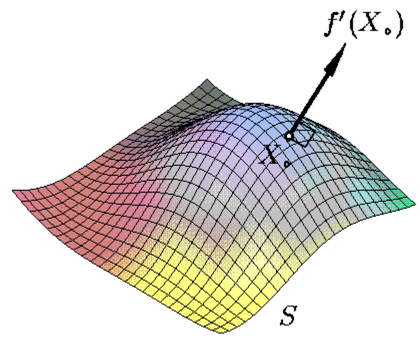
۲) فرض کنید $C\ :\ y^{۲}=x^{۲}+۹$. نشان دهید که C یک منحنی بی‌کران و دو تکه است. سپس مماس بر C در نقطهٔ $X_۰=(-۴,۵)$ را بیابید.

۳) فرض کنید $C\ :\ x^{۲}+y^{۲}+۲x=۸$. نشان دهید که C یک منحنی کراندار است. طول قوس C از $(-۳,-۱)$ تا $(-۱,۳)$ را محاسبه کنید.

۴) زاویه برخورد دایرهٔ $C_۱\ :\ x^{۲}+y^{۲}=۶$ و خط به معادلهٔ $C_۲\ :\ ۳y=x^{۲}$ را محاسبه کنید.

۶.۱۴.۵ تعریف. فرض کنید $u=f(x,y,z)$ تابعی مشتق پذیر است و همچنین $S\ :\ f(x,y,z)=a$. در صورتی S را **رویهٔ جبری** گوئیم که به ازای هر $X\in S$ ای $f'(X)\neq\mathbf{0}$. در صورتی S را **رویهٔ جبری تکه‌ای** گوئیم که S صرف نظر از تعدادی متناهی نقطه و یا منحنی، رویه باشد. یعنی، شرط وجود مشتق $u=f(X)$ و مخالف صفر بودن آن در همهٔ نقاط S برقرار

باشد، بجز احتمالاً تعدادی متناهی نقطه و یا منحنی واقع بر S. رویهٔ (تکه‌ای) S را در صورتی **کراندار** گوئیم که به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{۳}$ کراندار باشد.



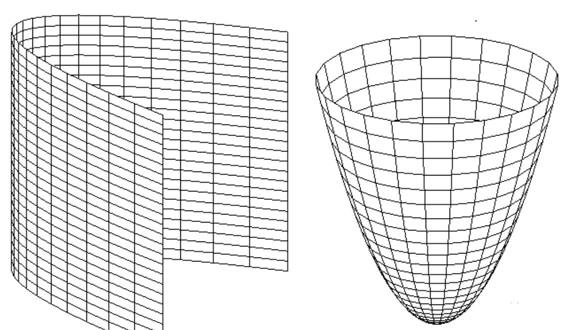
شکل ۱۸.۵: نرمال بر یک رویهٔ جبری

۷.۱۴.۵ قضیه. اگر $X_{۰} \in S$ و $f'(X_{۰}) \neq \mathbf{0}$، آنگاه $f'(X_{۰})$ در نقطهٔ $X_{۰}$ به S عمود است (شکل ۱۸.۵).

این قضیه در ۱۲.۱.۹ اثبات گردیده است. در اینجا امکان اثبات آن وجود ندارد.

۸.۱۴.۵ تعریف. منظور از **پارامتره کردن** رویهٔ جبری مفروض $S : f(x,y,z) = a$، یافتن تابعی یکبیک، پیوسته و مشتق‌پذیر چون $\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{(x,y,z)}$ از $D \subseteq \mathbb{R}^{۲}$ به $S \subseteq \mathbb{R}^{۳}$ است، طوری که $S = \mathbf{r}(D)$. البته ممکن است کل S را با تنها یک تابع نتوان پارامتره نمود و این کار با چند تابع صورت می‌پذیرد.

۹.۱۴.۵ مثال. ۱) فرض کنید $S : z = x^{۲} + y^{۲}$. در این صورت تابع معرف S عبارت است از $f(x,y,z) = z - x^{۲} - y^{۲}$ و در نتیجه، $f'(x,y,z) = \overrightarrow{(-۲x, -۲y, ۱)}$ که همواره مخالف $\mathbf{0}$ است. پس S یک رویهٔ جبری است. S را قبلاً سهمی‌گون بیضوی نامیده‌ایم، که رویه‌ای بی‌کران است. (به شکل ۱۹.۵—الف توجه شود)



(ب) (الف)

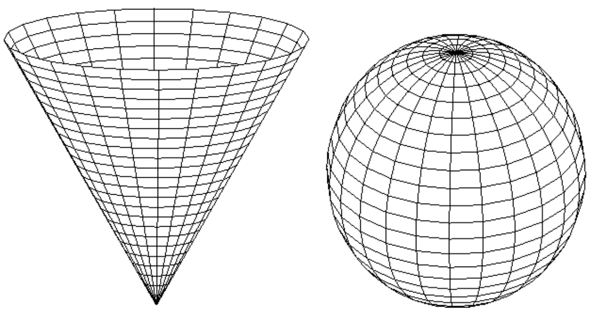
شکل ۱۹.۵: الف) $z = x^{۲} + y^{۲}$ ب) $y = x^{۲}$

مثال ۲) فرض کنید $S : y = x^{۲}$. در این صورت روشن است که $f(x,y,z) = y - x^{۲}$ و همچنین $f'(x,y,z) = \overrightarrow{(-۲x, ۱, ۰)}$ که همیشه مخالف صفر است. بنابراین، استوانهٔ سهموی S رویه است. (به شکل ۱۹.۵—ب توجه شود). برای یافتن معادلهٔ صفحهٔ مماس بر S در نقطهٔ $X_{۰} = (-۲, ۴, ۳)$، بردار نرمال $\mathbf{n} = f'(X_{۰}) = \overrightarrow{(-۲x, ۱, ۰)}\Big|_{X_{۰}} = \overrightarrow{(۴, ۱, ۰)}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر عبارت است از $۴x + y + ۴ = ۰$. معادلهٔ خط عمود بر S در نقطهٔ $X_{۰}$ نیز عبارت است از $\frac{z}{۰} = \frac{y-۴}{۱} = \frac{x+۲}{۴}$ یا $x + ۱۸ = ۴y$ و $z = ۰$.

مثال ۳) فرض کنید $S : x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۹$. در این صورت $f(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$ و $f'(x,y,z) = \overrightarrow{(۲x, ۲y, ۲z)}$. پس شرایط «$X \in S$ و $f'(X) = \mathbf{0}$» به معنی

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۹ \quad \text{و} \quad x = y = z = ۰$$

است، که تناقض می‌باشد. بنابراین، کرهٔ S یک رویه است. این رویه کراندار است. (به شکل ۲۰.۵—الف توجه شود) قابل توجه است که در این حالت $f'(X) = ۲X$، یعنی به ازای هر $X \in S$ ای بردار مکانی X به رویهٔ S در نقطهٔ X عمود می‌باشد.



(ب) (الف)

شکل ۲۰.۵: الف) $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۹$
ب) $z^{۲} = x^{۲} + y^{۲}$

مثال ۴) فرض کنید $S : z^{۲} = x^{۲} + y^{۲}$. در این صورت $f(x,y,z) = z^{۲} - x^{۲} - y^{۲}$ و بنابراین

$$f'(x,y,z) = \overrightarrow{(-۲x, -۲y, -۲z)}$$

که بر S تنها در نقطهٔ $\mathbf{0}$ صفر می‌شود. پس S یک رویهٔ تکه‌ای می‌باشد. (به شکل ۲۰.۵—ب توجه شود)

مثال ۵) فرض کنید $۰ < a < b$ و

$$S : \left(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}} - b\right)^{۲} + z^{۲} = a^{۲}$$

در این صورت $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}} - b\right)^{۲} + z^{۲}$ و شرط $f'(X) = \mathbf{0}$ به معنی

$$۲x\frac{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}} - b}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}} = ۲y\frac{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}} - b}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}} = ۲z = ۰$$

است. از طرفی، از شرط $z = 0$ و $X \in S$ نتیجه می‌شود $\sqrt{x^2+y^2}-b=\pm a$ و لذا $x=y=0$. ولی $\mathbf{0}$ به S تعلق ندارد. بنابراین، S رویه‌ای منظم است. S از دوران دایرهٔ

$$C \,:\, (x-b)^2+z^2=a^2$$

حول محور z ها بدست آمده است و بنابراین به شکل یک تیوب است (به شکل ۲۱.۵ توجه شود).

مثال ۶) ثابت کنید که صفحهٔ مماس بر رویهٔ به معادلهٔ $S \,:\, xyz=a$ در هر نقطهٔ دلخواه، هرمی را با صفحات مختصاتی مشخص می‌کند که حجم آن ثابت است، که $a>0$.
حل. فرض کنیم $X_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$، پس $x_0y_0z_0=a$. در این صورت $f=xyz$ و بنابراین، بردار عمود بر صفحهٔ مماس بر S در X_0 عبارت است از

$$\mathbf{n}=f'(X_0)=\overrightarrow{(y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0)}\neq\mathbf{0}$$

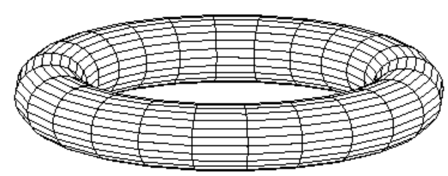
پس معادلهٔ آن عبارت است از

$$P \,:\, y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$$

محل برخورد P با $x-$ محور، $y-$ محور و $z-$ محور بترتیب برابر است با $\frac{3a}{x_0z_0}$، $\frac{3a}{y_0z_0}$ و $\frac{3a}{x_0y_0}$. لذا حجم هرم حاصل از P و صفحات مختصاتی برابر است با

$$V=\frac{1}{6}\frac{3a}{x_0y_0}\frac{3a}{y_0z_0}\frac{3a}{x_0z_0}=\frac{9a^3}{2\,(x_0y_0z_0)^2}=\frac{9a^3}{2}$$

که به انتخاب X_0 بستگی ندارد.



شکل ۲۱.۵: تیوب

مثال ۷) زاویهٔ برخورد دو رویهٔ $S_1 \,:\, x^2+y^2+xy=1$ و $S_2 \,:\, x^2+y+z^2=4$ در نقطهٔ $X_0=(1,-1,2)$ را بیابید.
حل. بنا به تعریف زاویهٔ بین S_1 و S_2 در X_0 برابر است با زاویهٔ بین صفحهٔ مماس بر S_1 در X_0 و صفحهٔ مماس بر S_2 در X_0. اما این زاویه نیز با زاویهٔ بین عمود بر S_1 در X_0 و عمود بر S_2 در X_0 برابر است. پس اگر

$$S_2 \,:\, f_2(X)=a_2 \quad \text{و} \quad S_1 \,:\, f_1(X)=a_1$$

آنگاه زاویهٔ خواسته شده برابر است با زاویهٔ بین $f_1'(X_0)$ و $f_2'(X_0)$. ولی در این مسألهٔ بخصوص $f_1=x^2+y^2+xy$ و $f_2=x^2+y+z^2$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \angle\Big(f_1'(X_0), f_2'(X_0)\Big)\\
&= \angle\left(\overrightarrow{(2x+y,2y+x,0)}\Big|_{X_0}, \overrightarrow{(2x,1,2z)}\Big|_{X_0}\right)\\
&= \angle\left(\overrightarrow{(1,-1,0)}, \overrightarrow{(2,1,4)}\right)\\
&= \cos^{-1}\left(\frac{2-2+0}{\sqrt{2}\sqrt{21}}\right)=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

یعنی آن دو در X_0 متعامدند.

۱۰.۱۴.۵ تمرین. در هر مورد، مشخص کنید که آیا مجموعهٔ S داده شده رویه است.

۱) $x+2y+5z=10$
۲) $3x+y=z$
۳) $y=z+1$
۴) $z^2/5+y^2+9x^2=1$
۵) $x^2+y^2=z^2+1$
۶) $4x^2+z^2=4y^2+4$
۷) $x^2+y^2+1=z^2$
۸) $4x^2+y^2+4=4z^2$
۹) $z=x^2+4y^2$
۱۰) $y=9x^2+z^2/4$
۱۱) $z=x^2-y^2+5$
۱۲) $x=y^2-4z^2+100$
۱۳) $x^2+2x+y^2=17$
۱۴) $x^2=y^3$
۱۵) $z^2=4x^2+1$
۱۶) $y=z^2+5$
۱۷) $x=y^2+2y-32$
۱۸) $xyz=30$
۱۹) $4x^2+9y^2+z^2=36$
۲۰) $x^2+y^2+2=2x+6y$
۲۱) $x^2+2x+y^2-2y+z^2=2$
۲۲) $x^2+y^2+z^2=2x+4y+6z+2$
۲۳) $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$
۲۴) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=x^2y$
۲۵) $\left(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{15}\right)^2+z^2=1$
۲۶) $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=1$

۲۷) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ تمرین ۴ را در نقطهٔ $\left(0,0,\sqrt{2}\right)$ بیابید.

۲۸) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ تمرین ۷ را در نقطهٔ $\left(1,-1,\sqrt{3}\right)$ بیابید.

۲۹) معادلهٔ خط عمود بر رویهٔ تمرین ۱۰ را در نقطهٔ $\left(\sqrt{2},19,2\right)$ بیابید.

۳۰) معادلهٔ خط عمود بر رویهٔ تمرین ۱۳ را در نقطهٔ $(2,3,3)$ بیابید.

۳۱) زاویه بین رویهٔ تمرین ۱۲ و تمرین ۱۴ را در نقطهٔ $(۱,۱,۵)$ بیابید.

۳۲) زاویه بین رویهٔ تمرین ۱۳ و تمرین ۲۵ را در نقطهٔ $\left(۱,\sqrt{۱۴},۱\right)$ بیابید.

۳۳) زاویه بین خط $l : x+y=۲z+۲۸=x+z+۷$ و رویه تمرین ۱۷ را در نقطهٔ $(۳,۵,-۱۰)$ بیابید.

۳۴) آیا نقطه‌ای بر رویهٔ تمرین ۲۰ وجود دارد که صفحهٔ مماس بر آن به معادلهٔ $x=y$ باشد؟

۳۵) نقاطی از رویهٔ در تمرین ٦ را مشخص کنید که صفحهٔ مماس بر آنها با صفحهٔ مفروض $x+y+z=۰$ مماس می‌باشد.

۳٦) زاویهٔ برخورد بین کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ و سهمی گون بیضوی $۲z=x^۲+y^۲$ را محاسبه کنید.

۳۷) معادلهٔ خط مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویهٔ $۵x^۲+۴y^۲=z^۲$ و $۲x+۳y+۴z=۱۷$ را در نقطهٔ $(۱,۱,۳)$ بیابید.

۳۸) نشان دهید که معادلهٔ خط مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویهٔ $S_۱ : f_۱(X)=a_۱$ و $S_۲ : f_۲(X)=a_۲$ در نقطهٔ $X_۰\in S_۱\cap S_۲$ عبارت است از

$$\ell : \frac{x-x_۰}{\frac{\partial(f_۱,f_۲)}{\partial(y,z)}}=\frac{y-y_۰}{-\frac{\partial(f_۱,f_۲)}{\partial(x,z)}}=\frac{z-z_۰}{\frac{\partial(f_۱,f_۲)}{\partial(x,y)}}.$$

۳۹) معادلهٔ خط مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویهٔ به معادلات داده شده را در نقطهٔ $(۱,-۲,۳)$ بیابید:
$x+y+۲z=۵x^۲$ و $x^۲+۴y^۲+۵z^۲=٦۲$.

۴۰) فرض کنید $C=S_۱\cap S_۲$ که رویه‌های $S_۱$ و $S_۲$ بترتیب به معادلهٔ $f_۱(X)=a_۱$ و $f_۲(X)=a_۲$ می‌باشند. انحناء و تاب C در نقطهٔ $X_۰\in C$ را بیابید. همچنین، معادلهٔ صفحهٔ بوسان، صفحه قائم و صفحهٔ نوسانی بر C در نقطهٔ $X_۰$ را بیابید.

۴۱) فرمولهای بدست آمده در مسألهٔ ۳۹ را برای منحنی حاصل از برخورد $z=x^۲-۱$ و $x+y=z^۲-٦$ و نقطهٔ $(۲,۱,۳)$ بکار بگیرید.

۱۵.۵ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل doc.pdf مراجعه شود.

۱.۱۵.۵ مشتق. فرض کنید تابع $u=f(x,y,z)$ از قبل در محیط میپل تعریف شده و بخواهیم مشتق (گرادیان) آن را محاسبه کنیم. برای این منظور کافی است از دستور آمادهٔ `linalg[grad](f,[x,y,z])` استفاده شود.

۲.۱۵.۵ مشتق جزئی. فرض کنید تابع $u=f(x,y,z)$ از قبل در محیط میپل تعریف شده و بخواهیم از آن نسبت به متغیر x مشتق جزئی بگیریم. برای این منظور کافی است دستور `diff(f,x)` را وارد کنیم. بدیهی است که بجای x از y و یا z می‌توان استفاده نمود.

برای محاسبهٔ مشتق جزئی مرتبهٔ بالای $\frac{\partial^۳ f}{\partial x^۲\partial y\partial z}$ از دستور `diff(f,x,x,y,z)` استفاده می‌کنیم. به صورت کلی از دستور `diff(f,x$n,y$m,z$l)` برای محاسبهٔ مشتق $\frac{\partial^{n+m+l} f}{\partial x^n\partial y^m\partial z^l}$ می‌توان استفاده نمود.

۳.۱۵.۵ مشتق ضمنی. فرض کنید تابع z بر حسب متغیرهای x و y به شکل ضمنی $f(x,y,z)=c$ تعریف شده باشد. در این صورت، در محیط میپل از دستور `eq:=f(x,y,z)=c` استفاده می‌کنیم و برای محاسبهٔ مشتق z نسبت به x از دستور `implicitdiff(eq,z,x)` استفاده می‌کنیم. به صورت کلی برای محاسبهٔ $\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n\partial y^m}$ از دستور `implicitdiff(eq,z,x$n,y$m)` می‌توان استفاده نمود.

۴.۱۵.۵ ژاکوبین. برای محاسبهٔ ژاکوبین توابع y_1، y_2، . . . و y_n نسبت به متغیرهای x_1، x_2، . . . و x_m از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
linalg[jacobian](vector([y_1, y_2, ..., y_n])
    , [x_1, x_2, ..., x_m])
```

۵.۱۵.۵ دیفرانسیل. ابتدا باید نرم افزار liesymm را با دستور `with(liesymm)` آمادهٔ به کار نمود. سپس، بایست با دستور `setup(x,y,...)` متغیرهای مستقل x، y و ... را معرفی نمود. اکنون دیفرانسیل f را با دستور `d(f)` وارد می‌کنیم. مثلاً، `d(x)-d(y/z)` به معنی $dx-d(y/z)$ می‌باشد. برای ضرب فرمها بجای $\wedge$ از `&^` استفاده می‌کنیم. مثلاً، `d(x)&^d(u)` به معنی $dx\wedge du$ می‌باشد.

٦.۱۵.۵ یادداشت. در آدرس اینترنتی http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.

فصل ٦

انتگرال دوگانه

هدف از این فصل تعمیم مفهوم انتگرال معین می‌باشد. چنانچه بجای توابع تک متغیره از توابع چند متغیره استفاده گردد، و بطور طبیعی بجای بازه‌ای از دامنهٔ تعریف، از زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ تعریف تابع استفاده گردد، مفهوم جدیدی بنام انتگرال چندگانه ظاهر خواهد شد. ساده‌ترین حالت، انتگرال دوگانه است که در این فصل به تشریح آن می‌پردازیم. در فصل آینده به انتگرال سه گانه خواهیم پرداخت.

۱.٦ تعریف انتگرال دوگانه

تعریفی که در این بخش از انتگرال دوگانه مشاهده خواهید کرد، قدری نظری است. اما به جهت روشن تر شدن بحث، مطالعه این دیدگاه لازم است. حداقل حسن این برخورد در آن است که به راحتی می‌توان کاربردهای انتگرال دوگانه را توجیه نمود.

۱.۱.٦ تعریف. فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ بسته و کراندار باشد. بنابراین اعداد a، b، c و d طوری وجود خواهند داشت که $D \subseteq [a;b] \times [c;d]$. یعنی، D در مستطیلی قابل محاط است که تصویر آن بر $x-$محور برابر بازهٔ $[a,b]$ و بر $y-$محور بازهٔ $[c,d]$ می‌باشد (به شکل ۱.٦—الف توجه داشت). منظور از یک افراز برای D، حاصلضربی است به شکل $P = P_۱ \times P_۲$ که در آن $P_۱$ افرازی برای $[a,b]$ و $P_۲$ افرازی برای $[c,d]$ می‌باشد:

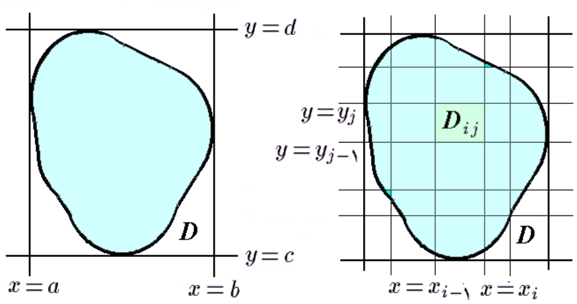
$$P_۲ \;:\; c = y_۰ < y_۱ < \cdots < y_{m-۱} < y_m = d$$
$$P_۱ \;:\; a = x_۰ < x_۱ < \ldots < x_{n-۱} < x_n = b$$

در این صورت، تعریف می‌کنیم $\#P := \min\{m,n\}$ و

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-۱} \quad , \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-۱}$$
$$|P| := \max\{\Delta x_۱, \cdots, \Delta x_n, \Delta y_۱, \cdots, \Delta y_m\}$$

عدد $|P|$ را ظرافت P و $\#P$ را طول P می‌نامیم. روشن است که با انتخاب هر افراز برای D، مجموعهٔ D به حداکثر $n \times m$ قسمت تقسیم می‌گردد (به شکل ۱.٦—ب توجه شود).

۲.۱.٦ تعریف. فرض کنید D و P همانند در ۱.۱.٦ باشند. مجموعه‌های D_{ij} را که $۱ \le i \le n$ و $۱ \le j \le m$ به صورت زیر تعریف می کنیم:



(الف) (ب)

شکل ۱.٦: افراز ناحیه در صفحه

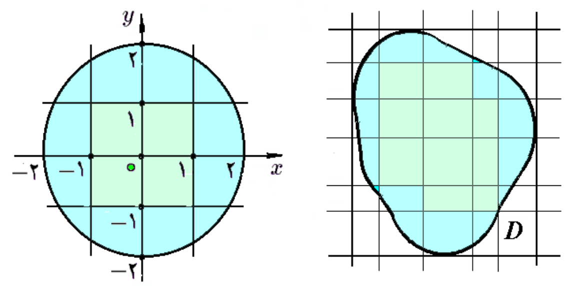
اگر $\big([x_{i-۱},x_i]\times[y_{j-۱},y_j]\big)\cap D$ یک مستطیل کامل باشد، D_{ij} را برابر مستطیل $[x_{i-۱},x_i] \times [y_{j-۱},y_j]$ می‌گیریم و در غیر این صورت D_{ij} را $\oslash$ می‌گیریم. یعنی، D_{ij} ها یا مستطیل کاملند و یا اینکه خالی هستند (به شکل ۲.٦—الف توجه شود). منظور از یک انتخاب از افراز P، خانواده‌ای از نقاط $X = \{(x_{ij}, y_{ij})\}$ در D است، به گونه‌ای که $(x_{ij},y_{ij}) \in D_{ij}$ به ازای هر i و هر j با $D_{ij} \neq \oslash$.

۳.۱.٦ مثال. فرض کنیم $D \;:\; x^۲ + y^۲ \le ۴$ قرص توپر باشد. با تعریف $P_۲ \;:\; -۲ < -۱ < ۰ < ۱ < ۲$ و $P_۱ : -۲ < -۱ < ۰ < ۱ < ۲$ و $P = P_۱ \times P_۲$ به یک افراز به طول $\#P = \min\{۲,۲\} = ۲$ و ظرافت $|P| = \max\{۱\} = ۱$ می‌رسیم. در این حالت D_{ij} ها عبارتند از

$$D_{۱۲} = [-۱;۰] \times [-۱;۰]\ ,\quad D_{۱۳} = [۰;۱] \times [-۱;۰]$$

$$D_{۲۲} = [-۱;۰] \times [۰;۱]\ ,\quad D_{۲۳} = [۰;۱] \times [۰;۱]$$

و $X = \{(-۱,-۱)\, ,\, (۱/۲,-۳/۴)\, ,(۰,۰)\, ,\, (۱/۲,۱/۲)\}$ نمونه‌ای از یک انتخاب از این افراز می‌باشد. به شکل ۲.۶—ب توجه شود.



(ب) (الف)

شکل ۲.۶: قسمت ۱ از مثال ۳.۱.۶

۴.۱.۶ تعریف. فرض کنیم مجموعهٔ D، افراز P و انتخاب X همانند در ۳.۱.۶ باشند و $z = f(x,y)$ تابعی است که بر سراسر D تعریف می‌گردد. در این صورت، منظور از $\sum_P f(x_{ij},y_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$ حاصلجمع همهٔ $f(x_{ij},y_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$ هایی است که $D_{ij} \neq \emptyset$.

در صورتی می‌گوئیم تابع $z = f(x,y)$ بر مجموعهٔ D **انتگرالپذیر** است که عددی I چنان یافت شود که به ازای هر ε مثبت، یک عدد مثبت δ و یک عدد طبیعی n به گونه‌ای یافت شوند که به ازای هر افراز P برای D که $\#P \geq n$ و $|P| \leq \delta$ و به ازای هر انتخاب X از P داشته باشیم

$$\Big| \sum_P f(x_{ij},y_{ij})\Delta x_i \Delta y_j - I \Big| < \varepsilon$$

در این صورت I را انتگرال دوگانهٔ $f(x,y)$ بر D نامیده و با نماد $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ نشان می‌دهیم. بعلاوه، در این حالت معمولاً نوشته می‌شود:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{\substack{|P| \to ۰ \\ \#P \to \infty}} \sum_P f(x_{ij},y_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

۵.۱.۶ مثال. چنانچه D، P و X را همانند مثال ۳.۱.۶ فرض کنیم و بعلاوه $f(x,y) = x - y$، در این صورت

$$\begin{aligned}
\sum_P f(x_{ij},y_{ij})\Delta x_i \Delta y_j &= \\
&= f(x_{۱۲},y_{۱۲})\Delta x_۱ \Delta y_۲ + f(x_{۱۳},y_{۱۳})\Delta x_۱ \Delta y_۳ \\
&\quad + f(x_{۲۲},y_{۲۲})\Delta x_۲ \Delta y_۲ + f(x_{۲۳},y_{۲۳})\Delta x_۲ \Delta y_۳ \\
&= (-۱+۱)(۱)(۱) + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴}\right)(۱)(۱) \\
&\quad + (۰ - ۰)(۱)(۱) + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\right)(۱)(۱) \\
&= -۲ + \frac{۵}{۴} + ۰ + ۰ = -\frac{۳}{۴}
\end{aligned}$$

بعداً قادر خواهیم بود تا نشان دهیم که در این حالت $\iint_D f(x,y)\,dxdy = ۰$ و بنابراین اگر $\varepsilon = ۱/۲$ آنگاه

$$\Big| \sum_P f(x_{ij},y_{ij})\Delta x_i \Delta y_j - I \Big| < \varepsilon.$$

همانطوری که از مثال بالا بر می‌آید، اثبات وجود و یا عدم وجود یک انتگرال دوگانه (یا اصطلاحاً، انتگرالپذیری یک تابع دو متغیره بر مجموعه‌ای مفروض) کار بسیار دشواری است و از حوصلهٔ این کتاب خارج است. به همین دلیل قضیه‌ای مطرح خواهیم نمودکه مسأله را موقتاً حل می‌کند و بنابراین، از این پس تمام انرژی موجود را صرف حل مسألهٔ انتگرالگیری از توابع دو متغیره می‌کنیم.

۶.۱.۶ قضیه. اگر D مجموعه‌ای بسته و کراندار بوده و $z = f(x,y)$ تابعی باشد که بر D تعریف شده و کراندار باشد و صرف نظر از یک یا چند نقطه و یا یک و یا چند منحنی بطول متناهی، در کل D پیوسته باشد، آنگاه f بر D انتگرالپذیر است.

۷.۱.۶ یادداشت. شرایط قضیه بالا لازم نیستند. زیرا مثلاً اگر $f(x,y) = ۰$، آنگاه وضعیت D هر چه باشد، آنگاه انتگرال $f(x,y)$ بر D صفر است. بعلاوه، اگر D یک پاره خط باشد، آنگاه وضعیت $f(x,y)$ هر چه باشد، انتگرال $f(x,y)$ بر D صفر است.

۸.۱.۶ قرار داد. چنانچه مجموعهٔ D و تابع $f(x,y)$ در شرایط قضیهٔ ۶.۱.۶ صدق کنند، انتگرال $\iint_D f(x,y)\,dA$ را عادی می‌گوئیم و در غیر این صورت آن را ناسره می‌نامیم. از این پس همهٔ انتگرال‌های مورد بحث عادی‌اند، مگر آنکه خلاف این امر صراحتاً بیان گردد.

۹.۱.۶ مثال. ۱) فرض کنیم $f(x,y)$ و D همانند در مثال ۵.۱.۶ باشند. در این صورت، $\iint_D (x-y)\,dA$ عادی است.
مثال ۲) فرض کنیم $D : ۰ \leq x \leq ۲, ۰ \leq y \leq ۱$ و $f(x,y) = [x]y$، در این صورت انتگرال $\iint_D f(x,y)\,dA$ عادی است. زیرا، ملاحظه می‌گردد که

$$f(x,y) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } ۰ \leq x < ۱ \\ y & \text{اگر } ۱ \leq x < ۲ \\ ۲y & \text{اگر } x = ۲ \end{cases}$$

که به وضوح بر دو پاره خط «$x = ۱; ۰ \leq y \leq ۱$» و «$x = ۲, ۰ \leq y \leq ۱$» ناپیوسته می‌باشد.

مثال ۳) فرض کنیم $D : ۰ \le x \le ۱ \,,\, ۰ \le y \le ۱$ و

$$f(x,y)=\begin{cases} ۰ & \text{اگر } x\in\mathbb{Q} \text{ و } y\in\mathbb{Q} \\ ۱ & \text{اگر } x\notin\mathbb{Q} \text{ یا } y\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

در این صورت $f(x,y)$ بر کل D ناپیوسته است و بنابراین $\iint_D f(x,y)\,dA$ ناسره می‌باشد.

مثال ۴) انتگرال $\iint_D e^{x^۲+y^۲}\,dA$ که در آن D ربع اول xy−صفحه می‌باشد، ناسره است. زیرا، D کراندار نیست.

۱۰.۱.۶ تمرین. در هر مورد، مشخص کنید که $\iint_D f(x,y)\,dA$ عادی است یا ناسره:

۱) $f = x^۲ y \qquad D : x^۲ + ۴y^۲ \le ۴ \,,\, ۰ \le y$

۲) $f = \sqrt{x^۲ + y^۲} \qquad D : x \ge ۰$

۳) $f = x/y \qquad D : |x| + |y| \le ۱$

۴) $f = \lim\limits_{n\to\infty} \{\cos(n!\pi xy)\}^{۲n} \qquad D : ۰ \le x \le ۱ \,,\, ۰ \le y \le ۱$

۵) $f = \left[x^۲ + y\right] \qquad D : ۰ \le x \le ۵ \,,\, ۰ \le y \le x^۳$

۶) $f = [\sin(۱/(x+y))] \qquad D : ۰ \le x \le ۱ \,,\, ۰ \le y \le ۱ - x$

با انتخاب مناسب افراز P و انتخاب X، قضیهٔ زیر ثابت می‌گردد. از این قضیه برای محاسبهٔ بهتر انتگرال دوگانه می‌توان استفاده نمود.

۱۱.۱.۶ قضیه. اگر $D = [a;b] \times [c;d]$ و $\iint_D f(x,y)\ dA$ موجود باشد، در این صورت

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{b-a}{n}\frac{d-c}{m} \sum_{i=۰}^{n-۱}\sum_{j=۰}^{m-۱} f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{m}\right)$$

۱۲.۱.۶ مثال. فرض کنیم $D : ۰ \le x \le ۱ , ۱ \le y \le ۳$ و بعلاوه $f(x,y) = ۲x + ۳y - ۳$. در این صورت $\iint_D f(x,y)\,dA$ برابر است با

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{۱-۰}{n}\frac{۳-۱}{m} \sum_{i=۰}^{n-۱}\sum_{j=۰}^{m-۱} f\left(۰ + i\frac{۱-۰}{n}, ۱ + j\frac{۳-۱}{m}\right)$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{۲}{mn}\sum_{i=۰}^{n-۱}\sum_{j=۰}^{m-۱}\left(\frac{۲i}{n} + ۳ - \frac{۶j}{m} - ۳\right)$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\{\frac{۴}{mn^۲}\sum_{j=۰}^{m-۱}\Big(\sum_{i=۰}^{n-۱} i\Big) - \frac{۱۲}{m^۲ n}\sum_{i=۰}^{n-۱}\Big(\sum_{j=۰}^{m-۱} j\Big)\right\}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\{\frac{۴}{mn^۲}.m.\frac{n(n-۱)}{۲} - \frac{۱۲}{nm^۲}.n.\frac{m(m-۱)}{۲}\right\}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\{۲\frac{n-۱}{n} - ۶\frac{m-۱}{m}\right\} = -۴$$

۱۳.۱.۶ تمرین. به کمک قضیهٔ ۱۱.۱.۶ مقدار $\iint_D F(x,y)\,dA$ را در صورتی محاسبه کنید که

۱) $f(x,y) = x + ۲y, \quad D : -۱ \le x \le ۰ \,,\, ۰ \le y \le ۲$

۲) $f(x,y) = x^۲ - y, \quad D : ۰ \le x \le ۱ \,,\, ۰ \le y \le ۱$

۳) $f(x,y) = xy, \quad D : ۰ \le x \le ۱ \,,\, ۰ \le y \le ۲$

۱۴.۱.۶ قضیه. اگر f و g بر D انتگرالپذیر باشند و $a \in \mathbb{R}$، در این صورت

۱) $\displaystyle \iint_D af(x,y)\,dA = a\iint\limits_D f(x,y)\,dA$

۲) $\displaystyle \iint_D \{f(x,y) + g(x,y)\}\,dA = \iint\limits_D f(x,y)\,dA + \iint\limits_D g(x,y)\,dA$

۳) اگر به ازای هر $(x,y) \in D$ ای $f(x,y) \le g(x,y)$، در این صورت

$$\iint\limits_D f(x,y)\ dA \le \iint\limits_D g(x,y)\ dA\,,$$

۴) اگر مساحت ناحیه مورد اشتراک دو مجموعهٔ $D_۱$ و $D_۲$ با مساحت صفر باشد، در این صورت

$$\iint_{D_۱\cup D_۲} f(x,y)\,dA = \iint_{D_۱} f(x,y)\,dA + \iint_{D_۲} f(x,y)\,dA$$

۵) اگر مساحت مجموعه نقاطی از D که در آنها $f(x,y)$ و $g(x,y)$ متفاوتند صفر باشد، در این صورت $\iint_D f(x,y)\ dA = \iint_D g(x,y)\,dA$.

۶) اگر اختلاف دو مجموعهٔ $D_۱$ و $D_۲$ با مساحت صفر باشد، در این صورت

$$\iint_{D_۱} f(x,y)\,dA = \iint_{D_۲} f(x,y)\,dA$$

۷) اگر بیشترین مقدار $f(x,y)$ بر D، کمترین مقدار $f(x,y)$ بر D و مساحت D بترتیب برابر M، m و A باشند، در این صورت

$$mA \le \iint_D f(x,y)\ dA \le MA$$

۸) $\left|\iint_D f(x,y)\, dA\right| \le \iint_D |f(x,y)|\, dA$.

۹) در صورتی که مساحت D را با نماد $\mathrm{Area}(A)$ نشان دهیم، آنگاه $\iint_D dA = \mathrm{Area}(D)$.

۱۵.۱.٦ مثال. ۱) فرض کنیم

$$D:\ ۰ \le x \le ۲\,,\ ۰ \le y \le ۱$$

و بعلاوه $f(x,y) = [x+y]$ در این صورت D را می‌توان به صورت زیر تقسیم نمود (به شکل ۳.٦—الف توجه شود):

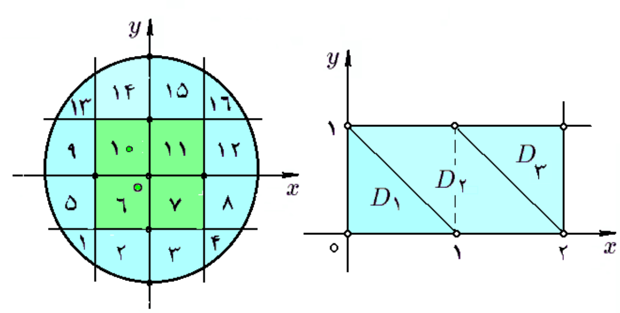
$$D = D_۱ \cup D_۲ \cup D_۳,$$

$$D_۱:\ ۰ \le y \le ۱\,,\ ۰ \le x \le ۱ - y,$$

$$D_۲:\ ۰ \le y \le ۱\,,\ ۱ - y \le x \le ۲ - y,$$

$$D_۳:\ ۰ \le y \le ۱\,,\ ۲ - y \le x \le ۲.$$

که تابع $f(x,y)$ بر کل مثلث قائم الزاویهٔ $D_۱$ بجز وتر آن برابر صفر است و بنابراین، نظر به قسمت (٦) از قضیهٔ ۱۴.۱.٦ می‌توانیم فرض کنیم که بر کل $D_۱$ برابر ۰ است. تابع $f(x,y)$ بر کل متوازی الاضلاع $D_۲$ بجز ضلع سمت راستش برابر ۱ است و بنابراین، می‌توان فرض نمود که بر کل $D_۲$ برابر ۱ می باشد. تابع $f(x,y)$ بر کل و مثلث قائم الزاویهٔ $D_۳$ بجز نقطهٔ $(۲,۱)$ برابر دو است و بنابراین، می‌توان فرض نمود که بر کل $D_۳$ برابر دو می‌باشد. پس، با توجه به قسمت (۴) و (۹) از قضیهٔ ۱۴.۱.٦ داریم



(ب) (الف)

شکل ۳.٦: قسمتهای ۱ و ۲ از مثال ۱۵.۱.٦

$$\begin{aligned}\iint_D [x+y]\, dA &= \iint_{D_۱} \underbrace{[x+y]}_{۰}\, dA + \iint_{D_۲} \underbrace{[x+y]}_{۱}\, dA \\ &\quad + \iint_{D_۳} \underbrace{[x+y]}_{۲}\, dA \\ &= ۰ + ۱ \times \mathrm{Area}(D_۲) + ۲ \times \mathrm{Area}(D_۳) \\ &= ۱ \times ۱ + ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۲\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنیم $f(x,y) = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ و $D:\ x^۲ + y^۲ \le ۴$. مقدار تقریبی $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ را بیابید.

حل. به کمک خطوط $x = -۱$، $x = ۰$، $x = ۱$، $y = -۱$، $y = ۰$ و $y = ۱$ مجموعه D را به ۱٦ قسمت تقسیم می‌کنیم (به شکل ۳.٦—ب توجه شود):

$$D = D_۱ \cup D_۲ \cup \cdots \cup D_{۱٦}$$

اما اگر ماکزیموم و مینیموم مقدار تابع $f(x,y)$ بر مجموعهٔ D_i را بترتیب M_i و m_i بنامیم، در این صورت

$$\begin{aligned} M_۱ &= M_۴ = M_{۱۳} = M_{۱٦} = f(۱,۱) = \sqrt{۲} \\ M_۲ &= M_۳ = M_۵ = M_۸ = M_۹ \\ &= M_{۱۲} = M_{۱۴} = M_{۱۵} = f(۰,۱) = \sqrt{۳} \\ M_٦ &= M_۷ = M_{۱۰} = M_{۱۱} = f(۰,۰) = ۲ \\ m_۱ &= m_۴ = m_{۱۳} = m_{۱٦} = f\left(\sqrt{۳},۱\right) = ۰ \\ m_۲ &= m_۳ = m_۵ = m_۸ = m_۹ \\ &= m_{۱۲} = m_{۱۴} = m_{۱۵} = f(۰,۲) = ۰ \\ m_٦ &= m_۷ = m_{۱۰} = m_{۱۱} = f(۰,۰) = \sqrt{۲} \end{aligned}$$

بنابراین، در مجموع با توجه به قسمت (۲) و (۷) از قضیهٔ ۱۴.۱.٦ داریم

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\, dA &= \iint_{D_۱} + \iint_{D_۲} + \cdots + \iint_{D_٦} \\ &\le ۴\iint_{D_۱} \sqrt{۲}\, dA + ۸\iint_{D_۲} \sqrt{۳}\, dA + ۴\iint_{D_٦} ۲\, dA \\ &= ۴\sqrt{۲}\mathrm{Area}(D_۱) + ۸\sqrt{۳}\mathrm{Area}(D_۲) + ۸\mathrm{Area}(D_٦) \\ &= ۴\sqrt{۲}\Big(۱ - \sqrt{۳} + \frac{\pi}{۳}\Big) + ۸\sqrt{۳}\Big(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۳} - ۱\Big) + ۴ \\ &\approx ۱۸/۴۴\end{aligned}$$

به صورت مشابه، داریم

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\, dA &= \iint_{D_۱} + \iint_{D_۲} + \cdots + \iint_{D_٦} \\ &\ge ۴\iint_{D_۱} ۰\, dA + ۸\iint_{D_۲} ۰\, dA + ۴\iint_{D_٦} \sqrt{۲}\, dA \\ &= ۴\sqrt{۲} \times \mathrm{Area}(D_٦) = ۴\sqrt{۲}(۱) \approx ۵/٦\end{aligned}$$

پس در مجموع $۵/٦ \le \iint_D \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}\, dA \le ۱۸/۴۴$. البته، می‌دانیم که مقدار واقعی آن ۱٦/۷٦ است.

۱۶.۱.۶ تمرین. در هر مورد مقدار $\iint_D f(x,y)\,dA$ را محاسبه کنید:

۱) $f(x,y)=[x-y]$ $\qquad D\,:\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1$

۲) $f(x,y)=2$ $\qquad D\,:\,x^2+y^2\le 4,\,0\le x$

۳) $f(x,y)=[x^2]$ $\qquad D\,:\,0\le x\le 2,\,0\le y\le 1$

۴) $f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } |x|+|y|\le 1 \\ -1 & \text{اگر } 1<|x|+|y|\le 2\end{cases}$ $\qquad D\,:\,|x|+|y|\le 2$

در هر یک از موارد زیر، یک حد بالا و یک حد پائین برای $\iint_D f(x,y)\,dA$ بدست آورید:

۵) $f=x^2y$ $\qquad D\,:\,0\le x\le 1,\,-1\le y\le 1$

۶) $f=\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad D\,:\,x^2+y^2\le 4$

۷) $f=\sin(x+y)$ $\qquad D\,:\,0\le x\le \pi/2,\,0\le y\le \pi/2$

۸) $f=x-2y$ $\qquad D\,:\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1-x$

۹) فرض کنید D_i حلقهٔ $(i-1)^2\le x^2+y^2\le i^2$ است و $z=f(x,y)$ بر مجموعهٔ $D\,:\,x^2+y^2\le R^2$ تعریف شده است. نشان دهید که اگر m_i و M_i بترتیب برابر حداقل و حداکثر مقدار $f(x,y)$ بر D_i باشند، در این صورت

$$\sum_{i=1}^{[R]+1}(2i-1)m_i\le \iint_D f(x,y)\,dA\le \sum_{i=1}^{[R]+1}(2i-1)M_i$$

۱۰) با تقسیم مثلث محدود به خطوط $x=0$، $y=0$ و $x+y=1$ به چهار قسمت، مقدار تقریبی $\iint_D \sqrt{x+y}\,dA$ بر این مجموعه را محاسبه کنید.

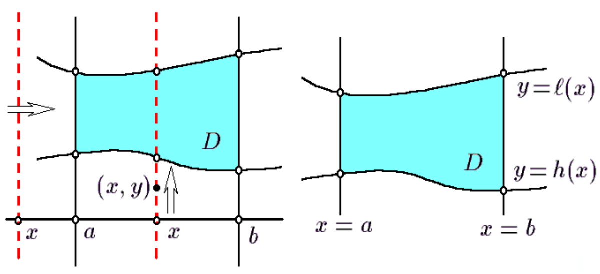
۲.۶ مجموعه منظم

با توجه به مثال ۱۲.۱.۶ به این نتیجه می‌رسیم که محاسبهٔ انتگرال دوگانه با استفاده از تعریف کار دشواری است، پس لازم است در این مورد روشی غیر مستقیم ابداع شود. این انتظار وقتی قوت می‌گیرد که از جلد اول به یاد می‌آوریم که به جای محاسبهٔ حد مجموع پیچیده‌ای که $\int_a^b f(x)\,dx$ را تعریف می‌کند، تابع $F(x)$ ای را می‌یافتیم که $F'=f$ و (بنابه قضیه نیوتن–لایبنیتز) به مقدار $F(b)-F(a)$ می‌رسیدیم. این انتظار بجا است. اما لازم است که در ابتدا یک تعریف مناسب مطرح شود.

۱.۲.۶ تعریف. زیر مجموعه D از $\mathbb{R}^2$ را در صورتی x–**منظم** گوئیم که آنرا بصورت

$$D\,:\,a\le x\le b\,,\,h(x)\le y\le \ell(x)$$

بتوان نوشت. به شکل ۴.۶–الف توجه شود. چنین مجموعه‌هایی از دو طرف راست و چپ به دو خط موازی y–محور و از بالا و پائین به نمودار دو تابع بر حسب x محدود می‌شوند. نقطهٔ (x,y) در صورتی به D تعلق دارد که x در بازهٔ $[a;b]$ قرار گیرد و y در بازهٔ $[h(x);\ell(x)]$.



(ب) (الف)

شکل ۴.۶: الف) مجموعهٔ x–منظم
ب) تعیین حدود یک مجموعهٔ x–منظم

۲.۲.۶ قضیه. هر مجموعهٔ بستهٔ کراندار یا x–منظم است و یا به شکل اجتماعی از مجموعه‌های x–منظم قابل نوشتن است، به گونه‌ای که مساحت اشتراک هر دو تا از این مجموعه‌ها برابر صفر است:

$$D=\bigcup_i D_i \quad \text{و} \quad \forall\, i\ne j\,:\,\mathrm{Area}(D_i\cap D_j)=0$$

اثبات این حکم به توپولوژی باز می‌گردد، در آنجا ثابت می‌شود که هر مجموعهٔ بسته و کراندار را به صورت اجتماعی از مثلثهای با اضلاع منحنی الخط می‌توان نوشت. تنها چیزی که برای اثبات می‌ماند، نشان دادن حکم قضیه برای یک مثلث دلخواه می‌باشد.

۳.۲.۶ روش شناسایی حدود یک مجموعه x–منظم. فرض کنید مجموعه x–منظم D داده شده است. ابتدا خطی عمود بر x–محور که این محور را در نقطهٔ فرضی x قطع می‌کند در نظر گرفته و از منتهی علیه سمت چپ به سمت راست حرکت می‌دهیم. در اولین برخورد این خط با مجموعهٔ D، نقطهٔ $x=a$ و در آخرین برخوردش نقطهٔ $x=b$ حاصل می‌گردد. (به شکل ۴.۶–ب توجه شود). اکنون خط متحرک مذکور را در یک حالت میانی قرار می‌دهیم، یعنی فرض می‌کنیم $a\le x\le b$ و نقطهٔ (x,y) را از منتهی علیه پائین این خط به سوی بالا حرکت می‌دهیم. اولین برخورد این نقطه با مجموعهٔ D

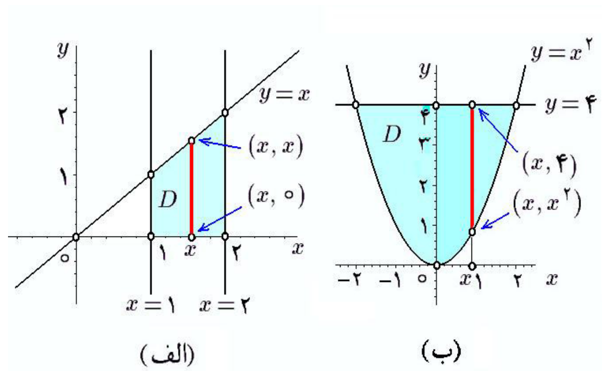
عبارت از $(x,h(x))$ و آخرین نقطهٔ برخورد آن نقطهٔ $(x,\ell(x))$ خواهد بود. بنابراین دومین مختص اولین برخورد تابع $h(x)$ و دومین مختص آخرین برخورد تابع $\ell(x)$ را مشخص می‌سازد.

۴.۲.۶ مثال. ۱) فرض کنیم D مجموعهٔ محدود به خطوط $x=۱$، $x=۲$، $y=۰$ و $y=x$ باشد. در این صورت، نشان دهید که D یک مجموعهٔ x−منظم است (به شکل ۵.۶—الف توجه شود).

حل. در این صورت، ملاحظه می‌شود که

$$D:\ ۱\le x\le ۲\,,\ ۰\le y\le x$$

به خط فرضی گذشته از x توجه شود. مشاهده می‌گردد که مختصات نقطهٔ پایین $(x,۰)$ و نقطهٔ بالا (x,x) می‌باشد.



شکل ۵.۶: قسمتهای ۱ و ۲ از مثال ۴.۲.۶

مثال ۲) فرض کنید D مجموعه محدود به سهمی $y=x^۲$ و خط $y=۴$ باشد، در این صورت نشان دهید که D مجموعهٔ x−منظم است (به شکل ۵.۶—ب توجه شود).

حل. با حل دستگاه حاصل از $y=x^۲$ و $y=۴$ به پاسخ «$x=\pm۲$ و $y=۴$» می‌رسیم. در نتیجه، داریم $a=-۲$ و $b=۲$ است. با انتخاب یک خط فرضی و حرکت از پائین به بالا، مشاهده می‌کنیم که پائین‌ترین نقطهٔ مجموعهٔ D عبارت از $(x,x^۲)$ و بالاترین نقطهٔ برخورد عبارتست از $(x,۴)$. بنابراین $h(x)=x^۲$ و $\ell(x)=۴$. پس در مجموع داریم

$$D:\ -۲\le x\le ۲\,,\ x^۲\le y\le ۴$$

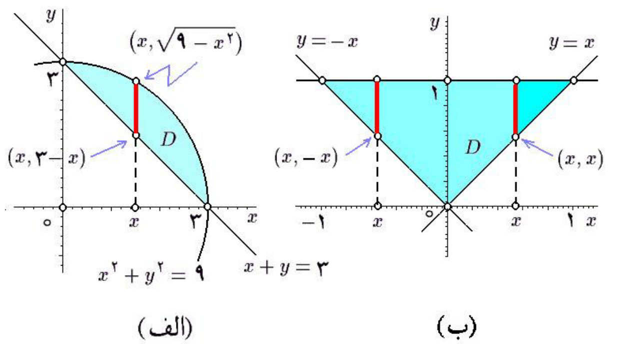
مثال ۳) فرض کنید مجموعهٔ D قسمتی از ربع اول صفحه باشد که به دایرهٔ $x^۲+y^۲=۹$ و خط $x+y=۳$ محدود شده است. در این صورت نشان دهید که D مجموعه‌ای x−منظم است (به شکل ۶.۶—الف توجه شود).

حل. با حل دستگاه حاصل از دو معادلهٔ داده شده داریم:

$$\begin{cases}x^۲+y^۲=۹\\ x+y=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x^۲-۶x=۰\\ y=۳-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۰,۳\\ y=۳-x\end{cases}$$

بنابراین $a=۰$ و $b=۳$. از طرفی با انتخاب خط متحرک گذرنده از نقطهٔ x مشاهده می‌کنیم که پائین‌ترین نقطهٔ بر خورد این خط با مجموعهٔ D عبارت از $(x,۳-x)$ است و بالاترین آن عبارت از $(x,\sqrt{۹-x^۲})$ می‌باشد. بنابراین $\ell(x)=\sqrt{۹-x^۲}$ و $h(x)=۳-x$. لازم به ذکر است که $y=۳-x$ از حل معادلهٔ خط $x+y=۳$ حاصل شده است و $y=\sqrt{۹-x^۲}$ از حل معادلهٔ $x^۲+y^۲=۹$ و با توجه به $y\ge ۰$ بدست آمده است. بنابراین

$$D:\ ۰\le x\le ۳\,,\ ۳-x\le y\le\sqrt{۹-x^۲}$$



شکل ۶.۶: قسمتهای ۳ و ۴ از مثال ۴.۲.۶

مثال ۴) فرض کنید D مجموعهٔ محدود به خطوط $y=x$، $y=-x$ و $y=۱$ باشد. در این صورت، نشان دهید که D مجموعه‌ای x−منظم است.

حل. از بر خورد دو خط $y=x$ و $y=۱$ به نقطهٔ $(۱,۱)$ می‌رسیم و بنابراین $b=۱$ و از برخورد دو خط $y=-x$ و $y=۱$ به نقطهٔ $(-۱,۱)$ می‌رسیم و بنابراین $a=-۱$. به شکل ۶.۶—ب توجه شود. بعلاوه، اگر یک خط متحرک گذرنده از نقطهٔ x در نظر بگیریم، آنگاه بسته به اینکه $۰\le x\le ۱$ یا $-۱\le x\le ۰$، دو وضعیت پیش خواهد آمد. در حالت اول نقاط پائین و بالا بترتیب عبارتند از (x,x) و $(x,۱)$ و در حالت دوم عبارتند از $(x,-x)$ و $(x,۱)$. پس در مجموع $\ell(x)=۱$ و $h(x)=\begin{cases}-x & \text{اگر }\ -۱\le x\le ۰\\ x & \text{اگر }\ ۰\le x\le ۱\end{cases}$. به دلایل فنی (در محاسبهٔ انتگرال دوگانه) بهتر است D را به دو بخش تقسیم کنیم، به نحوی که $h(x)$ در هر کدام تنها یک ضابطه داشته باشد:

$$D=D_۱\cup D_۲$$

$$D_۱:\ -۱\le x\le ۰\,,\ -x\le y\le ۱$$

$$D_۲:\ ۰\le x\le ۱\,,\ x\le y\le ۱$$

مثال ۵) فرض کنید D مجموعهٔ محدود به تابع درجه سوم $y=x^۳-۴x$ و x−محور باشد. در این صورت D مجموعه‌ای x−منظم است. به شکل ۷.۶ توجه شود. در اینجا با حل دستگاه حاصل از دو معادلهٔ داده شده به مقادیر ۰، -۲ و ۲ برای x می‌رسیم و بنابراین $a=-۲$ و $b=۲$ می‌باشد. همانطوری که در شکل ۷.۶ مشاهده می‌گردد، اگر $-۲\le x\le ۰$، آنگاه پائین‌ترین

و بالاترین نقطه بر محل بر خورد متحرک با مجموعهٔ D بترتیب عبارتند از $(x,0)$ و (x, x^3-4x) و اگر $0 \le x \le 2$ این نقاط عبارت از (x, x^3-4x) و $(x,0)$ خواهند بود. در نتیجه

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } -2 \le x \le 0 \\ x^3-4x & \text{اگر } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

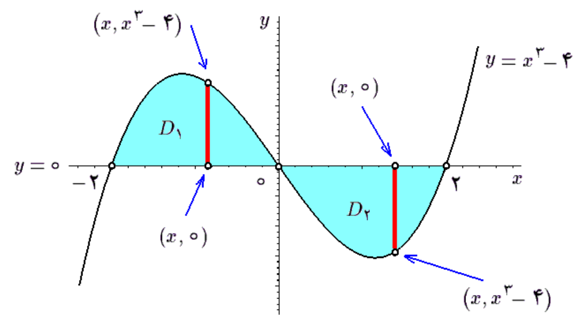
$$\ell(x) = \begin{cases} x^3-4x & \text{اگر } -2 \le x \le 0 \\ 0 & \text{اگر } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

باز هم به دلیل فنی، بهتر است D را به دو بخش D_1 و D_2 طوری تقسیم کنیم که توابع h و ℓ در آنها تک ضابطه‌ای باشند:

$D = D_1 \cup D_2$

$D_1 \ : \ -2 \le x \le 0 \,,\ 0 \le y \le x^3-4x$

$D_2 \ : \ 0 \le x \le 2 \,,\ x^3-4x \le y \le 0$



شکل ٦.٧: قسمت ۵ از مثال ٦.٢.۴

٦.٢.۵ تمرین. نشان دهید که هر یک از مجموعه‌های زیر $x-$منظم هستند و سپس حدود آنها را مشخص کنید. سعی شود توابع h و ℓ تک ضابطه‌ای باشند.

١) مجموعهٔ محدود به خطوط $x = -1$، $x = y$ و $x = -y$.

٢) مجموعهٔ محدود به خط $x + y = 2$ و محورهای مختصاتی.

٣) مجموعهٔ محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$.

۴) مجموعهٔ محدود به دو سهمی $y = x^2$ و $x = y^2$.

۵) مجموعهٔ محدود به خط $y = 3x - 2$ و سهمی $y = x^2$.

٦) مجموعهٔ محدود به خط $x+y = 2$ و دایرهٔ $x^2+y^2 = 2y$ که شامل نقطهٔ $(0/5, 1/7)$ است.

٧) مجموعهٔ محدود به خطوط $y = x$ و $y = -x$ و دایرهٔ $x^2+y^2 = 4$ که شامل نقطهٔ $(0,2)$ است.

٨) مجموعهٔ محدود به سهمی $x = y^2$ و خط $x = 4$.

٩) مجموعهٔ محدود به خطوط $x + y = 3$، $y = 3 + x$ و $x-$محور.

١٠) مجموعهٔ محدود به سهمی $x = y^2$ و خط $x + 2 = 3y$.

١١) مجموعهٔ محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و خط $x + y = 2$ که نقطهٔ $(0,0)$ را در بر دارد.

١٢) مجموعهٔ محدود به نمودار تابع $y = |\sin x|$ و $x-$محور از $x = -\pi$ تا $x = \pi$.

١٣) مجموعهٔ محدود به دو سهمی $x = 2y^2$ و $x = y^2 + 1$ واقع در ربع اول.

١۴) مجموعهٔ محدود به دوایر $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 = 4x$ واقع در ربع چهارم.

١۵*) مجموعهٔ محدود به خطوط $y = \alpha x$، $y = \beta x$، $x + y = a$ و $x + y = b$ که در آنها $\alpha < \beta$ و $a < b$. به حالتهای مختلف مساله بر اساس α و a توجه شود.

١٦) $x^{2/3} + y^{2/3} \le 1$ ١٧) $|x| + |y| \le 2$

١٨) $4 \le x^2 + 4y^2 \le 16$

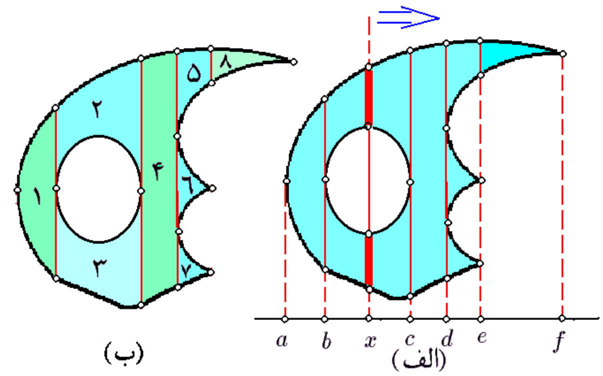
١٩) $2x \le x^2 + y^2 \le 4x \,,\ 0 \le y$

٢٠) $(x+y)^2 + 4(x-y)^2 \le 1$

٢١) $(x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2$

٦.٢.٦ قرارداد. اگر مساحت اشتراک D_1 و D_2 صفر باشد، بجای $D_1 \cup D_2$ از نماد $D_1 + D_2$ استفاده می‌کنیم.

٦.٢.٧ روش تقسیم مجموعه به قطعات $x-$منظم. فرض کنیم مجموعهٔ بسته و کراندار D در اختیار باشد و بخواهیم آنرا به قطعات $x-$منظم طوری تقسیم کنیم که مساحت ناحیهٔ مورد اشتراک بین هر دو تا از آنها صفر باشد. ابتدا مجموعه را ترسیم نموده و سپس یک خط عمود بر $x-$محور که آن محور را در x قطع می‌کند ترسیم می‌کنیم. این خط را از منتهی علیه سمت چپ به سمت راست حرکت می دهیم؛ به شکل ٦.٨– الف توجه شود. هدف مطالعهٔ محل اشتراک این خط متحرک با مجموعهٔ D می‌باشد. در هر وضعیت ممکن از انتخاب x، تعداد پاره خطهای حاصل از برخورد خط با مجموعهٔ D را می‌شماریم. مکانهایی که در آنها تعداد مولفه‌ها تغییر می‌کند را بر $x-$محور مشخص می‌کنیم. از نقاط حاصل خطوطی به موازات $y-$محور ترسیم می‌کنیم تا مجموعهٔ D را ببرند. به این ترتیب، هر یک از قطعات حاصل $x-$منظم خواهند بود. یعنی، در بر خورد با خط متحرک تنها یک پاره خط نتیجه می‌دهند.



شکل ۸.۶: تقسیم مجموعه به قطعات x−منظم

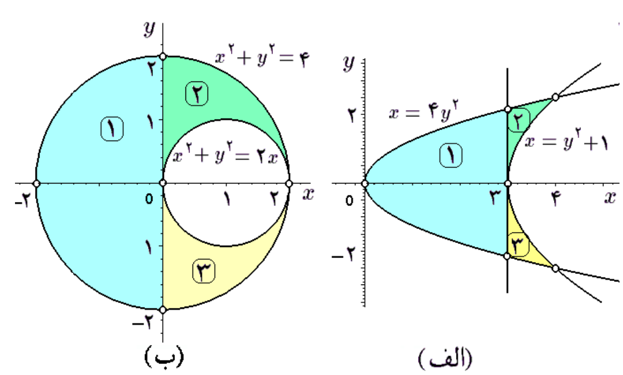
به عنوان مثال در شکل ۸.۶−الف از نقطهٔ a تا b تعداد پاره خطهای جدا شده از مجموعهٔ D توسط خط متحرک برابر یک است. اما، اگر x از b بگذرد، تارسیدن به نقطهٔ c تا d این تعداد برابر یک است. از نقطهٔ d تا e برابر سه و از e تا f برابر یک است. به این ترتیب، پس از ترسیم خطوط موازی y−محور و گذرنده از نقاط a، b، c، d، e و f به هشت مجموعهٔ کوچکتر می‌رسیم؛ به شکل ۸.۶−ب توجه شود. به دلیل کمتر شدن تعداد قطعات، مجموعه‌های ۵ و ۸ را می‌توان تلفیق نموده و به یک مجموعهٔ x−منظم واحد رسید و تعداد قطعات را به هفت تقلیل داد.

۸.۲.۶ مثال.

۱) مجموعهٔ D محدود به دو سهمی $x = y^۲ + ۳$ و $x = ۴y^۲$ را نظر بگیرید. این دو سهمی به موازات x−محورند و یکدیگر را در $(۴, ۱)$ و $(۴, −۱)$ قطع می‌کنند. زیرا

$$\begin{cases} x = ۴y^۲ \\ x = y^۲ + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^۲ = ۱ \\ x = y^۲ + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm ۱ \\ x = ۴ \end{cases}$$

(به شکل ۹.۶−الف توجه شود). اگر روند بالا را اجرا کنیم، مشاهده خواهیم کرد که اگر پای خط متحرک بین ۰ و ۳ باشد، تعداد پاره خطهای جدا شده از آن توسط مجموعهٔ D برابر یک و اگر x بین ۳ و چهار باشد، این تعداد برابر دو است. بنابراین لازم است که شکل را توسط خط $x = ۳$ برش داد. به این ترتیب D به سه قطعهٔ x−منظم تقسیم می‌گردد:



شکل ۹.۶: قسمتهای ۱ و ۲ از مثال ۸.۲.۶

$$D = D_۱ + D_۲ + D_۳$$

$$D_۱ : ۰ \le x \le ۳ ,\ -\sqrt{x}/۲ \le y \le \sqrt{x}/۲$$

$$D_۲ : ۳ \le x \le ۴ ,\ \sqrt{x - ۳} \le y \le \sqrt{x}/۲$$

$$D_۳ : ۳ \le x \le ۴ ,\ -\sqrt{x}/۲ \le y \le -\sqrt{x - ۳}$$

مثال ۲) فرض کنیم D ناحیهٔ محدود به دوایر $x^۲ + y^۲ = ۲x$ و $x^۲ + y^۲ = ۴$ است. در این صورت، اگر پای خط فرضی بین -۲ و ۰ باشد، تعداد پاره خط‌های جدا شده از خط توسط مجموعهٔ D برابر یک و اگر بین ۰ و ۲ باشد، این تعداد برابر ۲ است. بنابراین لازم است تا مجموعهٔ D را توسط خط $x = ۰$ برش دهیم. به این ترتیب D به سه بخش تقسیم می‌گردد؛ (به شکل ۹.۶−ب توجه شود) در مجموع می‌توان نوشت

$$D = D_۱ + D_۲ + D_۳$$

$$D_۱ : -۲ \le x \le ۰ ,\ -\sqrt{۴ - x^۲} \le y \le \sqrt{۴ - x^۲}$$

$$D_۲ : ۰ \le x \le ۲ ,\ \sqrt{۲x - x^۲} \le y \le \sqrt{۴ - x^۲}$$

$$D_۳ : ۰ \le x \le ۲ ,\ -\sqrt{۴ - x^۲} \le y \le -\sqrt{۲x - x^۲}$$

مثال ۳) فرض کنیم D مجموعهٔ محدود به خط $x = -۲$، سهمی $x = ۲ - y^۲$ و دایرهٔ به مرکز مبداء و شعاع یک است. در این صورت اگر خط متحرک با پایهٔ x را از منتهی علیه سمت چپ به سمت راست حرکت دهیم. مادامی که x بین -۱ و ۱ است، تعداد پاره خطهای جدا شده دو است. اگر x بین ۱و ۲ باشد این تعداد برابر یک است و اگر x بین ۱ و ۲ باشد، این تعداد برابر یک است، در نتیجه لازم است که مجموعهٔ D را توسط خطوط $x = -۱$ و $x = ۱$ برش دهیم تا D به چهار قطعهٔ x−منظم تقسیم گردد:

$$D = D_۱ + D_۲ + D_۳ + D_۴$$

$$D_۱ : -۲ \le x \le -۱, -\sqrt{۲ - x} \le y \le \sqrt{۲ - x}$$

$$D_۲ : -۱ \le x \le ۱, \sqrt{۱ - x^۲} \le y \le \sqrt{۲ - x}$$

$$D_۳ : -۱ \le x \le ۲, -\sqrt{۲ - x} \le y \le \sqrt{۱ - x^۲}$$

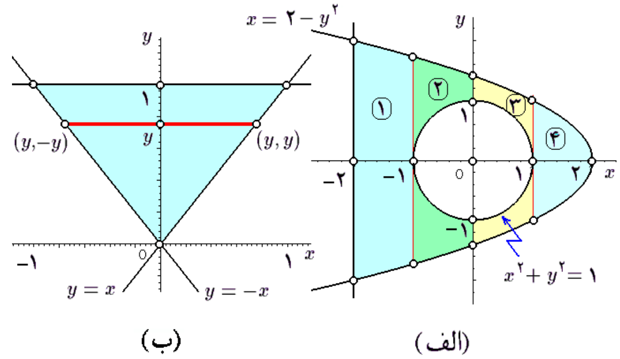
$$D_۴ : ۱ \le x \le, \sqrt{۲ - x} \le y \le \sqrt{۲ - x}$$

(به شکل ۱۰.۶−الف توجه شود) این دامنه را به شکل تفاضل دو مجموعهٔ x−منظم می‌توان نوشت. این کار در استفاده‌های بعدی (مربوط به انتگرال دوگانه) مفید خواهد بود:

$$D = D_a - D_b$$

$$D_a : -۲ \le x \le ۲, -\sqrt{۲ - x} \le y \le \sqrt{۲ - x}$$

$$D_b : -۱ \le x \le ۱, -\sqrt{۱ - x^۲} \le y \le \sqrt{۱ - x^۲}$$



شکل ۱۰.۶: الف) قسمت ۳ از مثال ۸.۲.۶ ب) تعیین حدود یک مجموعهٔ y–منظم

۹.۲.۶ تمرین. در هر مورد، مجموعهٔ D را به قطعات x–منظم طوری تقسیم کنید که توابع $h(x)$ و $\ell(x)$ آنها تک ضابطه‌ای باشند:

۱) مجموعهٔ محدود به خطوط $y = -1$، $y = 1$، $y = x$ و $y = -x$.

۲) مجموعهٔ محدود به دوایر $x^2 + y^2 = 2x$ و $x^2 + y^2 = 9$.

۳) مجموعهٔ محدود به بیضی $x^2/4 + y^2/9 = 1$ و مستطیل محیط بر آن بیضی.

۴) مجموعهٔ محدود به دو بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ و $4x^2 + y^2 = 4$.

۵) مجموعهٔ محدود به دو سهمی $y = 4x^2$ و $x = 4y^2$ که $0 \le x \le 10$.

۶) مجموعهٔ محدود به دو سهمی $y = x^2$ و $y = 8 - x^2$ که $0 \le x \le 4$.

۷) چهار ضلعی با رئوس $(3,1)$، $(1,2)$، $(0,0)$ و $(0,2)$.

۸) چهار ضلعی با رئوسی $(-2,0)$، $(2,2)$، $(2,-2)$ و $(0,0)$.

۹) $2x \le x^2 + y^2 \le 4x$ ۱۰) $1 \le |x| + |y| \le 2$

۱۱) $x^4 + y^4 \le 16$ ۱۲) $1 \le x^2 + y^2 \le 4x$

۱۳) مجموعهٔ محدود به منحنی $x = t - \sin t$، $y = 1 - \cos t$ که $0 \le t \le 2\pi$ و x–محور.

۱۴) مجموعهٔ محدود به هذلولی‌های $xy = 1$ و $xy = 2$ و خطوط $y = x$ و $y = 4x$.

۱۰.۲.۶ تعریف و تعمیم. انتخاب x در مقابل y هیچ مزیتی ندارد، بنابراین به راحتی می‌توان از مجموعهٔ y–منظم سخن گفت:

$$D \,:\, a \le y \le b \,,\, h(y) \le x \le \ell(y)$$

و قضیهٔ ۲.۲.۶ در این مورد نیز صحیح می‌باشد.

به صورت کلی می‌توان از یک مجموعهٔ u–منظم در uv–صفحهٔ سخن گفت:

۱۱.۲.۶ مثال. ۱) مجموعهٔ D از قسمت ۴ از مثال ۴.۲.۶ را در نظر بگیرید. این مجموعه y–منظم است، زیرا می‌توان نوشت

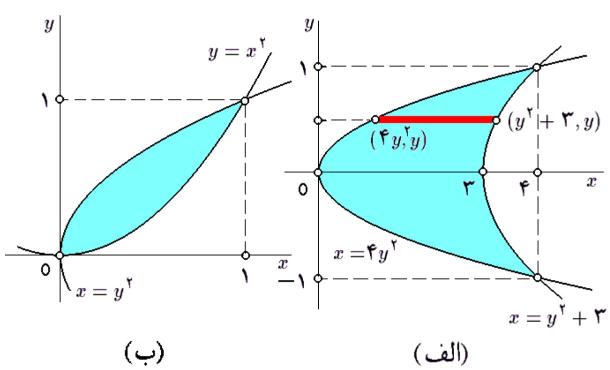
$$D \,:\, 0 \le y \le 1, -y \le x \le y$$

(به شکل ۱۰.۶—ب توجه شود.) توجه شود که این مجموعه به صورت اجتماعی از دو مجموعهٔ x–منظم نوشته شده بوده.

مثال ۲) فرض کنید D مجموعهٔ در قسمت (۱) از مثال ۸.۲.۶ باشد. در این صورت مجموعه D y–منظم است. زیرا می‌توان نوشت:

$$D \,:\, -1 \le y \le 1 \,,\, 4y^2 \le x \le y^2 + 3$$

توجه شود که قبلاً D به صورت اجتماعی از سه مجموعه x–منظم نوشته شده بود (به شکل ۱۱.۶—الف توجه شود).



شکل ۱۱.۶: قسمتهای ۲ و ۳ از مثال ۱۱.۲.۶

مثال ۳) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به دو سهمی $y = x^2$ و $x = y^2$ است. در این صورت D هم x–منظم است و هم y–منظم به شکل ۱۱.۶— ب توجه شود. در واقع، به دلیل تقارنی که بین x و y وجود دارد، داریم:

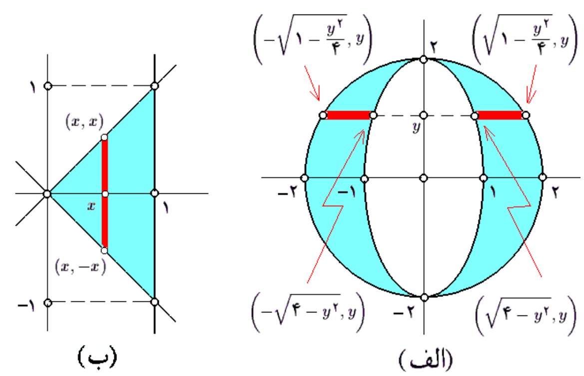
$$D \;:\; 0 \le x \le 1 \,,\, x^2 \le y \le \sqrt{x}$$
$$D \;:\; 0 \le y \le 1 \,,\, y^2 \le x \le \sqrt{y}$$

مثال ۴) فرض کنیم D ناحیهٔ محدود به دایرهٔ به معادلهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و بیضی $x^2 + y^2/4 = 1$ باشد. در این صورت D را می‌توان به صورت اجتماعی از دو مجموعهٔ D منظم نوشت: (به شکل ۱۲.۶—الف توجه شود)

$$D = D_1 + D_2$$

$$D_1 \,:\, -2 \le y \le 2,\, -\sqrt{4-y^2} \le x \le -\sqrt{1-y^2/4}$$

$$D_2 \,:\, -2 \le y \le 2,\, \sqrt{1-y^2/4} \le x \le \sqrt{4-y^2}$$



شکل ۱۲.۶: الف) قسمت ۳ از مثال ۱۱.۲.۶
ب) قسمت ۱ از مثال ۳.۳.۶

۱۲.۲.۶ تمرین. هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت مجموعه‌های y–منظم بنویسید:

۱) مجموعه‌های محدود به سهمی $x = y^2$ و خط $x = 4$.

۲) مجموعهٔ محدود به بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ و لوزی $|x| + 2|y| = 2$.

۳) مثلث با رئوس $(0,0)$، $(2,2)$ و $(1,0)$.

۴) چهارضلعی با رئوس $(2,1)$، $(1,2)$، $(0,1)$ و $(0,2)$

۵) مجموعهٔ محدود به آستروئید $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ و لوزی $|x| + |y| = 1$.

۶) شش ضلعی با رئوس $(x,y) = x+yi \in \mathbb{C}$ صادق در رابطهٔ $(x,y)^6 = 1$.

۷) $|x| + 2|y| \le 1$ ۸) $x^{2/3} + y^{2/3} \le 1$

۹) $|x+y| + |x-y| \le 2$ ۱۰) $1 \le x^2 + y^2 \le 4x$

۱۱) $(x + 2y + 1)^2 + (y + 2x + 1)^2 \le 4$

۱۲) مجموعهٔ محدود به نمودار تابع $y = \arcsin x$ بر بازهٔ $-1 \le x \le 1$ و x–محور.

۱۳) مجموعهٔ محدود به پاپیون $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ که $0 < a$.

۱۴*) مجموعهٔ محدود به نمودار توابع سینوس و کسینوس بر بازهٔ $[0; 2\pi]$.

۳.۶ انتگرال مکرر

زمان آن رسیده است که قضیه‌ای میان بر برای حل مسألهٔ انتگرال دوگانه مطرح کنیم. این مهم را ریاضیدان ایتالیایی، گی دو فوبینی به انجام رسانیده است.

۱.۳.۶ قضیه. فرض کنید D مجموعه‌ای x–منظم است:

$$D \,:\, a \le x \le b \,,\, h(x) \le y \le \ell(x)$$

و تابع $z = f(x,y)$ بر D پیوسته است. در این صورت

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{\ell(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

۲.۳.۶ چگونگی حل انتگرالهای دوگانه. ابتدا دامنه انتگرال را به نواحی x–منظم تقسیم نموده، سپس به کمک قضیهٔ فوبینی از تابع داده شده بر هر یک از آنها انتگرال می‌گیریم و سرانجام اعداد حاصل را جمع می‌زنیم. به این ترتیب، انتگرال مورد نظر به محاسبهٔ یک یا چند جفت انتگرال معمولی می‌انجامد.

۳.۳.۶ مثال. ۱) فرض کنیم D مجموعهٔ محدود به خطوط $y = x$، $y = -x$ و $x = 2$ باشد. مقدار انتگرال تابع $f(x,y) = xy^2$ را بر D محاسبه کنید.

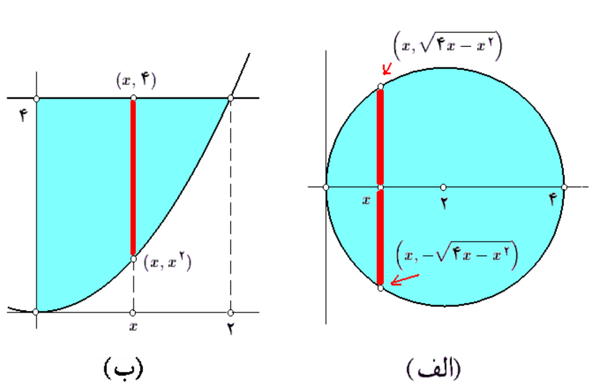
حل. ابتدا باید حدود مجموعهٔ D را مشخص نمود (به شکل ۱۲.۶–ب توجه شود). ملاحظه می‌گردد که

$$D \,:\, 0 \le x \le 2 \,,\, -x \le y \le x$$

بنابراین، بر اساس قضیهٔ فوبینی داریم

$$\iint\limits_D xy^2 dA = \int_0^2 \left[\int_{-x}^{x} xy^2 dy\right] dx = \int_0^2 \left[\frac{xy^3}{3}\right]_{y=-x}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{2}{3}x^4 dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64}{15}$$



شکل ۱۳.۶: قسمتهای ۲ و ۴ از مثال ۳.۳.۶

مثال ۲) فرض کنیم D قرص $x^2+y^2\le 4x$ است، انتگرال تابع $f(x,y)=\dfrac{\pi\sin(\pi x/4)}{\sqrt{4x-x^2}}$ را بر D محاسبه کنید.

حل. برای این منظور، ابتدا معادلهٔ $x^2+y^2=4x$ را بر حسب y حل می‌کنیم: $y=\pm\sqrt{4x-x^2}$ که شرط مثبت بودن زیر رادیکال به معنی $0\le x\le 4$ خواهد شد. بنابراین

$$D\ :\ 0\le x\le 4\,,\ -\sqrt{4x-x^2}\le y\le\sqrt{4x-x^2}$$

به شکل ۱۳.٦ــالف توجه شود. پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned}\iint_D f\,dA &= \int_0^4\left[\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}\frac{\pi\sin(\pi x/4)\,dy}{\sqrt{4x-x^2}}\right]dx\\ &= \int_0^4\left[\frac{\pi y\sin(\pi x/4)}{\sqrt{4x-x^2}}\right]_{y=-\sqrt{4x-x^2}}^{y=\sqrt{4x-x^2}}dx\\ &= 2\pi\int_0^4\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^4=1\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنیم D مجموعهٔ محدود به دو سهمی $y=x^2$، $x=y^2$ است و $f(x,y)=2xy$. انتگرال f بر D را محاسبه کنید.

حل. ابتدا با توجه به قسمت (۳) از مثال ۱۱.۲.٦ داریم

$$D\ :\ 0\le x\le 1\,,\ x^2\le y\le\sqrt{x}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\iint_D f\,dA &= \int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}2xy\,dy\right]dx=\int_0^1\left[xy^2\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx\\ &= \int_0^1\left\{x^2-x^5\right\}dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنید D قسمتی از ربع اول xyــصفحه باشد که توسط سهمی $y=4-x^2$ محدود شده است و $f(x,y)=x$. انتگرال f بر D را محاسبه کنید.

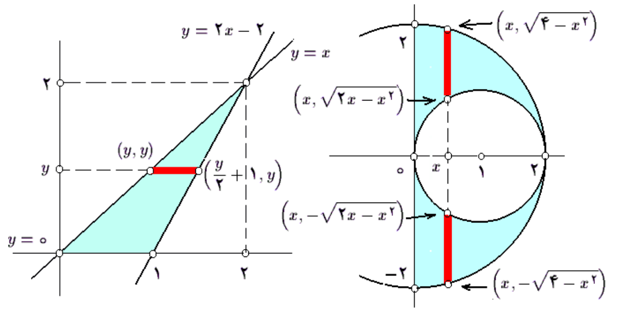
حل. برای محاسبهٔ انتگرال $f(x,y)$ بر D، ابتدا محدودهٔ D را شناسایی می‌کنیم. (به شکل ۱۳.٦ــب توجه شود) در این صورت $D\ :\ 0\le x\le 2\,,\ 0\le y\le 4-x^2$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\iint_D f\,dA &= \int_0^2\left[\int_0^{4-x^2}x\,dy\right]dx=\int_0^2\left[xy\right]_0^{4-x^2}dx\\ &= \int_0^2\left(4x-x^3\right)dx=\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=4\end{aligned}$$

مثال ۵) فرض کنید D ناحیهٔ تعریف شده در قسمت (۵) از مثال ۴.۲.٦ باشد و $f(x,y)=\dfrac{|x|}{x^2-4}$. انتگرال f بر D را محاسبه کنید.

حل. دراین صورت، چون D به دو مجموعهٔ xــمنظم تقسیم شده است، پس دو انتگرال باید حل شود:

$$\begin{aligned}\iint_D f\,dA &= \iint_{D_1}\frac{x}{x^2-4}\,dA+\iint_{D_2}\frac{-x}{x^2-4}\,dA\\ &= \int_{-2}^0\left[\int_0^{x^3-4x}\frac{x\,dy}{x^2-4}\right]dx+\int_0^2\left[\int_{x^3-4x}^0\frac{-x\,dy}{x^2-4}\right]dx\\ &= \int_{-2}^0\left[\frac{xy\,dy}{x^2-4}\right]_0^{x^3-4x}dx+\int_{-2}^0\left[\frac{-xy\,dy}{x^2-4}\right]_{x^3-4x}^0dx\\ &= \int_{-2}^0x^2\,dx+\int_0^2x^2\,dx=\int_{-2}^2x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^2=\frac{8}{3}\end{aligned}$$



(ب) (الف)

شکل ۱۴.٦: قسمتهای ٦ و ۷ از مثال ۳.۳.٦

مثال ٦) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به دوایر $x^2+y^2=2x$، $x^2+y^2=4$ و yــمحور باشد و $f(x,y)=x|y|$. انتگرال f بر D را محاسبه کنید.

حل. ابتدا D را مطالعه می‌کنیم. D مجموعهٔ xــمنظم نیست، اما قابل تبدیل به دو بخش xــمنظم است؛ به شکل ۱۴.٦ــالف توجه شود. $D=D_1\cup D_2$ که

$$\begin{aligned}D_1\ &:\ 0\le x\le 2\,,\ \sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\\ D_2\ &:\ 0\le x\le 2\,,\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le-\sqrt{2x-x^2}\end{aligned}$$

در این صورت

$$\begin{aligned}\iint_D f\,dA &= \iint_{D_1}xy\,dA+\iint_{D_2}-xy\,dA\\ &= \int_0^2\left[\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}xy\,dy\right]dx\\ &\qquad+\int_0^2\left[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}}-xy\,dy\right]dx\\ &= \int_0^2\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx+\int_0^2\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}}dx\\ &= 4\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=4\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

مثال ۷) فرض کنید D مثلثی با رئوس در $(0,0)$، $(2,2)$، و $(1,0)$ است. انتگرال تابع $f(x,y)=x\dfrac{3y+2}{y-2}$ بر D محاسبه

کنید.

حل. برای این منظور، ابتدا معادلهٔ سه ضلع مثلث را می‌یابیم. خط گذرنده از نقاط $(۰,۰)$ و $(۲,۲)$ عبارت است از نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y=x$. خط گذرنده از نقاط $(۰,۰)$ و $(۱,۰)$ عبارت است از $y=۰$. خط گذرنده از نقاط $(۲,۲)$ و $(۱,۰)$ عبارتست از $\frac{y-۰}{۲-۰}=\frac{x-۱}{۲-۱}$ و بنابراین $y=۲x-۲$. در این صورت D مجموعه‌ای y−منظم است (به شکل ۱۴.۶—ب توجه شود) زیرا می‌توان نوشت

$$D\ :\ ۰\le y\le ۲\ ;\ y\le x\le y/۲+۱$$

بنابراین

$$\iint_D f\,dA=\int_۰^۲\left[\int_y^{y/۲+۱} x\frac{۳y+۲}{y-۲}\,dx\right]dy$$

$$=\int_۰^۲\left[\frac{x^۲}{۲}\,\frac{۳y+۲}{y-۲}\right]_{x=y}^{x=y/۲+۱}dy=\frac{۱}{۸}\int_۰^۲(۳y+۲)^۲\,dy$$

$$=\frac{۱}{۸}\left[\frac{۱}{۹}(۳y+۲)^۳\right]_۰^۲=۷$$

مثال ۸) در صورتی که D مجموعهٔ محدود به هذلولی $xy=۱$ و خط $x+y=۵/۲$ باشد، انتگرال $\iint_D \frac{۸xy^۲}{۲y^۲-۵y-۲}\,dA$ را محاسبه کنید.

حل. برای روشن شدن حدود مجموعهٔ D، هذلولی و خط داده شده را بر خورد می‌دهیم:

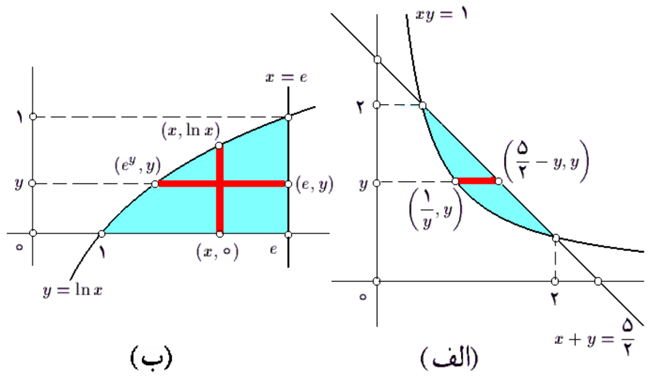
$$\begin{cases} xy=۱\\ x+y=\frac{۵}{۲}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{۵}{۲}x-x^۲=۱\\ y=\frac{۵}{۲}-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۱۶}}{۴}\\ y=\frac{۵}{۲}-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=۲,\frac{۱}{۲}\\ y=\frac{۵}{۲}-x\end{cases}$$

بنابراین، نقاط برخورد آن دو عبارتند از $(۱/۲,۲)$ و $(۲,۱/۲)$؛ به شکل ۱۵.۶—الف توجه شود. این مجموعه، x−منظم است، زیرا می‌توان نوشت:

$$D\ :\ ۱/۲\le y\le ۲\ ,\ ۱/y\le x\le ۵/۲-y$$

در نتیجه



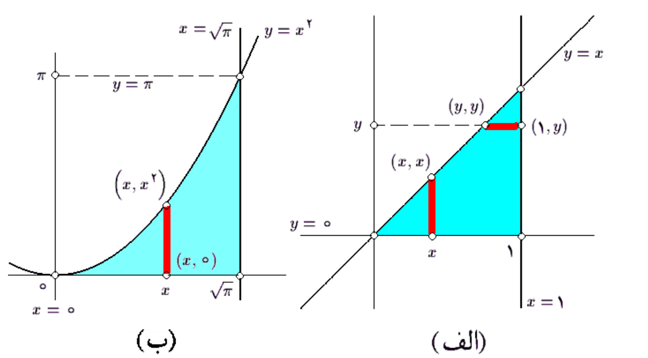
شکل ۱۵.۶: قسمتهای ۸ و ۹ از مثال ۳.۳.۶

$$\iint_D f\,dA=\int_{۱/۲}^{۲}\left[\int_{۱/y}^{۵/۲-y}\frac{۸xy^۲\,dx}{۲y^۲-۵y-۲}\right]dy$$

$$=\int_{۱/۲}^{۲}\left[\frac{۴x^۲y^۲}{۲y^۲-۵y-۲}\right]_{x=۱/y}^{x=۵/۲-y}dy$$

$$=\int_{۱/۲}^{۲}\left[۲y^۲-۵y+۲\right]dy=-\frac{۹}{۸}$$

مثال ۹) فرض کنید D مجموعهٔ محدود به نمودار $y=\ln x$، x−محور و خط $x=e$ باشد و $f(x,y)=xy^۲/(e^{۲y}-e^۲)$. انتگرال f بر D را محاسبه کنید.



شکل ۱۶.۶: قسمتهای ۱۰ و ۱۱ از مثال ۳.۳.۶

حل. در این صورت، مجموعه D هم x−منظم است و هم y−منظم؛ به شکل ۱۵.۶—ب توجه شود. در واقع

$$D\ :\ ۱\le x\le e\ ,\ ۰\le y\le\ln x\ :\ ۰\le y\le ۱\ ,\ e^y\le x\le e$$

بنابراین، می‌توان نوشت

$$\iint_D f\,dA=\begin{cases}\displaystyle\int_۱^e\left[\int_۰^{\ln x}\frac{xy^۲}{e^{۲y}-e^۲}\,dy\right]dx & (۱)\\ \displaystyle\int_۰^۱\left[\int_{e^y}^{e}\frac{xy^۲}{e^{۲y}-e^۲}\,dx\right]dy & (۲)\end{cases}$$

که (۱) غیر قابل حل است (؟!) و (۲) امید به حل دارد، یعنی

$$=\int_۰^۱\left[\frac{x^۲y^۲}{۲\left(e^{۲y}-e^۲\right)}\right]_{x=e^y}^{x=e}dy$$

$$= \int_{۰}^{۱} -\frac{y^{۲}}{۲}\,dy = \left[-\frac{y^{۲}}{۶}\right]_{۰}^{۱} = -\frac{۱}{۶}$$

مثال ۱۰) فرض کنید D مجموعه محدود به خطوط $y = x$، $y = ۰$ و $x = ۱$ است و $f(x,y) = e^{x^{۲}}$. انتگرال f بر D را محاسبه کنید.

حل. در این صورت،

$$D : ۰ \le x \le ۱\,,\ ۰ \le y \le x\ :\ ۰ \le y \le ۱\,,\ y \le x \le ۱$$

هم x–منظم است و هم y–منظم. به شکل ۱۶.۶–الف توجه شود. بنابراین، به دو طریق می‌توان نوشت:

$$\iint_D f\,dA = \begin{cases} \displaystyle\int_{۰}^{۱}\left[\int_{۰}^{x} e^{x^{۲}}\,dy\right]dx & (۱) \\ \displaystyle\int_{۰}^{۱}\left[\int_{y}^{۱} e^{x^{۲}}\,dx\right]dy & (۲) \end{cases}$$

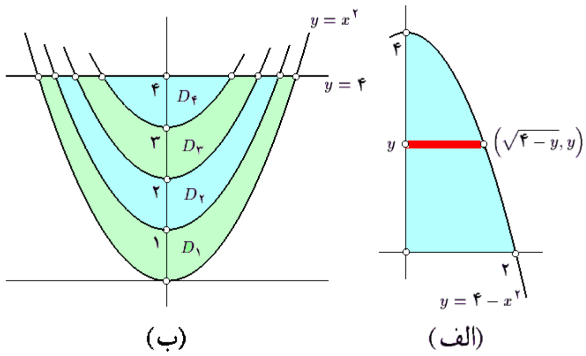
اما (۲) غیر قابل حل است (!؟) در حالی که (۱) را می‌شود حل نمود:

$$\begin{aligned} &= \int_{۰}^{۱}\left[ye^{x^{۲}}\right]_{y=۰}^{y=x} dx = \int_{۰}^{۱} xe^{x^{۲}}\,dx \\ &= \left[\frac{۱}{۲}e^{x^{۲}}\right]_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۲}(e-۱) \end{aligned}$$

مثال ۱۱) انتگرال $\int_{۰}^{\pi}\left[\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x^{۲})}{x}\,dx\right]dy$ داده شده است؛ اما قابل حل نیست! با تعویض ترتیب حدود، مقدار انتگرال را بدست آورید.

حل. پس سعی می‌کنیم دامنه D را بدست آورده و آنرا به شکل x–منظم بنویسیم روشن است که D به سهمی $x = \sqrt{y}$ خطوط $x = \sqrt{\pi}$، $y = ۰$ و $y = \pi$ محدود شده است؛ به شکل ۱۶.۶–ب توجه شود.این مجموعه را به صورت x منظم بازنویسی می‌کنیم. چون نقطه $(۰,\pi)$ در شرایط مسئله صدق نمی‌کند، پس قسمت پائینی مورد قبول می‌باشد: $D : ۰ \le x \le \sqrt{\pi}\,,\ ۰ \le y \le x^{۲}$. در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} &\int_{۰}^{\pi}\left[\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x^{۲})}{x}\,dx\right]dy = \\ &= \iint_D \frac{\sin(x^{۲})}{x}\,dA = \int_{۰}^{\sqrt{\pi}}\left[\int_{۰}^{x^{۲}} \frac{\sin(x^{۲})}{x}\,dy\right]dx \\ &= \int_{۰}^{\sqrt{\pi}}\left[y\frac{\sin(x^{۲})}{x}\right]_{y=۰}^{y=x^{۲}} dx = \int_{۰}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^{۲})\,dx \\ &= \left[-\frac{۱}{۲}\cos(x^{۲})\right]_{۰}^{\sqrt{\pi}} = ۱ \end{aligned}$$



شکل ۱۷.۶: قسمتهای ۱۲ و ۱۳ از مثال ۳.۳.۶

مثال ۱۲) انتگرال $\int_{۰}^{۲}\left[\int_{۰}^{۴-x^{۲}} \frac{xe^{۲y}}{۴-y}dy\right]dx$ را پس از تعویض ترتیب حدود حل کنید.

حل. روشن است که در اینجا D به سهمی $y = ۴ - x^{۲}$ و خطوط $y = ۰$، $x = ۰$ و $x = ۲$ محدود شده‌است:

$$D : ۰ \le y \le ۴\,,\ ۰ \le x \le \sqrt{۴-y}$$

به شکل ۱۷.۶–الف توجه شود. در این صورت

$$\begin{aligned} &\int_{۰}^{۲}\left[\int_{۰}^{۴-x^{۲}} \frac{xe^{۲y}}{۴-y}dy\right]dx = \\ &= \iint_D \frac{xe^{۲y}}{۴-y}dA = \int_{۰}^{۴}\left[\int_{۰}^{\sqrt{۴-y}} \frac{xe^{۲y}}{۴-y}dx\right]dy \\ &= \int_{۰}^{۴}\left[\frac{x^{۲}e^{۲y}}{۲(۴-y)}dx\right]_{۰}^{\sqrt{۴-y}} dy = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۴} e^{۲y}\,dy \\ &= \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲}e^{۲y}\right]_{۰}^{۴} = \frac{۱}{۴}\left(e^{۸}-۱\right) \end{aligned}$$

مثال ۱۳) انتگرال تابع $f(x,y) = [y - x^{۲}]$ را بر مجموعه $x^{۲} \le y \le ۴$ محاسبه کنید.

حل. عبارت داخل جزء صحیح را باید مطالعه کرد:

$$\begin{aligned} [y-x^{۲}] = n \quad &\Leftrightarrow \quad n \le y - x^{۲} < n + ۱ \\ &\Leftrightarrow \quad x^{۲} + n \le y < x^{۲} + n + ۱ \end{aligned}$$

که n می‌تواند هر عدد صحیح دلخواهی باشد. با توجه به محدودیت $(x,y) \in D$ مجموعهٔ D را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم (به شکل ۱۷.۶–ب توجه شود):

$$\begin{aligned} &D = D_۱ \cup D_۲ \cup D_۳ \cup D_۴ \\ &D_۱ : x^{۲} \le y < x^{۲} + ۱\,,\ y \le ۴ \\ &D_۲ : x^{۲} + ۱ \le y < x^{۲} + ۲\,,\ y \le ۴ \\ &D_۳ : x^{۲} + ۲ \le y < x^{۲} + ۳\,,\ y \le ۴ \\ &D_۴ : x^{۲} + ۳ \le y < x^{۲} + ۴\,,\ y \le ۴ \end{aligned}$$

در این صورت

$$\iint_D y - x^{2}]\, dA =$$

$$= \iint_{D_1} 0\, dA + \iint_{D_2} 1\, dA + \iint_{D_3} 2\, dA + \iint_{D_4} 3\, dA$$

$$= \iint_{D_2\cup D_3\cup D_4} dA + \iint_{D_3\cup D_4} dA + \iint_{D_4} dA$$

اما مجموعه‌های $D_2 \cup D_3 \cup D_4$ و $D_3 \cup D_4$ و D_4 همگی x−منظم هستند، زیرا

$$D_2 \cup D_3 \cup D_4\ :\ -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}\,,\ x^2 + 1 \le y \le 4$$

$$D_3 \cup D_4\ :\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\,,\ x^2 + 2 \le y \le 4$$

$$D_4\ :\ -1 \le x \le 1\,,\ x^2 + 3 \le y \le 4$$

بنابراین $\iint_D [y - x^2]\, dA$ برابر است با

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\int_{x^2+1}^{4} dy\right] dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\int_{x^2+2}^{4} dy\right] dx + \int_{-1}^{1} \left[\int_{x^2+3}^{4} dy\right] dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[3 - x^2\right] dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[2 - x^2\right] dx + \int_{-1}^{1} \left[1 - x^2\right] dx$$

$$= \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]$$

$$= 4\sqrt{3} + \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{4}{3}$$

مثال ۱۴) در صورتی که D ناحیهٔ محدود به یک قطعهٔ کامل از سیکلوئید $C\ :\ x = R(t - \sin t)\,,\ y = R(1 - \cos t)$ (به شکل ۱۸.۶ توجه شود) باشد و $f(x,y) = y$، انتگرال $f(x,y)$ را بر D محاسبه کنید.

حل. شرط $y = 0$، یعنی برخورد C با x−محور، عبارت است از $\cos t = 1$. پس یک قطعهٔ کامل از C به این معنی است که $0 \le t \le 2\pi$. مجموعهٔ D را به صورت

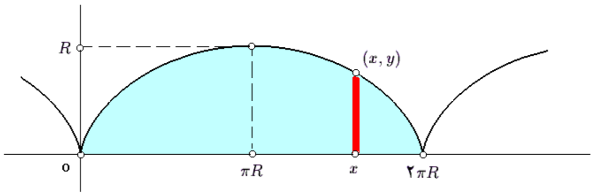
$$D\ :\ 0 \le x \le 2\pi R\,,\ 0 \le y \le R(1 - \cos t)$$

می‌توان توضیح داد. بنابراین،

$$\iint_D y dA = \int_0^{2\pi R} \left[\int_0^{R(1-\cos t)} y dy\right] dx$$

$$= \int_0^{2\pi R} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{y=R(1-\cos t)} dx$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi R} (1 - \cos t)^2\, dx$$



شکل ۱۸.۶: قسمت ۱۴ از مثال ۳.۳.۶

اکنون از تغییر متغیر $x = R(t - \sin t)$ استفاده می‌کنیم، پس $dx = R(1 - \cos t)dt$، $\begin{array}{c|cc} t & 0 & 2\pi \\ \hline x & 0 & 2\pi R \end{array}$ و بنابراین

$$= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 R(1 - \cos t)dt$$

$$= \frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} \left\{1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right\} dt$$

$$= -\frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} \left(3\cos t + \cos^3 t\right) dt + \frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 3\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= 0 + \frac{R^3}{2} \left[\frac{5}{2}t + \frac{3}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = \frac{5}{2}\pi R^3$$

شرط پیوستگی تابع در قضیهٔ ۱.۳.۶ الزامی است. به این معنی که چنانچه این شرط برقرار نباشد، ممکن است به تناقض برسیم. به مثال زیر توجه کنید.

۴.۳.۶ مثال. فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/y^2 & \text{اگر } 0 < x < y < 1 \\ -1/x^2 & \text{اگر } 0 < y < x < 1 \\ 1/y^2 & \text{در غیر این صورت، اگر } 0 < x < y < 1 \end{cases}$$

نشان دهید

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\, dy\right] dx \ne \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\, dx\right] dy$$

حل. با توجه به ضابطهٔ f، داریم

$$\int_0^1 f(x,y)\, dy = \int_0^x f(x,y)\, dy + \int_x^1 f(x,y)\, dy$$

$$= \int_0^x \frac{-1}{x^2}\, dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2}\, dy$$

$$= \left[\frac{-y}{x^2}\right]_{y=0}^{y=x} + \left[\frac{-1}{y}\right]_{y=x}^{y=1} = -1$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\, dy\right] dx = \int_0^1 -dx = -1$$

در حالی که

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,dx &= \int_0^y f(x,y)\,dx + \int_y^1 f(x,y)\,dx\\ &= \int_0^y \frac{1}{y^2}\,dx + \int_x^1 \frac{-1}{x^2}\,dx\\ &= \left[\frac{x}{y^2}\right]_{x=0}^{x=y} + \left[\frac{1}{x}\right]_{x=y}^{x=1} = 1\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right] dy = \int_0^1 dx = 1$$

۵.۳.۶ تمرین. هر یک از انتگرالهای مکرر زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2\,dy}{y^2+1}\right] dx$ ۲) $\int_0^{2\pi} \left[\int_{\sin\theta}^a r\,dr\right] d\theta$

۳) $\int_3^4 \left[\int_1^x \frac{dy}{(x+y)^2}\right] dx$ ۴) $\int_0^2 \left[\int_x^2 [x+y]\,dy\right] dx$

۵) $\int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{25-x^2}} xy\,dy\right] dx$ ۶) $\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x+y)\,dy\right] dx$

۷) $\int_{-3}^3 \left[\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2\,dx\right] dy$ ۸) $\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{16-y^2}} |x-2|\,dx\right] dy$

۹) $\int_0^2 \left[\int_0^1 (x^2+2y)\,dx\right] dy$

۱۰) $\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\right] dx$

در هر مورد، حدود انتگرال $\iint_D f(x,y)\,dA$ را بنویسید:

۱۱) D مستطیل به رئوس $(0,0)$، $(2,0)$، $(2,1)$، و $(0,1)$ است.

۱۲) D ناحیهٔ محدود به هذلولی $y^2-x^2=1$ و $x^2+y^2=9$ است و شامل مبداء است.

۱۳) D متوازی الاضلاع به رئوس $(1,2)$، $(2,4)$، $(2,7)$، و $(1,5)$ است.

۱۴) D ناحیهٔ محدود به دوایر $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=2x$ است.

۱۵) $\iint_D xy^2\,dA$ را در صورتی محاسبه کنید که D ناحیهٔ محدود به سهمی $y^2=2px$ و خط $x=p/2$ است و $p>0$.

۱۶) انتگرال تابع $f(x,y)=|xy|$ را بر قرص $x^2+y^2\le 9$ محاسبه کنید.

۱۷) در صورتی که D منطقهٔ محدود به خطوط $y=2a$، $y=a$، $y=x+a$ و $y=x$ باشد، انتگرال تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را بر D محاسبه کنید.

۱۸) در صورتی که D محدود به دو سهمی $y=x^2$ و $x=y^2$ باشد، انتگرال تابع $f(x,y)=x^2y$ را بر D محاسبه کنید.

۱۹) $\iint_D xy^2\,dA$ را در صورتی محاسبه کنید که D مثلثی به رئوس $(0,0)$، $(3,1)$ و $(2,2)$ باشد.

۲۰) در صورتی که $f(x,y)=\left(y/(x^2+y^2)\right)^3$ و D قسمتی از قرص $x^2+y^2\le 1$ باشد که بین خطوط $y=1$ و $y=1/2$ محدود شده است، انتگرال f را بر D محاسبه کنید.

۲۱) انتگرال $\iint_D xy^2\,dA$ را در صورتی محاسبه کنید که در آن $D:\ y\le 10-x^2,\ y\ge x^2,\ x\ge 0$

۲۲) اگر D مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(10,1)$ و $(1,1)$ باشد، انتگرال تابع $f(x,y)=\sqrt{xy-y^2}$ را بر D محاسبه کنید.

۲۳) مقدار $\iint_D xy\,dA$ را بشرطی محاسبه کنید که D نیمهٔ بالایی ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $(x-2)^2+y^2=1$ باشد.

۲۴) در صورتی که D دایره‌ای به شعاع a و مماس بر محورهای مختصاتی و واقع در ربع اول باشد، انتگرال تابع $f(x,y)$ با ضابطهٔ $1/\sqrt{2a-x}$ را بر D محاسبه کنید.

۲۵) انتگرال تابع $f(x,y)=x^ny^m$ را بر مستطیل محدود به خطوط $x=0$، $x=a$، $y=0$ و $y=b$ محاسبه کنید؛ که m و n اعداد طبیعی و b و a اعداد حقیقی دلخواهند.

در هر مورد، پس از تعویض ترتیب انتگرالگیری، انتگرال حاصل را محاسبه کنید:

۲۶) $\int_0^1 \left[\int_{2x}^{3x} y\,dy\right] dx$ ۲۷) $\int_0^1 \left[\int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} x\,dx\right] dy$

۲۸) $\int_0^\pi \left[\int_0^{\sin x} xy\,dy\right] dx$ ۲۹) $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx\right] dy$

۳۰) $\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt[3]{y}} \frac{x\,dx}{y\ln x}\right] dy$ ۳۱) $\int_0^1 \left[\int_y^1 x^2e^{xy}\,dx\right] dy$

۳۲) $\int_0^4 \left[\int_{\sqrt{x}}^2 \sin(\pi y^3)\,dy\right] dx$

۳۳) $\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin(x^2)\,dx\right] dy$

۳۴) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{y/2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\, dy\right] dx$

۳۵) $\displaystyle\int_1^2 \left[\int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\, dy\right] dx$

۳۶) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{\arctan x}^{\pi/4} \ln(\cos y)\, dy\right] dx$

۳۷) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 2xy\exp(yx^2)\, dy\right] dx$

۳۸) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_y^1 \frac{x^5 y}{\sqrt{1+x^2y^2}}\, dx\right] dy$

۳۹) $\displaystyle\int_1^e \left[\int_0^{\ln y} \frac{dx}{y\ln y+xy}\right] dy$

۴۰) انتگرال تابع $f(x,y)=x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}$ بر مجموعهٔ واقع در ربع اول و محدود به منحنی $x^3+y^3=1$ را محاسبه کنید.

۴۱) انتگرال تابع $f(x,y)=xy$ بر مجموعهٔ محدود به محورهای مختصاتی و منحنی زیر را محاسبه کنید:
$C\,:\, x=R\cos^3 t,\, y=R\sin^3 t,\, 0\le t\le \pi/2$.

۴۲) فرض کنید D مربع محدود به محورهای مختصاتی و دو خط به معادلهٔ $x=1$ و $y=1$ باشد و همچنین $f(x,y)=(x-y)/(x^2+y^2)$. D را به شکل x−منظم و نیز y−منظم نوشته و سپس انتگرال f را نسبت به هر یک محاسبه کنید.

۴.۶ تغییر مختصات

در بسیاری از موارد، مسایل انتگرال یا به سختی حل می‌شوند و یا اینکه اصلاً قابل حل نیستند. در چنین مواردی از روش تغییر متغییر می‌توان استفاده نمود، که در بسیاری از مواقع کمک شایانی می‌کند. تغییر متغیرهای استاندارد در انتگرال دو گانه عبارتند از تغییر مختصات قطبی و تغییر مختصات خطی، که آنها را جداگانه بررسی خواهیم کرد. به دلیل کاربرد وسیع این دو تغییر مختصات ، ابتدا آنها را تشریح می‌کنیم و در پایان به بیان صورت کلی تغییر متغیر خواهیم پرداخت.

۱.۴.۶ مختصات. بطور کلی هر گونه سعی برای توضیح و یا برای اسم گذاری مجموعهٔ نقاط را تعیین پرداخت می‌گوئیم. روشن است که اصول خاصی برای نام گذاری بایستی رعایت گردد:

۱) به همهٔ نقاط اسم نسبت داده شده؛

۲) به یک نقطه بیش از یک اسم داده نشود؛

۳) انتخاب اسامی دارای یک نظام منطقی باشد.

به بیان ریاضی، منظور از یک مختصات بر مجموعهٔ A، تابعی است یکبیک و فراگیر از A به مجموعه‌ای مشخص (نظیر $\mathbb{R}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{R}^2$ و...).

اکنون که هدف طرح مختصات در صفحه است، تعریف ذیل را ارائه می‌دهیم:

۲.۴.۶ تعریف. منظور از یک تغییر مختصات در صفحه تابعی معکوس‌پذیر $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ به شکل

$$F(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v)\big)$$

با دامنهٔ D و برد V است که به ازای هر $(u,v)\in D$ ای

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\neq 0$$

تابع عددی J را ژاکوبین تغییر مختصات F می‌نامیم.

۳.۴.۶ یادداشت. به دلیل استفادهٔ از این تغییر مختصات در محاسبهٔ انتگرال دوگانه، این شرط بر زیر مجموعه‌ای با مساحت صفر از D می‌تواند بر قرار نباشد.

۴.۴.۶ مثال. ۱) گیریم $D=V=\mathbb{R}^2$ و $F(u,v)=((u+v)/2,(u-v)/2)$. در این صورت F یک تغییر مختصات است. زیرا، اولاً F معکوس‌پذیر است $F^{-1}(x,y)=(x+y,x-y)$، و در ثانی

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left\|\begin{matrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{matrix}\right\|=\left|\frac{-1}{2}\right|=\frac{1}{2}\neq 0$$

مثال ۲) فرض کنیم $D=V=\{(u,v)\,|\,u>0,v>0\}$ و $F(u,v)=(uv,u/v)$ در این صورت F یک تغییر مختصات است، زیرا F معکوس‌پذیر است $F^{-1}(x,y)=\left(\sqrt{xy},\sqrt{x/y}\right)$ و

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left\|\begin{matrix}v & u\\ 1/v & -u/v^2\end{matrix}\right\|=2\left|\frac{u}{v}\right|$$

که تنها بر نیم خط $v=0$ تعریف نمی‌شود و از D صفر می‌شود. چون این نیم خط‌ها مساحت نمی‌سازند، F یک تغییر مختصات تعریف می‌کند.

۵.۴.۶ تمرین. در هر مورد، نشان دهید $F(u,v)=(x,y)$ یک تغییر مختصات تعریف می‌کند و مجموعهٔ D و V را مشخص کنید:

۱) $x=u,\ y=uv$ ۲) $x=u^2/v,\ y=v^2/u$

۳) $u = xy,\ \ v = x + y$ ۴) $u = ۱/x,\ \ v = ۱/y$

۵) $x = u + ۲v,\ \ y = u - ۲v$

٦) $u = \sqrt{x^۲ + y^۲},\ \ v = \arctan(y/x)$

٦.۴.٦ قضیهٔ تغییر مختصات در انتگرال دوگانه. در صورتی که F تغییر مختصاتی با دامنهٔ U، برد V و ژاکوبی J باشد و تابع $z = f(x,y)$ بر $D \subset V$ انتگرال‌پذیر باشد، و نیز اگر $D' \subseteq U$ طوری باشد که $F(D') = D$، در این صورت تابع $z = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ نیز بر D' انتگرال‌پذیر است و بعلاوه

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) J\, dudv$$

یا به اختصار $\iint_D f\, dA = \iint_{F^{-۱}(D)} (f \circ F)\, dA'$.

۷.۴.٦ مختصات قطبی. فرض کنید $M = (x,y)$ نقطه‌ای بجز مبداء در $xy-$صفحه است. فاصلهٔ M تا O را با r و زاویهٔ xOM را با θ نشان می‌دهیم؛ به شکل ۲۰.٦ توجه شود. روشن است که در این صورت

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} \sqrt{x^۲ + y^۲} = r \\ \arctan(y/x) = \theta \end{cases}$$

در مورد مبداء $O = (\circ, \circ)$ تعریف می‌کنیم $r = \theta = \circ$. به این ترتیب، تابع $F(\theta, r) = (x,y)$ تعریف می‌شود.

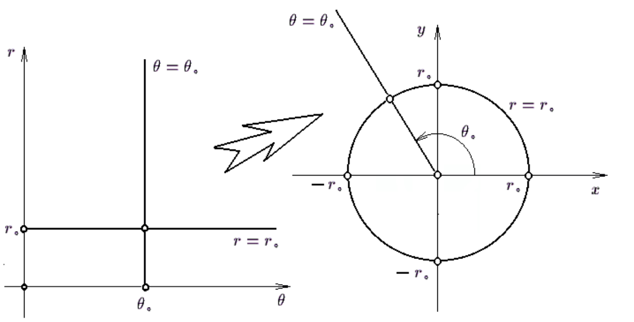
برای اینکه F یکبیک گردد، فرض می‌کنیم $\alpha \le \theta < ۲\pi + \alpha$، که α عددی است دلخواه و نیز روشن است که $\circ \le r$. پس دامنهٔ F را به صورت

$$U\ :\ \alpha \le \theta < ۲\pi + \alpha\ ,\ \circ \le r$$

تعریف می‌کنیم. بعلاوه، واضح است که برد F عبارت است از کل $xy-$صفحه و نیز

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,r)}\right| = \left|\begin{matrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{matrix}\right| = |-r| = r$$

که در همه جا بجز نقطهٔ $r = \circ$ مخالف صفر می‌باشد. بنابراین، F یک تغییر مختصات است. این تغییر مختصات را **قطبی** می‌نامیم. لازم به ذکر است که معمولاً مبنی شروع محاسبهٔ θ، یعنی α، برابر $\circ$ یا $-\pi$ است. بعلاوه، در هر صورت دامنهٔ F یک نیم نوار در $\theta r-$صفحه است. نکتهٔ دیگری که ممکن است مفید باشد، آن است که منحنی $\theta = \theta_\circ$ نیم خطی است با شروع از مبداء که با $x-$محور زاویهٔ $\theta_\circ$ می‌سازد و منحنی $r = r_\circ$ دایره‌ای به مرکز مبداء و شعاع $r_\circ$ است. به شکل ۲۰.٦ توجه شود.



شکل ۲۰.٦: تبدیل مجموعه از مختصات قطبی به دکارتی و بالعکس

۸.۴.٦ قضیه (تغییر مختصات قطبی). اگر D زیر مجموعه‌ای از $xy-$صفحه باشد که تصویر آن در $\theta r-$صفحه مجموعهٔ D' است، در این صورت

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dA = \iint\limits_{D'} f\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) r\, dA'$$

۹.۴.٦ مثال. ۱) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ است. در این صورت، انتگرال تابع $f(x,y) = \sqrt[۳]{x^۲ + y^۲}$ بر D را محاسبه کنید.

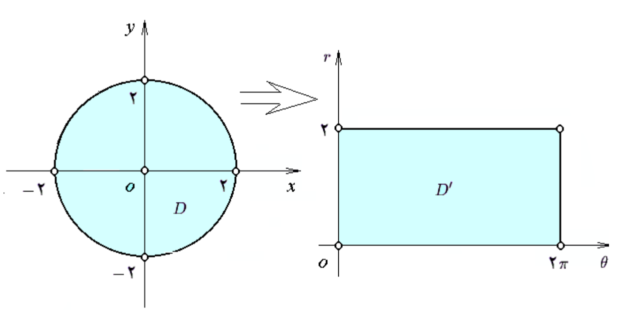
حل. از تغییر مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. چون D به صورت $x^۲ + y^۲ \le ۴$ بیان می‌گردد، پس D' (یعنی، تصویر D در $\theta r-$صفحه) عبارت است از $D'\ :\ r^۲ \le ۴$. اما r همواره نامنفی است، بنابراین $D'\ :\ \circ \le r \le ۲$. چون شرطی بر θ وجود ندارد، پس θ همهٔ تغییرات خود را می‌تواند بکند، یعنی

$$D'\ :\ \circ \le \theta \le ۲\pi\ ,\ \circ \le r \le ۲$$

پس در مجموع داریم

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D} \sqrt[۳]{x^۲ + y^۲}\, dA &= \iint\limits_{D'} \sqrt[۳]{r^۲}\, r\, dA' \\ &= \int_\circ^{۲\pi} \left[\int_\circ^{۲} r^{۵/۳} dr\right] d\theta = \int_\circ^{۲\pi} \left[\frac{۳}{۸} r^{۸/۳}\right]_\circ^{۲} d\theta \\ &= \frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۴} \int_\circ^{۲\pi} d\theta = ۳\pi\sqrt[۳]{۴} \end{aligned}$$

برای تجسم چگونگی تبدیل D به D'، به شکل ۲۱.٦ توجه شود.



شکل ۲۱.٦: قسمت ۱ از ۷.۱.٦

مثال ۲) در صورتی که D قسمتی از ربع اول باشد که به دایرهٔ $x^۲+y^۲=۹$ محدود است، مقدار انتگرال تابع $f(x,y)=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ بر مجموعهٔ D را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور، توجه می‌کنیم که D عبارت است از

$$D\,:\,x^۲+y^۲\leq ۹\,,\,۰\leq x\,,\,۰\leq y$$

برای یافتن D' بجای x از $r\cos\theta$ و بجای y از $r\sin\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$D'\,:\,r^۲\leq ۹\,,\,۰\leq r\cos\theta\,,\,۰\leq r\sin\theta$$

اما همواره $r\geq ۰$، پس

$$D'\,:\,۰\leq r\leq ۳\,,\,۰\leq\cos\theta\,,\,۰\leq\sin\theta$$

که دو شرط آخر با توجه به اینکه $۰\leq\theta\leq ۲\pi$، به معنی $۰\leq\theta\leq\pi/۲$ هستند. بنابراین، $D'\,:\,۰\leq\theta\leq\pi/۲\,,\,۰\leq r\leq ۳$ و می‌توانیم بنویسیم

$$\iint\limits_D\sqrt{۹-x^۲-y^۲}\,dA=\iint\limits_{D'}\sqrt{۹-r^۲}\,r\,dA'$$

$$=\int_۰^{\pi/۲}\left[\int_۰^۳ r\sqrt{۹-r^۲}dr\right]d\theta$$

$$=\int_۰^{\pi/۲}\left[\frac{-۱}{۳}(۹-r^۲)^{۳/۲}\right]_۰^۳ d\theta=\int_۰^{\pi/۲}۹d\theta=\frac{۹}{۲}\pi$$

مثال ۳) در صورتی که D ناحیهٔ محدود به دوایر $x^۲+y^۲=x$ و $x^۲+y^۲=۲x$ باشد و نیز $f(x,y)=۹\sqrt{x^۲+y^۲}$، انتگرال f را بر D محاسبه کنید.

حل. برای این منظور، توجه می‌کنیم که

$$D\,:\,x\leq x^۲+y^۲\leq ۲x$$

و تصویر قطبی D' آن عبارت است از:

$$D'\,:\,r\cos\theta\leq r^۲\leq ۲r\cos\theta$$

با حذف r از طرفین نامساویها، داریم

$$D'\,:\,\cos\theta\leq r\leq ۲\cos\theta$$

چون $r\geq ۰$، پس باید $۲\cos\theta$ یا $\cos\theta$ نیز نامنفی باشد. بنابراین $-\pi/۲\leq\theta\leq\pi/۲$ و لذا

$$D'\,:\,-\pi/۲\leq\theta\leq\pi/۲\,,\,\cos\theta\leq r\leq ۲\cos\theta$$

به شکل ۲۲.۶ توجه شود. در مجموع داریم

$$\iint\limits_D f\,dA=\iint\limits_D ۹\sqrt{x^۲+y^۲}\,dA=\iint\limits_{D'}۹r\,.\,r\,dA'$$

$$=۹\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[\int_{\cos\theta}^{۲\cos\theta}r^۲dr\right]d\theta=۹\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[\frac{r^۳}{۳}\right]_{\cos\theta}^{۲\cos\theta}d\theta$$

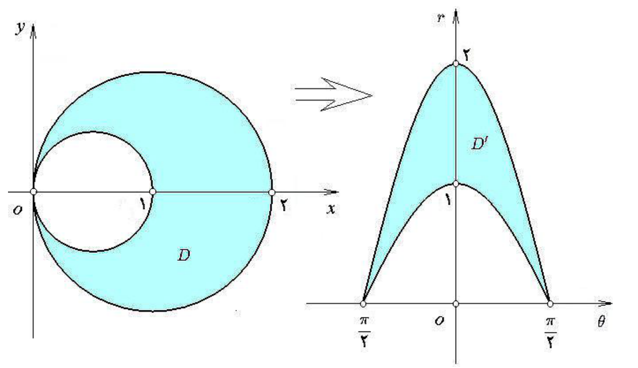
$$=۲۱\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\cos^۳\theta d\theta\overset{(۱)}{=}۲۱\int_{-۱}^{۱}\left(۱-u^۲\right)du$$

$$=۴۲\left[u-\frac{u^۳}{۳}\right]_۰^۱=۲۸$$

که در (۱) فرض شده است $u=\sin\theta$، بنابراین $du=\cos\theta d\theta$ و

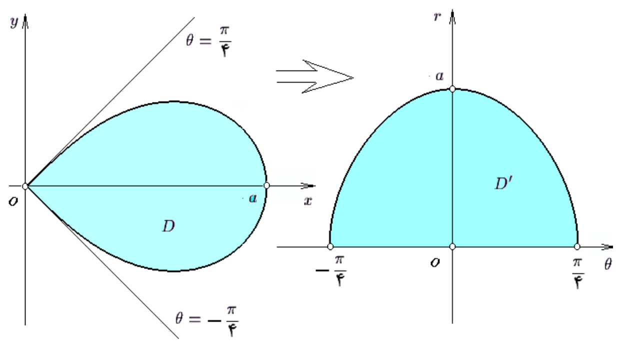
θ	$-\pi/۲$	$\pi/۲$
u	-۱	۱

.



شکل ۲۲.۶: قسمت ۳ از ۷.۱.۶

مثال ۴) با فرض اینکه D ناحیهٔ محدود به منحنی بستهٔ به معادلهٔ $(x^۲+y^۲)^۲=a^۲(x^۲-y^۲)$ است که $۰<a$ ،$۰\leq x$، انتگرال $f=\sqrt{x^۲-y^۲}$ را بر D محاسبه کنید.



شکل ۲۳.۶: قسمت ۴ از ۷.۱.۶

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$D:(x^۲+y^۲)^۲\leq a^۲(x^۲-y^۲),\,۰\leq x$$

و تصویر قبلی آنرا بدست می‌آوریم:

$$D'\;:\;(r^۲)^۲\leq a^۲(r^۲\cos^۲\theta-r^۲\sin^۲\theta)\,,\,۰\leq r\cos\theta$$
$$\;:\;r^۲\leq a^۲\cos(۲\theta)\,,\,۰\leq\cos\theta$$

(به شکل ۲۳.۶ توجه شود) پس بایستی $۰\leq\cos(۲\theta)$ و $۰\leq\cos\theta$، یعنی، الزاماً $-\pi/۲\leq ۲\theta\leq\pi/۲$، یا به بیان معادل $-\pi/۴\leq\theta\leq\pi/۴$. بنابراین،

$$D'\,:\,-\pi/۴\leq\theta\leq\pi/۴\,,\,۰\leq r\leq a\sqrt{\cos ۲\theta}$$

و بعلاوه

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^۲ - y^۲}\,dA &= \iint_{D'} \sqrt{r^۲ \cos(۲\theta)}\,r\,dA \\
&= \int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} \left[\int_۰^{a\sqrt{\cos(۲\theta)}} r^۲ \sqrt{\cos(۲\theta)}\,dr \right] d\theta \\
&= \int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} \left[\frac{r^۳}{۳} \sqrt{\cos(۲\theta)} \right]_{r=۰}^{r=a\sqrt{\cos(۲\theta)}} \\
&= \frac{a^۳}{۳} \int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} \cos^۲(۲\theta)\,d\theta \\
&= \frac{a^۳}{۳} \left[\frac{\theta}{۲} + \frac{\sin(۴\theta)}{۸} \right]_{-\pi/۴}^{\pi/۴} = \frac{a^۳}{۶}\pi
\end{aligned}
$$

به منظور مشاهدهٔ نمودار منحنی بستهٔ داده شده در $xy-$صفحه، فرم قطبی آن را به روش نقطه‌یابی ترسیم می‌کنیم: $x = a\cos\theta\sqrt{\cos(۲\theta)}$، $x = a\cos\theta\sqrt{\cos(۲\theta)}$ و

θ	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۸}$	۰	$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{\pi}{۴}$
x	۰	$a\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۱}}{۲}$	a	$a\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۱}}{۲}$	۰
y	$-a\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-a\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۱}}{۲}$	۰	$a\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۱}}{۲}$	$a\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
r	۰	$a\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۲}}{۲}$	a	$a\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$	۰

مثال ۵) انتگرال $I = \int_۰^۱ \left[\int_{\sqrt{۳}y}^{\sqrt{۴-y^۲}} \ln(x^۲+y^۲)\,dx \right] dy$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که دامنهٔ انتگرال D عبارت است از

$$
\begin{aligned}
D &: \quad ۰ \le y \le ۱\,,\ \sqrt{۳}y \le x \le \sqrt{۴-y^۲} \\
&: \quad x^۲ + y^۲ \le ۴\,,\ \sqrt{۳}y \le x\,,\ ۰ \le y
\end{aligned}
$$

به منظور بدست آوردن تصویر قطبی D، بجای x و y بر حسب r و θ قرار می‌دهیم؛ یعنی

$$
\begin{aligned}
D' &: \quad r^۲ \le ۴\,,\ \sqrt{۳}r\sin\theta \le r\cos\theta\,,\ ۰ \le r\sin\theta \\
&: \quad ۰ \le r \le ۲\,,\ \tan\theta \le \sqrt{۳}/۳\,,\ ۰ \le \sin\theta
\end{aligned}
$$

نامساوی سوم به معنی $۰ \le \theta \le \pi$ است و نامساوی دوم با توجه به این محدودیت، به معنی $۰ \le \theta \le \pi/۶$ می‌باشد. بنابراین $D' : ۰ \le r \le ۲\,,\ ۰ \le \theta \le \pi/۶$ که یک مستطیل است. پس در مجموع داریم

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \ln\left(x^۲+y^۲\right)\,dA = \iint_{D'} \ln(r^۲)\,r\,dA' \\
&= ۲\iint_{D'} r\ln r\,dA = ۲\int_۰^{\pi/۶} \left[\int_۰^۲ r\ln r\,dr \right] d\theta \\
&\overset{(۱)}{=} ۲\int_۰^{\pi/۶} \left\{ \left[\frac{r^۲}{۲}\ln r \right]_۰^۲ - \int_۰^۲ \frac{r^۲}{۲}\frac{dr}{r} \right\} d\theta \\
&= \int_۰^{\pi/۶} \left\{ ۴\ln ۲ - \left[\frac{r^۲}{۲} \right]_۰^۲ \right\} d\theta \\
&= (۴\ln ۲ - ۲)\int_۰^{\pi/۶} d\theta = \frac{\pi}{۳}(۲\ln ۲ - ۱)
\end{aligned}
$$

۱۰.۴.۶ تمرین. در تمرینات ۱ تا ۱۰، انتگرال تابع f را بر مجموعهٔ D محاسبه کنید:

۱) $f = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ و D قرص $x^۲ + y^۲ \le ۴$ است.

۲) $f = x^۲ + y^۲$ و D قسمتی از قرص $x^۲ + y^۲ \le ۹$ است که زیر $x-$محور قرار دارد.

۳) $f = ۱/(۱ + x^۲ + y^۲)$ و D ناحیهٔ محدود به دوایر $x^۲ + y^۲ = ۴$ و $x^۲ + y^۲ = ۹$ است.

۴) $f = ۱/\arctan(y/x)$ و D ناحیهٔ واقع در بالای خط $y = x$ و داخل دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۹$ است.

۵) $f = x\sqrt{x^۲ + y^۲}$ و D ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴y$ است.

۶) $f = x$ و D ناحیهٔ محدود به $x^۲+y^۲ = ۴$ و $x^۲+y^۲ = ۴x$ است.

۷) D ناحیهٔ محدود به منحنی پروانه شکل $(x^۲ + y^۲)^۲ = x^۲ - y^۲$ باشد و $f = ۱/\sqrt{۱ + x^۲ + y^۲}$.

۹) $f = e^{x^۲+y^۲}$ و D داخل دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۹$ است.

۱۰) D قسمتی از قرص $x^۲ + y^۲ \le ۹$ باشد که در ربع سوم قرار دارد و $f = \sqrt{\frac{۹-x^۲-y^۲}{۹+x^۲+y^۲}}$.

۱۱) در صورتی که $۰ \le \beta \le \pi/۲$ و a عددی مثبت باشد، انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_۰^{a\sin\beta} \left[\int_{y\cot\beta}^{\sqrt{a^۲-y^۲}} \ln(۱ + x^۲ + y^۲)\,dx \right] dy$$

انتگرالهای داده شده را محاسبه کنید:

$$۱۲)\quad \int_۰^{۲a} \left[\int_۰^{\sqrt{۲ax-x^۲}} (x^۲ + y^۲)\,dy \right] dx$$

۱۳) $\displaystyle\int_{-۱}^{a}\left[\int_{\sqrt{a^۲-y^۲}}^{\sqrt{a^۲-y^۲}} (x^۲+y^۲)^{۳/۲}\,dx\right]dy$

۱۴) $\displaystyle\int_{۰}^{۲}\left[\int_{۰}^{\sqrt{۲x-x^۲}} \frac{x+y}{x^۲+y^۲}\,dy\right]dx$

۱۵) $\displaystyle\int_{۰}^{a}\left[\int_{۰}^{\sqrt{a^۲-x^۲}} \frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\,dy\right]dx$

۱۱.۴.۶ تغییر مختصات خطی.

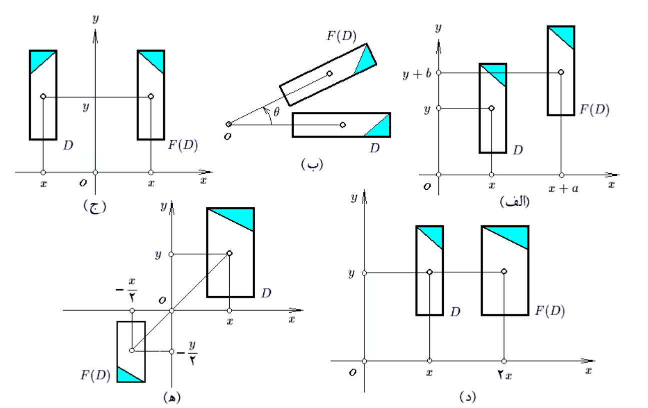
فرم کلی یک تغییر مختصات خطی عبارت است از

$$x = au + bv + c \quad , \quad y = \alpha u + \beta v + \gamma$$

که در آن

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\|\begin{array}{cc} a & b \\ \alpha & \beta \end{array}\right\| = |a\beta - \alpha b| \neq ۰$$

. دلیل اسم‌گذاری این تغییر مختصات (بنام **خطی**) آن است که اولاً شکل کلی x و y بر حسب u و v خطی است و در ثانی تصویر هر خط توسط این تغییر مختصات، یک خط است. اصولاً هر تغییر مختصات خطی یک یا چند کار به شرح زیر را انجام می‌دهد:



شکل ۲۴.۶: تغییر مختصات خطی

الف) انتقال باندازهٔ یک بردار مفروض (به شکل ۲۴.۶ — الف توجه شود): نظیر $(x,y) \mapsto (x+a, y+b)$، که انتقالی باندازهٔ $\overrightarrow{(a,b)}$ است.

ب) دوران باندازهٔ زاویه‌ای مشخص و حول نقطه‌ای مفروض (به شکل ۲۴.۶ — ب توجه شود): نظیر نگاشت با ضابطهٔ

$$(x,y) \mapsto (x\sin\theta + y\cos\theta, -x\cos\theta + y\sin\theta)$$

که دورانی باندازهٔ θ حول مبداء است.

ج) انعکاس نسبت به یک خط مفروض (به شکل ۲۴.۶ — ج توجه شود): نظیر $(x,y) \mapsto (-x, y+b)$، که انعکاسی نسبت به y−محور است.

د) تجانس باندازه‌ای مشخص و در امتداد محوری معلوم (به شکل ۲۴.۶ — د توجه شود): نظیر $(x,y) \mapsto (۲x, y)$، که تجانسی باندازهٔ ۲ و در امتداد y−محور می‌باشد.

ه) تجانس باندازه‌ای مشخص نسبت به نقطه‌ای معلوم (به شکل ۲۴.۶ — ه توجه شود): نظیر نگاشت با ضابطهٔ $(x,y) \mapsto (-x/۲, -y/۲)$، که تجانسی باندازهٔ $-۱/۲$ نسبت به مبداء می‌باشد.

مهمترین نتایج بحث بالا عبارتند از:

۱) برای تعیین تصویر یک ناحیهٔ مثلثی شکل (و یا چند ضلعی) کافی است اضلاع آنرا تصویر کنیم.

۲) تصویر یک مقطع مخروطی (دایرهٔ، بیضی، هذلولی و یا سهمی،) یک مقطع مخروطی از نوع خود است.

۳) عکس یک تغییر مختصات خطی، خود یک تغییر مختصات خطی است.

۱۲.۴.۶ مثال. ۱) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به خطوط $x+۲y=۱$، $x+۲y=۲$، $y=x$ و $y=x-۲$ است و $f=(x+۲y)^۲$ و بخواهیم انتگرال F را بر D محاسبه کنید.
حل. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$D \,:\, ۱ \leq x+۲y \leq ۲ \,,\, -۲ \leq y-x \leq ۰$$

حال فرض کنیم $u=x+۲y$، $v=y-x$. در این صورت $x=u/۳-۲v/۳$، $y=u/۳+v/۳$ و

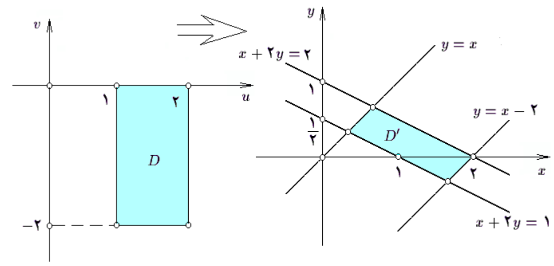
$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\|\begin{array}{cc} ۱/۳ & -۲/۳ \\ ۱/۳ & ۱/۳ \end{array}\right\| = \frac{۱}{۳} \neq ۰$$

بعلاوه، روشن است که تصویر چهار خط مشخص کنندهٔ D در uv− صفحه عبارتند از $u=۱$، $u=۲$، $v=-۲$ و $v=۰$. بنابراین $D' \,:\, ۱ \leq u \leq ۲ \,,\, -۲ \leq v \leq ۰$ به شکل ۲۵.۶ توجه شود. در نتیجه

$$\iint\limits_{D} (x+۲y)^۲\,dA = \iint\limits_{D'} \frac{u^۲}{۳}\,dA'$$

$$= \int_{۱}^{۲}\left[\int_{-۲}^{۰} \frac{u^۲}{۳}\,dv\right]du = \frac{۲}{۳}\int_{۱}^{۲} u^۲\,du = \frac{۱۴}{۹}$$

مثال ۲) در صورتی که D ناحیهٔ محدود به محورهای مختصاتی و خط به معادلهٔ $x+y=\pi$ باشد، مقدار انتگرال تابع با ضابطهٔ $f(x,y)=\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ بر D را محاسبه کنید.



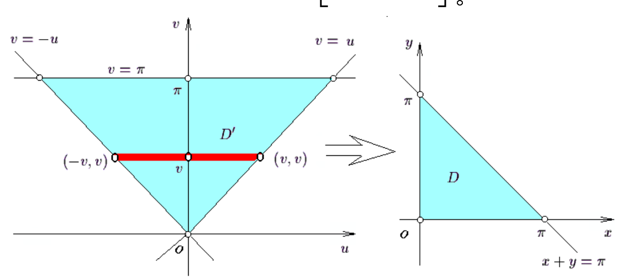
شکل ۲۵.۶: قسمت ۱ از مثال ۱۲.۴.۶

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم $u=x-y$ و $v=x+y$. در این صورت

$$\begin{cases} x = u/۲+v/۲\\ y=-u/۲+v/۲\end{cases}\qquad J = \left\|\begin{matrix}۱/۲ & ۱/۲\\ -۱/۲ & ۱/۲\end{matrix}\right\| = \frac{۱}{۲}\neq ۰$$

برای بدست آوردن D' تصویر D، سه ضلع مثلث D را تصویر می‌کنیم: اگر $x=۰$، آنگاه $u/۲+v/۲=۰$ یا $v=-u$. اگر $y=۰$، آنگاه $-u/۲+v/۲=۰$ یا $v=u$. اگر $x+y=\pi$، آنگاه $v=\pi$. پس D' ناحیهٔ محدود به سه خط $v=u$، $v=-u$ و $v=\pi$ است (به شکل ۲۶.۶ توجه شود). D' را به صورت $u-$منظم نوشته و انتگرال می‌گیریم:

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dA = \iint_{D'}\cos\left(\frac{u}{v}\right)\frac{۱}{۲}\,dA'$$
$$= \frac{۱}{۲}\int_۰^\pi\left[\int_{-v}^{v}\cos\left(\frac{u}{v}\right)du\right]dv$$
$$= \frac{۱}{۲}\int_۰^\pi\left[v\sin\left(\frac{u}{v}\right)\right]_{u=-v}^{u=v}dv$$
$$= \int_۰^\pi v\sin(۱)\,dv = \left[\frac{v^۲}{۲}\sin(۱)\right]_۰^\pi = \frac{\pi^۲}{۲}\sin(۱)$$



شکل ۲۶.۶: قسمت ۲ از مثال ۱۲.۴.۶

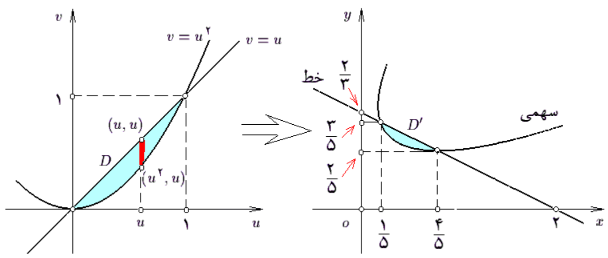
مثال ۳) انتگرال تابع $f=۲۵(۵x^۲-۲x+۵y^۲-۶y+۲)$ را بر ناحیهٔ محدود به خط راست $x+۳y=۲$ و سهمی به معادلهٔ $x^۲+۴y^۲+۲=۵y+۴xy$ محاسبه کنید.

حل. ابتدا، ضابطهٔ f را مربع کامل می‌کنیم. در این صورت $f=۲۵((۲x+y-۱)^۲+(x-۲y+۱)^۲)$. بعلاوه، ملاحظه می‌گردد که معادلهٔ خط را به شکل $۲x+y-۱=x-۲y+۱$ می‌توان نوشت و معادلهٔ سهمی را نیز به صورت $۲x+y-۱=(x-۲y+۱)^۲$. پس چنانچه فرض شود $u=x-۲y+۱$ و $v=۲x+y-۱$، آنگاه f به صورت $f=u^۲+v^۲$ است. خط به صورت $u=v$ و سهمی به صورت $v=u^۲$ تبدیل خواهد گردید. اما در این حالت

$$\begin{cases} u=۲x+y-۱\\ v=x-۲y+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=(u-۲v+۳)/۵\\ y=(۲u+v+۱)/۵\end{cases}$$
$$J=\left\|\begin{matrix}۱/۵ & -۲/۵\\ ۲/۵ & ۱/۵\end{matrix}\right\|=۱/۵$$

و D' عبارت است از $D' : ۰\le u\le ۱,\ u^۲\le v\le u$. به شکل ۲۷.۶ توجه شود. در این صورت

$$\iint_D ۲۵(۵x^۲-۲x+۵y^۲-۶y+۲)\,dA = ۵\iint_{D'}(u^۲+v^۲)\,dA'$$
$$= ۵\int_۰^۱\left[\int_{u^۲}^{u}(u^۲+v^۲)\,dv\right]du$$
$$= ۵\int_۰^۱\left[u^۲v+\frac{v^۳}{۳}\right]_{v=u^۲}^{v=u}du$$
$$= ۵\int_۰^۱\left(\frac{۴}{۳}u^۳-u^۴-\frac{۱}{۳}u^۶\right)du=\frac{۳}{۷}$$



شکل ۲۷.۶: قسمت ۳ از مثال ۱۲.۴.۶

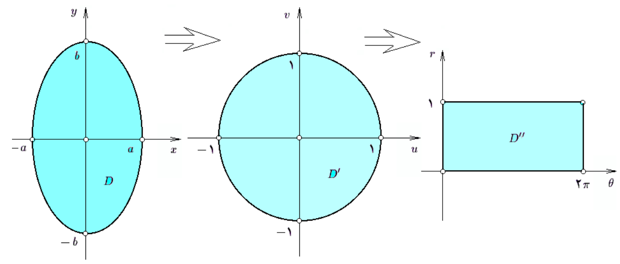
مثال ۴) در صورتی که D بیضی $x^۲/a^۲+y^۲/b^۲\le ۱$ باشد، انتگرال $\iint_D\sqrt{۱-x^۲/a^۲-y^۲/b^۲}\,dA$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور ابتدا سعی می‌کنیم $a^۲$ را از مخرج $x^۲$ و $b^۲$ را از مخرج $y^۲$ حذف می‌کنیم. این موضوع با فرض $u=x/a$، $v=y/b$ صورت می‌پذیرد. در این حالت $x=au$، $y=bv$ و $J=\left\|\begin{matrix}a & ۰\\ ۰ & b\end{matrix}\right\|=ab$ و D' تصویر D در $uv-$صفحه عبارت است از دایرهٔ $D' : u^۲+v^۲\le ۱$. در ادامه از تغییر متغیر قطبی برای تبدیل D' به یک مستطیل استفاده می‌کنیم: $u=r\cos\theta$، $v=r\sin\theta$. به شکل ۲۸.۶ توجه شود. به این ترتیب، D'' تصویر D' در $\theta r-$صفحه عبارت از $D'' : ۰\le\theta\le ۲\pi,\ ۰\le r\le ۱$ خواهد بود، و در نتیجه

$$\iint_D\sqrt{۱-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}}\,dA=$$
$$=\iint_{D'}\sqrt{۱-u^۲}ab\,dA'=\iint_{D''}\sqrt{۱-r^۲}abr\,dA''$$
$$=ab\int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^۱ r\sqrt{۱-r^۲}dr\right]d\theta$$
$$=ab\int_۰^{۲\pi}\left[\frac{-۱}{۲}\frac{(۱-r^۲)^{۳/۲}}{۳/۲}\right]_۰^۱d\theta$$

$$= \frac{ab}{۳}\int_{۰}^{۲\pi} d\theta = \frac{۲}{۳}\pi ab$$

مثال ۵) در صورتی که D ناحیهٔ محدود به دوایر $x^{۲}+y^{۲}+y=x$ و $x^{۲}+y^{۲}+۲y=۲x$ باشد، انتگرال تابع $f=x-y$ را بر D محاسبه کنید.



شکل ۲۸.٦: قسمت ۴ از مثال ۱۲.۴.٦

حل. فرض کنیم $u=x+y$ و $v=x-y$، در این صورت

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=u/۲+v/۲ \\ y=u/۲-v/۲ \end{cases}$$

$$J=\left\| \begin{matrix} ۱/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & -۱/۲ \end{matrix} \right\| = \left|\frac{-۱}{۲}\right| = \frac{۱}{۲}$$

بعلاوه، مشاهده می‌گردد که اگر بجای x و y بر حسب u و v در معادلات داده شده قرار دهیم، به عبارات $u^{۲}+v^{۲}=۲v$ و $u^{۲}+v^{۲}=۴v$ خواهیم رسید. یعنی D' عبارت است از ناحیهٔ محدود به دوایر $u^{۲}+v^{۲}=۲v$ و $u^{۲}+u^{۲}=۴v$. یعنی

$$D' : ۲v \le u^{۲}+v^{۲} \le ۴v$$

با فرض $u=r\cos\theta$ و $v=r\sin\theta$ ناحیهٔ D' را به مختصات قطبی می‌بریم:

$$\begin{aligned} D'' \quad &: \quad ۲r\sin\theta \le r^{۲} \le ۴r\sin\theta \\ &: \quad ۲\sin\theta \le r \le ۴\sin\theta\,,\ ۰\le\sin\theta \\ &: \quad ۰\le\theta\le\pi\,,\ ۲\sin\theta\le r\le ۴\sin\theta \end{aligned}$$

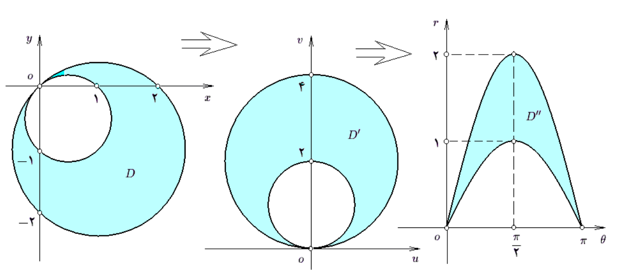
به شکل ۲۹.٦ توجه شود. به این ترتیب، داریم

$$\iint_D (x-y)\,dA = \iint_{D'} v\frac{۱}{۲}\,dA' = \frac{۱}{۲}\iint_{D''} r\sin\theta r\,dA''$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\pi}\left[\int_{۲\sin\theta}^{۴\sin\theta} r^{۲}\sin\theta dr\right]d\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\pi}\left[\frac{r^{۳}}{۳}\sin\theta\right]_{r=۲\sin\theta}^{r=۴\sin\theta} d\theta = ۱۰\int_{۰}^{\pi}\sin^{۴}\theta d\theta$$

$$= ۱۰\int_{۰}^{\pi}\left(\frac{۱-\cos(۲\theta)}{۲}\right)^{۲} d\theta = \cdots = \frac{۱۵}{۴}\pi$$



شکل ۲۹.٦: قسمت ۵ از مثال ۱۲.۴.٦

۱۳.۴.٦ تمرین.

از تابع f بر ناحیهٔ D به کمک متغیرهای جدید u و v انتگرال بگیرید:

۱) $f=\ln(x+y)$ و D به خطوط $y=x-۱$ ، $y=x+۱$ ، $x+y=۱$ و $x+y=۲$ محدود است. u را $x-y$ و v را $x+y$ بگیرید.

۲) $f=۲x^{۲}+۲xy$ و D مثلثی به رئوس $(۰,۰)$، $(۱,۱)$ و $(۲,۱)$ است. u را $۲x$ و v را $x+y$ بگیرید.

۳) $f=x+۲y$ و D به دو سهمی $x+۲y=۴x^{۲}+y^{۲}+۴xy$ و $۲x+y=x^{۲}+۴y^{۲}+۴xy$ محدود است. فرض کنید $u=x+۲y$ و $v=۲x+y$.

۴) $f=|xy|$ و D به لوزی $|x|+|y|=۱$ محدود است. فرض کنید $u=x-y$ و $v=x+y$.

۵) $f=x^{۲}+۴y^{۲}$ و D به دو بیضی $x^{۲}+۴y^{۲}=۴$ و $x^{۲}+۴y^{۲}=۱٦$ محدود است. فرض کنید $u=x$ و $v=۲y$.

٦) $f=x$ و D به بیضی $(x+۳y+۲)^{۲}+(x-y)^{۲}\le ۱$ محدود است. فرض کنید که $u=x-y$ و $v=x+۳y+۲$.

۷) $f=(x^{۲}-y^{۲})e^{(x^{۲}+y^{۲})/۲}$ و D به چهار خط $x+y=۰$، $x+y=۲$، $x=y$ و $x=۲+y$ محدود است. فرض کنید $u=x+y$ و $v=x-y$.

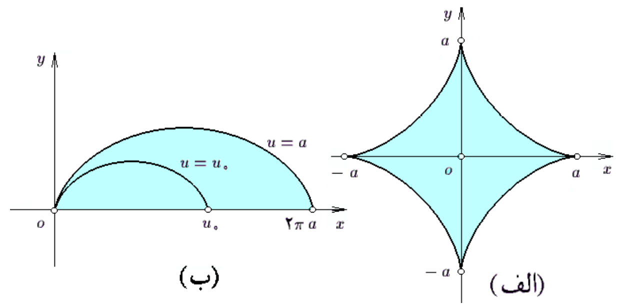
۸) $f=y-x$ و D به چهار خط $x=y+۳$، $y=x+۱$، $۳y+x=۵$ و $۳y+x=۷$ محدود است. فرض کنید $u=y-x$ و $v=۳y+x$.

۹*) $f=|\cos(x+y)|$ و D مربع $۰\le x,y\le\pi$ است. فرض کنید $u=x+y$ و $v=x-y$.

تغییر مختصات غیر استاندارد دامنهٔ وسیعی دارند و در هر مسأله به شکل متناسب با آن انتخاب می‌شوند. مثالهای زیر نمونه‌هایی از انواع آنها می‌باشند.

۱۴.۴.۶ مثال. ۱) در صورتی که D ناحیهٔ محدود به آستروئید (منحنی ستاره شکل) $x^{۲/۳}+y^{۲/۳}=a^{۲/۳}$ باشد، انتگرال تابع $f=۱/\sqrt[۳]{|xy|}$ را بر D محاسبه کنید.

حل. توجه داریم که $D: x^{۲/۳}+y^{۲/۳}\le a^{۲/۳}$ و بنابراین، می‌توان نوشت $D:(x^{۱/۳})^۲+(y^{۱/۳})^۲\le (a^{۱/۳})^۲$. به شکل ۳۰.۶–الف توجه شود.



شکل ۳۰.۶: تغییر مختصات خاص

پس اگر فرض شود $x^{۱/۳}=a^{۱/۳}u$ و $y^{۱/۳}=a^{۱/۳}v$ در این صورت $x=au^۳$، $y=av^۳$ و بعلاوه

$$J=\left\|\begin{array}{cc} ۳au^۲ & ∘ \\ ∘ & ۳av^۲\end{array}\right\|=۹a^۲u^۲v^۲$$

مجموعهٔ D' حاصل از D در uv–صفحه عبارت است از دایرهٔ تو پر $D': u^۲+v^۲\le ۱$. این مجموعه را بصورت u–منظم

$$D': -۱\le u\le ۱\,,\ -\sqrt{۱-u^۲}\le v\le\sqrt{۱-u^۲}$$

می‌توان نوشت. بنابراین

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{۱}{\sqrt[۳]{|xy|}}\,dA &= \iint\limits_{D'}\frac{۱}{\sqrt[۳]{|au^۳av^۳|}}.۹a^۲u^۲v^۲\,dA'\\
&= ۹a^{۴/۳}\int_{-۱}^{۱}\left[\int_{-\sqrt{۱-u^۲}}^{\sqrt{۱-u^۲}}|uv|\,dv\right]du\\
&\overset{(۱)}{=} ۱۸a^{۴/۳}\int_{-۱}^{۱}\left[\int_{∘}^{\sqrt{۱-u^۲}}|u|v\,dv\right]du\\
&= ۱۸a^{۴/۳}\int_{-۱}^{۱}\left[|u|.\frac{v^۲}{۲}\right]_{v=∘}^{v=\sqrt{۱-u^۲}}du\\
&= ۹a^{۴/۳}\int_{-۱}^{۱}|u|(۱-u^۲)\,du\\
&\overset{(۲)}{=} ۱۸a^{۴/۳}\int_{∘}^{۱}u(۱-u^۲)\,du=\frac{۹}{۲}a^{۴/۳}\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) و در (۲)، تابع مورد انتگرالگیری زوج و دامنهٔ انتگرال متقارن است، پس دامنه را نصف کرده و انتگرال را دو برابر می‌کنیم.

مثال ۲) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به چهار خط $x+y=۱$، $x+y=۲$، $y=۲x$ و $y=۵x$ است و همچنین $f=۱/x+۱/y$. انتگرال f را بر D محاسبه کنید.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم $u=x+y$ و $v=y/x$. در این صورت

$$\begin{aligned}J &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=۱\div\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\\
&= ۱\div\left\|\begin{array}{cc}۱ & ۱\\ -y/x^۲ & ۱/x\end{array}\right\|=\frac{x^۲}{x+y}\end{aligned}$$

بعلاوه، چون $D: ۱\le x+y\le ۲\,,\ ۲\le y/x\le ۵$. می‌توان نوشت $D': ۱\le u\le ۲\,,\ ۲\le v\le ۵$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\right)dA &= \iint\limits_{D'}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\right)\frac{x^۲}{x+y}\,dA'\\
&= \iint\limits_{D'}\frac{۱}{v}\,dA'=\int_۱^۲\left[\int_۲^۵\frac{dv}{v}\right]du\\
&= \int_۱^۲\ln\left(\frac{۵}{۲}\right)du=\ln\left(\frac{۵}{۲}\right)\end{aligned}$$

مثال ۳) در صورتی که D ناحیهٔ محدود به منحنی

$$C: x=a(t-\sin t)\,,\ y=a(۱-\cos t)\,,\ ∘\le t\le ۲\pi$$

و x–محور باشد، انتگرال $\iint_D x\,dA$ را محاسبه کنید ($a>∘$).

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم $x=u(۱-\cos t)$ و $y=u(t-\sin t)$. در این صورت، روشن است که اگر $∘\le u\le a$ و $∘\le t\le ۲\pi$، آنگاه کل ناحیهٔ D توسط این منحنیها پوشانده می‌شود؛ به شکل ۳۰.۶ — ب توجه شود. بنابراین، D' تصویر ناحیهٔ D در uv–صفحه عبارت است از

$$D': ∘\le t\le ۲\pi\,,\ ∘\le u\le a$$

و ژاکوبین تبدیل نیز عبارت است از

$$J=\left\|\begin{array}{cc}u(۱-\cos t) & t-\sin t\\ u\sin t & ۱-\cos t\end{array}\right\|=u\,|۲-۲\cos t-t\sin t|$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\,dA &= \iint\limits_{D'}u(۱-\cos t)u|۲-۲\cos t\sin t|\,dA'\\
&= \int_∘^{۲\pi}\left[\int_∘^a u^۲(۱-\cos t)\big|۲-۲\cos -t\sin t\big|\,du\right]dt\\
&= \frac{a^۳}{۳}\int_∘^{۲\pi}(۱-\cos t)\big|۲-۲\cos t-t\sin t\big|dt\end{aligned}$$

برای ادامهٔ محاسبه، باید علامت تابع $f(t)=۲-۲\cos t-t\sin t$ را بر $[∘,۲\pi]$ مشخص نمود. در این صورت، ملاحظه می‌شود که $f'(t)=۲\sin t-t\cos t$. اما، f' در نقطه‌ای مانند α که $\pi\le\alpha\le ۳\pi/۲$ صفر می‌گردد. بعلاوه، داریم

t	$∘$		π		α		۲π
$f''(t)$	$∘$	$+$	$∘$	$-$	$\alpha^۲\cos\alpha$	$-$	$∘$
$f'(t)$	$∘$	$+$	π	$+$	$∘$	$-$	-۲π
$f(t)$	$∘$	$\smile$	۴	$\frown$	$۲-۲\cos\alpha$ $-\alpha^۲\cos\alpha$	$\frown$	$∘$

بنابراین، f بر کل $[۰;۲\pi]$ مثبت است و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dA &= \frac{a^۳}{۳}\int_۰^{۲\pi}(۱-\cos t)(۲-۲\cos t-t\sin t)dt\\ &= \frac{a^۳}{۳}\Big[\frac{۱۳}{۴}t-۵\sin t+t\cos t\\ &\qquad +\frac{۵}{۴}\sin t\cos t-\frac{t}{۲}\cos^۲ t\Big]_۰^{۲\pi}dt=\frac{۵}{۲}a^۳\pi\end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنید a و b دو عدد مثبتند. در این صورت، انتگرال تابع $f(x,y)=۱/xy$ بر ناحیهٔ D محدود به خطوط $x/a=y/b$، $۴x/a=y/b$ و منحنیهای $\sqrt{x/a}+\sqrt{y/b}=۱$ و $\sqrt{x/a}+\sqrt{y/b}=۲$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور، فرض می‌کنیم $u=\sqrt{x/a}$ و $v=\sqrt{y/b}$. پس بخصوص $u\geq ۰$ و $v\geq ۰$. در این صورت معادلهٔ خط اول به معنی $u^۲=v^۲$ است که چون u,v مثبتند، به معنی $u=v$ است. به همین ترتیب خط دوم به معادلهٔ $۴u^۲=v^۲$ یا $۲u=v$ است. معادلهٔ $\sqrt{x/a}+\sqrt{y/b}=۱$ به معنی $u+v=۱$ و $۲u=v$ به معنی $u+v=۲$ می‌باشد. پس در مجموع D' تصویر D در صفحه $-uv$ عبارت است از

$$D':۱\leq u+v\leq ۲,\,u\leq v\leq ۲u$$

و به علاوه $J_۱=\left\|\begin{matrix}۲au & ۰\\ ۰ & ۲bv\end{matrix}\right\|=۴abuv$. اکنون از تغییر متغیر جدید $s=u+v$ و $t=v/u$ استفاده می‌کنیم. در این صورت D'' تصویر D' در $-st$صفحه عبارت است از

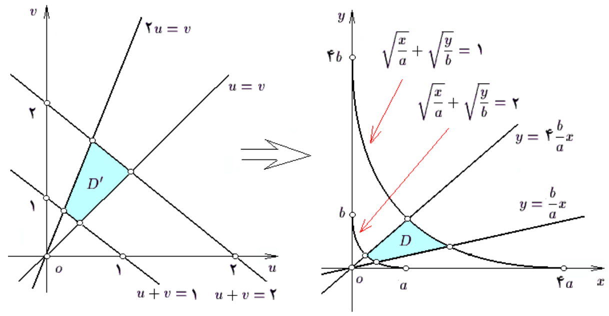
$$D''\ :\ ۱\leq s\leq ۲\,,\,۱\leq t\leq ۲$$

است و ژاکوبین آن نیز برابر

$$\begin{aligned}J_۲ &= \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|=۱\div\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}\right|\\ &= ۱\div\left\|\begin{matrix}۱ & ۱\\ -v/u^۲ & ۱/u\end{matrix}\right\|=\frac{u^۲}{u+v}\end{aligned}$$

می‌باشد. به شکل ۳۱.۶ توجه شود. در مجموع داریم

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{۱}{xy}dA &= \iint_{D'}\frac{۱}{au^۲bv^۲}۴abuv\,dA'=۴\iint_{D'}\frac{۱}{uv}dA'\\ &= ۴\iint_{D''}\frac{۱}{uv}\frac{u^۲}{u+v}dA''=۴\iint_{D''}\frac{۱}{st}dA''\\ &= ۴\int_۱^۲\left[\int_۱^۲\frac{ds}{st}\right]dt=۴\int_۱^۲\left[\frac{۱}{t}\ln s\right]_{s=۱}^{s=۲}dt\\ &= \int_۱^۲\frac{\ln ۲}{t}dt=\Big[(\ln ۲)(\ln t)\Big]_۱^۲=(\ln ۲)^۲\end{aligned}$$



شکل ۳۱.۶: تغییر مختصات خاص

مثال ۵) در صورتی که D ناحیهٔ محدود به خطوط $y=۲x$، $x=۲y$، و دو منحنی $x^۶+y^۶=x^۴y^۴$ و $x^۶+y^۶=۴x^۴y^۴$ باشد، انتگرال تابع $f(x,y)=(xy)^{-۴}$ را بر مجموعهٔ D محاسبه کنید.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم $u=x/y^۲$ و $v=y/x^۲$. در این صورت $x=u^{-۲/۳}v^{-۱/۳}$، $y=u^{-۱/۳}v^{-۲/۳}$ و

$$J=\left\|\begin{matrix}-\frac{۲}{۳}u^{-۵/۳}v^{-۱/۳} & -\frac{۱}{۳}u^{-۲/۳}v^{-۴/۳}\\ -\frac{۱}{۳}u^{-۴/۳}v^{-۲/۳} & -\frac{۲}{۳}u^{-۱/۳}v^{-۵/۳}\end{matrix}\right\|=\frac{۱}{۳}u^{-۲}v^{-۲}$$

معادلهٔ $y=۲x$ به صورت $u=۳v$ و معادلهٔ $x=۲y$ به صورت $v=۳u$ تبدیل می‌گردد. معادلهٔ $x^۶+y^۶=x^۴y^۴$ به صورت $u^۲+v^۲=۱$ و معادلهٔ $x^۶+y^۶=۴x^۴y^۴$ به صورت $u^۲+v^۲=۴$ تبدیل خواهد گردید. بنابراین D' تصویر D در $-uv$صفحه عبارت از $D':۱/۳\leq v/u\leq ۳,\ \ ۱\leq u^۲+v^۲\leq ۴$ است. چون تابع f زوج است و دامنهٔ متقارن می‌باشد، بجای D' می‌توان از نیمهٔ $D'_۱:u/۳\leq v\leq ۳u,\ \ ۱\leq u^۲+v^۲\leq ۴u$ استفاده کرد که در ربع اول واقع است، و انتگرال را دو برابر نمود. به کمک تغییر مختصات قطبی، چنانچه $\alpha=\arctan ۳$، تصویر D' در $-r\theta$صفحه عبارت از

$$D''_۱:\pi/۲-\alpha\leq\theta\leq\alpha,\,۱\leq r\leq ۲$$

خواهد بود. پس در مجموع داریم

$$\begin{aligned}\iint_D(xy)^{-۴}\,dA &= \iint_{D'}(uv)^{+۴}\frac{u^{-۲}v^{-۲}}{۳}\,dA'\\ &= \frac{۱}{۳}\iint_{D'}(uv)^۲\,dA'=\frac{۲}{۳}\iint_{D'_۱}(uv)^۲\,dA'\\ &= \frac{۲}{۳}\iint_{D''_۱}(r\cos\theta/r\sin\theta)^۲\,r\,dA''\\ &= \frac{۱}{۳}\int_{\pi/۲-\alpha}^{\alpha}\left[\int_۱^۲ r^۲\sin(۲\theta)\,dr\right]d\theta\\ &= \frac{۷}{۹}\int_{\pi/۲-\alpha}^{\alpha}\sin ۲\theta\,d\theta=\frac{۷}{۱۸}(\sin ۲\alpha-\cos ۲\alpha)=\frac{۴۹}{۹۰}\end{aligned}$$

۱۵.۴.۶ تمرین.

۱) انتگرال تابع $f(x,y)=x+y$ را بر قوس D محدود به دایرهٔ $x^۲+y^۲=x+y$ محاسبه کنید.

۲) با فرض $x = u\cos^۴ v$ و $y = u\sin^۴ v$ از تابع ثابت $f(x,y) = ۲$ بر ناحیهٔ D محدود به محورهای مختصاتی و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ انتگرال بگیرید، که a عددی مثبت است.

۳) با تغییر مختصات $x+y=u$ و $y=uv$، در انتگرال تابع $f(x,y)=xy$ بر مثلث محدود به محورهای مختصاتی و خط $x+y=۱$ آنرا محاسبه کنید.

۴) در صورتی که D ناحیهٔ محدود به دو خط $x-y=۱$، $y-x=۱$ و دو هذلولی $xy=۱$ و $xy=۲$ باشد، به کمک تغییر مختصات $u=xy$ و $v=x-y$ انتگرال تابع $f(x,y)=۱/x+۱/y$ را بر D محاسبه کنید.

۵) انتگرال تابع $f(x,y)=x+y$ بر ناحیهٔ محدود به دو خط $x+y=۴$ و $x+y=۱۲$ و دو سهمی $y=x^۲$ و $y=۲x^۲$ را محاسبه کنید.

*۶) انتگرال تابع $f(x,y) = x^۲+y^۲$ بر مجموعهٔ محدود به منحنی $x^۴+y^۴=۱$ را محاسبه کنید.

۷) انتگرال تابع $f = \exp\left(\frac{x^۲+y^۲}{xy}\right)$ بر مجموعهٔ محدود به منحنیهای $x=y^۲$، $۲x=y^۲$، $y=x^۲$ و $y/۲=x^۲$ را محاسبه کنید.

۸) انتگرال تابع $f=\sqrt{ye^x}+\sqrt{ye^{-x}}$ بر مجموعهٔ محدود به منحنی $y=e^x$، $y=۲e^x$، $y=e^{-x}$ و $y=۲e^{-x}$ را محاسبه کنید.

۹) انتگرال تابع $f=\exp\left(\sqrt{y/x}+\sqrt{xy}\right)$ بر مجموعهٔ محدود به منحنیهای $xy=۱$، $xy=۲$، $x=y$ و $y=۲x$ را محاسبه کنید.

۱۰) انتگرال تابع $f=xy$ بر مجموعهٔ محدود به منحنیهای $x=y^۳$، $۲x=y^۳$، $y=x^۳$ و $۲y=x^۳$ را محاسبه کنید.

۱۱) انتگرال تابع $f=y\ln(۱-x-y)$ بر مجموعهٔ محدود به خطوط $x=۰$، $y=۰$ و $x+y=۱$ را محاسبه کنید.

۱۲) انتگرال تابع $f=x+y$ بر مجموعهٔ محدود به سهمی $y^۲=۲x$ و خطوط $x+y=۱$ و $x+y=۲$ را محاسبه کنید.

در هر یک از موارد زیر با انتخاب مناسب a، b و α و نیز فرض $x=ar\cos^\alpha\theta$ و $y=br\sin^\alpha\theta$، مساحت ناحیهٔ داده شده را محاسبه کنید:

$$۱۳)\ \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\le\frac{x}{h}+\frac{y}{\ell}\qquad {}^*۱۴)\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^۵\le\frac{x^۲y^۲}{c^۴}$$

$$۱۵)\ \sqrt[۴]{\frac{x}{a}}+\sqrt[۴]{\frac{y}{b}}\le ۱,\ \ ۰\le x,\ \ ۰\le y$$

در هر مورد مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی‌های داده شده را محاسبه کنید:

$$۱۶)\ x+y=a,\ x+y=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x,\quad ۰<a<b,\ ۰<\alpha<\beta$$

$$۱۷)\ xy=a^۲,\ xy=۲a^۲,\ y=x,\ y=۲x,\ ۰\le x,\ ۰\le y$$

$$۱۸)\ y^۲=۲x,\ y^۲=۴x,\ x^۲=۲y,\ x^۲=۴y$$

$$۱۹)\ x^۲=ay,\ x^۲=by,\ x^۳=cy^۲,\ x^۳=dy^۲,\quad ۰<a<b,\ ۰<c<d$$

$$۲۰)\ (x/a)^{۲/۳}+(y/b)^{۲/۳}=۱,\quad (x/a)^{۲/۳}+(y/b)^{۲/۳}=۴,\ ۰\le x,\ ۰\le y$$

۲۱) فرض کنید a، b، c و d اعداد مثبت‌اند و D ناحیهٔ محدود به دایره $x^۲+y^۲=a$، $x^۲+y^۲=b$، $x^۲-y^۲=c$ و $x^۲-y^۲=d$ است. با فرض $a>b$ و $c>d$ از $f=xy$ بر D انتگرال بگیرید.

۵.۶ کاربرد انتگرال دوگانه

انتگرال دوگانه کاربردهای فراوانی در سایر قسمتهای ریاضی، فیزیک، شیمی، مهندسی و حتی بیولوژی دارد. فلسفهٔ استخراج فرمول مربوط به هر کاربرد، روشی منسجم بنام روش المانگیری است که به تشریح آن می‌پردازیم.

۱.۵.۶ روش المانگیری. فرض کنید q کمیتی عددی با متغیرهای پیوستهٔ x و y است که به ازای $(x,y)\in D$ ها قابل تعریف می‌باشد. چنانچه D را به مستطیلهای کوچک تقسیم کرده و فرض کنیم که q بر هر یک از آنها ثابت است، با ضرب کردن مساحت ناحیهٔ مستطیل شکل کوچک در مقدار کمیت داده شده در یکی از نقاط این مستطیل، ظرفیت آن مستطیل محاسبه می گردد. عبارت حاصل به شکل $q(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$ خواهد بود. با جمع زدن همهٔ این مقادیر تقریبی ظرفیت کل D محاسبه می‌گردد: $Q\approx\sum_i\sum_j q(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$. برای حصول به مقدار ظرفیت کل D کافی است از مجموع بالا حد گرفته شود، به این ترتیب

که تعداد تقسیمات x و تقسیمات y افزایش یابد و همزمان فاصله x_i های متوالی ونیز فاصلهٔ y_j های متوالی کاهش یابد:

$$Q = \lim_{\substack{N, M \to \infty \\ \Delta x_i, \Delta y_j \to ۰}} \sum_{i=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{M} q(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

با مراجعه به تعریف انتگرال دوگانه، نتیجه می‌گیرد که

$$Q = \iint_D q(x,y)\, dA$$

بنابراین، روش المانگیری را به صورت زیر می‌توان خلاصه نمود: **برای محاسبهٔ ظرفیت کل یک ناحیهٔ دو بعدی D که نقطهٔ به مختصات (x,y) از آن دارای چگالی کمیتی $q(x,y)$ است، از q بر D انتگرال دوگانه می‌گیریم.**

۲.۵.۶ محاسبهٔ مساحت نواحی صاف.

فرض کنیم D زیر مجموعه ای از صفحه است . مستطیل به ابعاد Δx_i و Δy_j را در نظر می‌گیریم. مساحت این مستطیل برابر $\Delta x_i \Delta y_j$ است. پس بنابه ۱.۵.۶ مساحت کل D برابر $\text{Area}(D) = \iint_D ۱\, dA$ است. زیرا در اینجا $q(x,y) = ۱$ و $Q = \text{Area}(D)$.

۳.۵.۶ مثال. ۱) مساحت محدود به خط $x + y = ۳a$ و سهمی $y^۲ = ۴ax$، واقع در نیم صفحهٔ $y \le ۰$ را محاسبه کنید.

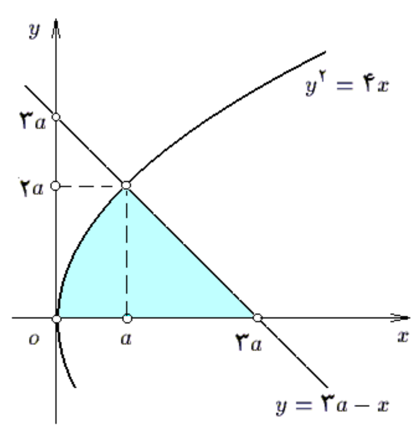
حل. برای این منظور، سهمی و خط داده شده را با هم بر خورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} y^۲ = ۴ax \\ x + y = ۳a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -۲ax \pm ۴a \\ x = ۳a - y \end{cases}$$

که نقاط $(۹a, -۶a)$ و $(a, ۲a)$ حاصل می‌گردد. بنابراین، ناحیهٔ مورد نظر عبارت است از منطقهٔ مشخص شده در شکل ۳۲.۶. این ناحیه y−منظم است، زیرا

$$D \,:\, ۰ \le y \le ۲a \,,\, y^۲/۴a \le x \le ۳a - y$$

و بنابراین مساحت آن برابر است با



شکل ۳۲.۶: قسمت ۱ از مثال ۳.۵.۶

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \iint_D dA = \int_۰^{۲a} \left[\int_{y^۲/۴a}^{۳a-y} dx \right] dy \\ &= \int_۰^{۲a} \left(۳a - y - \frac{y^۲}{۴a} \right) dy = \frac{۱۰}{۳} a^۲ \end{aligned}$$

مثال ۲) مساحت ناحیهٔمحدود به آستروئید به معادلهٔ $(x/a)^{۲/۳} + (y/b)^{۲/۳} = ۱$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم $u = (x/a)^{۱/۳}$ و نیز $v = (y/b)^{۱/۳}$. بنابراین $x = au^۳$، $y = bv^۳$ و

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} ۳au^۲ & ۰ \\ ۰ & ۳bv^۲ \end{vmatrix} = ۹abu^۲v^۲$$

و D' تصویر ناحیهٔ $D \,:\, (x/a)^{۲/۳} + (y/b)^{۲/۳} \le ۱$ در uv−صفحه عبارت از $D' \,:\, u^۲ + v^۲ \le ۱$ است. اکنون D' را به حالت قطبی تبدیل می‌کنیم؛ بنابراین $J' = r$ و

$$D'' \,:\, ۰ \le \theta \le ۲\pi \,,\, ۰ \le r \le ۱$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \iint_D dA = \iint_{D'} ۹abu^۲v^۲\, dA' \\ &= ۹ab \iint_{D''} r^۲ \cos^۲\theta r^۲ \sin^۲\theta\, dA'' \\ &= \frac{۹}{۴} ab \iint_{D''} r^۵ \sin^۲(۲\theta)\, dA'' \\ &= \frac{۹}{۴} ab \left(\int_۰^{۲\pi} \sin^۲(۲\theta) d\theta \right) \left(\int_۰^۱ r^۵ dr \right) \\ &= \frac{۹}{۴} ab \left[\frac{\theta}{۲} - \frac{\sin(۴\theta)}{۸} \right]_۰^{۲\pi} \times \left[\frac{r^۶}{۶} \right]_۰^۱ = \frac{۳}{۸}\pi ab \end{aligned}$$

مثال ۳) مساحت قسمتی از مجموعهٔ $(x^۲ + y^۲)^۲ \le ۸a^۲xy$ را محاسبه کنید که در ربع اول واقع است.

حل. برای این منظور، ناحیهٔ D داده شده را به مختصات قطبی می‌بریم:

$$D' \,:\, (r^۲)^۲ \le ۸a^۲ r\cos\theta r\sin\theta \,:\, r^۲ \le ۴a^۲ \sin(۲\theta)$$

چون بنابه فرض D در ربع اول واقع است، پس $۰ \le \theta \le \pi/۲$ و در نتیجه $D' \,:\, ۰ \le \theta \le \pi/۲ \,,\, ۰ \le r \le ۲a\sqrt{\sin(۲\theta)}$. بنابراین، در مجموع داریم

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \iint_D dA = \iint_{D'} r\, dA' \\ &= \int_۰^{\pi/۲} \left[\int_۰^{۲a\sqrt{\sin(۲\theta)}} r\, dr \right] d\theta = \int_۰^{\pi/۲} \left[\frac{r^۲}{۲} \right]_{r=۰}^{r=۲a\sqrt{\sin(۲\theta)}} \\ &= ۲a^۲ \int_۰^{\pi/۲} \sin(۲\theta) d\theta = ۲a^۲ \end{aligned}$$

۴.۵.۶ تمرین.

۱) مساحت ناحیهٔ محدود به بیضی $(x-y)^۲ + x^۲ = ۱$ را محاسبه کنید.

۲) مطلوبست مساحت محدود به خطوط $x = y$، $x = ۲y$، $x+y=a$ و $x+y=۲a$ که a عددی مثبت است.

۳) اگر a و b اعداد مثبت باشند، مساحت ناحیهٔ محدود به دو سهمی به معادلات $y^۲ = ۲ax + a^۲$ و $y^۲ = -۲bx + b^۲$ را محاسبه کنید.

۴) در صورتی که a، b، c، d، e و f اعداد دلخواه با $ae \neq bd$ باشند، مساحت بیضی به معادلهٔ

$$(ax+by+c)^۲ + (dx+ey+f)^۲ \leq ۱$$

را محاسبه کنید.

۵) اگر $۰ < a < b$، مساحت محدود به چهار سهمی $x^۲ = ay$، $x^۲ = by$، $y^۲ = ax$ و $y^۲ = bx$ را محاسبه کنید.

۶) مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $x^۴ + y^۴ = x^۲ + y^۲$ را محاسبه کنید.

۷) مساحت ناحیهٔ محدود به $(x/a)^{۲/n} + (y/b)^{۲/n} = ۱$ را محاسبه کنید، که در آن n عددی فرد است.

مساحت ناحیهٔ محدود به هر یک از منحنیها را محاسبه کنید:

۸) $(x^۲+y^۲)^۲ = x^۲ - ۳xy^۲,$

۹) $(x^۲+y^۲)^۲ = xy,$ ۱۰) $(x/a+y/b)^۵ = x^۲y^۲,$

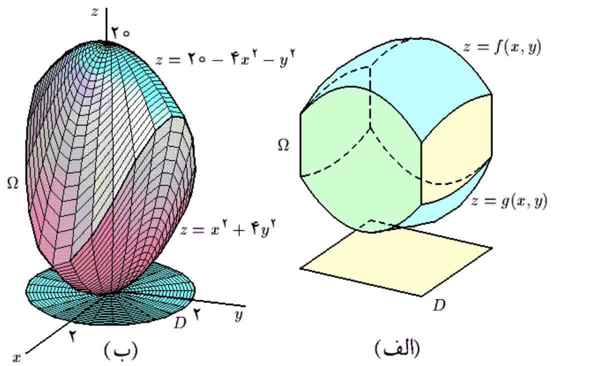
۱۱) $(x+y)^۴ = x^۲ - y^۲,\ ۰ \leq x,\ ۰ \leq y.$

۵.۵.۶ محاسبهٔ حجم اجسام سه بعدی.

در صورتی که حجم Ω محدود به نمودار توابع $z = f(x,y)$ و $z = g(x,y)$ باشد، طوری که تصویر آن بر xy−صفحه، با مجموعهٔ D است (به شکل ۳۳.۶—الف توجه شود). در این صورت حجم Ω برابر

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iint_D \left(f(x,y) - g(x,y)\right) dA$$

است، زیرا اگر مستطیلی به ابعاد Δx_i و Δy_j از D را در نظر بگیریم، آنگاه حجم قسمتی از Ω که بر این مستطیل قرار دارد تقریباً برابر حجم منشور قائمی است که بین دو صفحهٔ $z = g(x_i,y_j)$ و $z = f(x_i,y_j)$ قرار دارد و تصویر آن بر xy−صفحه برابر مستطیل $\Delta x_i \Delta y_j$ است. بنابراین، حجم آن برابر $\{f(x_i,y_j) - g(x_i,y_j)\}\Delta x_i \Delta y_j$ است و از ۱.۵.۶ با فرض $q = f - g$، نتیجهٔ مذکور حاصل می‌گردد.



شکل ۳۳.۶: الف) محاسبهٔ حجم به کمک انتگرال دوگانه ب) قسمت ۲ از مثال ۶.۵.۶

۶.۵.۶ مثال. ۱) حجم کرهٔ به شعاع R را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور کرهٔ $\Omega : x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq R^۲$ به مرکز در مبداء و شعاع R را در نظر می‌گیریم. اگر معادلهٔ معرف سطح آن (یعنی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = R^۲$) را بر حسب z حل کنیم، در این صورت $z = \pm\sqrt{R^۲ - x^۲ - y^۲}$ پس Ω جسم محدود به نمودار دو تابع $z = \pm\sqrt{R^۲ - x^۲ - y^۲}$ است که دامنهٔ تعریف هر دوی آنها $D : x^۲ + y^۲ \leq R^۲$ می‌باشد. یعنی،

$$\Omega : (x,y) \in D, -\sqrt{R^۲ - x^۲ - y^۲} \leq z \leq \sqrt{R^۲ - x^۲ - y^۲}$$

پس بنابه ۵.۵.۶ داریم

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left\{\sqrt{R^۲ - x^۲ - y^۲} - \left(-\sqrt{R^۲ - x^۲ - y^۲}\right)\right\} dA \\ &= ۲\iint_D \sqrt{R^۲ - x^۲ - y^۲}\, dA = ۲\iint_{D'} \sqrt{R^۲ - r^۲}\, r\ dA' \\ &= ۲\left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_۰^R r\sqrt{R^۲ - r^۲}\right) \\ &= ۲\,[\theta]_۰^{۲\pi}\left[\frac{-۱}{۲}\frac{۲}{۳}(R^۲ - r^۲)^{۳/۲}\right]_۰^R = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \end{aligned}$$

که در اینجا D' تصویر قطبی D می‌باشد:

$$D' : ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\ ,\ ۰ \leq r \leq R$$

مثال ۲) حجم جسم محدود به دو سهمی‌گون بیضوی به معادلات $z = x^۲ + ۴y^۲$ و $z = ۲۰ - ۴x^۲ - y^۲$ را محاسبه کنید.

حل. سهمی‌گون اول رو به بالا است و رأ سش در مبداء قرار دارد و سهمی‌گون دوم با رأس در $(۰, ۰, ۲۰)$ است و رو به پائین دارد. پس اولی f و دومی g می‌باشد.

برای یافتن D (یعنی، تصویر اشتراک آنها بر xy−صفحه) دستگاه مرکب از دو معادله را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} z = x^۲ + ۴y^۲ \\ z = ۲۰ - ۴x^۲ - y^۲ \end{cases} \Rightarrow\ ۵x^۲ + ۵y^۲ = ۲۰$$
$$\Rightarrow\ x^۲ + y^۲ = ۴$$

بنابراین $D\,:\,x^۲+y^۲\le ۴$ به شکل ۶.۳۳—ب توجه شود. در نتیجه

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left\{(۲۰-۴x^۲-y^۲)-(x^۲+۴y^۲)\right\}dA \\ &= ۵\iint_D (۴-x^۲-y^۲)\,dA = ۵\iint_{D'}(۴-r^۲)r\,dA' \\ &= ۵\left(\int_۰^{۲\pi}d\theta\right)\left(\int_۰^۲(۴r-r^۳)\,dr\right) \\ &= ۲\Big[\theta\Big]_۰^{۲\pi}\left[۲r^۲-\frac{r^۴}{۴}\right]_۰^۲ = ۸\pi \end{aligned}$$

مثال ۳) حجم قسمتی از کرهٔ توپر به مرکز مبداء و شعاع $۲a$ را بیابید که در داخل استوانهٔ $x^۲+y^۲=۲ax$ قرار می‌گیرد.

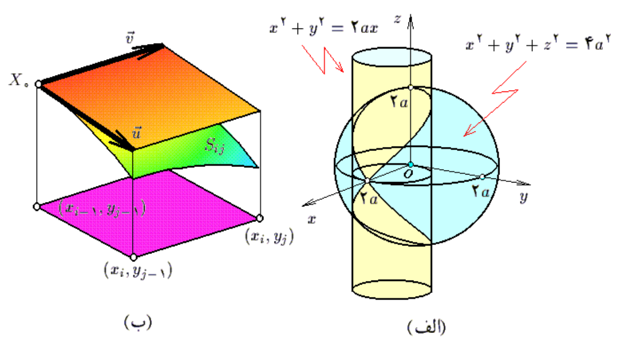
حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که معادلهٔ کرهٔ مذکور $x^۲+y^۲+z^۲=۴a^۲$ است که چنانچه بر حسب z حل شود، به $z=\pm\sqrt{۴a^۲-x^۲-y^۲}$ می‌رسیم. روشن است که در این حالت f برابر نیمهٔ بالایی و g برابر نیمهٔ پائینی است. بعلاوه، تصویر حجم مورد نظر بر xy—صفحه برابر $D\,:\,x^۲+y^۲\le ۲ax$ است (به شکل ۶.۳۴—الف توجه شود). پس حجم مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left\{\sqrt{۴a^۲-x^۲-y^۲}-\left(-\sqrt{۴a^۲-x^۲-y^۲}\right)\right\}dA \\ &= ۲\iint_D \sqrt{۴a^۲-x^۲-y^۲}\,dA \overset{(۱)}{=} ۲\iint_{D'}\sqrt{۴a^۲-r^۲}\,r\,dA' \\ &= ۲\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[\int_۰^{۲a\cos\theta} r\sqrt{۴a^۲-r^۲}dr\right]d\theta \\ &= ۲\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[\frac{-۱}{۲}\,\frac{۲}{۳}(۴a^۲-r^۲)^{۳/۲}\right]_{r=۰}^{r=۲a\cos\theta}d\theta \\ &= \frac{۱۶}{۳}a^۳\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\cos^۳\theta\,d\theta \overset{(۲)}{=} \frac{۱۶}{۳}a^۳\int_{-۱}^{۱}(۱-s^۲)ds \\ &= \frac{۱۶}{۳}a^۳\left[s-\frac{s^۳}{۳}\right]_{-۱}^{۱} = \frac{۶۴}{۹}a^۳ \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از تغییر مختصات قطبی استفاده کرده‌ایم و D' تصویر D است:

$$\begin{aligned} D' &: r^۲\le ۲ar\cos\theta\,:\,r\le ۲a\cos\theta \\ &: ۰\le r\le ۲a\cos\theta\,,\ ۰\le\cos\theta \\ &: -\pi/۲\le\theta\le\pi/۲\,,\ ۰\le r\le ۲a\cos\theta \end{aligned}$$

و در (۲) از تغییر مختصات $s=\sin t$ استفاده شده است. بنابراین $ds=\cos\theta d\theta$ و $\begin{array}{c|cc}\theta & -\pi/۲ & \pi/۲\\ \hline ۲ & -۱ & ۱\end{array}$.



شکل ۶.۳۴: الف) قسمت ۳ از مثال ۶.۵.۶

ب) مساحت یک سطح

۶.۵.۷ تمرین.

۱) حجم هرمی را بیابید که به صفحات مختصاتی و صفحهٔ $x+۲y+۳z=۶$ محدود است.

۲) حجم واقع بین سهمی‌گون بیضوی $z=x^۲+y^۲$ و صفحهٔ $z=۹$ را بیابید.

۳) اگر $a<b$، حجم قسمتی از مخروط $x^۲+z^۲=y^۲$ که بین کرات به مرکز مبداء و شعاع a و b محدود می‌گردد را محاسبه کنید.

۴) حجم محصور به دو سهمی‌گون بیضوی $y=x^۲+۳z^۲$ و $y=۸-x^۲-z^۲$ را محاسبه کنید.

۵) حجم محدود به رویه‌های $x^۲+y^۲=۴$، $z=۰$ و $z=e^{-(x^۲+y^۲)}$ محاسبه کنید.

۶) حجم جسم محدود به دو استوانهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ و $x^۲+z^۲=a^۲$ را جدا می‌کند.

۷) سهمی‌گون بیضوی $x^۲+y^۲=a^۲+z$ به چه نسبتی حجم محدود به کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۳a^۲$ را جدا می‌کند؟

۸) حجم محدود به آستروئید فضایی

$$(x/a)^{۲/۳}+(y/b)^{۲/۳}+(z/c)^{۲/۳}=۱$$

را محاسبه کنید.

۹) حجم محدود به رویه‌های $x=z^۲+y^۲$ و $x=۲z$ را محاسبه کنید.

۱۰) حجم محدود به رویهٔ $(x^۲+y^۲+z^۲)^۲=x^۲+y^۲-z^۲$ را محاسبه کنید.

۱۱) حجم جسم محدود به صفحهٔ $x+y=۱$ و رویهٔ به معادلهٔ $z=x^{۳/۲}+y^{۳/۲}$ را محاسبه کنید.

۱۲) اگر $۰<a<b$، حجم جسم محدود به سه رویهٔ به معادلات $x+y=a$، $x+y=b$ و $z^۲=xy$ را محاسبه کنید.

۱۳*) حجم بیضی‌گون

$$\sum_{i=1}^{3}(a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z+a_{i4})^2=1$$

را در صورتی محاسبه کنید که

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

۸.۵.۶ محاسبهٔ مساحت سطوح منحنی الخط.

فرض کنیم S قسمتی از نمودار تابع $z = f(x,y)$ باشد که تصویر آن بر $xy-$صفحه مجموعهٔ D است. در این حالت می‌نویسیم: $S : z = f(x,y)\,,\,(x,y) \in D$. برای محاسبهٔ مساحت سطح S، قسمت کوچکی از آن را در نظر می‌گیریم که تصویرش بر $xy-$صفحه برابر مستطیل $[x_{i-1};x_i]\times[y_{j-1};y_j]$ است. بردار $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1,0,(\partial f/\partial x)(x_i,y_i))}\Delta x_i$ در نقطهٔ $X_0 = (x_i,y_i,f(x_i,y_i))$ به S مماس است و تصویر آن بر $xy-$صفحه برابر ضلع $[x_{i-1};x_i]\times\{y_{j-1}\}$ می‌باشد. به صورت مشابه بردار $\mathbf{v} = \overrightarrow{(0,1,(\partial f/\partial y)(x_i,y_i))}\Delta y_j$ در نقطهٔ X_0 به S مماس است و تصویر آن بر $xy-$صفحه برابر با ضلع $\{x_{i-1}\}\times[y_{j-1};y_j]$ می‌باشد. بنابراین مساحت قسمت مورد نظر از سطح S را می‌توان تقریباً برابر با مساحت مستطیل استوار بر بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دانست (به شکل ۳۵.۶—الف توجه شود). پس با توجه به این که مساحت این مستطیل برابر اندازهٔ ضرب خارجی $\mathbf{u}$ در $\mathbf{v}$ است، داریم:

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S_{ij}) &\approx \\
\approx\ \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| &= \left\|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & (\partial f/\partial x)(x_i,y_i)\Delta x_i \\ 0 & 1 & (\partial f/\partial y)(x_i,y_i)\Delta y_j \end{vmatrix}\right\| \\
&= \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2}\;\Delta x_i\Delta y_j
\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به ۱.۵.۶ نتیجه می‌گیریم که

$$\text{Area}(S) = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

۹.۵.۶ مثال. ۱) مساحت سطح کرهٔ به شعاع R را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور، مساحت نیمهٔ بالایی کره را محاسبه نمود و حاصل را دو برابر می‌کنیم. بنابراین، فرض می‌کنیم

$$S_{1/2} : z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,,\,(x,y)\in D$$

که از مثبت فرض نمودن عبارت زیر علامت انتگرال نتیجه می‌شود: $D : x^2+y^2 \le R^2$. بنابراین

$$\text{Area}(S) = 2\,\text{Area}(S_{1/2})$$

$$\begin{aligned}
&= 2\iint\limits_D \left\{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2\right\}^{1/2} dA \\
&= 2R\iint\limits_D \frac{dA}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \overset{(1)}{=} 2R\iint\limits_{D'} \frac{r\,dA'}{\sqrt{R^2-r^2}} \\
&= 2R\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}\right) \\
&= 2R\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} \times \Big[-\sqrt{R^2-r^2}\Big]_0^R = 4\pi R^2
\end{aligned}$$

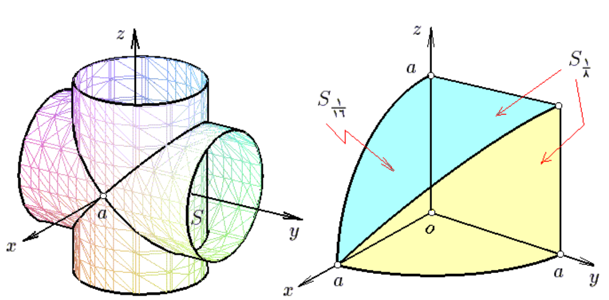
که $D' : 0 \le \theta \le 2\pi\,,\ 0 \le r \le R$ و در (۱) از تغییر مختصات قطبی استفاده شده است.

مثال ۲) مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ را بیابید که توسط استوانهٔ $x^2+y^2 = 2x$ جدا شده است.

حل. رویهٔ مورد نظر قسمتی از نمودار تابع $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ است که تصویر آن بر $xy-$صفحه برابر قرص $D : x^2+y^2 \le 2x$ می‌باشد. چون D قرصی به شعاع یک است. بنابراین

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S) &= \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dA \\
&= \iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dA = \sqrt{2}\times\iint\limits_D dA \\
&= \sqrt{2}\,\text{Area}(D) = \sqrt{2}\times\pi\times 1^2 = \pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید Ω جسم محدود به دو استوانهٔ مستدیر $x^2+y^2 = a^2$ و $x^2+z^2 = a^2$ است و S سطح خارجی آن می‌باشد. مساحت S را محاسبه کنید.



شکل ۳۵.۶: محاسبهٔ مساحت یک سطح به کمک انتگرال دوگانه

حل. با تعویض x و $-x$، یا با تعویض y و $-y$ و یا با تعویض z و $-z$، هیچ تغییری در صورت مسأله مشاهده نمی‌گردد. بنابراین قسمتی که در یک هشتم اول قرار دارد را می‌توان در نظر گرفت، مساحت آن را محاسبه نمود و سپس حاصل را هشت برابر کرد؛ به شکل ۳۵.۶—ب توجه شود. اگر این بخش از رویه را $S_{1/8}$

بنامیم، ملاحظه می‌کنیم که با تعویض y و z تغییر نمی‌کند. بنابراین، نیمهٔ بالایی را می‌توان در نظر گرفت و مساحت آن را دو برابر نمود. اگر این بخش را $S_{۱/۱۶}$ بنامیم، در این صورت

$$S_{۱/۱۶} \,:\, z = \sqrt{a^۲ - x^۲}\,,\ (x,y) \in D$$ که در آن

$$D \,:\, ۰ \le x \le a\,,\ ۰ \le y \le \sqrt{a^۲ - x^۲}$$

بنابراین، در مجموع داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(S) &= ۱۶\mathrm{Area}(S_{۱/۱۶}) \\
&= ۱۶ \iint\limits_D \sqrt{۱ + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}\right)^۲ + (۰)^۲}\, dA \\
&= ۱۶ \iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}\, dA \\
&= ۱۶a \int_۰^a \left[\int_۰^{\sqrt{a^۲ - x^۲}} \frac{dy}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}\right] dx \\
&= ۱۶a \int_۰^a \left[\frac{y}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}\right]_۰^{\sqrt{a^۲ - x^۲}} dx = ۱۶a^۲
\end{aligned}$$

۱۰.۵.۶ تمرین.

۱) مساحت قسمتی از صفحهٔ $x + z = ۱$ را بیابید که توسط استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = a^۲$ جدا می‌شود.

۲) مساحت قسمتی از کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = R^۲$ را بیابید که بالای صفحهٔ $z = R/۲$ قرار دارد.

۳) مساحت قسمتی از نیمکرهٔ $z = \sqrt{۴R^۲ - x^۲ - y^۲}$ را بیابید که توسط استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲Rx$ بریده شده است.

۴) در صورتی که Ω حجم جسم محدود به مخروط قائم $z^۲ = x^۲ + y^۲$، صفحهٔ $z = ۴$ و S سطح خارجی Ω باشد، مساحت S را محاسبه کنید.

۵) مساحت قسمتی از مخروط $x^۲ = ۴(z^۲ + y^۲)$ که توسط سهمی‌گون بیضوی $x = z^۲ + y^۲$ جدا شده است را بیابید.

۶) مساحت رویهٔ $|x| + |y| + |z| = ۱$ را محاسبه کنید.

۷) مساحت قسمتی از کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ که بین دو مخروط $x^۲ + y^۲ = ۲z^۲$ و $x^۲ + y^۲ = ۸z^۲$ قرار دارد را محاسبه کنید.

۱۱.۵.۶ محاسبهٔ متوسط یک میدان اسکالر. در اصطلاح فیزیک، تابع چند متغیره را میدان برداری می‌نامند. به این معنی که به هر نقطه از فضا اسکالری (عددی) نسبت داده می‌شود؛ نظیر میدان اسکالر دما، چگالی جرم و یا چگالی بار الکتریکی. فرض کنید D یک جسم مادی دو بعدی است (یعنی، بعد سوم آن به هر دلیلی مورد توجه نیست) و نقطهٔ (x,y) از D دارای چگالی کمیت $f(x,y)$ است. در این صورت مقدار کمیت حاضر در مستطیل $[x_{i-۱};x_i] \times [y_{j-۱};y_j]$ تقریباً برابر $f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j$ است و در نتیجه، بنابه ۱.۵.۶، Q_{total} ظرفیت کل D برابر $\iint\limits_D f(x,y)dA$ است. پس مقدار متوسط f بر D، برابر این مقدار تقسیم بر مساحت D می‌باشد:

$$Q_{\text{mean}} := \frac{Q_{\text{total}}}{\mathrm{Area}(D)} = \left(\iint\limits_D f(x,y)\,dA\right) \div \left(\iint\limits_D dA\right)$$

۱۲.۵.۶ مثال. مثال ۱) فاصله متوسط نقاط مجموعهٔ D محدود به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = R^۲$ واقع در ربع اول تا مبداء را بدست آورید.

حل. چون فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه (x,y) از D تا مبداء برابر با $f(x,y) = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ است، متوسط خواسته شده چنین است:

$$\begin{aligned}
d_{\text{mean}} &= \left(\iint\limits_D \sqrt{x^۲ + y^۲}\,dA\right) \div \left(\iint\limits_D dA\right) \\
&= \frac{۴}{\pi R^۲} \iint\limits_D \sqrt{x^۲ + y^۲}\,dA = \frac{۴}{\pi R^۲} \iint\limits_{D'} r^۲\,dA' \\
&= \frac{۴}{\pi R^۲} \left(\int_۰^{\pi/۲} d\theta\right) \left(\int_۰^R r^۲ dr\right) = \frac{۲}{۳}R
\end{aligned}$$

که D' تصویر قطبی D در $r\theta-$صفحه می‌باشد.

مثال ۲) تپه‌ای از یک جنس چگال ساخته شده است به نحوی که قاعدهٔ آن به شکل بیضی $x^۲/a^۲ + y^۲/b^۲ = ۱$ است و ارتفاع در نقطهٔ (x,y) از D برابر $z = h\left(۱ - x^۲/a^۲ - y^۲/b^۲\right)$ می‌باشد. اگر فشار وارد از یک سانتی مکعب از تپه بر قاعدهٔ آن را $P_۰$ بنامیم، فشار متوسط وارد بر قاعدهٔ تپه را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور کافی است توجه شود که بر مستطیل کوچک $[x_{i-۱};x_i] \times [y_{j-۱};y_j]$ که به مساحت $\Delta x_i \Delta y_j$ می‌باشد، ستونی به ارتفاع $z(x_i,y_j)$ قرار دارد که به اندازهٔ $f = P_۰ z(x_i,y_j)$ واحد بر قاعدهٔ تپه فشار وارد می‌کند. پس بنابه ۱.۵.۶، فشار متوسط عبارت است از

$$\begin{aligned}
P_{\text{mean}} &= \left(\iint\limits_D P_۰ h \left(۱ - \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲}\right) dA\right) \div \left(\iint\limits_D dA\right) \\
&= \frac{hP_۰}{\pi ab} \iint\limits_D \left(۱ - \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲}\right) dA \\
&\overset{(۱)}{=} \frac{hP_۰}{\pi ab} \iint\limits_{D'} (۱ - r^۲)abr\,dA' \\
&= \frac{hP_۰}{\pi} \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right) \left(\int_۰^۱ r(۱ - r^۲)dr\right) = \frac{hP_۰}{۲}
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $x = ar\cos\theta$ و نیز $y = br\sin\theta$. بنابراین $J = abr$ و D' تصویر D در $r\theta-$صفحه

عبارت از $D' \;:\; ۰ \le r \le ۱, \le \theta \le ۲\pi$ است. بعلاوه، می‌دانیم که مساحت D برابر π ضرب در حاصلضرب نیمقطرهای آن می‌باشد.

۳) فرض کنید D مجموعه‌ای محدود به y–محور، نمودار تابع $y = x^۳$ و خط $y = ۸$ است که نقطهٔ $(x, y) \in D$ دارای دمای $T(x, y) = x + ۲y$ است. چنانچه این جسم را در یک محیط خلاء قرار دهیم تا به دمای پایداری برسد، در این صورت دمای همهٔ نقاط آن ثابت خواهد شد). این دما را محاسبه کنید.
حل. توجه داریم که $D \;:\; ۰ \le x \le ۲, x^۳ \le y \le ۸$ و هدف محاسبهٔ متوسط T بر D است بنابراین

$$\begin{aligned}
T_{\text{mean}} &= \left(\iint\limits_D (x + ۲y)\, dA\right) \div \left(\iint\limits_D dA\right) \\
&= \left(\int_۰^۲ \left[\int_{x^۳}^۸ (x + ۲y) dy\right] dx\right) \div \left(\int_۰^۲ \left[\int_{x^۳}^۸ dy\right] dx\right) \\
&= \left(\int_۰^۲ (۸x - x^۴ + ۶۴ - x^۶) dx\right) \div \left(\int_۰^۲ (۸ - x^۳) dx\right) \\
&= \frac{۴۱۷۶}{۳۵} \div ۱۲ = \frac{۳۴۸}{۳۵} \approx ۱۰
\end{aligned}$$

۱۳.۵.۶ تمرین.

۱) ارتفاع متوسط نیمکرهٔ $z = \sqrt{a^۲ - x^۲ - y^۲}$ بر قرص $x^۲ + y^۲ \le a^۲$ را محاسبه کنید.

۲) در صورتی که D لوزی $|x| + ۲|y| \le ۱$ باشد و نقطهٔ $(x, y) \in D$ دارای چگالی بار الکتریکی $۲|x| + |y|$ باشد، متوسط بار موجود بر D را محاسبه کنید.

۳*) متوسط فاصلهٔ نقاط مثلث محدود به محورهای مختصاتی و خط $x + y = ۱$ تا مبداء را محاسبه کنید.

۴) عمق متوسط گودال $z = x^۲/۴ + y^۲ - ۱$ با دهانهٔ $D \;:\; x^۲/۴ + y^۲ \le ۱$ را محاسبه کنید.

۵*) متوسط مربع فاصلهٔ نقاط بر $D : y \le a^۲ - x^۲, y \ge ۰$ تا پاره خط $\ell : y = ۰,\; -a \le x \le a$ را محاسبه کنید.

۱۴.۵.۶ محاسبهٔ جرم یک جسم دو بعدی.

فرض کنیم D یک جسم مادی دو بعدی است (یعنی، بعد سوم آن به هر دلیلی در تحلیل ما مهم نیست. مثلاً، ممکن است ضخامت آن ثابت باشد.) و نقطهٔ $(x, y) \in D$ دارای چگالی جرم $\delta(x, y)$ است. در این صورت می‌توان فرض نمود که تمام نقاط مستطیل کوچک $[x_{i-۱}; x_i] \times [y_{j-۱}; y_j]$ دارای چگالی جرم $\delta(x_i, y_j)$ هستند، بنابراین جرم این قطعه کوچک $\delta(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$ است. پس در مجموع بنابه ۱.۵.۶، جرم کل D برابر $m = \iint_D \delta(x, y) dA$ است.

۱۵.۵.۶ مثال. ۱) فرض کنید D ناحیهٔ کوچکتر محدود به سهمی $x = ۴y^۲$ و بیضی $x^۲ + ۴y^۲ = ۱۲$ است و نقطهٔ (x, y) دارای چگالی جرم $\delta = ۵x$ است. جرم D را محاسبه کنید.
حل. برای این منظور ابتدا محل بر خورد سهمی و بیضی داده شده را محاسبه می‌کنیم:

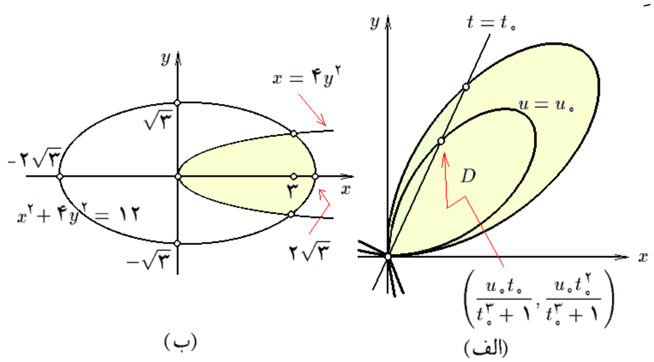
$$\begin{cases} x^۲ + ۴y^۲ = ۱۲ \\ x = ۴y^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴y^۴ + y^۲ - ۳ = ۰ \\ x = ۴y^۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y^۲ = -۱ \pm ۷/۸ \\ x = ۴y^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{۳}/۲ \\ x = ۳ \end{cases}$$

به شکل ۳۶.۶—الف توجه شود. این مجموعه y–منظم است، چرا که می‌توان نوشت:

$$D \;:\; -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le y \le \frac{\sqrt{۳}}{۲},\; ۴y^۲ \le x \le ۲\sqrt{۳ - y^۲}$$

بنابراین جرم جسم مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}
m &= \iint\limits_D ۵x\, dA = \int_{-\sqrt{۳}/۲}^{\sqrt{۳}/۲} \left[\int_{۴y^۲}^{۲\sqrt{۳-y^۲}} ۵x dx\right] dy \\
&= ۱۰ \int_{-\sqrt{۳}/۲}^{\sqrt{۳}/۲} \left\{۳ - y^۲ - ۴y^۴\right\} dy = ۲۳\sqrt{۳}
\end{aligned}$$



شکل ۳۶.۶: قسمتهای ۱ و ۳ از مثال ۱۵.۵.۶

مثال ۲) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به دو سهمی $x = y^۲$ و $۳x = y^۲$ و دو هذلولی $xy = ۲$ و $xy = ۴$ باشد و نقطهٔ (x, y) دارای چگالی جرم $y^۲/x^۲$ است. جرم D را محاسبه کنید.
حل. برای این منظور، از تغییر مختصات $u = xy$ و $v = y^۲/x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned}
J &= \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = ۱ \div \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right| \\
&= ۱ \div \left\|\begin{matrix} y & x \\ -y^۲/x^۲ & ۲y/x \end{matrix}\right\| = ۱ \div \frac{۳y^۲}{x} = \frac{۱}{۳v}
\end{aligned}$$

بعلاوه D' تصویر D در uv–صفحه عبارت از

$$D' : ۲ \le u \le ۴,\; ۱ \le v \le ۳$$

است. بنابراین، جرم D برابر است با

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_D \frac{x^۲}{y^۲}\,dA = \iint\limits_{D'} \frac{۱}{v^۲}\frac{۱}{۳v}\,dA' \\ &= \frac{۱}{۳}\left(\int_۲^۴ du\right)\left(\int_۱^۳ \frac{dv}{v^۳}\right) = \frac{۸}{۲۷} \end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به برگ دکارتی

$$C\,:\,x=\frac{۳at}{۱+t^۳}\,,\,y=\frac{۳at^۲}{۱+t^۳}\,,\,۰\le t\le ۱$$

است و نقطهٔ $(x,y)\in D$ دارای چگالی $y/x^۲$ است. جرم D را محاسبه کنید.

حل. در این صورت با فرض $x=\frac{ut}{۱+t^۳}$ و $y=\frac{ut^۲}{۱+t^۳}$ داریم

$$\begin{aligned} J &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)}\right| \\ &= \left\|\begin{matrix} \frac{u(۱-۲t^۳)}{(۱+t^۳)^۲} & \frac{t}{۱+t^۳} \\ \frac{ut(۲-t^۳)}{(۱+t^۳)^۲} & \frac{t^۲}{۱+t^۳} \end{matrix}\right\| = \frac{ut^۲}{(۱+t^۲)^۲} \end{aligned}$$

و D' تصویر D در tu−صفحه عبارت از

$$D'\,:\,۰\le t\le ۱\,,\,۰\le u\le ۳a$$

است. به این ترتیب، جرم D برابر

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_D \frac{y}{x^۲}\,dA = \iint\limits_{D'} \frac{\frac{ut^۲}{۱+t^۳}}{\left(\frac{ut}{۱+t^۳}\right)^۲}\frac{ut^۲}{(۱+t^۳)^۲}\,dA' \\ &= \iint\limits_{D'} \frac{t^۲}{۱+t^۳}\,dA' = \left(\int_۰^۱ \frac{t^۲dt}{۱+t^۳}\right)\left(\int_۰^{۳a} du\right) \\ &= a\ln ۲ \end{aligned}$$

است. به شکل ۳۶.۶−ب توجه شود.

۱۶.۵.۶ تمرین.

۱) در صورتی که نقطهٔ (x,y) از قرص $x^۲+y^۲\le ۴x$ دارای چگالی جرم $x\sqrt{x^۲+y^۲}$ باشد، جرم D را محاسبه کنید.

۲) در صورتی که D ناحیهٔ محدود به خطوط $x=۰$، $y=۰$ و $x+y=۱$ بوده و چگالی نقطهٔ به مختصات (x,y) از آن برابر $(x+y)^۲$ باشد، جرم D را محاسبه کنید.

۳) در صورتی که D مثلث با رئوس $(۰,۰)$، $(۱,۱)$ و $(۱,۲)$ باشد و نقطهٔ $(x,y)\in D$ دارای چگالی جرم xy باشد، جرم D را محاسبه کنید.

۴) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به منحنی بستهٔ

$$C:\left\{\begin{array}{l} x=a\big(۲\cos t-\cos(۲t)\big) \\ y=a\big(۲\sin t-\sin(۲t)\big) \end{array}\right. \quad ;\quad ۰\le t\le ۲\pi$$

است و $(x,y)\in D$ دارای چگالی $|y|$ است. جرم D را محاسبه کنید.

۱۷.۵.۶ محاسبهٔ مرکز ثقل یک جسم دو بعدی.

فرض کنید D یک جسم مادی دو بعدی است و نقطهٔ به مختصات $(x,y)\in D$ دارای چگالی $\delta(x,y)$ است. در این صورت اگر D را به مستطیلهای کوچک تقسیم کنیم و

$$D_{ij}:=[x_{i-۱};x_i]\times[y_{j-۱};y_j]$$

یکی از آنها باشد، می‌توانیم فرض کنیم که چگالی همهٔ نقاط آن برابر $\delta(x_i,y_j)$ است. حال فرض کنیم که بجای مستطیل D_{ij} یک نقطهٔ مادی به جرم $\delta(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$ با مختصات (x_i,y_j) داریم. به این ترتیب بجای D حداکثر mn نقطهٔ مادی داریم. بنابه درس فیزیک، مختص x از مرکز ثقلِ این نقاط برابر

$$\bar{x}=\Big(\sum_{i,j}x_i\delta(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j\Big)\div\Big(\sum_{i,j}\delta(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j\Big)$$

است. پس، چنانچه از عبارت بالا حد بگیریم، مقدار دقیق مختص x از مرکز ثقلِ D برابر $\bar{x}=\frac{۱}{m}\iint_D x\delta\,dA$ است، که m جرم D است. به صورت مشابه مختص y از مرکز ثقلِ D برابر است با $\bar{y}=\frac{۱}{m}\iint_D y\delta\,dA$.

۱۸.۵.۶ مثال.

مثال ۱) مرکز ثقل یک نیم دایرهٔ به شعاع R که از یک جنس همگن ساخته شده است را بیابید.

حل. برای سهولت در بحث فرض کنیم نیم دایرهٔ مذکور عبارت است از $D\,:\,x^۲+y^۲\le R^۲\,,\,۰\le y$ و $\delta(x,y)=\delta_۰$. در این صورت اگر D' تصویر D در صفحهٔ قطبی باشد، آنگاه $D'\,:\,۰\le r\le R\,,\,۰\le\theta\le\pi$ و بنابراین

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_D \delta\,dA=\delta_۰\iint\limits_D dA=\delta_۰\operatorname{Area}(D) \\ &= \delta_۰\times\frac{۱}{۲}\times\pi R^۲=\frac{\pi}{۲}\delta_۰R \\ \bar{y} &= \frac{۱}{m}\iint\limits_D y\delta\,dA=\frac{۲}{\pi\delta_۰R^۲}\iint\limits_D y\delta_۰\,dA \\ &= \frac{۲}{\pi R^۲}\iint\limits_{D'} r\sin\theta r\,dA' \\ &= \frac{۲}{\pi\delta_۰R^۲}\left(\int_۰^\pi\sin\theta d\theta\right)\left(\int_۰^R r^۲dR\right)=\frac{۴R}{۳\pi} \end{aligned}$$

به دلیل تقارن D نسبت به y−محور، داریم $\bar{x}=۰$. در نتیجه، $C=(۰,۴R/۳\pi)$.

۲) مرکز ثقل ربع بیضی محدود به $x^۲/a^۲+y^۲/b^۲=۱$ واقع در ربع اول که چگالی $(x,y)\in D$ برابر xy است را بیابید.

حل. در اینجا $D\,:\,۰\le x\,,\,۰\le y\,,\,x^۲/a^۲+y^۲/b^۲\le ۱$ و

$\delta(x,y) = xy$. از تغییر مختصات قطبی تعمیم یافتهٔ $x = ar\cos\theta$ و $y = br\sin\theta$ استفاده می‌کنیم. در این صورت، D' تصویر D در $r\theta$–صفحه عبارت است از

$$D' : ۰ \le \theta \le \pi/۲ \,,\, ۰ \le r \le ۱$$

و ژاکوبین تبدیل نیز $J = abr$ است. بنابراین، داریم

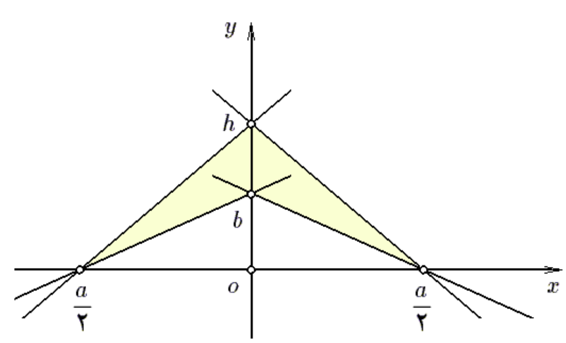
$$\begin{aligned} m &= \iint_D \delta\, dA = \iint_D xy\, dA \\ &= \iint_{D'} abr^۲ \sin\theta\cos\theta\; abr\, dA' \\ &= a^۲b^۲ \left(\int_۰^{\pi/۲} \sin\theta\cos\theta d\theta\right)\left(\int_۰^۱ r^۳\, dr\right) \\ &= a^۲b^۲ \left[\frac{\sin^۲\theta}{۲}\right]_۰^{\pi/۲} \times \left[\frac{r^۴}{۴}\right]_۰^۱ = \frac{a^۲b^۲}{۸} \end{aligned}$$

و در نتیجه، اگر $C = (\bar{x}, \bar{y})$ مرکز ثقل D باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{۱}{m}\iint_D x\delta\, dA = \frac{۸}{a^۲b^۲}\iint_D x^۲y\, dA \\ &= \frac{۸}{a^۲b^۲}\iint_{D'} a^۳b^۲r^۴\cos^۲\theta\sin\theta\, dA' \\ &= ۸a\left(\int_۰^{\pi/۲}\cos^۲\theta\sin\theta d\theta\right)\left(\int_۰^۱ r^۴\, dr\right) = \frac{۸a}{۱۵} \end{aligned}$$

به دلیل تقارن موجود در مسأله، نیازی به محاسبهٔ $\bar{y}$ نیست، یعنی: $\bar{y} = ۸b/۱۵$. بنابراین $C = (۸a/۱۵, ۸b/۱۵)$.

مثال ۳) ناحیه‌ای به شکل یک مثلث متساوی الساقین به ارتفاع h و طول قاعدهٔ a که از یک جنس چگال ساخته شده است را در اختیار داریم. مثلثی متساوی الساقین از قاعدهٔ آن طوری ببرید، که مرکز ثقل جسم حاصل در راس مثلث داخلی باشد. ارتفاع این مثلث را بیابید.



شکل ۳۷.۶: قسمت ۳ از مثال ۱۸.۵.۶

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم قاعدهٔ مثلث D مورد نظر بر x–محور قرار دارد و محور تقارن D نیز x–محور می‌باشد. به شکل ۳۷.۶ توجه شود. D را به کمک y–محور به دو نیمهٔ $D_۱$ و $D_۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D_۱ &: ۰ \le x \le \frac{a}{۲} \,,\, \frac{۲b}{a}x \le y \le \frac{۲h}{a}x \\ D_۲ &: -\frac{a}{۲} \le x \le ۰ \,,\, -\frac{۲h}{a}x \le y \le -\frac{۲b}{a}x \end{aligned}$$

در این صورت روشن است که $\bar{x} = ۰$ و بعلاوه

$$\begin{aligned} m &= m(D) = ۲m(D_۱) = ۲\mathrm{Area}(D_۱) \times \delta_۰ \\ &= ۲\delta_۰\left(\frac{۱}{۲} \times \frac{a}{۲} \times h - \frac{۱}{۲} \times \frac{a}{۲} \times b\right) = \frac{a\delta_۰}{۲}(h-b) \end{aligned}$$

یعنی مرکز ثقل D برابر $C = (۰, ۲(h+b)/۳)$ است. اما صورت مسأله از ما خواسته است که $C = (۰, b)$، بنابراین بایستی که $b = ۲(h+b)/۳$ یا $b = ۲h/۳$. یعنی، ارتفاع مثلث داخل را باید ۲/۳ ارتفاع مثلث داده شده گرفت. اگر شکل D را از یک قطعه حلب بسازیم و رأس C را بر نوک سوزنی استوار کنیم، به یک جسم همیشه غوطه‌ور در C خواهیم رسید.

۱۹.۵.۶ تمرین. در هر مورد مرکز ثقل D را بیابید. اگر چگالی ذکر نشود، فرض بر آن است که چگالی ثابت است. شما می‌توانیم مقدار چگالی را یک فرض کنید.

۱) D قرص $x^۲ + y^۲ \le ۴x$ است و $\delta = x$.

۲) D مجموعهٔ محدود به دوایر $x^۲ + y^۲ = ۲ax$ و $x^۲ + y^۲ = ۲ay$ است و $\delta = y$.

۳) D مثلث با رئوس $(۰,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ است و بعلاوه $\delta = x + ۲y$.

۴) D مجموعهٔ محدود به آستروئید . واقع در ربع اول است.

۵) D به دو سهمی $y^۲ = ۴x + ۴$ و $y^۲ = -۲x + ۴$ محدود است.

۶) D مجموعهٔ محدود به یک قوس از منحنی به معادلات $x = a(t - \sin t)$ و $y = a(۱ - \cos t)$ و x–محور است.

۷) D مجموعهٔ محدود به خط $x + y = ۲a$ و سهمی $ay = x^۲$ است.

۸) D مجموعهٔ محدود به منحنی $(x^۲ + y^۲)^۲ = a^۲(x^۲ - y^۲)$ است و $x \ge ۰$.

۹) فرض کنید D یک ورقهٔ چگال و محدود به دوایر به معادلات $x^۲ + y^۲ = ۲ax$ و $x^۲ + y^۲ = ۲bx$ است که $۰ < a < b$. a را طوری تعیین کنید که مرکز ثقل D برابر $(۲a, ۰)$ باشد.

*۱۰) فرض کنید D مجموعهٔ محدود به سهمی $y=x^{۲}$ و خط $y=h$ است و از یک جنس چگال ساخته شده است. فرض کنید ضربهٔ بسیار کوچکی به آن وارد کرده‌ایم. پس از چند بار رفت و برگشت این جسم به یک حالت پایدار خواهد رسید. وضعیت مذکور را مشخص کنید.

*۱۱) مسألهٔ ۱۰ را برای نیم قرص $D\ :\ x^{۲}+y^{۲}\le ۲ay\ ,\ y\le a$ حل کنید.

۲۰.۵.۶ محاسبهٔ گشتاور ماند، شعاع چرخش و گشتاور جرم.

فرض کنید D ناحیه‌ای دو بعدی است که نقطهٔ $(x,y)\in D$ دارای چگالی جرم $\delta(x,y)$ است. فرض کنیم D_{ij} قطعه‌ای به ابعاد Δx_i و Δy_j از D است و (x_i,y_j) نقطه‌ای دلخواه از آن است. فرض کنیم تمام جرم D_{ij} در نقطهٔ (x_i,y_j) جمع شده است، یعنی به میزان $\delta(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$. در این صورت گشتاور ماند این نقطه حول خط مفروض ℓ عبارت است از $d^{۲}\big((x_i,y_j),\ell\big)\delta(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$، که $d\big((x_i,y_j),\ell\big)$ فاصلهٔ نقطهٔ (x_i,y_j) تا خط ℓ می‌باشد. پس در مجموع، گشتاور D حول خط ℓ عبارت از

$$I_\ell=\iint_D d^{۲}\left((x,y),\ell\right)\delta(x,y)\,dA$$

است. اگر ℓ را $x-$محور و یا $y-$محور بگیریم، در این صورت گشتاور حول ℓ بترتیب عبارت خواهد بود از

$$I_x=\iint\limits_D y^{۲}\delta(x,y)\,dA \qquad \text{و} \qquad I_y=\iint\limits_D x^{۲}\delta(x,y)\,dA$$

عدد $R_\ell:=\sqrt{I_\ell/m}$ را **شعاع چرخش حول محور** ℓ می‌نامند. از نظر فیزیک، اگر بنا باشد D را با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ℓ دوران دهیم، مقدار انرژی لازم برای این کار برابر $K=۱/۲I_\ell\omega^{۲}$ است. بعلاوه، اگر جرم نقطه‌ای باندازهٔ m را به فاصلهٔ R_ℓ تا محور ℓ قرار دهیم، به همین مقدار انرژی نیاز خواهیم داشت.

به صورت مشابه، گشتاور ماند جسم D حول نقطهٔ M به مختصات $(x_\circ,y_\circ)$ و همچنین شعاع چرخش D حول M را بترتیب به صورت $I_M=\iint_D d^{۲}\left((x,y),M\right)\delta(x,y)\,dA$ و $R_M:=\sqrt{I_M/m}$ می‌توان تعریف نمود. که در آن $d\big((x,y),M\big)$ فاصلهٔ (x,y) تا M است. برای $M=O$ (یعنی، مبداء) داریم

$$I_O=\iint_D(x^{۲}+y^{۲})\delta(x,y)\,dA$$

شبیه بحث بالا می‌توان از گشتاور جسم حول یک خط مفروض سخن گفت. در واقع، گشتاور جرم D حول خط ℓ عبارت از $M_\ell=\iint_D d\big((x,y),\ell\big)\delta(x,y)\,dA$ است. گشتاور I را در مقابل M اغلب با صفت «ماند» همراه می‌کنند.

۲۱.۵.۶ مثال.

۱) فرض کنید D مثلث محدود به محورهای مختصاتی و خط $x+y=۱$ است که $(x,y)\in D$ دارای چگالی $۶x$ است. گشتاور D حول خط $y=۱$ را بدست آورید.

حل. با توجه به اینکه $D\ :\ \circ\le x\le ۱\ ,\ \circ\le y\le ۱-x$ و فاصلهٔ (x,y) تا خط $\ell : y=۱$ برابر $d=|y-۱|$ است.

$$\begin{aligned}
I_\ell &= \iint\limits_D |y-۱|^{۲}.۶x\,dA=۶\int_\circ^{۱}\left[\int_\circ^{۱-x}x(y-۱)^{۲}\right]dx\\
&= ۲\int_\circ^{۱}\Big[x(y-۱)^{۳}\Big]_\circ^{۱-x}dx=۲\int_\circ^{۱}\left(x-x^{۴}\right)dx\\
&= ۲\left[\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۵}}{۵}\right]_\circ^{۱}dx=\frac{۳}{۵}
\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید D ناحیهٔ چگال محدود به $x^{۲}+y^{۲}=۲x$ با چگالی ثابت $\delta=\delta_\circ$ است. شعاع چرخش D حول $y-$محور را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$D'\ :\ -\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}\ ,\ \circ\le r\le ۲\cos\theta$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
m &= \iint\limits_D \delta\,dA=\delta_\circ\mathrm{Area}(D)=\delta_\circ\times\pi\times ۲^{۲}=۴\pi\delta_\circ\\
I_y &= \iint\limits_D ۲x\delta\,dA=\delta_\circ\iint\limits_D x\,dA=\delta_\circ\iint\limits_{D'} r\cos\theta r\,dA'\\
&= \delta_\circ\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[\int_\circ^{۲\cos\theta}r^{۲}\cos\theta dr\right]d\theta\\
&= \delta_\circ\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[\frac{r^{۳}}{۳}\cos\theta\right]_\circ^{۲\cos\theta}d\theta\\
&= \frac{۸}{۳}\delta_\circ\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\cos^{۴}\theta d\theta=\pi\delta_\circ
\end{aligned}$$

بنابراین شعاع چرخش برابر $R_y=\sqrt{\dfrac{I_y}{m}}=\sqrt{\dfrac{\pi\delta_\circ}{۴\pi\delta_\circ}}=\dfrac{۱}{۲}$ است.

مثال ۳) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به سهمی $y=x^{۲}$ و خط $y=x+۲$ است و چگالی نقطهٔ $(x,y)\in D$ برابر $\dfrac{|x|}{(x-۱)^{۲}+y^{۲}}$ است. گشتاور D حول نقطهٔ $M=(۱,\circ)$ را محاسبه کنید.

حل. توجه داریم که سهمی و خط داده شده در نقاط $(۲,۴)$ و $(-۱,۱)$ برخورد دارند و بنابراین

$$D\ :\ -۱\le x\le ۲\ ,\ x^{۲}\le y\le x+۲$$

چون فاصلهٔ (x,y) تا $(۱,\circ)$ برابر $\sqrt{(x-۱)^{۲}+y^{۲}}$ است، داریم

$$I_M = \iint\limits_D\left((x-۱)^{۲}+y^{۲}\right)\delta\,dA=\iint\limits_D|x|\,dA$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{2}\left[\int_{x^2}^{x+1}|x|\,dy\right]dx = \int_{-1}^{2}\Big[|x|y\Big]_{x^2}^{x+1}dx\\
&= \int_{-1}^{2}|x|.(x+1-x^2)\,dx\\
&= -\int_{-1}^{0}x.(x+1-x^2)\,dx + \int_{0}^{2}x.(x+1-x^2)\,dx\\
&= \frac{1}{12}+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

مثال ۴) در صورتی که D ناحیهٔ با چگالی جرمی $\delta = \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^3}$ محدود به منحنی $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ باشد، گشتاور ماند D حول مبداء را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور، ناحیهٔ $D\ :\ x^4+y^4\le a^2(x^2+y^2)$ را به مختصات قطبی می‌بریم:

$$\begin{aligned}
D' \quad &: \quad r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta \le a^2r^2\\
&: \quad r^2 \le \frac{a^2}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}
\end{aligned}$$

که چون $\cos^4\theta+\sin^4\theta$ هیچگاه صفر نمی‌شود، بنابراین

$$D'\ :\ 0\le\theta\le 2\pi\,,\ 0\le r\le\frac{a}{\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}$$

و گشتاور مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}
I_O &= \iint_D (x^2+y^2)\delta\,dA = \iint_D \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}\,dA\\
&= \iint_{D'}\big(\cos^4\theta+\sin^4\theta\big).r\,dA'\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{a/\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}\big(\cos^4\theta+\sin^4\theta\big).r\,dr\right]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\big(\cos^4\theta+\sin^4\theta\big)\frac{r^2}{2}\right]_0^{a/\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}d\theta\\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}d\theta = a^2\pi
\end{aligned}$$

۲۲.۵.۶ تمرین.

۱) گشتاور ماند و شعاع چرخش نسبت به y–محور برای صفحهٔ نازک محدود توسط x–محور، خطوط $x=1$ و $x=-1$ سهمی $y=x^2$ را با شرط $\delta(x,y)=1+x/20$ محاسبه کنید.

۲) گشتاور ماند ناحیهٔ چگال محدود به x–محور و نمودار تابع $f(x)=(\sin x/x)^2$ با $\pi\le x\le 2\pi$ حول y–محور را محاسبه کنید.

۳) فرض کنید D به خطوط $y=x$، $y=-x$ و $y=1$ محدود شده است و $\delta(x,y)=y+1$. گشتاور ماند و شعاع چرخش D حول مبداء را محاسبه کنید.

در هر مورد، گشتاور حول x–محور و y–محور را با فرض $\delta=1$ محاسبه کنید:

۴) $(x-a)^2+(y-a)^2\ge a^2\ ,\quad 0\le x\le a\ ,\ 0\le y\le a$

۵) $x=u(t-\sin t)\,,\ y=u(1-\cos t)\ ,\quad 0\le u\le a\ ,\ 0\le t\le 2\pi$

۶) $a^2\le xy\le 2a^2\ ,\ x/2\le y\le 2x$

۷) $(x^2+y^2)^2\le 2a^2xy\ ,\ 0\le x$

۸) $x^{2/3}+y^{2/3}\le 1$

۶.۶ انتگرال دوگانهٔ ناسره

همان طوری که در ۸.۱.۶ مطرح گردید، اگر انتگرال $\iint_D f\,dA$ در شرایط قضیهٔ ۷.۱.۶ صدق نکند، انتگرال مذکور را ناسره می‌نامیم. به بیان دیگر:

۱.۶.۶ تعریف. اگر مجموعهٔ D بسته یا کراندار نباشد و یا اینکه $z=f(x,y)$ در نقطه‌ای از D به بینهایت میل کند و یا تعریف نگردد و یا اینکه ناپیوستگی‌های f بر D بیش از چند نقطه و یا چند منحنی باشد، در این صورت انتگرال $\iint_D f\,dA$ را **ناسره** می‌نامیم.

۲.۶.۶ استراتژی حل انتگرالهای ناسره. همانند انتگرال ناسرهٔ معمولی کافی است، این انتگرالها را به حدی از انتگرالهای عادی تبدیل کنیم.

برای این منظور، فرض می‌کنیم $\{D_a\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد که $\lim\limits_{a\to a_0}D_a = D$ و هر یک از انتگرالهای $\iint_{D_a}f\,dA$ عادی باشند. در این صورت، تعریف می‌کنیم:

$$D=\lim_{a\to a_0}D_a \ \Rightarrow\ \iint_D f\,dA := \lim_{a\to a_0}\iint_{D_a}f\,dA$$

لازم به ذکر است که از این تنها در دو مورد می‌توان استفاده نمود:

الف) اگر ثابت شود که حد سمت راست وجود دارد، نتیجه خواهیم گرفت که انتگرال ناسرهٔ سمت چپ (در صورت وجود) برابر حد مورد نظر می‌باشد. یعنی، محاسبه‌پذیری دلیلی بر وجود نیست!

ب) اگر ثابت شود که حد سمت راست وجود ندارد، نتیجه خواهیم گرفت که انتگرال ناسرهٔ سمت چپ وجود ندارد.

۳.۶.۶ مثال. ۱) فرض کنید D کل صفحه $\mathbb{R}^2$ است. انتگرال $f(x,y)=1/(x^2+y^2+1)^2$ بر D را محاسبه کنید.

حل. در این صورت انتگرال $\iint_D f\,dA$ ناسره است، زیرا D کراندار نیست. فرض کنیم D_R دایره‌ای به مرکز مبداء و شعاع R است: $D_R: x^2+y^2\le R^2$. روشن است که $D=\lim_{R\to\infty} D_R$. اکنون بکمک تغییر مختصات قطبی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dA}{(x^2+y^2+1)^2} &= \lim_{R\to\infty}\iint_{D_R}\frac{dA}{(x^2+y^2+1)^2}\\
&= \lim_{R\to\infty}\iint_{D'_R}\frac{r\,dA'}{(r^2+1)^2}\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^R\frac{rdr}{(r^2+1)^2}\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\times\left[\frac{-1}{r^2+1}\right]_0^R\\
&= \pi\lim_{R\to\infty}\left\{1-\frac{1}{R^2+1}\right\}=\pi
\end{aligned}$$

که در اینجا D'_R تصویر قطبی D_R است:

$$D'_R: 0\le\theta\le 2\pi\,,\ 0\le r\le R$$

مثال ۲) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به محورهای مختصات و خط $x+y=1$ است. آیا انتگرال $\iint_D\frac{dA}{1-x-y}$ همگرا است؟

حل. این انتگرال ناسره است، زیرا $f(x,y)=1/(1-x-y)$ بر خط $x+y=1$ تعریف نمی‌شود و اگر (x,y) به این خط نزدیک شود، تابع f به بینهایت میل خواهد نمود. فرض کنیم D_ε مجموعهٔ محدود به محورهای مختصات و خط $x+y=1-\varepsilon$ است. در این صورت $D=\lim_{\varepsilon\to0+}D_\varepsilon$ (شکل ۳۸.۶) و

$$\begin{aligned}
\iint_D\frac{dA}{1-x-y} &= \lim_{\varepsilon\to0+}\iint_{D_\varepsilon}\frac{dA}{1-x-y}\\
&= \lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}\left[\int_0^{1-x-\varepsilon}\frac{1}{1-x-y}\right]dx\\
&= \lim_{\varepsilon\to0+}\int_0^{1-\varepsilon}\Big[-\ln(1-x-y)\Big]_0^{1-x-\varepsilon}dx\\
&= \lim_{\varepsilon\to0+}\int_0^{1-\varepsilon}\Big\{\ln(1-x)-\ln\varepsilon\Big\}dx\\
&= \lim_{\varepsilon\to0+}\Big[-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)-x\ln\varepsilon\Big]_0^{1-\varepsilon}dx\\
&= \lim_{\varepsilon\to0+}(\varepsilon-1)\ln\varepsilon=+\infty
\end{aligned}$$

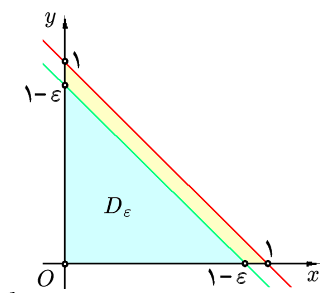
یعنی انتگرال مورد نظر واگرا است.

مثال ۳) انتگرال $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
I^2 &= I\times I\\
&\overset{(1)}{=} \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)\\
&= \iint_{0\le x,y} e^{-(x^2+y^2)}\,dA\\
&\overset{(2)}{=} \lim_{R\to\infty}\iint_{D_R}e^{-(x^2+y^2)}\,dA \overset{(3)}{=} \lim_{R\to\infty}\iint_{D'_R}e^{-r^2}\,dA'\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}d\theta\right)\left(\int_0^R re^{-r^2}dr\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R=\frac{\pi}{4}-\lim_{R\to\infty}e^{-R^2}=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

بنابراین $I=\sqrt{\pi}/2$. توضیح اینکه در (۱) از ظاهری بودن متغیر در انتگرال معین استفاده کرده‌ایم، در (۲) فرض شده است که D_R ربع دایره‌ای به شعاع R و مرکز در مبداء است که در ربع اول صفحه قرار دارد و در (۳) از تغییر متغیر قطبی استفاده کرده‌ایم و D'_R تصویر D_R در صفحه قطبی می‌باشد.



شکل ۳۸.۶: قسمت ۲ از مثال ۲.۶.۶

مثال ۴) انتگرال تابع $f(x,y)=xe^{-(x+2y)}$ را بر ربع اول صفحه محاسبه می‌کنید.

حل. برای این منظور از مجموعهٔ

$$D_a: 0\le x\,,\ 0\le y\,,\ x+2y\le a$$

استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $u=x+2y$ و $v=x$، در این صورت

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1\div\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=1\div\left\|\begin{matrix}1&2\\1&0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}$$

چون خطوط $x+2y=a$، $x=0$ و $y=0$ اضلاع D_a را تشکیل می‌دهند، برای بدست آوردن D'_a تصویر D_a در $uv-$صفحه، تصاویر این اضلاع را می‌یابیم:

$$x=0\ \Rightarrow\ v=0 \qquad y=0\ \Rightarrow\ u=v$$

$$x+2y=a\ \Rightarrow\ u=a$$

پس D'_a عبارت است از $D'_a : 0 \le u \le a\,,\ 0 \le v \le u$، بنابراین

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{0\le x,y} xe^{-(x+2y)}\,dA &= \lim_{a\to\infty}\iint\limits_{D_a} xe^{-(x+2y)}\,dA \\
&= \lim_{a\to\infty}\iint\limits_{D'_a} ve^{-u}\frac{1}{2}\,dA' = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^a\left[\int_0^u ve^{-u}dv\right]du \\
&= \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\int_0^a\left[\frac{v^2}{2}e^{-u}\right]_{v=0}^{v=u}du = \frac{1}{4}\lim_{a\to\infty}\int_0^a u^2e^{-u}du \\
&= \frac{1}{4}\lim_{a\to\infty}\left\{-\Big[u^2e^{-u}\Big]_0^a + \int_0^a 2ue^{-u}du\right\} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{a\to\infty}\left\{-a^2e^{-a} - \Big[2ue^{-u}\Big]_0^a + \int_0^a 2e^{-u}du\right\} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{a\to\infty}\left\{-a^2e^{-a} - 2ae^{-a} - 2e^{-a} + 2\right\} \\
&= \frac{1}{2} - \lim_{a\to\infty}\frac{a^2+2a+2}{4e^a} \overset{\text{هـ}}{=} \frac{1}{2} - \lim_{a\to\infty}\frac{2a+2}{4e^a} \\
&\overset{\text{هـ}}{=} \frac{1}{2} - \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2e^a} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

توضیح اینکه در محاسبات بالا دو بار از روش جزء به جزء و دو بار نیز از قاعدهٔ هوپیتال استفاده نموده‌ایم.

مثال ۵) فرض کنید a، m و n اعداد مثبتند و تعریف کنیم:

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

$$\mathrm{B}(m,n) := \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

اینها را بترتیب، تابع گاما و تابع بتا می‌نامند. ثابت کنید که $\mathrm{B}(m,n) = \Gamma(m)\Gamma(n)/\Gamma(m+n)$. حالت خاص این فرمول، چنین است: $\binom{m}{n} = (m+n)!/m!n!$، که m و n اعداد طبیعی هستند.

حل. با فرض $t = x^2$ در انتگرال $\Gamma(a)$، داریم $dt = 2x\,dx$، $\begin{array}{c|cc} t & 0 & \infty \\ \hline x & 0 & \infty \end{array}$ و بنابراین $\Gamma(a) = 2\int_0^\infty x^{2a-1}e^{-x^2}dx$. به صورت مشابه با فرض $x = \cos^2\theta$ در تابع B، داریم

$$\mathrm{B}(m,n) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,d\theta$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= \left(2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx\right)\left(2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy\right) \\
&= 4\iint\limits_{\substack{x\ge 0\\ y\ge 0}} x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dA \\
&\overset{(1)}{=} 4\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{D_R} x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dA \\
&\overset{(2)}{=} 4\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{D'_R} r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,dA \\
&= 4\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}dr\right) \\
&\qquad\times\left(\int_0^{2\pi}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,d\theta\right) \\
&= 2\mathrm{B}(m,n)\lim_{R\to\infty}\int_0^R r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}dr \\
&= \mathrm{B}(m,n)\lim_{R\to\infty}\int_0^{\sqrt{R}} s^{m+n-1}e^{-s}ds \\
&= \mathrm{B}(m,n)\int_0^\infty s^{m+n-1}e^{-s}ds = \mathrm{B}(m,n)\,\Gamma(m+n)
\end{aligned}
$$

و برهان تمام است. توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $D_R : 0 \le x, 0 \le y, x^2+y^2 \le R^2$ و در (۲) از تغییر متغیر قطبی استفاده شده است و $D'_R : 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le R$.

۴.۶.۶ تمرین. در هر مورد انتگرال $\iint_D f\,dA$ را در صورت وجود محاسبه کنید:

۱) $f = 1/\big((x^2+1)(y^2+1)\big),\ D = \mathbb{R}^2$

۲) $f = 1/(x^3y),\ D : 1 \le x\,,\ e^{-x} \le y \le 1$

۳) $f = \exp(-x^2-y^2)\cos(x^2+y^2),\ D = \mathbb{R}^2$

۴) $f = (x^2-y^2)/(x^2+y^2),\ D : 1 \le x \le y$

۵) $f = \exp(-x-y),\ D : 0 \le x \le y$

۶) $f = 1/\sqrt{1-x^2-y^2},\ D : x^2+y^2 \le 1$

۷) $f = 2y+1,\ D : -1 \le x \le 1,\ -1/\sqrt{1-x^2} \le y \le 1/\sqrt{1-x^2}$

۸) $f = \exp\left(-x^2/a^2 - y^2/b^2\right),\ D : x^2/a^2 + y^2/b^2 \ge 1$

۹) $f = \sqrt{xy}\exp\left(-x^2-y^2\right),\ D =$ ربع اول

۱۰) $f = \sin(x^2+y^2),\ D =$ ربع اول و دوم

۱۱) در صورتی که نقطهٔ دلخواه (x,y) از $\mathbb{R}^2$ دارای چگالی جرم $\delta = \exp(-x^2-y^2)$ باشد، گشتاور ماند $\mathbb{R}^2$ حول x−محور، y−محور و مبداء مختصات را محاسبه کنید.

*۱۲) فرض کنید $\Omega : 1 \le z \le 1/\sqrt{x^2+y^2}$. در این صورت، نشان دهید که حجم Ω متناهی است ولی مساحت سطح خارجی آن نامتناهی است! آیا از این محاسبه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۱۳) انتگرال تابع $f(x,y) = y$ را بر مجموعهٔ محدود به منحنی زیر محاسبه کنید:

$$C : \begin{cases} x = a\,(2\cos t - \cos(2t)) \\ y = a\,(2\sin t - \sin(2t)) \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi\,.$$

۱۴) انتگرال تابع $f(x,y) = x$ بر مجموعهٔ محدود به حلقهٔ موجود در منحنی داده شده را محاسبه کنید:
$C\,:\,x = 3at/(t^3+1)\,,\,y = 3at^2/(t^3+1)$.

۱۵) ثابت کنید که اگر D قسمتی از ربع اول باشد که توسط خط $x+y=1$ بریده شده است، آنگاه
$$\iint\limits_D \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dA = \frac{e^2-1}{4e}$$

۱۶) ثابت کنید که اگر D قسمتی از ربع اول باشد که توسط خط $x+y=\pi/2$ بریده شده است، آنگاه
$$\iint\limits_D \sin x\sin y\sin(x+y)\,dA = \frac{\pi}{16}$$

۱۷) ثابت کنید که اگر D قسمتی از ربع اول باشد که توسط خط $x+y=1$ بریده شده است، آنگاه
$$\iint\limits_D x^{m-1}y^{n-1}f(x,y)\,dA = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_0^1 t^{m+n-1}f(t)\,dt$$

۱۸) با استفاده از تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=y$ ثابت کنید
$$\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\exp\left(\frac{y}{x+y}\right)dy\right]dx = \frac{e-1}{2}$$

۷.۶ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل doc.pdf مراجعه شود.

۱.۷.۶ انتگرال دوگانه. برای محاسبهٔ انتگرال $f(x,y)$ بر مجموعهٔ x–منظم $D\,:\,a\le x\le b\,,\,h(x)\le y\le l(x)$ از دستور

```
int(int(f(x,y),y=h(x)..l(x)),x=a..b)
```

استفاده می‌کنیم.

۲.۷.۶ محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرال دوگانه. با اجرای دستور قبلی ممکن است انتگرال محاسبه نشده ظاهر شود (میپل قادر به حل تحلیلی آن نباشد) در این صورت از دستور `evalf` برای محاسبهٔ مقدار تقریبی آن استفاده می‌کنیم:

```
evalf(int(int(f(x,y),y=h(x)..l(x)),x=a..b))
```

۳.۷.۶ یادداشت. در آدرس اینترنتی
http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm
مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.

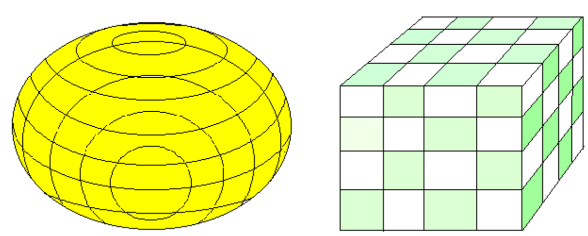
فصل ۷

انتگرال سه‌گانه

در فصل ششم کار تعمیم انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ به حالت توابع دو متغیره انجام شد، در این فصل یک مرحله جلوتر رفته و انتگرال سه‌گانه را تعریف می‌کنیم که در آن f تابعی سه متغیره است. روشن است که این روند را می‌توان ادامه داد و انتگرال n−گانه را تعریف نمود. به دلیل اهمیت بیشتر انتگرال سه‌گانه، آنرا کاملاً مورد بحث قرار داده و در بخش پایانی مواردی از انتگرالهای n−گانه را نیز مطرح خواهیم کرد.

۱.۷ تعریف انتگرال سه‌گانه

تعریف رسمی انتگرال سه‌گانه شبیه انتگرال دوگانه است که در ۱.۱.٦ آورده شد.



(ب) (الف)

شکل ۱.۷

۱.۱.۷ تعریف. فرض کنیم $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ بسته و کراندار باشد. بنابراین اعداد a، b، c، d، e و g طوری وجود خواهند داشت که $\Omega \subseteq [a;b]\times[c;d]\times[e;g]$. یعنی، Ω در مکعب مستطیلی قابل محاط است که تصویر آن بر x−محور برابر بازهٔ $[a;b]$ و بر y−محور برابر بازهٔ $[c;d]$ و بر z−محور برابر بازهٔ $[e,g]$ است (به شکل ۱.۷—الف توجه شود). منظور از یک **افراز** برای Ω، حاصلضربی است به شکل $P = P_۱\times P_۲\times P_۳$ که در آن $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ بترتیب افرازهایی برای $[a;b]$، $[c;d]$ و $[e;g]$ هستند:

$$P_۱ \quad : \quad a = x_۰ < x_۱ < \ldots < x_{n-۱} < x_n = b,$$

$$P_۲ \quad : \quad c = y_۰ < y_۱ < \ldots < y_{m-۱} < y_m = d,$$

$$P_۳ \quad : \quad e = z_۰ < z_۱ < \ldots < z_{\ell-۱} < z_\ell = g.$$

در این صورت، تعریف می‌کنیم

$$\#P := \min\{n,m,\ell\}, \qquad \Delta x_i := x_i - x_{i-۱},$$

$$\Delta y_j := y_j - y_{j-۱}, \qquad \Delta z_k := z_k - z_{k-۱},$$

$$|P| := \max\{\Delta x_۱,\ldots,\Delta x_n,\Delta y_۱,\ldots,\Delta y_m,\Delta z_۱,\ldots,\Delta z_\ell\}.$$

عدد $|P|$ را **ظرافت** P و $\#P$ را **طول** P می‌نامیم. روشن است که با انتخاب هر افراز برای Ω، مجموعهٔ Ω به حداکثر $n\times m\times\ell$ قسمت تقسیم می‌گردد (به شکل ۱.۷—ب توجه شود).

۲.۱.۷ تعریف. فرض کنیم Ω و P همانند در ۱.۱.۷ باشند، مجموعه‌های Ω_{ijk} را که $۱\le i\le n$، $۱\le j\le m$ و $۱\le k\le\ell$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر

$$\Big([x_{i-۱};x_i]\cap[y_{j-۱};y_j]\cap[z_{k-۱};z_k]\Big)\cap\Omega$$

مکعب مستطیل کامل باشد، Ω_{ijk} را برابر این اشتراک و در غیر این صورت آن را تهی $\emptyset$ می‌گیریم. بنابراین Ω_{ijk} ها یا مکعب مستطیل کاملند و یا تهی هستند (به شکل ۲.۷—الف توجه شود). منظور از یک **انتخاب** از افراز P، خانواده‌ای از نقاط $X = \{(x_{ijk},y_{ijk},z_{ijk})\}$ در Ω است، به گونه‌ای که $(x_{ijk},y_{ijk},z_{ijk})\in\Omega_{ijk}$ به ازای هر i، j و k ای که $\Omega_{ijk}\ne\emptyset$.

۳.۱.۷ تعریف. فرض کنیم مجموعهٔ Ω، **افراز** P و **انتخاب** X همانند ۲.۱.٦ باشند و $u = f(x,y,z)$ تابعی است که بر سراسر Ω تعریف می‌گردد. در این صورت، منظور از $\sum_P f(x_{ijk},y_{ijk},z_{ijk})\,\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$ حاصلجمع همهٔ عبارتهای بشکل داده شده است که به ازای i، j و k مورد نظر $\Omega_{ijk}\ne\emptyset$. در صورتی می‌گوئیم تابع $u = f(x,y,z)$ بر مجموعهٔ Ω **انتگرالپذیر** است که عددی I

چنان یافت گردد که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، یک عدد مثبت δ و یک عدد طبیعی n به گونه‌ای یافت شوند که به ازای هر افراز P برای Ω که $|P| \geq n$ و $\#P \leq \delta$ و به ازای هر انتخاب X از P داشته باشیم $\left|\sum_P f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - I\right| < \varepsilon$. در این صورت I را **انتگرال سه‌گانهٔ f بر Ω** نامیده و با نماد $\iiint_\Omega f\,dV$ نشان می‌دهیم. بعلاوه، معمول است که در این حالت نوشته شود:

$$\iiint_\Omega f\,dV = \lim_{\substack{|P|\to\infty \\ \#P\to ۰}} \sum_P f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

۴.۱.۷ یادداشت. تعریف بالا جنبهٔ نظری دارد و عملاً برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه مفید نیست! عمده‌ترین استفادهٔ آن، در اقامه اثباتها و نیز توجیه کاربردهای انتگرال سه گانه می‌باشد. برای ادامهٔ بحث لازم است که از وجود انتگرالهای مورد مطالعه اطمینان حاصل کنیم. قضیهٔ زیر موقتاً مسأله را حل می‌کند.

۵.۱.۷ قضیه. اگر Ω مجموعه‌ای بسته و کراندار و $u = f(x,y,z)$ تابعی مفروض باشد که بر Ω تعریف گردیده و کراندار است و صرف نظر از یک یا چند نقطه، یک یا چند منحنی و یک یا چند رویهٔ با مساحت متناهی بر کل Ω پیوسته باشد، آنگاه انتگرال f بر Ω وجود دارد.

۶.۱.۷ یادداشت. قضیه بالا شرایط کافی برای وجود انتگرال را معرفی می‌کند، این شرایط به هیچ وجه لازم نیستند. مثلاً اگر Ω دلخواه و $f = ۰$ و یا Ω با حجم صفر و f دلخواه باشد، آنگاه انتگرال f بر Ω وجود داشته و برابر صفر است.

۷.۱.۷ قرارداد. چنانچه مجموعهٔ Ω و تابع f در شرایط قضیهٔ ۵.۱.۷ صدق کنند، انتگرال $\iiint_\Omega f\,dV$ را **عادی** می‌گوئیم و در غیر این صورت آن را **ناسره** می‌نامیم. از این پس همهٔ انتگرالهای مورد بحث عادی‌اند، مگر آنکه خلافش صراحتاً بیان گردد.

از قضیهٔ ذیل برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه به کمک تعریف، می‌توان استفاده نمود.

۸.۱.۷ قضیه. اگر Ω مکعب مستطیل $[a;b]\times[c;d]\times[e;h]$ بوده و f بر Ω انتگرال پذیر باشد، در این صورت $\iiint_\Omega f\,dV$ برابر

$$\lim_{n,m,\ell\to\infty} \frac{(b-a)(d-c)(h-e)}{mn\ell} \times \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{\ell} f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{m}, e + k\frac{h-e}{\ell}\right)$$

است. البته، به جهت سهولت در محاسبه، می‌توان فرض کرد که $m = n = \ell$، و تنها یک حد را محاسبه نمود.

۹.۱.۷ مثال. فرض کنید Ω مکعب واحد $[۰;۱]^۳$ است و $f = xy - z$. در این صورت

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega f\,dV &= \lim_{m,n,\ell\to\infty} \frac{۱}{mn\ell} \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{\ell} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{m}, \frac{k}{\ell}\right) \\
&= \lim_{m,n,\ell\to\infty} \frac{۱}{mn\ell} \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{\ell} \left\{\frac{ij}{mn} - \frac{k}{\ell}\right\} \\
&= \lim_{m,n,\ell\to\infty} \left\{\frac{۱}{m^۲ n^۲}\left(\sum_{i=۱}^{n} i\right)\left(\sum_{j=۱}^{m} j\right) - \frac{۱}{\ell^۲}\sum_{k=۱}^{\ell} k\right\} \\
&= \frac{۱}{۴}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m+۱}{m}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{n}\right) - \frac{۱}{۲}\lim_{\ell\to\infty}\frac{\ell+۱}{\ell} \\
&= \frac{-۱}{۴}
\end{aligned}$$

۱۰.۱.۷ قضیه. فرض کنید توابع f و g بر Ω انتگرالپذیر باشند و a عددی حقیقی باشد، در این صورت

۱) $\iiint_\Omega af\,dV = a\iiint_\Omega f\,dV$

۲) $\iiint_\Omega (f+g)\,dV = \iiint_\Omega f\,dV + \iiint_\Omega g\,dV$

۳) اگر به ازای هر $(x,y,z) \in \Omega$ ای $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$، در این صورت

$$\iiint_\Omega f\,dV \leq \iiint_\Omega g\,dV$$

۴) اگر حجم ناحیهٔ مورد اشتراک دو مجموعهٔ $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ با مساحت صفر باشد، در این صورت

$$\iiint_{\Omega_۱\cup\Omega_۲} f\,dV = \iiint_{\Omega_۱} f\,dV + \iiint_{\Omega_۲} f\,dV$$

۵) اگر حجم مورد نظر نقاطی از Ω که در آنها f و g متفاوتند صفر باشد، در این صورت

$$\iiint_\Omega f\,dV = \iiint_\Omega g\,dV$$

۶) اگر اختلاف دو مجموعهٔ $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ با حجم صفر باشد، در این صورت

$$\iiint_{\Omega_۱} f\,dV = \iiint_{\Omega_۲} f\,dV$$

۷) در صورتی که حجم Ω را با نماد Vol نشان دهیم، آنگاه

$$\iiint_\Omega dV = \mathrm{Vol}(\Omega)$$

۸) اگر بیشترین مقدار f بر Ω برابر M و کمترین مقدار f بر Ω برابر m باشد، در این صورت

$$m\mathrm{Vol}(\Omega) \le \iiint\limits_{\Omega} f\,dV \le M\,\mathrm{Vol}(\Omega)$$

۹) $\left|\iiint_{\Omega} f\,dV\right| \le \iiint_{\Omega} |f|\,dV$.

۱۱.۱.۷ مثال. ۱) از تابع $f=\left[\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\right]$ بر گوی بستهٔ $\Omega : x^۲+y^۲+z^۲ \le ۱۶$ انتگرال بگیرید.

حل. در این صورت Ω را طوری می‌توان تقسیم کرد که f بر هر قطعه ثابت باشد:

$$\left\{\begin{array}{l} f(X)=۰ \\ X\in\Omega \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ۰\le\|X\|<۱ \\ \|X\|\le ۴ \end{array}\right. \Rightarrow ۰\le\|X\|<۱$$

پس f بر $\Omega_۱ : \|X\|<۱$ برابر صفر است. به صورت مشابه f بر $\Omega_۲ : ۱\le\|X\|<۲$ برابر یک است:

$$\left\{\begin{array}{l} f(X)=۱ \\ X\in\Omega \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ۱\le\|X\|<۲ \\ \|X\|<۴ \end{array}\right. \Rightarrow ۱\le\|X\|<۲$$

به صورت مشابه f بر $\Omega_۳ : ۲\le\|X\|<۳$ برابر ۲ و بر $\Omega_۴ : ۳\le\|X\|<۴$ برابر ۳ است. بعلاوه، حجم کرهٔ

$$\Omega - \Omega_۱\cup\Omega_۲\cup\Omega_۳\cup\Omega_۴ = \{X \mid \|X\|=۴\}$$

صفر است (به شکل ۲.۷—الف توجه شود). پس بنابه قسمت ۴ از ۱۰.۱.۷ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} f\,dV &= \iiint\limits_{\Omega_۱\cup\Omega_۲\cup\Omega_۳\cup\Omega_۴} f\,dV \\
&= \iiint\limits_{\Omega_۱} ۰\,dV + \iiint\limits_{\Omega_۲} ۱\,dV + \iiint\limits_{\Omega_۳} ۲\,dV + \iiint\limits_{\Omega_۴} ۳\,dV \\
&\overset{(۱)}{=} ۰+\mathrm{Vol}(\Omega_۲)+۲\mathrm{Vol}(\Omega_۳)+۳\mathrm{Vol}(\Omega_۴) \\
&= \left(\frac{۴}{۳}\pi\times ۲^۳-\frac{۴}{۳}\pi\times ۱^۳\right) \\
&\quad +۲\left(\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^۳-\frac{۴}{۳}\pi\times ۲^۳\right) \\
&\quad +۳\left(\frac{۴}{۳}\pi\times ۴^۳-\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^۳\right) \\
&= \frac{۴}{۳}\pi(۷+۳۸+۱۱۱) = ۲۰۸\pi
\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید $\Omega : x^۲+y^۲\le z^۲\le ۱$ و $f=x$. انتگرال f بر Ω را محاسبه کنید.

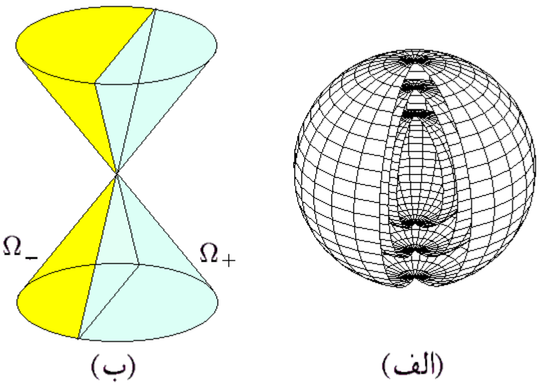
حل. در این صورت انتگرال f بر Ω صفر است، زیرا با تقسیم Ω به دو نیم مخروط

$$\Omega_+ : x^۲+y^۲\le z^۲\le ۱\,,\ ۰\le x$$

$$\Omega_- : x^۲+y^۲\le z^۲\le ۱\,,\ x\le ۰$$

ملاحظه می‌کنیم (به شکل ۲.۷—ب توجه شود) که با تعویض x به $-x$ در Ω_- به مجموعهٔ Ω_+ می‌رسیم. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} f\,dV &= \iiint\limits_{\Omega_+} x\,dV + \iiint\limits_{\Omega_-} x\,dV \\
&= \iiint\limits_{\Omega_+} x\,dV + \iiint\limits_{\Omega_+} -x\,dV = ۰
\end{aligned}$$



شکل ۲.۷: مثال ۱۱.۱.۷

۱۲.۱.۷ تمرین. در هر مورد، مقدار انتگرال $\iiint_{\Omega} f\,dV$ را محاسبه کنید:

۱) $f(x,y,z)=[x+y+z]\,,\ \ \Omega : ۰\le x,y,z\le ۲$

۲) $f(x,y,z)=۵,\ \ \Omega : x^۲+y^۲\le z\le ۴-x^۲-y^۲$

۳) $f(x,y,z)=xyz,\ \ \Omega : |x|+|y|+|z|\le ۱$

در هر مورد، یک حد بالا و یک حد پائین برای انتگرال $\iiint_{\Omega} f\,dV$ بیابید:

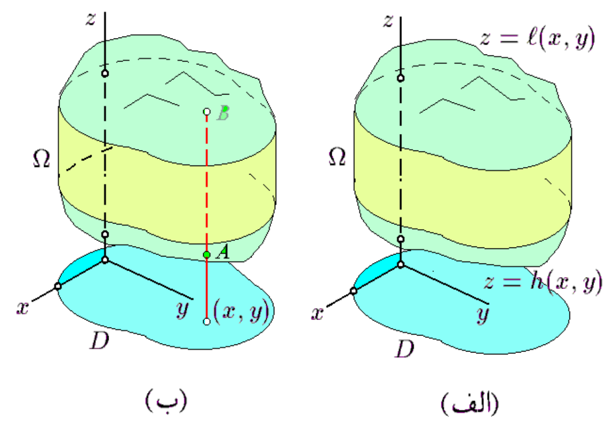
۴) $f(x,y,z)=xy,\ \ \Omega : \left\{\begin{array}{l} ۰\le x,\ ۰\le y,\ ۰\le z, \\ x+y+z\le ۱ \end{array}\right.$

۵) $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲,\ \ \Omega : |x|+|y|+|z|\le ۱$

۶) $f(x,y,z)=z,\ \ \Omega : x^۲+y^۲\le ۱,\ x^۲+y^۲\le ۴$

۲.۷ مجموعهٔ xy–منظم

نظر به مباحث مطرح شده در مورد انتگرال دوگانه، در اینجا نیز کاملاً بجا است که روشی غیر مستقیم برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه مطرح شود. مقدمهٔ این بحث، مفهوم مجموعهٔ xy–منظم در فضای $Oxyz$ است.



شکل ۳.۷: مجموعهٔ xy−منظم

۱.۲.۷ تعریف. مجموعهٔ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^۳$ را در صورتی xy−**منظم** گوئیم که مجموعهٔ $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ و توابع $z = h(x,y)$ و $z = \ell(x,y)$ به گونه‌ای یافت شوند که

$$\Omega : (x,y) \in D,\ \ h(x,y) \le z \le \ell(x,y)$$

به بیان دیگر، Ω قسمتی از فضا است که از بالا به نمودار تابع $z = \ell(x,y)$ و از پائین به نمودار تابع $z = h(x,y)$ و از طرف به استوانه‌ای محدود است که قاعدهٔ آن مرز مجموعهٔ D است (به شکل ۳.۷−الف توجه شود).

۲.۲.۷ قضیه. هر مجموعهٔ بستهٔ کراندار یا xy−منظم است و یا به شکل اجتماعی از مجموعه‌های xy− منظم قابل نوشتن است، به گونه‌ای که حجم ناحیهٔ مورد اشتراک هر دو تا از این مجموعه‌ها برابر صفر است:

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i \ \ \text{و}\ \ \forall i \neq j\ :\ \mathrm{Vol}(\Omega_i \cap \Omega_j) = ۰$$

۳.۲.۷ روش شناسایی حدود یک مجموعهٔ xy−منظم.

فرض کنید مجموعهٔ xy−منظم Ω در اختیار باشد. ابتدا سایهٔ Ω بر xy−صفحه را می‌یابیم. معمولاً این کار با حل معادلات معرف حدود Ω و نیز تعیین دامنهٔ تعریف آنها میسر است. فرض کنیم D نتیجهٔ این عمل باشد؛ به شکل ۳.۷−ب توجه شود. نقطه‌ای فرضی (x,y) در D در نظر گرفته و از منتهی علیه پائین به سوی بالا می‌رویم. فرض کنیم A و B بترتیب اولین و آخرین نقطهٔ برخورد با مجموعهٔ Ω باشد. در این صورت $A = (x,y,\ell(x,y))$ و $B = (x,y,h(x,y))$.
البته، با حل تعدادی مناسب از مسایل معمولی، رفته رفته به وضعیتی از تسلط می‌رسیم که بدون ترسیم شکل می‌توانیم D، h و ℓ را مشخص کنیم. بعلاوه، در بسیاری حالات، تنها بکمک حل نامساویها می‌توان حدود مساله را مشخص نمود. در چنین مواردی، مسایلی که قبلاً حل نموده‌ایم، راهگشا هستند. در واقع، بجای ترسیم شکلها، آنها را تجسم می‌کنیم، و زحمت ترسیم آنها را بر خود نمی‌خریم.

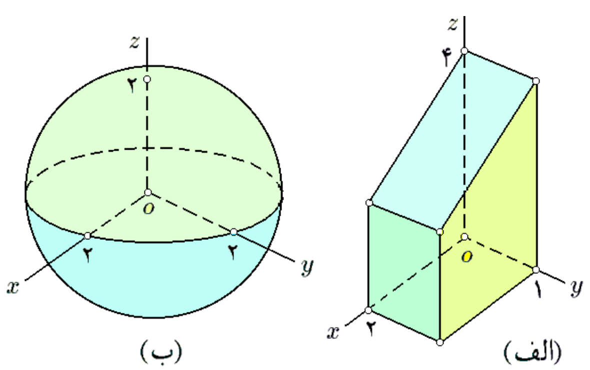
۴.۲.۷ مثال. ۱) فرض کنیم Ω حجم محدود به صفحات مختصاتی، $x + y + z = ۴$، $x = ۲$ و $y = ۱$ باشد. آیا Ω مجموعه‌ای xy−منظم است؟
حل. بله، زیرا اولاً سایهٔ Ω بر xy−صفحه عبارت از مستطیل

$$D\ :\ ۰ \le x \le ۲\ ,\ ۰ \le y \le ۱$$

است، و در ثانی اگر خط فرضی گذرنده از $(x,y) \in D$ را در نظر بگیریم، مشاهده خواهیم کرد که پائین‌ترین نقطهٔ بر خوردش با Ω برابر $(x,y,۰)$ و بالاترین برابر با $(x,y,۴-x-y)$ می‌باشد. بنابراین $h(x,y) = ۰$ و $\ell(x,y) = ۴ - x - y$. پس در مجموع داریم

$$\Omega\ :\ (x,y) \in D\ ,\ ۰ \le z \le ۴ - x - y$$

و Ω مجموعه‌ای xy−منظم است؛ به شکل ۴.۷−الف توجه شود.

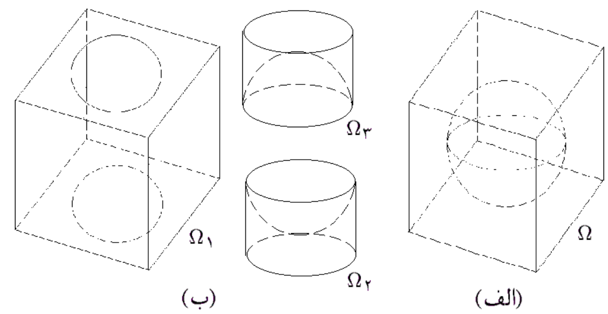


شکل ۴.۷: قسمتهای ۱ و ۲ از مثال ۴.۲.۷

مثال ۲) نشان دهید که گوی $\Omega\ :\ x^۲+y^۲+z^۲ \le ۴$ مجموعه‌ای xy−منظم است.
حل. با حل نامساوی داده شده بر حسب z به عبارت $z^۲ \le ۴ - x^۲ - y^۲$ یا $|z| \le \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ می‌رسیم. اما باید علامت زیر رادیکال مثبت باشد، پس سایهٔ Ω بر xy−صفحه عبارت از قرص $D\ :\ x^۲ + y^۲ \le ۴$ است و h و ℓ بترتیب عبارتند از $-\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ و $\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$؛ به شکل ۴.۷−ب توجه شود. در نتیجه

$$\Omega\ :\ (x,y) \in D\ ,\ -\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲} \le z \le \sqrt{۴ - x^۲ - y}$$

مثال ۳) فرض کنید Ω حجم حاصل از حذف کرهٔ بی لبهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ < ۴$ از مکعب توپر محدود به صفحات $x = \pm ۳$، $y = \pm ۳$، $z = \pm ۳$ است. به شکل ۵.۷−الف توجه شود. نشان دهید که در این صورت Ω مجموعه‌ای xy−منظم نیست.



شکل ۵.۷: قسمت ۳ از مثال ۴.۲.۷

حل. مجموعهٔ Ω xy−منظم نیست، زیرا سایهٔ آن بر xy−صفحه برابر مربع $D\ :\ -3 \le x \le 3\,,\ -3 \le y \le 3$ است، در حالی که اگر (x,y) را نقطهٔ $(0,0)$ بگیریم، آنگاه باید z در مجموعهٔ $[-3;-2] \cup [2;3]$ قرار بگیرد، که یکپارچه نیست! (در حالی که باید z از یک $h(0,0)$ آغاز و به یک $\ell(0,0)$ ختم گردد) برای رفع این مشکل، مجموعهٔ Ω را بکمک استوانهٔ $x^2+y^2=4$ به سه قسمت برش می‌دهیم. به شکل ۵.۷−ب توجه شود. هر یک از این سه مجموعه، xy−منظم هستند:

$$D_1\ :\ x^2+y^2 \ne 4\,,\ -3 \le x \le 3\,,\ -3 \le y \le 3$$

$$D_2\ :\ x^2+y^2 \le 4 \qquad\qquad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$$

$$\Omega_1\ :\ (x,y) \in D_1\,,\ -3 \le z \le 3$$

$$\Omega_2 : (x,y) \in D_2\,,\ -3 \le z \le -\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$\Omega_3\ :\ (x,y) \in D_2\,,\ \sqrt{4-x^2-y^2} \le z \le 3$$

مثال ۴) فرض کنید Ω مجموعهٔ محدود به مخروط $x^2+y^2=z^2$ و صفحهٔ $\sqrt{2}z = x+1$ باشد. نشان دهید که در این صورت Ω مجموعه‌ای xy−منظم است.
حل. برای این منظور معادلهٔ مخروط و صفحه را برخورد داده و نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ \sqrt{2}z = x+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 = 1$$

و لذا تصویر Ω بر xy−صفحه عبارت است از بیضی توپر

$$D\ :\ (x-1)^2/2 + y^2 \le 1$$

همچنین، همان طوری که از شکل ۶.۷−الف بر می آید، چنانچه خط فرضی گذرنده از (x,y) و به موازات z−محور را در نظر بگیریم، پائین ترین نقطه $(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$ و بالا ترین نقطه $\left(x,y,(x+\sqrt{2})/2\right)$ می‌باشد. بنابراین

$$\Omega\ :\ (x,y) \in D\,,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le (x+\sqrt{2})/2$$

۵.۲.۷ تمرین. در هر مورد مشخص کنید که آیا مجموعهٔ داده شده xy−منظم است یا خیر. اگر پاسخ مثبت بود، حدود مجموعه را مشخص کنید و در غیر این صورت مجموعه را به قطعات xy−منظم تقسیم کنید:

۱) Ω مجموعهٔ محدود به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4x$ است.

۲) Ω مجموعهٔ محدود به استوانهٔ $x^2+y^2=9$، صفحات مختصاتی و صفحهٔ $z=-1$ است.

۳) Ω مکعب مستطیل محدود به صفحات مختصاتی و صفحهٔ $y=-1$، $x=1$ و $z=2$ است.

۴) Ω حجم محدود به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از پائین و صفحهٔ $z=4$ از بالا است.

۵) Ω حجم محدود به دو سهمی‌گون بیضوی $z=2-x^2-y^2$ و $z=x^2+y^2$ است.

۶) Ω ناحیهٔ محدود بین دو استوانهٔ $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=9$ و دو صفحهٔ $z=0$ و $z=1$ است.

۷) Ω حجم بین دو کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ و $x^2+y^2+z^2=1$ است.

8) $|x|+|y|+|z| \le 1$

9) $2x \le x^2+y^2+z^2 \le 4x$

10) $x^2+y^2 \le 4\,,\ x^2+z^2 \le 4$

11) $\max\{|x|,|y|,|z|\} \le 2$

12) $x^2+y^2+z^2 \le 4\,,\ z \le 1$

13) $x^2+y^2/4 \le 4\,,\ x^2+z^2/4 \le 4$

۶.۲.۷ یادداشت. درست شبیه مجموعهٔ xy−منظم، از مجموعه‌های xz− منظم و یا yz−منظم می‌توان سخن گفت. به طور کلی از مجموعهٔ uv−منظم در یک فضا می‌توان $Ouvw$ سخن گفت. خواص کلی مجموعه‌های uv− منظم کاملاً شبیه به مجموعه‌های xy−منظم است.

۷.۲.۷ مثال. ۱) فرض کنید Ω حجم محدود به مخروط $y^2=x^2+z^2$ و صفحهٔ $y=2$ است. در این صورت Ω مجموعه‌ای xy−منظم، xy−منظم و yz−منظم است؛ به شکل ۶.۷ توجه شود. به بیان دقیقتر، اگر D_{xy}، D_{xz} و D_{yz} بترتیب عبارت از تصویر Ω بر xy−صفحه، xz−صفحه و yz−صفحه باشند، آنگاه

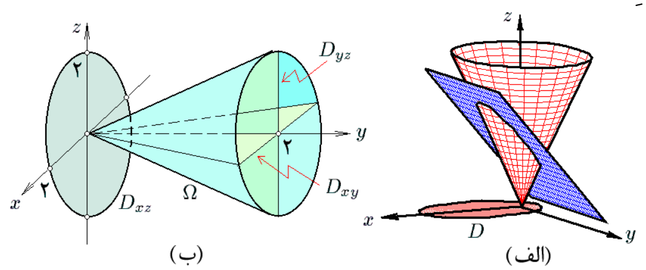
$$D_{xy}\ :\ 0 \le x \le 2\,,\ -x \le y \le x$$

$$D_{yz}\ :\ 0 \le z \le 2\,,\ -z \le y \le z$$

$$D_{xz} : -۲ \le x \le ۲ \, , \, -\sqrt{۴ - x^۲} \le z \le \sqrt{۴ - x^۲}$$

و Ω را به هر سه شکل زیر می‌شود نوشت:

$$\Omega : (x, y) \in D_{xy} \, , \, -\sqrt{y^۲ - x^۲} \le z \le \sqrt{y^۲ - x^۲}$$
$$\Omega : (x, z) \in D_{xz} \, , \, \sqrt{x^۲ + z^۲} \le y \le ۲$$
$$\Omega : (y, z) \in D_{yz} \, , \, -\sqrt{y^۲ - z^۲} \le x \le \sqrt{y^۲ - z^۲}$$

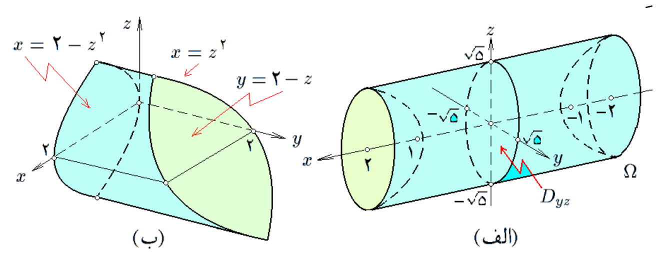


شکل ۶.۷: الف) مثال ۴.۲.۷ قسمت ۴
ب) مثال ۷.۲.۷ قسمت ۱

مثال ۲) فرض کنید Ω جسم محدود به هذلولی گون دو پارچهٔ $y^۲ + z^۲ = x^۲ - ۱$ است. در این صورت Ω مجموعه‌ای yz–منظم است؛ به شکل ۷.۷–الف توجه شود. با برخورد این دو رویه ملاحظه می‌شود که محل برخورد این دو عبارت است از دو دایرهٔ $y^۲ + z^۲ = ۵ , x = \pm ۲$ که تصویر هر دو بر yz–صفحه برابر $D : y^۲ + z^۲ \le ۵$ می‌باشد. بنابراین

$$\Omega : (y, z) \in D, -\sqrt{y^۲ + z^۲ - ۱} \le x \le \sqrt{y^۲ + z^۲ - ۱}$$

چنانچه مایل باشیم این مجموعه را به صورت xy–منظم یا xz–منظم بنویسیم، بایستی Ω را به سه بخش تقسیم کنیم.



شکل ۷.۷: مثال ۷.۲.۷ قسمت ۲ و ۳

مثال ۳) فرض کنید Ω مجموعهٔ محدود به استوانه‌های سهموی $x = z^۲$ و $x = ۲ - z^۲$ و صفحات $y = ۰$ و $y + z = ۲$ است. در این صورت Ω مجموعه‌ای xz–منظم است؛ زیرا اولاً، دو استوانهٔ داده شده در امتداد y–محور قرار دارند و محل برخورد آنها در دو خط واقع در صفحهٔ $x = ۱$ است. در ثانی، محل برخورد این دو با صفحهٔ $y = ۰$ عبارت است از

$$D : -۱ \le z \le ۱ \, , \, z^۲ \le x \le ۲ - z^۲$$

در نتیجه، می‌توان نوشت

$$\Omega : (x, z) \in D \, , \, ۰ \le y \le ۲ - z$$

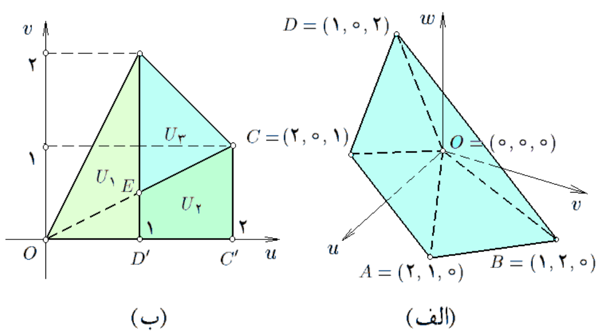
به شکل ۷.۷–ب توجه شود.

مثال ۴) فرض کنید Ω حجم محدود به کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ و بیضی گون $x^۲/۹ + y^۲/۴ + z^۲/۴ = ۱$ است که در نیم فضای $x \le ۰$ واقع شده است. در این صورت Ω مجموعه‌ای yz–منظم است؛ زیرا اولاً تصویر این ناحیه بر yz–صفحه عبارت است از $D : y^۲ + z^۲ \le ۴$ و دو رویهٔ مذکور یکدیگر را در دایرهٔ $x = ۰$ و $y^۲ + z^۲ = ۴$ قطع می‌کنند. بنابراین

$$\Omega : (x, y) \in D \, , \, \sqrt{۴ - y^۲ - z^۲} \le x \le \frac{۳}{۲}\sqrt{۴ - y^۲ - z^۲}$$

چنانچه این مجموعه را به صورت xy–منظم و یا xz–منظم بنویسیم، لازم است که Ω را به سه قسمت تقسیم کنیم.

مثال ۵) فرض کنید Ω پنج وجهی با رئوس $(۰, ۰, ۰)$، $(۱, ۲, ۰)$، $(۲, ۱, ۰)$، $(۱, ۰, ۲)$ و $(۲, ۰, ۱)$ در uvw–فضا باشد. به شکل ۸.۷ توجه شود. در این صورت Ω نه uv–منظم است، نه uw–منظم و نه vw– منظم است. اما آنرا به صورت اجتماعی از سه مجموعهٔ uv–منظم می‌توان نوشت. برای شروع ابتدا باید نموداری از Ω را ترسیم کرد. تصویر نقاط D و C بر uv–صفحه به ترتیب عبارت است از $D' = (۱, ۰, ۰)$ و $C' = (۲, ۰, ۰)$. به این ترتیب تصویر Ω بر uv–صفحه عبارت از چهار ضلعی $OC'AB$ خواهد بود.



شکل ۸.۷: مثال ۷.۲.۷ قسمت ۵

فرض کنیم $U_۱$، $U_۲$ و $U_۳$ بترتیب تصویر مثلث OBD، چهار ضلعی $ABDC$ و مثلث OAC بر uv–صفحه باشد. نقطهٔ E عبارت است از محل بر خورد خط OA به معادلهٔ $u = ۲v$ و خط BD' به معادلهٔ $u = ۱$ در uv–صفحه، یعنی $E = (۱, ۱/۲, ۰)$. در نتیجه

$$U_۱ \;:\; ۰ \le u \le ۱ \, , \, ۰ \le v \le ۲u$$
$$U_۲ \;:\; ۱ \le u \le ۲ \, , \, ۰ \le v \le u/۲$$
$$U_۳ \;:\; ۱ \le u \le ۲ \, , \, u/۲ \le v \le ۲u$$

با توجه به اینکه معادلهٔ صفحه‌ای که مثلث OBD بر آن قرار دارد، عبارت است از

$$\begin{vmatrix} u - ۰ & v - ۰ & w - ۰ \\ ۱ - ۰ & ۲ - ۰ & ۰ - ۰ \\ ۱ - ۰ & ۰ - ۰ & ۲ - ۰ \end{vmatrix} = ۰ \;\Leftrightarrow\; ۲u = v + w$$

و تصویر این مثلث بر uv–صفحه عبارت است از مثلث $U_۱ = OBD'$، در نتیجه جسم زیر آنرا به شکل زیر می‌توان نوشت: $\Omega_۱ : (u,v) \in U_۱ \,,\, ۰ \le w \le ۲u - v$. به صورت مشابه جسم زیر مثلث ABD و بالای uv–صفحه را به صورت زیر می‌توانیم نشان دهیم:

$$\Omega_۲ : (u,v) \in U_۲ \,,\, ۰ \le w \le ۳ - u - v$$

جسم زیر مثلث ADC و بالای مثلث OAC را به صورت

$$\Omega_۳ : (u,v) \in U_۳ \,,\, u/۲ - v \le w \le ۳ - u - v$$

می‌توان نوشت. در نتیجه $\Omega = \Omega_۱ \cup \Omega_۲ \cup \Omega_۳$.

مثال ٦) فرض کنید S بیضی گون

$$(\rho+۱)^۲ + (\rho+\varphi+۱)^۲ + (\rho+\varphi+\theta+۱)^۲ = ۱$$

و Ω حجم محدود به S باشد. در این صورت Ω مجموعه‌ای $\rho\varphi$–منظم است. برای یافتن D تصویر Ω بر $\rho\varphi$–صفحه باید خطی موازی θ–محور را بر خارج S مماس کنیم و سپس محل برخوردش با $\rho\varphi$–صفحه را مشخص کنیم، نتیجه یک منحنی در $\rho\theta$–صفحه خواهد بود که داخل آن مجموعهٔ D می‌باشد. فرض کنیم این خط فرضی $\ell : \rho = \rho_۰ \,,\, \varphi = \varphi_۰$ باشد. اگر ℓ بر S مماس باشد و محل مماس آن $X_۰$ باشد، آنگاه بایستی $(\rho_۰+۱)^۲ + (\rho_۰+\varphi_۰+۱)^۲ + (\rho_۰+\varphi_۰+\theta_۰+۱)^۲ = ۱$ و در نتیجه $\theta_۰ = -۱ - \rho_۰ \pm \{۱ - (\rho_۰+۱)^۲ - (\rho_۰+\varphi_۰+۱)^۲\}^{۱/۲}$. اما $X_۰$ باید تنها یک نقطه باشد! پس الزاماً رادیکال در $\theta_۰$ باید صفر باشد، در نتیجه D عبارت است از بیضی توپر

$$D : (\rho_۰+۱)^۲ + (\rho_۰+\varphi_۰+۱)^۲ \le ۱$$

محدودهٔ Ω در کل عبارت است از

$$\begin{aligned}\Omega : (\rho,\varphi) &\in D\,,\\ -۱-\rho-\varphi-\sqrt{۱-(\rho+۱)^۲-(\rho+\varphi+۱)^۲} &\le \theta\\ &\le -۱-\rho-\varphi+\sqrt{۱-(\rho+۱)^۲-(\rho+\varphi+۱)^۲}\end{aligned}$$

۸.۲.۷ تمرین.

۱) $u^۲ + ۴v^۲ + ۹w^۲ = ۳٦vw$ را بعنوان مجموعه‌ای uv–منظم و vw–منظم بنویسید.

۲) فرض کنید Ω حجم بین دو سهمی گون بیضوی $x = y^۲ + z^۲$ و $x = ۲ - y^۲ - z^۲$ است. آنرا به صورت یک مجموعهٔ yz–منظم بنویسید.

۳) هرم با رئوس $(۰,۰,۰)$، $(۱,۰,۰)$، $(۰,۲,۰)$ و $(۰,۰,۳)$ را بعنوان مجموعه‌ای xy–منظم، yz–منظم بنویسید.

۴) در صورتی که Ω مخروط ناقص محدود به صفحات $y = ۱$ و $y = ۲$ و سطح مخروطی $y^۲ = x^۲ + z^۲$ باشد، آنرا بعنوان مجموعه‌ای xy–منظم، xy– منظم و نیز yz–منظم بنویسید.

۵) مجموعهٔ $۶ \le |u| + ۲|v| + ۳|w|$ را بعنوان مجموعه‌ای uv–منظم، uv–منظم و uw– منظم بنویسید.

٦) هرم با رئوس $(۰,۰,۰)$، $(۱,۱,۰)$، $(۱,۰,۱)$ و $(۰,۱,۱)$ در uvw– فضا را به صورت مجموعه‌ای uv–منظم، uw–منظم و uw–منظم بنویسید.

۷) حجم محدود به استوانهٔ اریب $(u-v)^۲ + (u+v)^۲ = ۴$ و صفحات $w = -۱$ و $w = ۱$ در uvw–فضا را بعنوان مجموعه‌ای uw–منظم بنویسید.

۸) حجم محدود به استوانهٔ $v^۲ + ۴w^۲ = ۱٦$ و صفحهٔ $u = ۴$، واقع در یک هشتم اول را بعنوان یک مجموعهٔ uv–منظم بنویسید.

۳.۷ انتگرال مکرر سه‌گانه

در این بخش مفهومی را مطرح می‌کنیم که می‌تواند بعنوان میانبری برای حل مسالهٔ انتگرال سه‌گانه مورد استفاده قرار گیرد. این موضوع کاملاً شبیه به انتگرال دوگانه می‌باشد.

۱.۳.۷ قضیه. فرض کنیم Ω مجموعه‌ای xy–منظم است،

$$\Omega : (x,y) \in D \,,\, h(x,y) \le z \le \ell(x,y)$$

و $u = f(x,y,z)$ بر Ω پیوسته است. در این صورت

$$\iiint\limits_{\Omega} f\,dV = \iint\limits_{D} \left[\int_{h(x,y)}^{\ell(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA$$

۲.۳.۷ چگونگی حل انتگرال سه‌گانه. برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ f بر مجموعهٔ Ω، در صورت لزوم ابتدا Ω را به صورت اجتماعی از مجموعه‌های xy–منظم می‌نویسیم (مثلاً، $\Omega = \Omega_۱ \cup \cdots \cup \Omega_k$) طوری که حجم ناحیهٔ مورد اشتراک بین هردو تا از آنها صفر باشد. سپس، از f به کمک قضیهٔ ۱.۳.۷ بر هر یک از آنها انتگرال می گیریم و دست آخر مقادیر حاصل را جمع می‌زنیم:

$$\iiint\limits_{\Omega} f\,dV = \iiint\limits_{\Omega_۱} f\,dV + \cdots + \iiint\limits_{\Omega_k} f\,dV$$

۳.۳.۷ مثال. ۱) در صورتی که Ω حجم محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ $x + y/۲ + z/۳ = ۱$ باشد، انتگرال $f(x,y,z) = z$ را بر Ω محاسبه کنید.

حل. برای این منظور، ابتدا Ω را به شکل xy–منظم می‌نویسیم (به شکل ۹.۷–الف توجه شود):

$$D\,:\,۰\leq x\leq ۱\,,\,۰\leq y\leq ۲(۱-x)$$

$$\Omega\,:\,(x,y)\in D\,,\,۰\leq z\leq \frac{۳}{۲}(۲-۲x-y)$$

در نتیجه، بنا به ۱.۳.۷ داریم

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} f\,dV &= \iiint\limits_{\Omega} z\,dV = \iint\limits_{D}\left[\int_{۰}^{۳(۲-۲x-y)/۲} z\,dz\right]dA\\
&= \iint\limits_{D}\left[\frac{z^{۲}}{۲}\right]_{z=۰}^{z=۳(۲-۲x-y)/۲} dA = \frac{۹}{۸}\iint\limits_{D}(۲-۲x-y)^{۲}dA\\
&= \frac{۹}{۸}\int_{۰}^{۱}\left[\int_{۰}^{۲(۱-x)}(۲-۲x-y)^{۲}\,dy\right]dx\\
&= \frac{۹}{۸}\int_{۰}^{۱}\left[\frac{-(۲-۲x-y)^{۳}}{۳}\right]_{y=۰}^{y=۲(۱-x)}\\
&= ۳\int_{۰}^{۱}(۱-x)\,dx = \frac{۳}{۲}
\end{aligned}$$

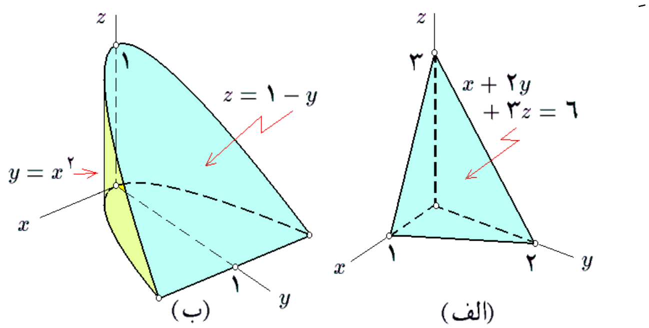
مثال ۲) در صورتی که Ω حجم محدود به صفحات $y+z=۱$ و $z=۰$ و استوانهٔ سهموی $y=x^{۲}$ باشد، انتگرال $f=|x|y$ را بر Ω محاسبه کنید.
حل. برای این منظور، ابتدا Ω را به شکل $xy-$منظم می‌نویسیم (به شکل ۹.۷—ب توجه شود):

$$D\,:\,-۱\leq x\leq ۱\,,\,x^{۲}\leq y\leq ۱$$

$$\Omega\,:\,(x,y)\in D\,,\,۰\leq z\leq ۱-y$$

در نتیجه، بنا به ۱.۳.۷ داریم

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} f\,dV &= \iiint\limits_{\Omega} xy\,dV = \iint\limits_{D}\left[\int_{۰}^{۱-y}|x|y\,dz\right]dA\\
&= \iint\limits_{D}\Big[|x|yz\Big]_{z=۰}^{z=۱-y}dA = \iint\limits_{D}|x|y(۱-y)\,dA\\
&= \int_{-۱}^{۱}\left[\int_{x^{۲}}^{۱}|x|y(۱-y)\,dy\right]dx\\
&= \int_{-۱}^{۱}|x|\left[\frac{y^{۲}}{۲}-\frac{y^{۳}}{۳}\right]_{y=x^{۲}}^{y=۱}dx\\
&= \int_{-۱}^{۱}|x|\left\{\frac{۱}{۶}-\frac{x^{۴}}{۲}+\frac{x^{۶}}{۳}\right\}dx\\
&= ۲\int_{۰}^{۱}\left\{\frac{x}{۶}-\frac{x^{۵}}{۲}+\frac{x^{۷}}{۳}\right\}dx = \frac{۱}{۱۲}
\end{aligned}$$



شکل ۹.۷: مثال ۳.۳.۷ قسمت ۱ و ۲

مثال ۳) در صورتی که Ω حجم محدود به استوانهٔ قائم $x^{۲}+z^{۲}=۴$ و هذلولی گون یکپارچهٔ $x^{۲}+z^{۲}=y^{۲}+۱$ باشد، انتگرال $f=|y|$ را بر Ω محاسبه کنید.
حل. برای این منظور، ابتدا Ω را به شکل $xz-$ منظم می‌نویسیم (به شکل ۱۰.۷—الف توجه شود):

$$D:۱\leq x^{۲}+z^{۲}\leq ۴$$

$$\Omega:(x,z)\in D\,,\,-\sqrt{x^{۲}+z^{۲}-۱}\leq y\leq \sqrt{x^{۲}+z^{۲}-۱}$$

در نتیجه، بنابه حکم شبیه به ۱.۳.۷ در مورد مجموعه‌های $xz-$منظم داریم

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} f\,dV &= \iiint\limits_{\Omega}|y|\,dV = \iint\limits_{D}\left[\int_{-\sqrt{x^{۲}+z^{۲}-۱}}^{\sqrt{x^{۲}+z^{۲}-۱}}|y|\,dy\right]dA\\
&= \iint\limits_{D}\left[\int_{۰}^{\sqrt{x^{۲}+z^{۲}-۱}}۲y\,dy\right]dA = \iint\limits_{D}[y^{۲}]_{y=۰}^{\sqrt{x^{۲}+z^{۲}-۱}}dA\\
&= \iint\limits_{D}(x^{۲}+z^{۲}-۱)\,dA \overset{(۱)}{=} \iint\limits_{D'}(r^{۲}-۱)r\,dA'\\
&= \left(\int_{۰}^{۲\pi}d\theta\right)\left(\int_{۱}^{۲}(r^{۳}-r)\,dr\right)\\
&= \Big[\theta\Big]_{۰}^{۲\pi}\times\left[\frac{r^{۴}}{۴}-\frac{r^{۲}}{۲}\right]_{۱}^{۲} = \frac{۹}{۲}\pi
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $x=r\cos\theta$ و $z=r\sin\theta$ و در نتیجه D' تصویر D در صفحه $r\theta-$ عبارت است از

$$D:۰\leq\theta\leq ۲\pi\;,\;۱\leq r\leq ۲$$

مثال ۴) در صورتی که Ω حجم دوکی شکل محدود به مخروط $y^{۲}+z^{۲}=x^{۲}$ و کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱۸$ باشد که در نیم فضای $x\geq ۰$ قرار دارد، انتگرال $f=x\sqrt{y^{۲}+z^{۲}}$ را بر Ω محاسبه کنید.
حل. برای این منظور ابتدا Ω را به شکل مجموعه‌ای $yz-$ منظم می‌نویسیم (به شکل ۱۰.۷—ب توجه شود):

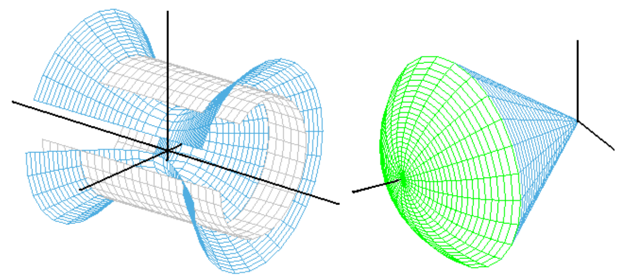
$$D\,:\,y^{۲}+z^{۲}\leq ۹$$

$$\Omega\,:\,(x,y)\in D,\sqrt{y^{۲}+z^{۲}}\leq x\leq\sqrt{۱۸-y^{۲}-z^{۲}}$$

در نتیجه، بنا به حکم مشابه ۱.۳.۷ در مورد مجموعه‌های $yz-$ منظم داریم

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f\,dV &= \iiint_\Omega x\sqrt{y^۲+z^۲}\,dV\\ &= \iint_D \left[\int_{\sqrt{۱۹-y^۲-z^۲}}^{\sqrt{y^۲+z^۲}} x\sqrt{y^۲+z^۲}\,dx\right] dA\\ &= \iint_D \left[\frac{x^۲}{۲}\sqrt{y^۲+z^۲}\right]_{x=\sqrt{y^۲+z^۲}}^{x=\sqrt{۱۸-y^۲-z^۲}} dA\\ &= \iint_D (۹-y^۲-z^۲)\sqrt{y^۲+z^۲}\,dA \stackrel{(۱)}{=} \iint_{D'} (۹-r^۲)r^۲\,dA'\\ &= \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_۰^{۳}(۹r^۲-r^۴)\,dr\right) = \frac{۳۲۴}{۵}\pi\end{aligned}$$

توضیح اینکه (۱) از تغییر متغیر $y = r\cos\theta$ و $z = r\sin\theta$ استفاده نموده‌ایم.



(الف) (ب)

شکل ۱۰.۷: مثال ۳.۳.۷ قسمت ۳ و ۴

مثال ۵) فرض کنیم Ω حجم محدود به استوانه‌های مستدیر $u^۲+v^۲ = ۲u$ و $u^۲+v^۲ = ۴u$ و صفحات $w = ۰$ و $u+w = ۳$ باشد، انتگرال $f = w$ را بر Ω محاسبه کنید.

حل. برای این منظور Ω را به شکل $uv-$ منظم می‌نویسیم (به شکل ۱۱.۷—الف توجه شود):

$$D : ۲u \le u^۲+v^۲ \le ۴u$$

$$\Omega : (u,v)\in D \;,\quad ۰ \le w \le ۳-v$$

در نتیجه، بنا به حکم مشابه ۱.۳.۷ در مورد مجموعه‌های $uv-$ منظم داریم

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f\,dV &= \iiint_\Omega w\,dV = \iint_D\left[\int_۰^{۳-v} w\,dw\right] dA\\ &= \iint_D \left[\frac{w^۲}{۲}\right]_{w=۰}^{w=۳-v} dA = \frac{۱}{۲}\iint_D (۳-v)^۲\,dA\\ &\stackrel{(۱)}{=} \frac{۱}{۲}\iint_{D'} (۳-r\sin\theta)^۲ r\,dA'\\ &= \frac{۱}{۲}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[\int_{۲\cos\theta}^{۴\cos\theta}\left\{۹r-۶r^۲\sin\theta+r^۳\sin^۲\theta\right\}dr\right]d\theta\\ &= \frac{۱}{۲}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[\frac{۹}{۲}r^۲-۲r^۳\sin\theta+\frac{r^۴}{۴}\sin^۲\theta\right]_{r=۲\cos\theta}^{r=۴\cos\theta} d\theta\\ &= \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\Big[۲۷\cos^۲\theta-۵۶\sin\theta\cos^۳\theta\\ &\qquad +۳۰\sin^۲\theta\cos^۴\theta\Big]\,d\theta = \frac{۲۷}{۲}\pi\end{aligned}$$

که در (۱) تغییر مختصات $u = r\sin\theta$ و $v = r\cos\theta$ استفاده شده است و D' تصویر D در $r\theta-$صفحه عبارت است از

$$\begin{aligned} D' \;&:\; ۲r\cos\theta \le r^۲ \le ۴r\cos\theta\\ &:\; -\pi/۲\le\theta\le\pi/۲\;,\; ۲\cos\theta\le r\le ۴\cos\theta\end{aligned}$$

مثال ۶) فرض کنید Ω عبارت از بلور توپر $|s|+|t|+|n| \le ۱$ در $stn-$فضا باشد، انتگرال $f = |s|+|t|+|n|$ را بر Ω محاسبه کنید.

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که با تعویض s به $-s$، t به $-t$ و یا n به $-n$ نه Ω تغییر می کند و نه f، لذا چنانچه فرض کنیم $\Omega_۱$ قسمتی از Ω باشد که در یک هشتم اول $stn-$فضا قرار دارد، باشد، آنگاه بایستی (به شکل ۱۱.۷—ب توجه شود):

$$\iiint_\Omega f\,dV = ۸\iiint_{\Omega_۱} f\,dV$$

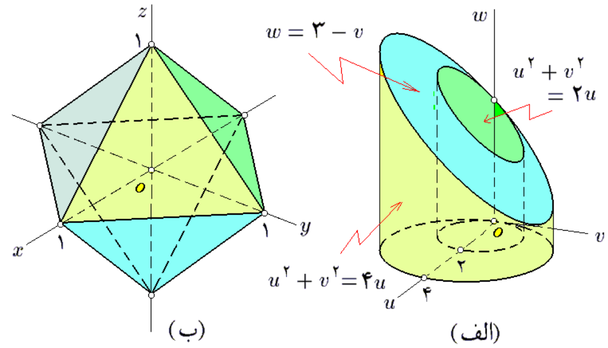
اما $\Omega_۱$ یک هرم با رئوس $(۰,۰,۰)$، $(۱,۰,۰)$، $(۰,۱,۰)$ و $(۰,۰,۱)$ در $stn-$فضا است. در نتیجه، $\Omega_۱$ مجموعه‌ای $st-$ منظم است:

$$D \;:\; ۰\le s\le ۱\,,\; ۰\le t\le ۱-s$$

$$\Omega_۱ \;:\; (s,t)\in D\,,\; ۰\le n\le ۱-s-t$$

پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f\,dV &= ۸\iiint_{\Omega_۱}(s+t+n)dV\\ &= ۸\iint_D\left[\int_۰^{۱-s-t}(s+t+n)dn\right]dA\\ &= ۴\iint_D\left[(s+t+n)^۲\right]_{n=۰}^{n=۱-s-t} dA\\ &= ۴\iint_D \left(۱-(s+t)^۲\right)dA\\ &= ۴\int_۰^۱\left[\int_۰^{۱-s}\{۱-(s+t)^۲\}dt\right]ds\\ &= ۴\int_۰^۱\left[t-\frac{۱}{۳}(s+t)^۳\right]_{t=۰}^{t=۱-s} ds\\ &= \int_۰^۱\left\{\frac{۲}{۳}-s+\frac{s^۳}{۳}\right\}ds = \frac{۱}{۴}\end{aligned}$$



شکل ۱۱.۷: مثال ۳.۳.۷ قسمت ۵ و ۶

۴.۳.۷ تمرین. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\displaystyle \int_۰^{\pi}\left[\int_۰^{\pi}\left[\int_۰^{\pi} \sin(x)\cos(y+z)\,dz\right]dy\right]dx$

۲) $\displaystyle \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\pi/۲}\left[\int_۱^{۲} \rho^۲ \sin\varphi\, d\rho\right]d\varphi\right]d\theta$

۳) $\displaystyle \int_۰^{۲}\left[\int_۰^{۴-x^۲}\left[\int_۰^{x} \frac{\sin(۲z)}{۴-z}\,dy\right]dz\right]dx$

۴) $\displaystyle \int_۰^{۱}\left[\int_۰^{\sqrt{۱-y^۲}}\left[\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}} z\,dz\right]dy\right]dx$

۵) $\displaystyle \int_{-۲}^{۲}\left[\int_{x^۲}^{۴}\left[\int_{-\sqrt{y-x^۲}}^{\sqrt{y-x^۲}} \sqrt{x^۲+z^۲}\,dz\right]dy\right]dx$

۶) $\displaystyle \int_۰^{۱}\left[\int_{\sqrt[۳]{z}}^{۱}\left[\int_۰^{\ln ۳} \frac{e^{۲x}}{y^۲}\sin(\pi y^۳)\,x\right]dy\right]dz$

در هر مورد، $\iiint_\Omega f\,dV$ رامحاسبه کنید:

۷) $f = z,\ \ \Omega : x^۲ + y^۲ \le z \le ۸ - x^۲ - y^۲$

۸*) $f = \sqrt{x^۲+y^۲},\ \ \Omega : x^۲ + y^۲ + z^۲ \le ۲x$

۹) $f = x^۲y^۲,\ \ \Omega : |x| + |y| \le ۱, |z| \le ۱$

۱۰) $f = xyz,\ \ \Omega : ۰ \le x \le y \le z \le ۱$

۱۱) $f = |z|,\ \ \Omega : x^۲ + y^۲ \le ۱, x^۲ + z^۲ \le ۱$

۱۲) $f = x + ۲y,\ \ \Omega : ۰ \le y \le x^۲ \le ۱, ۰ \le z \le y$

۱۳) $f = u + v,\ \ \Omega : u^۲ + v^۲ \le ۲u, |w| \le u$

۱۴) $f = u^\alpha v^\beta w^\gamma,\ \ \Omega : u^۲ + v^۲ + w^۲ \le ۱$

۱۵) $f = y\sqrt{x^۲+z^۲},\ \ \Omega : x^۲ + z^۲ \le y + ۲, ۰ \le y \le ۲$

۱۶) $f = ۱,\ \ \Omega : y \ge z^۲, y \le ۸ - z^۲, x \ge z^۲, x \le ۸ - z^۲$

۱۷*) $f = y - ۱,$

$\Omega =$ هرم با رئوس $(۰,۰,۰), (۱,۱,۰), (۱,۰,۱)$ و $(۰,۱,۱)$

۱۸) $f = uv + vw + wu,\ \ \Omega : ۰ \le w - \sqrt{u^۲+v^۲} \le ۲$

۱۹) $f = \dfrac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲},\ \ \Omega : x^۲ + y^۲ + z^۲ \le R^۲$

۲۰) $f = |s| + |t|,\ \ \Omega : |s| + |t| \le ۱, |s| + |n| \le ۱$

۴.۷ تغییر مختصات در انتگرال سه‌گانه

انتگرال سه‌گانه اغلب به حالتهای غیر قابل حل و یا بسیار مشکل منتهی می‌شود که ناچار به ابداع روشی کار آمد بنام تغییر مختصات برای رفع این گونه مشکلات می‌شویم. معمولاً، تابع مورد انتگرال و یا دامنه مورد انتگرال را به نحو مقتضی اصلاح می‌توان نمود.

۱.۴.۷ تغییر مختصات در فضا. منظور از یک تغییر مختصات در فضا تابعی معکوس‌پذیر $F : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ است به شکل $F(u,v,w) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$ با دامنه Ω و برد Γ طوری که

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \neq ۰ \quad \text{به ازای هر } (u,v,w) \in \Omega \text{ ای} \qquad (۱.۷)$$

J را ژاکوبین تغییر مختصات F می‌نامیم.

۲.۴.۷ یادداشت. چنانچه شرط (۱.۷) بر یک زیر مجموعه با حجم صفر از Ω برقرار نباشد، باز هم ادامهٔ بحث درست است و ما همچنان F را تغییر مختصات می‌دانیم. دلیل این امر، استفاده از این تغییر مختصات در محاسبه انتگرال سه‌گانه می‌باشد.

۳.۴.۷ مثال. ۱) فرض کنید

$$F(u,v,w) = \big(u + ۲v, v + ۲w, w + ۲u\big)$$

و $\Omega = \Gamma = \mathbb{R}^۳$. در این صورت، F یک تغییر مختصات است. زیرا اولاً

$$F^{-۱}(x,y,z) = \Big(\frac{u - ۲y + ۴z}{۸}, \frac{y - ۲z + ۴n}{۸}, \frac{z - ۲n + ۴y}{۸}\Big).$$

در ثانی، بر کل Ω داریم

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left\|\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{matrix}\right\| = ۹ \neq ۰$$

مثال ۲) فرض کنید

$$F(u,v,w) = (w\cosh u \cos v, w\cosh u \sin v, w \sinh u)$$

$\Gamma = \mathbb{R}^3$ و $\Omega \,:\, 0 \le v \le 2\pi \,,\, 0 \le w \,,\, u \in \mathbb{R}$. در این صورت، F یک تغییر مختصات است ، زیرا

$$\begin{aligned} F^{-1}(x,y,z) &= \Big(\operatorname{arctanh}\Big(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big), \\ &\qquad \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big), \sqrt{x^2+y^2-z^2}\Big) \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} J &= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \\ &= \left\|\begin{matrix} w\sinh u\cos v & -w\sinh u\sin v & \cosh u\cos v \\ w\sinh u\sin v & w\cosh u\cos v & \cosh u\sin v \\ w\cosh u & 0 & \sinh u \end{matrix}\right\| \\ &= w^2\cosh u \end{aligned}$$

تنها بر صفحه $w = 0$ از Ω صفر است، که این صفحه دارای حجم صفر در Ω می‌باشد.

۴.۴.۷ تمرین. در هر مورد نشان دهید که نگاشت $F(u,v,w) = (x,y,z)$ یک تغییر مختصات تعریف می‌کند و مجموعه‌های Ω و Γ را مشخص کنید:

۱) $x = u - v + w \,,\, y = -u + v + w \,,\, z = u + v + w,$

۲) $u = x + 2y + 3z \,,\, v = y + 2z + 3x \,,$

$$w = z + 2x + 3y,$$

۳) $u = \cos x\cos y \,,\, v = \cos y\cos z \,,\, w = \cos z\cos x,$

۴) $u = x + e^y \,,\, v = y + e^z \,,\, w = z + e^x,$

۵) $x = u\cos v \,,\, y = u\sin v \,,\, z = w,$

۶) $x = u \,,\, y = uv \,,\, z = uvw,$

۷) $x = u^2 - vw \,,\, y = v^2 - uw \,,\, z = w^2 - uv,$

۸) $x = ue^v \,,\, y = ve^w \,,\, z = we^u,$

۹) $u = x^2 \,,\, v = y^2 \,,\, w = z^2,$

۱۰) $u = 1/x \,,\, v = 1/y \,,\, w = 1/z,$

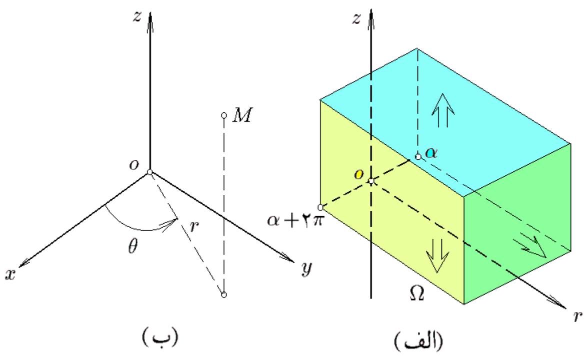
۵.۴.۷ قضیه. در صورتی که F تغییر مختصات با دامنه Ω، برد Γ و ژاکوبین J باشد، $H \subseteq \Omega$ و $f(x,y,z)$ بر H انتگرالپذیر باشد، همچنین اگر $H' \subseteq \Gamma$ مجموعه‌ای باشد که $F(H') = H$. در این صورت $f(F(u,v,w))$ نیز بر H' انتگرالپذیر است و

$$\begin{aligned} &\iiint_H f(x,y,z)\,dV = \\ &\quad = \iiint_{H'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big).J\,dV' \end{aligned}$$

یا به اختصار

$$\iiint_H f\,dV = \iiint_{F^{-1}(H)} (f\circ F)\,J\,dV'$$

در ادامه، سه نمونه از تغییر مختصات استاندارد سه بعدی را مطرح می‌کنیم: استوانه‌ای، کروی و خطی.



شکل ۱۲.۷: مختصات استوانه‌ای

۶.۴.۷ مختصات استوانه‌ای. فرض کنید M نقطه‌ای بجز مبداء در xyz–فضا با مختصات (x,y,z) است. فرض کنیم H تصویر M بر xy–صفحه باشد. فاصلهٔ M تا H را z، فاصلهٔ M تا O را r و زاویه HOx را θ می‌نامیم (به شکل ۱۲.۷—الف توجه شود). روشن است که در این صورت

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

به ازاء $M = (0,0,z_0)$ تعریف می‌کنیم $z = z_0$ و $r = \theta = 0$. به این ترتیب، تابع $F(r,\theta,z) = (x,y,z)$ تعریف می‌گردد. به منظور تامین یک به یک بودن F لازم است که به ازای α دلخواه ولی از این پس ثابت، $\alpha \le \theta < \alpha + 2\pi$ و نیز $0 \le r$. لذا تعریف می‌کنیم (به شکل ۱۲.۷—ب توجه شود):

$$\Omega \,:\, \alpha \le \theta < \alpha + 2\pi \,,\; 0 \le r \,,\; z \in \mathbb{R}$$

همچنین ژاکوبین F عبارت است از

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \left\|\begin{matrix} -r\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ r\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = r$$

که در همه جا بجز z–محور صفر است. در نتیجه، F یک تغییر مختصات است. این را **تغییر متغیر استوانه‌ای** می‌نامیم. لازم به ذکر است که اغلب مبنی α محاسبه θ را 0 و یا $-\pi$ اختیار می‌کنند.

۷.۴.۷ مثال. ۱) انتگرال $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ که در آن Ω به مخروط $x^2+y^2=z^2$ و صفحه $z=1$ محدود شده است را محاسبه کنید.

حل. دامنه Ω را به صورت

$$\Omega \,:\, x^2+y^2 \le 1 \,,\; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$$

می‌توان نوشت. برای تبدیل Ω به دامنه‌ای در $r\theta z$–فضا کافی است به جای x مقدار $r\cos\theta$ و به جای y مقدار $r\sin\theta$ را قرار دهیم. به این ترتیب داریم:

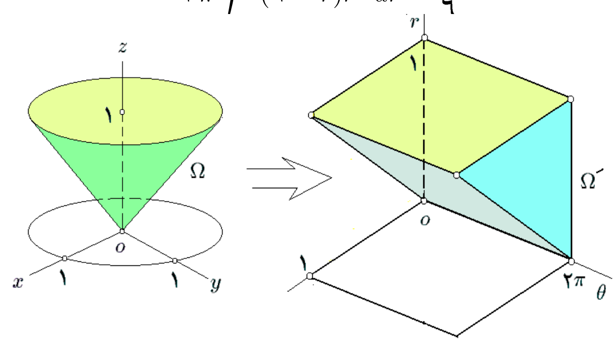
$$\Omega' : r \le ۱ \,,\, r \le z \le ۱ \;:\; ۰ \le r \le ۱ \,,\, r \le z \le ۱$$

چون شرطی بر θ نیست، پس $۰ \le \theta \le ۲\pi$. بنابراین،

$$\Omega' : ۰ \le \theta \le ۲\pi \,,\, ۰ \le r \le ۱ \,,\, r \le z \le ۱$$

در شکل ۱۳.۷ مجموعه‌های Ω و Ω' نشان داده شده‌اند. اکنون به کمک ۶.۴.۷ داریم،

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \sqrt{x^۲+y^۲}\, dV &= \iiint_{\Omega'} r\, r\, dV' \\
&= \int_۰^{۲\pi} \left[\int_۰^۱ \left[\int_۰^۱ r^۲\, dz\right] dr\right] d\theta \\
&= \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_۰^۱ \left[z r^۲\right]_{z=r}^{z=۱} dr\right) \\
&= ۲\pi \int^۱ (۱-r) r^۲\, dr = \frac{\pi}{۶}
\end{aligned}$$



شکل ۱۳.۷: قسمت ۱ از مثال ۷.۴.۷

مثال ۲) فرض کنید Ω حجم محدود به سهمی‌گونهای بیضوی $z = (x-۱)^۲ + y^۲$ و $z = ۲ - (x-۱)^۲ - y^۲$ است. انتگرال تابع $f = z/\sqrt{x^۲+y^۲}$ بر Ω را محاسبه کنید.

حل. سهمی‌گون بیضوی اول رو به بالا و دومی رو به پائین است، لذا برای محاسبهٔ تصویر Ω (به شکل ۱۴.۷—الف توجه شود) بر xy–صفحه کافی است معادلات آن دو را در یک دستگاه حل کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} z = (x-۱)^۲ + y^۲ \\ z = ۲ - (x-۱)^۲ - y^۲ \end{array}\right. \;\Rightarrow\; (x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$$

در نتیجه، تصور ناحیهٔ داده شده بر xy–صفحه

$$D : (x-۱)^۲ + y^۲ \le ۱$$

است. بنابراین، Ω را به شکل

$$\begin{aligned}
\Omega \;&:\; (x,y) \in D \,,\, (x-۱)^۲ + y^۲ \le z \le ۲ - (x-۱)^۲ - y^۲ \\
&:\; \left\{\begin{array}{l} x^۲ + y^۲ \le ۲x \,, \\ x^۲ + ۲x + ۱ + y^۲ \le z \le ۱ - x^۲ + ۲x - y^۲ \end{array}\right.
\end{aligned}$$

می‌توان نوشت. در نتیجه، تصویر ناحیهٔ Ω در $r\theta z$–فضا عبارت است از

$$\begin{aligned}
\Omega' \;&:\; \left\{\begin{array}{l} r^۲ \le ۲r\cos\theta \,, \\ r^۲ - ۲r\cos\theta + ۱ \le z \le ۱ - r^۲ + ۲r\cos\theta \end{array}\right. \\
&:\; \left\{\begin{array}{l} -\pi/۲ \le \theta \le \pi/۲ \,,\, ۰ \le r \le ۲\cos\theta \,, \\ r^۲ - ۲r\cos\theta + ۱ \le z \le ۱ - r^۲ + ۲r\cos\theta \end{array}\right.
\end{aligned}$$

پس در مجموع، انتگرال خواسته شده عبارت است از

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\, dV &= \iiint_{\Omega'} z\, dV' \\
&= \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_۰^{۲\cos\theta} \left[\int_{r^۲-۲r\cos\theta+۱}^{۱-r^۲+۲r\cos\theta} z\, dz\right]\right] d\theta \\
&= \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_۰^{۲\cos\theta} \left(۴r\cos\theta - ۲r^۲\right) dr\right] d\theta \\
&= \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left(\frac{۸}{۳}\cos^۳\theta\right) d\theta = \frac{۳۲}{۹}
\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید Ω ناحیه محدود به استوانه قائم $(x^۲+y^۲)^۲ = x^۲ - y^۲$ و مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ است. در این صورت، انتگرال $f = z(x^۲ - y^۲)$ را بر Ω محاسبه کنید.

حل. ملاحظه می‌شود که با تعویض x به $-x$ یا y به $-y$ و یا z به $-z$ نه Ω تغییر می‌کند و نه f، در نتیجه می‌توان $\Omega_۱$ قسمتی از Ω که در یک هشتم اول فضا قرار دارد را در نظر گرفته و پس از محاسبهٔ انتگرال f بر آن، حاصل را هشت برابر نمود. اما D تصویر $\Omega_۱$ بر xy–صفحه عبارت است از

$$D : ۰ \le x \,,\, ۰ \le y \,,\, (x^۲+y^۲)^۲ \le x^۲ - y^۲$$

بنابراین، $\Omega_۱$ را به شکل

$$\Omega_۱ : \left\{\begin{array}{l} ۰ \le x \,,\, ۰ \le y \,,\, ۰ \le z \,, \\ (x^۲+y^۲)^۲ \le x^۲ - y^۲ \,,\, z^۲ \le x^۲ + y^۲ \end{array}\right.$$

می‌توان نوشت. نامساوی آخر را با شرط $۰ \le z$ حل کرده و نتیجه می‌گیریم که

$$\Omega_۱ : \left\{\begin{array}{l} ۰ \le x \,,\, ۰ \le y \,,\, (x^۲+y^۲)^۲ \le x^۲ - y^۲ \,, \\ ۰ \le z \le \sqrt{x^۲+y^۲} \end{array}\right.$$

این مجموعه را به صورت زیر به $r\theta z$–فضا تصویر می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\Omega'_۱ \;&:\; ۰ \le r\cos\theta \,,\, ۰ \le r\sin\theta \,,\, (r^۲)^۲ \le r^۲\cos(۲\theta) \,,\, z \le r \\
&:\; ۰ \le \cos\theta \,,\, ۰ \le \sin\theta \,,\, r^۲ \le \cos(۲\theta) \,,\, z \le r
\end{aligned}$$

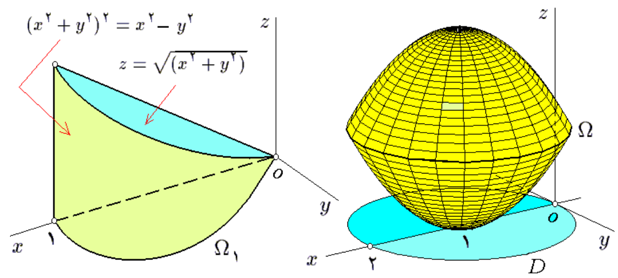
از شرط $r^۲ \le \cos(۲\theta)$ نتیجه می‌شود که $۰ \le \cos(۲\theta)$. در نتیجه $۲k\pi - \pi/۲ \le ۲\theta \le ۲k\pi + \pi/۲$ از دو نامساوی اول

نیز نتیجه می‌گردد که $۰ \le \theta \le \pi/۲$. بنابراین، باید $k = ۰$ و $۰ \le \theta \le \pi/۴$. پس در مجموع، داریم

$$\Omega'_۱ \ : \ ۰ \le \theta \le \pi/۴ \, , \ ۰ \le r \le \sqrt{\cos(۲\theta)} \, , \ ۰ \le z \le r$$

به شکل ۱۴.۷—ب توجه شود. بنابراین

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} z(x^۲ - y^۲)\, dV &= ۸ \iiint_{\Omega_۱} z(x^۲ - y^۲)\, dV \\
&= ۸ \iiint_{\Omega'_۱} z r^۳ \cos(۲\theta)\, dV \\
&= ۸ \int_۰^{\pi/۴} \left[\int_۰^{\sqrt{\cos(۲\theta)}} \left[\int_۰^{r} z r^۳ \cos(۲\theta)\, dz \right] \right] d\theta \\
&= ۴ \int_۰^{\pi/۴} \left[\int_۰^{\sqrt{\cos(۲\theta)}} r^۵ \cos(۲\theta)\, dr \right] d\theta \\
&= \frac{۲}{۳} \int^{\pi/۴} \cos^۴(۲\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{۱۶}
\end{aligned}$$



شکل ۱۴.۷: قسمت ۲ و ۳ از مثال ۷.۴.۷

۸.۴.۷ تمرین.

۱) انتگرال تابع $f = ۱/\sqrt{x^۲ + y^۲}$ را بر گوی محدود به کرهٔ به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲z$ محاسبه کنید.

۲) در صورتی که Ω حجم محدود به استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲x$ و صفحات $z = ۰$ و $z = a > ۰$ باشد، انتگرال تابع $f = z\sqrt{x^۲ + y^۲}$ را بر Ω محاسبه کنید.

۳) در صورتی که Ω حجم محدود به هذلولی‌گون دو پارچهٔ $x^۲ + y^۲ + ۱ = z^۲$ و صفحهٔ $z = \sqrt{۲}$ باشد، انتگرال تابع $f = z(۱ - x^۲ - y^۲)/(۱ + x^۲ + y^۲)$ را بر Ω محاسبه کنید.

۴) در صورتی که Ω حجم محدود به استوانه‌های قائم $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و $x^۲ + y^۲ = b^۲$ و دو صفحهٔ $z = a$ و $z = b$ باشد که $۰ < a < b$، انتگرال تابع $f = ۱/\sqrt{x^۲ + y^۲}$ را بر Ω محاسبه کنید.

۵) در صورتی که Ω حجم محدود به سهمی‌گونهای بیضوی $y = x^۲ + z^۲$ و $y = ۲ - x^۲ - z^۲$ باشد، انتگرال تابع $f = |xyz|$ را بر Ω محاسبه کنید.

۶) در صورتی که Ω حجم محدود به مخروط $x^۲ + y^۲ = z^۲$ و صفحات $z = a$ و $z = b$ باشد که $۰ < a < b$، انتگرال تابع $f = ۲z\sqrt{۱ + x^۲ + y^۲}$ را بر Ω محاسبه کنید.

۷) در صورتی که Ω با نامساویهای $۰ \le y, z \le ۱$، $۰ \le z$، $x + y \le ۲$ و نیز $x^۲ + y^۲ \le ۲x$ بیان شده باشد، انتگرال تابع $f = x$ را بر Ω محاسبه کنید.

۹.۴.۷ مختصات کروی.

فرض کنید $M = (x, y, z)$ نقطه‌ای غیر از مبداء در فضا باشد. به شکل ۱۵.۷—الف توجه شود. M را بر xy—صفحه تصویر کرده و نقطهٔ $H = (x, y, ۰)$ را بدست می‌آوریم. فاصلهٔ M تا O را ρ، زاویهٔ zOM را φ و زاویهٔ xOH را θ می‌نامیم. در مثلث OMH زاویهٔ رأس O برابر $\pi/۲ - \varphi$ است، در نتیجه

$$\begin{aligned}
z &= \overline{MH} = \rho \sin(\pi/۲ - \varphi) = \rho \cos\varphi \\
\overline{OH} &= \rho \cos(\pi/۲ - \varphi) = \rho \sin\varphi
\end{aligned}$$

اما در xy—صفحه داریم $r = \overline{OH}$، بنابراین

$$\begin{aligned}
x &= \overline{OH} \cos\theta = \rho \sin\varphi \cos\theta \\
y &= \overline{OH} \sin\theta = \rho \sin\varphi \sin\theta
\end{aligned}$$

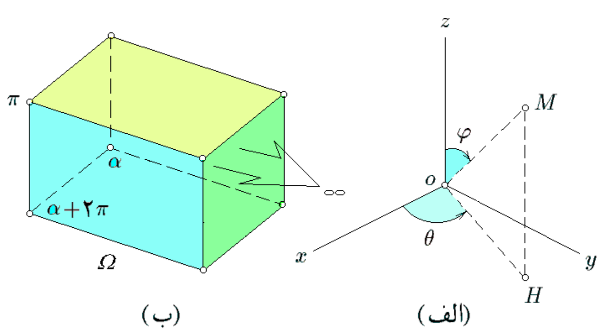
پس در مجموع داریم

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{array} \right. \qquad (۲.۷)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{۱}{z} \sqrt{x^۲ + y^۲} \right) \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x} \right) \end{array} \right.$$

به این ترتیب به تابعی $(\rho, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ می‌رسیم. شرط معکوسپذیری این تابع آن است که

$$۰ \le \rho \, , \ \alpha \le \theta \le \alpha + ۲\pi \, , \ ۰ \le \varphi \le \pi \qquad (۳.۷)$$



شکل ۱۵.۷: تغییر مختصات کروی

که α عددی دلخواه (معمولاً برابر ۰ یا $-\pi$) می‌باشد (به ۱۵.۷–ب توجه شود). ژاکوبی این تابع عبارت است از

$$\begin{aligned} J &= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right| \\ &= \left\|\begin{matrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{matrix}\right\| \\ &= \rho^2\sin\varphi \end{aligned}$$

که بر مجموعهٔ $A = \left\{(\rho,\varphi,\theta)\,|\,\rho = 0\right.$ یا $\varphi = 0$ یا $\left.\varphi = \pi\right\}$ صفر است که در $\rho\varphi\theta$–فضا با حجم صفر می‌باشد. بنابراین (۳.۷) یک تغییر متغیر با دامنهٔ (۳.۷) تعریف می‌کند. این مختصات را کروی می‌نامیم.

در مجموع اگر Ω' تصویر Ω در $\rho\varphi\theta$–فضا باشد، در این صورت

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{\Omega'} f\Big(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi\Big)\rho^2\sin\varphi\,dV'$$

۱۰.۴.۷ مثال. ۱) فرض کنید Ω حجم محدود به مخروط $x^2+y^2=z^2$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ واقع در نیم فضای $z\geq 0$ باشد. انتگرال تابع $f=(x^2+y^2)^{3/2}$ را بر Ω محاسبه کنید.

حل. ابتدا Ω را به کمک نامساویها بیان می‌کنیم:

$$\Omega \,:\, \sqrt{x^2+y^2}\leq z\,,\, x^2+y^2+z^2\leq 4$$

سپس برای یافتن Ω' تصویر Ω در $\rho\varphi\theta$–فضا، برای x، y و z بترتیب از فرمولهای (۳.۷) در ۹.۴.۷ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Omega' \;&:\; \rho\sin\varphi\leq\rho\cos\varphi\,,\,\rho^2\leq 4 \\ &:\; \sin\varphi\leq\cos\varphi\,,\, 0\leq\rho\leq 2 \end{aligned}$$

اما لازم است $0\leq\varphi\leq\pi$، پس نامساوی اول به این معنی است که $0\leq\varphi\leq\pi/4$ و بنابراین Ω' عبارت است از

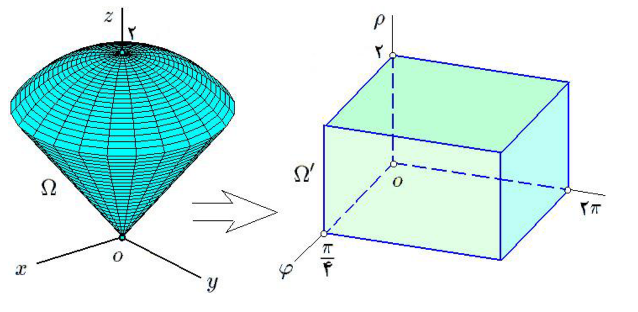
$$\Omega' \,:\, 0\leq\varphi\leq\pi/4\,,\, 0\leq\rho\leq 2$$

چون محدودیتی بر θ وجود ندارد، داریم

$$\Omega' \,:\, 0\leq\theta\leq 2\pi\,,\, 0\leq\varphi\leq\pi/4\,,\, 0\leq\rho\leq 2$$

توجه شود که Ω' یک ناحیهٔ به شکل مکعب مستطیل در $\rho\varphi\theta$–فضا است. به شکل ۱۶.۷ توجه شود. در این صورت

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)^{3/2}\,dV &= \iiint\limits_{\Omega'}\rho^3\sin^3\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,dV' \\ &= \left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4}\sin^4\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{2}\rho^5\,d\rho\right) \\ &= \Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8}\Big(3\varphi-2\sin(2\varphi)+\sin(4\varphi)\Big)\right]_0^{\pi/4}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{2} \\ &= \frac{2\pi}{3}(3\pi-8) \end{aligned}$$



شکل ۱۶.۷

مثال ۲) در صورتی که Ω به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2z$ محدود باشد و $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ انتگرال f را بر Ω محاسبه کنید.

حل. ابتدا با توجه به $\Omega\,:\,x^2+y^2+z^2\leq 2z$ و فرمولهای ۳.۷ در ۹.۴.۷، تصویر Ω در $\rho\varphi\theta$–فضا را مشخص می‌کنیم:

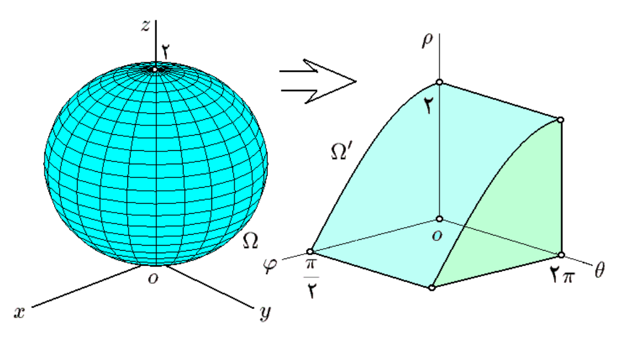
$$\Omega' \,:\, \rho^2\leq 2\rho\cos\varphi \,:\, 0\leq\rho\leq 2\cos\varphi$$

پس باید $0\leq\cos\varphi$. اما، در تغییر مختصات کروی الزاماً $0\leq\varphi\leq\pi$، در نتیجه $0\leq\varphi\leq\pi/2$ و بنابراین

$$\Omega' \,:\, 0\leq\theta\leq 2\pi\,,\, 0\leq\varphi\leq\pi/2\,,\, 0\leq\rho\leq 2\cos\varphi$$

به شکل ۱۷.۷ توجه شود. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV &= \iiint\limits_{\Omega'}\rho\,\rho^2\sin\varphi\,dV' \\ &= \left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos\varphi}\rho^3\sin\varphi\,d\rho\right]d\varphi\right) \\ &= 8\pi\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{8}{5}\pi \end{aligned}$$



شکل ۱۷.۷: مختصات کروی

مثال ۳) در صورتی که Ω قسمتی از پوستهٔ کروی محدود به کره‌های به مرکز مبداء و شعاع بترتیب ۱ و ۲ باشد که در یک هشتم دوم قرار دارد، از تابع $f=\sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ بر Ω انتگرال بگیرید.

حل. توجه شود که

$$\Omega : x\le 0\,,\ 0\le y\,,\ 0\le z\,,\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4$$

در نتیجه Ω' تصویر Ω در $\rho\varphi\theta$−فضا عبارت است از

$$\begin{aligned}\Omega' \ &:\ \begin{cases}\rho\sin\varphi\cos\theta\le 0\,,\ 0\le\rho\sin\varphi\sin\theta\,,\\ 0\le\rho\cos\varphi\,,\ 1\le\rho^2\le 4\end{cases}\\ &:\ \cos\theta\le 0\,,\ 0\le\sin\theta\,,\ 0\le\rho\cos\varphi\,,\ 1\le\rho\le 2\\ &:\ \pi/2\le\theta\le\pi\,,\ 0\le\varphi\le\pi/2\,,\ 1\le\rho\le 2\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}\sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV=\\ &=\iiint_{\Omega'}\sqrt{1+\rho^3}.\rho^2\sin\varphi\,dV'\\ &=\left(\int_0^{\pi/2}d\theta\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_1^2\rho^2\sqrt{1+\rho^3}\,d\rho\right)\\ &=\frac{\pi}{2}\times 1\times\frac{2}{9}(27-2\sqrt{2})=\frac{\pi}{9}(27-2\sqrt{2})\end{aligned}$$

۱۱.۴.۷ تمرین.

در هر مورد از f بر Ω انتگرال بگیریم:

۱) $f=z$ و Ω به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4z$ محدود است.

۲) $f=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ و Ω به کره‌های به مرکز مبداء و شعاع a و b محدود است، که $0<a<b$.

۳) $f=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ و Ω به قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ محدود است و در یک هشتم اول قرار دارد.

۴) $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و Ω به مخروط $x^2+y^2=z^2$ و صفحهٔ $z=3$ محدود است.

۵) $f=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و Ω به مخروط $x^2+y^2=z^2$ و صفحات $z=a$ و $z=b$ محدود است، که $0<a<b$.

٦) $f=z^2$ و Ω به کره‌های $x^2+y^2+z^2=R^2$ و $x^2+y^2+z^2=2Rz$ محدود است.

۷) $f=y/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و Ω به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2y$ محدود شده است.

۸) $f=\ln(x^2+y^2+z^2+1)$ و Ω به قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=9$ است که در یک هشتم دوم قرار دارد.

۹) $f=|z|$ و $\Omega : (x^2+y^2+z^2)^2\le x^2+y^2-z^2$.

۱۰) $f=1$ و $\Omega : (x^2+y^2+z^2)^2\le 3xyz$.

۱۱) $f=(x+y+z)^2$ و $\Omega : x^2+y^2+z^2\le 3a^2\,,\ x^2+y^2\le 2az$.

۱۲) حجم محدود به کره‌های به معادلات $x^2+y^2+z^2=2z$ و $x^2+y^2+z^2=2y$ را محاسبه کنید.

۱۲.۴.۷ مختصات خطی.

منظور از تغییر متغیر خطی، تغییر متغیری است به شکل

$$\begin{cases}x=a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w+a_{14}\\ y=a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w+a_{24}\\ z=a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w+a_{34}\end{cases}$$

$$J=\left\|\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}\right\|\neq 0$$

چنین تغییر متغیری موجب انتقال، دوران، انعکاس، تجانس نسبت به یک نقطه و یا تجانس نسبت به یک خط و یا صفحه می‌گردد. عمده‌ترین ویژگی چنین تغییر مختصاتی در آن است که اگر S یک نقطه، خط، صفحه، مقطع مخروطی و یا رویهٔ درجهٔ دوم باشد، آنگاه تبدیل یافتهٔ S نیز چنین خواهد بود. به این معنی که مثلاً اگر S کره باشد، آنگاه تبدیل یافتهٔ S یک بیضی گون است و لاغیر.

۱۳.۴.۷ مثال.

۱) در صورتی که Ω هرمی باشد که توسط صفحهٔ $x+y+z=1$ از یک هشتم اول جدا می‌شود و نیز $f=1/(x+y+z+1)^3$ باشد، انتگرال f را بر Ω محاسبه کنید.

حل. از تغییر مختصات $u=x+y+z$، $v=x+y$ و $w=x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $x=w$، $y=v-w$، $z=u-v$ و بعلاوه

$$J=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\left\|\begin{matrix}0&0&1\\ 0&1&-1\\ 1&-1&0\end{matrix}\right\|=|-1|=1$$

برای مشخص کردن Ω' تصویر Ω در uvw−فضا، ابتدا Ω را بر حسب نامساویها بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\Omega\ &:\ 0\le x\,,\ 0\le y\,,\ 0\le z\,,\ x+y+z\le 1\\ &:\ 0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1-x\,,\ 0\le z\le 1-x-y\end{aligned}$$

و سپس x، y و z را بر حسب u، v و w می‌نویسیم

$$\Omega' : 0\le w\le 1\,,\ w\le v\le 1\,,\ v\le u\le 1$$

در نتیجه، داریم

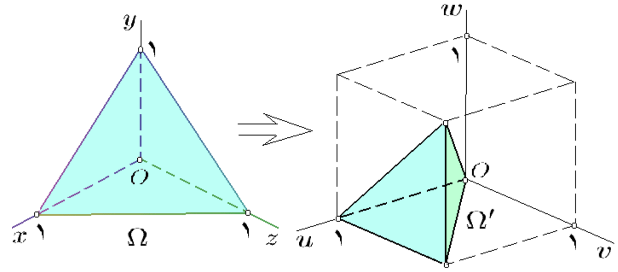
$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, dV = \iiint_{\Omega'} \frac{1}{(u+1)^3} \times 1\, dV'$$

$$= \int_0^1 \left[\int_w^1 \left[\int_v^1 \frac{du}{(u+1)^3}\right] dv\right] dw$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_w^1 \left(\frac{1}{(v+1)^2} - 1\right) dv\right] dw$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{w+1} + w - \frac{3}{2}\right) dw = \ln 2 - 1$$

به شکل ۱۸.۷ توجه شود.



شکل ۱۸.۷: تغییر مختصات کروی

مثال ۲) در صورتی که Ω حجم محدود به بیضی‌گون $(x+1)^2+4(x+2y+1)^2+9(x+2y+3z+1)^2 = 16$ باشد و $f = |3x+4y+3|$، انتگرال f را بر Ω محاسبه کنید.

حل. فرض کنیم $u = x+1$، $v = 2(x+2y+1)$ و $w = 3(x+2y+3z+1)$. در این صورت Ω' تصویر Ω در uvw−فضا عبارت است از گوی $\Omega' : u^2+v^2+w^2 \le 16$. در نتیجه

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = 1 \div \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|$$

$$= 1 \div \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{36}$$

$$\iiint_{\Omega} f\, dV = \iiint_{\Omega} |3x+4y+3|\, dV = \iiint_{\Omega'} |u+v| \frac{1}{36}\, dV'$$

اکنون از تغییر مختصات کروی برای Ω' استفاده می‌کنیم، در این صورت Ω'' تصویر Ω' در $\rho\varphi\theta$−فضا عبارت است از

$$\Omega'' : -\pi/4 \le \theta \le 2\pi - \pi/4 \,,\ 0 \le \varphi \le \pi \,,\ 0 \le \rho \le 4$$

به شکل ۱۹.۷ توجه شود. در نتیجه

$$\iiint_{\Omega} f\, dV = \frac{1}{36}\iiint_{\Omega'} |u+v|\, dV'$$

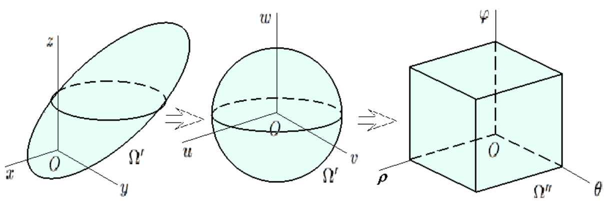
$$= \frac{1}{36}\iiint_{\Omega''} \rho^3 \sin^2\varphi\, |\cos\theta + \sin\theta|\, dV''$$

$$= \frac{1}{36}\left(\int_{-\pi/4}^{2\pi-\pi/4} |\cos\theta+\sin\theta|\, d\theta\right)$$

$$\times \left(\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^4 \rho^3\, d\rho\right)$$

$$= \frac{8\pi}{9}\int_{-\pi/4}^{2\pi+\pi/4} |\cos\theta+\sin\theta|\, d\theta$$

$$= \frac{16\pi}{9}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos\theta+\sin\theta)\, d\theta = \frac{32\pi}{9}\sqrt{2}$$



شکل ۱۹.۷: دو تغییر مختصات پی در پی

مثال ۳) در صورتی که Ω قسمتی از یک هشتم اول باشد که توسط رویهٔ S جدا شده است، حجم Ω را محاسبه کنید:

$$S : \left(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2\right)^2 = (xyz)/(abc)$$

حل. ابتدا به کمک تغییر مختصات $u = x/a$، $v = y/b$ و $w = z/c$ پارامترهای a، b و c را حذف می‌کنیم. به این ترتیب Ω' تصویر Ω در uvw−فضا عبارت خواهد بود از

$$\Omega' : 0 \le u \,,\ 0 \le v \,,\ 0 \le w \,,\ (u^2+v^2+w^2)^2 \le uvw$$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = abc$$

و در نتیجه

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega'} abc\, dV' = abc\iiint_{\Omega'} dV'$$

اکنون از تغییر مختصات کروی استفاده می‌کنیم؛ در نتیجه Ω'' تصویر Ω' در $\rho\varphi\theta$−فضا عبارت است از

$$\Omega'' \quad : \quad \begin{cases} 0 \le \rho\sin\varphi\cos\theta \,,\ 0 \le \rho\sin\varphi\sin\theta \,, \\ 0 \le \rho\cos\varphi \,,\ \rho \le \sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$: \quad \begin{cases} 0 \le \cos\theta \,,\ 0 \le \sin\theta \,,\ 0 \le \cos\varphi \,, \\ \rho \le \sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$: \quad \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/2 \,,\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \,, \\ 0 \le \rho \le \sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

و بنابراین

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = abc\iiint_{\Omega''} \rho^2 \sin\varphi\, dV''$$

$$= abc\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta} \rho^2\, d\rho\right] \sin\varphi\, d\varphi\right] d\theta$$

$$= abc\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\sin^7\varphi\cos^3\varphi\sin^3\theta\cos^3\theta\, d\varphi\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{3}abc\left(\int_0^{\pi/2} \sin^7\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi\right)$$
$$\times\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^3\theta\,d\theta\right)$$
$$\overset{(1)}{=}\frac{1}{3}abc\left(\int_0^1 s^7(1-s^2)\,ds\right)\left(\int_0^1 t^3(1-t^2)\,dt\right)$$
$$=\frac{abc}{1440}$$

توضیح اینکه در (۱) از تغییر مختصات $s=\sin\varphi$ و $t=\sin\theta$ استفاده نموده‌ایم.

مثال ۴) در صورتی که Ω حجم محدود به مخروط $x^2+xy+xz=yz$ و صفحهٔ $y+z=1$ باشد، انتگرال $f=y+z$ را بر Ω محاسبه کنید.

حل. معادلهٔ مخروط را به شکل $(x+y)^2+(x+z)^2=(y+z)^2$ می‌توان نوشت، به همین دلیل نظر به معادلهٔ صفحه و تابع f، فرض می‌کنیم $u=x+y$، $v=x+z$ و $w=y+z$. در این صورت چون $\Omega:\ (x+y)^2+(x+z)^2\le(y+z)^2\,,\ y+z\le 1$، بنابراین Ω' تصویر Ω در uvw–فضا

$$\Omega'\ :\ u^2+v^2\le w^2\,,\ w\le 1\ :\ \sqrt{u^2+v^2}\le w\le 1$$

است. بعلاوه، چون

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = 1\div\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|$$
$$= 1\div\left\|\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix}\right\| = \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

در مجموع داریم

$$\iiint\limits_{\Omega} f\,dV = \iiint\limits_{\Omega}(y+z)\,dV = \iiint\limits_{\Omega'} w\frac{1}{2}\,dV'$$

اکنون از تغییر مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در نتیجه Ω'' تصویر Ω' در $r\theta z$–فضا عبارت است از

$$\Omega''\ :\ r\le z\le 1\ :\ 0\le\theta\le 2\pi\,,\ 0\le r\le 1\,,\ r\le z\le 1$$

بنابراین، داریم

$$\iiint\limits_{\Omega} f\,dV = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega'} w\,dV' = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega''} zr\,dV''$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^1\left[\int_r^1 zr\,dz\right]dr\right)$$
$$= \pi\int_0^1 \frac{r}{2}(1-r^2)\,dr = \frac{\pi}{8}$$

۱۴.۴.۷ تمرین.

۱) حجم جسم محدود به بیضی‌گون و مخروط به معادلات $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=2$ و $x^2/a^2+y^2/b^2=z^2/c^2$ را محاسبه کنید.

۲) در صورتی که Ω حجم محدود به رویهٔ $|x|+|y|+|z|=1$ باشد، انتگرال تابع $f=|x|+|y|$ را بر Ω محاسبه کنید.

۳) حجم جسم محدود به رویهٔ جبری بستهٔ به معادلهٔ $\left(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\right)^2=x/h$ را محاسبه کنید.

۴) حجم جسم محدود به رویهٔ $x^2/a^2+y^2/b^2+z^4/c^4=1$ را بیابید.

۵) بر حجم محدود به رویهٔ جبری بستهٔ به معادلهٔ $(x/a+y/b+z/c)^2=x/h-y/k$ و واقع در یک هشتم اول، از تابع $f=|x|$ انتگرال بگیرید.

۱۵.۴.۷ یادداشت. روشن است که تغییر مختصات غیر استاندارد بسیار متنوع است. بر همین اساس، مثالهای زیر تنها نمونه‌هایی بخصوص از آنها هستند. همان طوری که خواهید دید، در انتخاب آنها تنها ابزار مورد استفاده «ابتکار» است، به این معنی که در هر مسأله‌ای بسته به وضعیت به وجود آمده تغییر مختصات مناسب را طراحی می‌کنیم.

۱۶.۴.۷ مثال. ۱) فرض کنید Ω حجم محدود به شش استوانهٔ $y=x^2$، $y=2x^2$، $z=y^2$، $z=2y^2$، $x=z^2$ و $x=2z^2$ است و $f=1/(xyz)$. در این صورت از f بر Ω انتگرال بگیرید.

حل. مجموعهٔ Ω را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\Omega\ :\ x^2\le y\le 2x^2\,,\ y^2\le z\le 2y^2\,,\ z^2\le x\le 2z^2$$
$$:\ 1\le y/x^2\le 2\,,\ 1\le z/y^2\le 2\,,\ 1\le x/z^2\le 2$$

بنابراین، مناسب است فرض شود که $u=y/x^2$، $v=z/y^2$ و $w=x/z^2$. در این صورت، Ω' تصویر Ω در uvw–فضا عبارت است از $\Omega'\ :\ 1\le u\le 2\,,\ 1\le v\le 2\,,\ 1\le w\le 2$. در نتیجه، داریم

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = 1\div\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|$$
$$= 1\div\left\|\begin{matrix}-2y/x^3 & 1/x^2 & 0\\ 0 & -2z/y^3 & 1/y^2\\ 1/z^2 & 0 & -2x/z^3\end{matrix}\right\| = \frac{1}{7}(xyz)^2$$

بنابراین، داریم

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{xyz}\,dV = \frac{1}{7}\iiint\limits_{\Omega'}\frac{1}{uvw}\,dV'$$
$$= \frac{1}{7}\left(\int_1^2\frac{du}{u}\right)\left(\int_1^2\frac{dv}{v}\right)\left(\int_1^2\frac{dw}{w}\right) = \frac{(\ln 2)^3}{7}$$

مثال ۲) فرض کنید Ω حجم محدود به آستروئید فضایی به معادلهٔ $x^{۲/۳}+y^{۲/۳}+z^{۲/۳}=a^{۲/۳}$ باشد. انتگرال تابع $f=(xyz)^{-۲/۳}$ را بر Ω محاسبه کنید.

حل. معادلهٔ رویهٔ داده شده S را به صورت

$$\left\{(x/a)^{۱/۳}\right\}^{۲}+\left\{(y/a)^{۱/۳}\right\}^{۲}+\left\{(z/a)^{۱/۳}\right\}^{۲}=۱$$

می‌توان نوشت، با فرض $u=(x/a)^{۱/۳}$، $v=(y/a)^{۱/۳}$ و $w=(z/a)^{۱/۳}$، رویهٔ S به یک کره تبدیل می‌گردد؛ در واقع Ω' تصویر Ω در uvw–فضا عبارت است از $\Omega':\ u^{۲}+v^{۲}+w^{۲}\leq ۱$. اما در این صورت

$$\begin{aligned} J &= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left\|\begin{matrix} ۳au^{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳av^{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳aw^{۲} \end{matrix}\right\| \\ &= ۲۷a^{۳}u^{۲}v^{۲}w^{۲} \end{aligned}$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f\,dV &= \iiint_{\Omega} (xyz)^{-۲/۳}\,dV \\ &= \iiint_{\Omega'} (au^{۳}av^{۳}aw^{۳})^{-۲/۳}\,۲۷a^{۳}u^{۲}v^{۲}w^{۲}\,dV' \\ &= ۲۷a\iiint_{\Omega'} dV' = ۲۷a\operatorname{Vol}(\Omega') = ۳۶a\pi \end{aligned}$$

مثال ۳) در صورتی که Ω حجم محدود به چهار رویهٔ به معادلات $(x^{۲}-y)^{۲}+(y^{۲}-z)^{۲}=۱$، $z^{۲}=x+۱$، $(x^{۲}-y)^{۲}+(y^{۲}-z)^{۲}=۴$ و $z^{۲}=x-۱$ باشد، انتگرال تابع $f=\left|(z^{۲}-x)(۸xyz-۱)\right|$ بر Ω را محاسبه کنید.

حل. به دلیل اینکه عوامل $x^{۲}-y$، $y^{۲}-z$ و $z^{۲}-x$ در معادلات داده شده تکرار شده‌اند، آنها را بترتیب u، v و w می‌گیریم. در این صورت Ω' تصویر Ω در uvw–فضا عبارت از

$$\Omega':\ ۱\leq u^{۲}+v^{۲}\leq ۴\,,\ -۱\leq w\leq ۱$$

است و بعلاوه

$$\begin{aligned} J &= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = ۱\div\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right| \\ &= ۱\div\left\|\begin{matrix} ۲x & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲y & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۲z \end{matrix}\right\| = \frac{۱}{|۸xyz-۱|} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f\,dV &= \iiint_{\Omega} \frac{f}{|۸xyz-۱|}\,dV' \\ &= \iiint_{\Omega'} |z^{۲}-x|\,dV' = \iiint_{\Omega'} |w|\,dV' \end{aligned}$$

اکنون از تغییر مختصات استوانه‌ای $u=r\cos\theta$، $v=r\sin\theta$ و $w=z$ استفاده می‌کنیم؛ در نتیجه، Ω'' تصویر Ω' در $r\theta z$–فضا عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned} \Omega'' &:\ ۱\leq r^{۲}\leq ۴\,,\ -۱\leq z\leq ۱ \\ &:\ ۰\leq\theta\leq ۲\pi\,,\ ۱\leq r\leq ۲\,,\ -۱\leq z\leq ۱ \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f\,dV &= \iiint_{\Omega'} |w|\,dV' = \iiint_{\Omega''} |z|r\,dV'' \\ &= \left(\int_{۰}^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_{۱}^{۲} r\,dr\right)\left(\int_{-۱}^{۱} |z|\,dz\right) = ۳\pi \end{aligned}$$

مثال ۴) از تابع $f=۱/xyz$ بر مجموعهٔ محدود به شش کرهٔ $A=ax$، $A=a'x$، $A=bx$، $A=b'x$، $A=cx$ و $A=c'x$، که در آن $A=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$، $۰<a<a'$، $۰<b<b'$ و $۰<c<c'$ انتگرال بگیرید.

حل. فرض کنیم $u=A/x$، $v=A/y$ و $w=A/z$ متغیرهای جدید باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} A &= x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = \left(\frac{A}{u}\right)^{۲}+\left(\frac{A}{v}\right)^{۲}+\left(\frac{A}{w}\right)^{۲} \\ &= A^{۲}\left(\frac{۱}{u^{۲}}+\frac{۱}{v^{۲}}+\frac{۱}{w^{۲}}\right) \end{aligned}$$

در نتیجه $A=۱\div\left(۱/u^{۲}+۱/v^{۲}+۱/w^{۲}\right)$. بعلاوه

$$\begin{aligned} J &= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \\ &= \left\|\begin{matrix} A(۲A-u)/u & ۲A^{۲}/uv^{۳} & ۲A^{۲}/uw^{۳} \\ ۲A^{۲}/vu^{۳} & A(۲A-v)/v & ۲A^{۲}/vw^{۳} \\ ۲A^{۲}/wu^{۳} & ۲A^{۲}/wv^{۳} & A(۲A-w)/w \end{matrix}\right\| \\ &= \frac{A^{۳}}{u^{۲}v^{۲}w^{۲}} \end{aligned}$$

از طرفی Ω' تصویر مجموعهٔ داده شده Ω در uvw–صفحه عبارت است از $\Omega':\ a\leq u\leq a'\,,\ b\leq v\leq b'\,,\ c\leq w\leq c'$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{dV}{xyz} &= \iiint_{\Omega'} \frac{u}{A}\,\frac{v}{A}\,\frac{w}{A}\,\frac{A^{۳}}{u^{۲}v^{۲}w^{۲}}\,dV' \\ &= \left(\int_{a}^{a'}\frac{du}{u}\right)\left(\int_{b}^{b'}\frac{dv}{v}\right)\left(\int_{c}^{c'}\frac{dw}{w}\right) \\ &= \ln\left(\frac{a'}{a}\right)\ln\left(\frac{b'}{b}\right)\ln\left(\frac{c'}{c}\right) \end{aligned}$$

۱۷.۴.۷ تمرین. فرض کنید a، b و c اعداد مثبتند. در هر مورد، حجم محدود به رویهٔ داده شده را محاسبه کنید:

۱) $\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}+\dfrac{z^{۴}}{c^{۴}}=۱$ ۲) $\left(\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}\right)^{۲}+\dfrac{z^{۴}}{c^{۴}}=۱$

۳) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

۴) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$

۵) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^4=\dfrac{xyz}{abc},\ 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z$

۶) $\dfrac{x^m}{a^m}+\dfrac{y^n}{b^n}+\dfrac{z^p}{c^p}=1$

$$m,n,p\in\left\{2,3,\cdots\right\},\ 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z$$

۷) در صورتی که Ω ناحیهٔ مشترک بین سه گوی $A\le 2\alpha x$، $A\le 2\beta y$ و $A\le 2\gamma z$ باشد، که $A=x^2+y^2+z^2$. انتگرال $f=xyz$ را بر Ω محاسبه کرده و نشان دهید که برابر $(1/\alpha^2+1/\beta^2+1/\gamma^2)(2/15)$ است.

۵.۷ کاربرد انتگرال سه‌گانه

انتگرال سه‌گانه کاربردهای فراوانی در سایر قسمتهای ریاضی، فیزیک، مهندسی و حتی در آمار و احتمال دارد. مبنی اصلی استخراج فرمولهایی که در آنها انتگرال سه‌گانه ظاهر می‌شود، **روش المانگیری** است که کاملاً شبیه به حالت انتگرال دو گانه می‌باشد (به ۱.۵.٦ توجه شود).

۱.۵.۷ روش المانگیری. فرض کنید $q(x,y,z)$ کمیتی عددی با متغیرهای مستقل پیوستهٔ x، y و z است که به ازای هر $\Omega \ni (x,y,z)$ ای تعریف می‌گردد. چنانچه Ω را به کمک صفحات موازی $xy-$صفحه، $xz-$صفحه و $yz-$صفحه به مکعب مستطیلهای کوچک تقسیم کنیم، برای محاسبهٔ ظرفیت کل Ω ظرفیت هر یک از این مکعب مستطیلها را جداگانه می‌توانیم محاسبه نمود و سپس اعداد حاصل را با هم جمع کرد: $Q\approx\sum\limits_{i,j,k} q(x_i,y_j,z_k)\,\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$. برای بدست آوردن مقدار واقعی Q کافی از عبارت سمت راست در صورتی حد بگیریم که تعداد تقسیمات به بینهایت و Δx_i، Δy_j و Δz_k به صفر بگرایند. به واقع Q برابر است با

$$\lim_{\substack{n,m,\ell\to\infty\\ \Delta x_i,\Delta y_j,\Delta z_k\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\ell} q\big(x_{ijk},y_{ijk},z_{ijk}\big)\times\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

و در نتیجه، بنابه تعریف انتگرال دوگانه، $Q=\iiint\limits_{\Omega} q\,dV$. یعنی «**برای محاسبهٔ ظرفیت کل ناحیهٔ سه بعدی Ω که نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از آن دارای چگالی کمیتی $q(x,y,z)$ است، از q بر Ω انتگرال می‌گیریم.**» در ادامه چند نمونه از کاربردهای انتگرال سه‌گانه که جنبهٔ عمومی دارند را مطرح می‌کنیم. بدیهی است که فهم بسیاری از کاربردهای انتگرال سه‌گانه نیازمند داشتن تخصص در سایر علوم است.

۲.۵.۷ محاسبهٔ حجم اجسام صلب. فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ و $q\cong 1$، در این صورت ظرفیت مکعب مستطیل به ابعاد Δx_i، Δy_j و Δz_k برابر $\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$ است که دقیقاً حجم آن است. بنابراین، $\mathrm{Vol}(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} dV$. قبلاً مثالهایی از این کاربرد و تمرینات در ارتباط با آن را مشاهده نموده‌ایم و لذا از ذکر آنها خودداری می‌کنیم.

۳.۵.۷ محاسبهٔ متوسط یک میدان اسکالر سه متغیره. فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ و q یک میدان اسکالر (کمیت عددی) باشد که بر Ω تعریف می‌گردد. در این صورت، مقدار q بر مکعب مستطیل به ابعاد Δx_i، Δy_j و Δz_k برابر $\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$ است. بنابراین، مقدار q بر کل Ω برابر $\mathrm{Vol}(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} dV$ می‌باشد. در نتیجه متوسط مقدار q بر Ω عبارت است از خارج قسمت ظرفیت کل بر حجم کل، یعنی

$$q_{\text{mean}}:=\underset{\Omega}{\text{mean}}(q)=\left(\iiint\limits_{\Omega} q\,dV\right)\div\left(\iiint\limits_{\Omega} dV\right)$$

۴.۵.۷ مثال. ۱) فرض کنید دمای نقطهٔ (x,y,z) از گوی $\Omega:\ x^2+y^2+z^2\le 9$ برابر $T=|z|\sqrt{x^2+y^2}$ است. در صورتی که این جسم را در یک محیط ایزوله گرمایی قرار دهیم تا به دمای پایدار برسد، دمای ثابت نهایی را محاسبه کنید.

حل. دما یعنی متوسط انرژی گرمایی، بنابراین برای یافتن دمای تعادلی نهایی T_0 کافی است متوسط T بر Ω را محاسبه کنیم. اگر Ω' تصویر Ω در $\rho\varphi\theta-$فضا باشد، دمای مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}
T_{\text{mean}}&=\left(\iiint\limits_{\Omega} T\,dV\right)\div\left(\iiint\limits_{\Omega} dV\right)\\
&=\left(\frac{4}{3}\pi\times 3^3\right)^{-1}\iiint\limits_{\Omega}|z|\sqrt{x^2+y^2}\,dV\\
&=\frac{1}{36\pi}\iiint\limits_{\Omega'}|\cos\varphi|\sin^2\varphi\rho^4\,dV'\\
&=\frac{1}{36\pi}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}|\cos\varphi|\sin^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{3}\rho^4\,d\rho\right)\\
&=\frac{1}{36\pi}(2\pi)\left(2\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\frac{3^5}{5}\right)=\frac{9}{5}
\end{aligned}$$

مثال ۲) متوسط فاصلهٔ نقاط استوانهٔ توپر Ω تا $z-$محور را محاسبه کنید: $\Omega:\ x^2+y^2\le 4x,\ 0\le z\le 5$.

حل. از تغییر مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. بنابراین Ω' تصویر Ω در $r\theta z$−فضا عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned}\Omega' &: r^2 \le 4r\cos\theta,\ 0 \le z \le 5\\ &: -\pi/2 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 4\cos\theta,\ 0 \le z \le 5\end{aligned}$$

اکنون متوسط تابع $f=\sqrt{x^2+y^2}$ فاصله تا z−محور را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f_{\text{mean}} &= \left(\iiint\limits_{\Omega} f\,dV\right) \div \left(\iiint\limits_{\Omega} dV\right)\\ &= \frac{1}{\pi\times 2^2\times 5}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dV = \frac{1}{20\pi}\iiint\limits_{\Omega'} r^2\,dV'\\ &= \frac{1}{20\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{4\cos\theta}\left[\int_0^5 r^2\,dz\right]dr\right]d\theta\\ &= \frac{1}{20\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{4\cos\theta} 5r^2\,dr\right]d\theta\\ &= \frac{4^2}{3\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \frac{64}{9\pi}\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید Ω مخزنی است به شکل هرم محدود به بیضی‌گون به معادلهٔ $x^2+4y^2+9z^2=36$ که نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از آن دارای درصد خلوص $q=|y|\sqrt{x^2+9z^2}$ است. متوسط خلوص محتوی Ω را مشخص کنید.

حل. کافی است متوسط f را بر Ω محاسبه کنیم. برای این منظور از تغییر مختصات

$$x = 6\rho\sin\varphi\cos\theta,\quad z = 2\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad y = 3\rho\cos\varphi$$

استفاده می‌کنیم. در این صورت، ژاکوبین این تبدیل عبارت است از $J=36\rho^2\sin\varphi$ و Ω' تصویر Ω در $\rho\varphi\theta$−فضا عبارت است از

$$\Omega' : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

در نتیجه، متوسط خواسته شده عبارت است از

$$\begin{aligned}q_{\text{mean}} &= \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)}\iiint\limits_{\Omega} q\,dV\\ &= \left(\iiint\limits_{\Omega'} |3\rho\cos\varphi|\,(6\rho\sin\varphi)\,36\rho^2\sin\varphi\,dV'\right)\\ &\qquad \div\left(\frac{4}{3}\pi\times 6\times 2\times 3\right)\\ &= \frac{27}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega'}\rho^4\sin^2\varphi|\cos\varphi|\,dV'\\ &= \frac{27}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^2\varphi|\cos\varphi|\,d\varphi\right)\left(\int_0^1\rho^4\,d\rho\right)\\ &= \frac{27}{5}\times 2\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{18}{5}\end{aligned}$$

۵.۵.۷ تمرین.

در هر مورد، متوسط f را بر Ω محاسبه کنید:

۱) $f=x+y+z$ و Ω هرم محدود به صفحات مختصات و $x+y+z=2$ است.

۲) $f=xyz$ و Ω مکعب واحد $\Omega : 0 \le x,y,z \le 1$ است.

۳*) $f=\sqrt{x^2+y^2}$ و Ω به هذلولی گون یکپارچهٔ $x^2+y^2=1+z^2$ و صفحات $z=\pm 2$ محدود است.

۴) $f=x^2+y^2+z^2$ و Ω به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4z$ محدود است.

۶.۵.۷ محاسبهٔ جرم و مرکز ثقل.

در صورتی که نقطهٔ $(x,y,z)\in\Omega$ دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد، آنگاه جرم m و مرکز ثقل $C=(x_0,y_0,z_0)$ جسم Ω را به روش زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$y_0 = \iiint_{\Omega} y\delta\,dV,\qquad z_0 = \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} z\delta\,dV.$$

$$m = \iiint_{\Omega}\delta\,dV,\qquad x_0 = \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} x\delta\,dV,$$

۷.۵.۷ مثال.

۱) فرض کنید Ω جسمی است محدود به استوانه سهموی $z=4-x^2$ و صفحهٔ $y=1/2$ واقع در یک هشتم اول. در صورتی که چگالی جرمی نقطهٔ (x,y,z) از آن برابر y باشد، جرم و مرکز ثقل آن را محاسبه کنید.

حل. این حجم را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Omega : -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{1}{2},\ 0 \le z \le 4-x^2.$$

به این ترتیب، جرم Ω برابر است با

$$\begin{aligned}m &= \int_{-2}^{2}\left[\int_0^{1/2}\left[\int_0^{4-x^2} y\,dz\right]dy\right]dx\\ &= \int_{-2}^{2}\left[\int_0^{1/2} y(4-x^2)\,dy\right]dx\\ &= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} x\delta\,dV = \int_{-2}^{2}\left[\int_0^{1/2}\left[\int_0^{4-x^2} xy\,dz\right]dy\right]dx\\ &= \int_{-2}^{2}\left[\int_0^{1/2} xy(4-x^2)\,dy\right]dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}(4x - x^3)\,dx = 0 \\
y_0 &= \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} y\delta\,dV = \int_{-2}^{2}\left[\int_0^{1/2}\left[\int_0^{4-x^2} y^2\,dz\right]dy\right]dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[\int_0^{1/2} y^2(4-x^2)\,dy\right]dx \\
&= \frac{1}{24}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = \frac{4}{9} \\
z_0 &= \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} z\delta\,dV = \int_{-2}^{2}\left[\int_0^{1/2}\left[\int_0^{4-x^2} yz\,dz\right]dy\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left[\int_0^{1/2} y(4-x^2)^2\,dy\right]dx \\
&= \frac{1}{16}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2\,dx = \frac{32}{15}
\end{aligned}
$$

بنابراین، مرکز ثقل Ω برابر $(0, 4/9, 32/15)$ می‌باشد.

مثال ۲) در صورتی که Ω جسم محدود به دو سهمی‌گون بیضوی $z = 2 - x^2 - y^2$ و $z = x^2 + y^2$ بوده و نقطهٔ $(x,y,z) \in \Omega$ دارای چگالی جرمی $\delta = \sqrt{x^2+y^2}$ باشد، جرم آن را محاسبه کنید.

حل. این حجم را به صورت

$$
\begin{aligned}
\Omega \;\; &: \;\; x^2+y^2 \le z \le 2 - x^2 - y^2 \\
&: \;\; x^2+y^2 \le 1 \,,\; x^2+y^2 \le z \le 2 - x^2 - y^2
\end{aligned}
$$

می‌توان بیان نمود. چنانچه آن را به مختصات استوانه‌ای ببریم، داریم

$$\Omega' \,:\, 0 \le \theta \le 2\pi \,,\; 0 \le r \le 1 \,,\; r^2 \le z \le 2 - r^2 .$$

درنتیجه، جرم Ω برابر است با

$$
\begin{aligned}
m &= \iiint_{\Omega} \delta\,dV = \iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dV = \iiint_{\Omega'} r^2\,dV' \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right).\left(\int_0^1\left[\int_{r^2}^{2-r^2} r^2\,dz\right]dr\right) \\
&= 4\pi.\int_0^1 (r^2 - r^4)\,dr = \frac{8}{15}\pi
\end{aligned}
$$

مثال ۳) فرض کنید Ω پوسته‌ای به شکل یک نیمکرهٔ تو خالی است که شعاع خارجی آن b و شعاع داخلی آن a است. بعلاوه، فرض کنید که Ω از یک جنس چگال (یعنی، با چگالی ثابت) ساخته شده باشد، مرکز ثقل Ω را مشخص کنید.

حل. می‌توانیم فرض کنیم که چگالی جرم Ω در همهٔ نقاط برابر $\delta = \delta_0$ است. بعلاوه، می‌توانیم فرض کنیم که Ω را به شکل $\Omega \,:\, 0 \le z \,,\, a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2$ در نظر می‌گیریم. به این ترتیب، Ω نسبت به $z-$محور متقارن است و در نتیجه مرکز ثقل آن بر $z-$محور قرار داد. یعنی، $C = (0, 0, z_0)$. اکنون کافی است z_0 را بیابیم. برای این منظور از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. اگر Ω' تصویر Ω در $\rho\varphi\theta-$فضا باشد، در این صورت

$$
\begin{aligned}
\Omega' \;\; &: \;\; 0 \le \rho\cos\varphi \,,\; a^2 \le \rho^2 \le b^2 \\
&: \;\; 0 \le \varphi \le \pi/2 \,,\; 0 \le \theta \le 2\pi \,,\; a \le \rho \le b
\end{aligned}
$$

و در نتیجه

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} z\delta\,dV = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)\times\delta_0}\iiint_{\Omega} z\delta_0\,dV \\
&= \left(\frac{4}{3\pi}b^3 - \frac{4}{3\pi}a^3\right)^{-1}\iiint_{\Omega} z\,dV \\
&= \frac{3}{4\pi(b^3-a^3)}\iiint_{\Omega'} \rho\cos\varphi\rho^2\sin\varphi\,dV' \\
&= \frac{3}{4\pi(b^3-a^3)}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \\
&\qquad \times\left(\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_a^b \rho^3\,d\rho\right) \\
&= \frac{3(b^3+b^2a+ba^2+a^3)}{16(b^2+ab+a^2)}
\end{aligned}
$$

مثال ۴) جرم جسم صلب Ω که محدود به رویهٔ $z = xy$ و صفحات $x = 1$، $y = 1$ و $z = 0$ و دارای چگالی $\delta = \sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد را محاسبه کنید.

حل. ابتدا جرم Ω را محاسبه می‌کنیم. محدودهٔ Ω عبارت از

$$\Omega \,:\, 0 \le x \le 1 \,,\; 0 \le y \le 1 \,,\; 0 \le z \le xy$$

است. در نتیجه، داریم

$$
\begin{aligned}
m &= \iiint_{\Omega} \delta\,dV = \int_0^1\left[\int_0^1\left[\int_0^{xy}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right]dy\right]dx \\
&= \int_0^1\left[\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right]dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{3}\left((x+1)^{3/2} - x^3\right)dx = \frac{2}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}
$$

مثال ۴) در صورتی که Ω جسم قوطی شکل محدود به استوانهٔ $x^2+y^2 = 2x$، $xy-$صفحه و صفحهٔ $z = 2$ باشد و نقطهٔ $(x,y,z) \in \Omega$ دارای چگالی جرمی $\delta = x+y+z$ باشد، جرم و مرکز ثقل آن را بیابید.

حل. روشن است که در این حالت

$$\Omega \,:\, x^2+y^2 \le 2x \,,\; 0 \le z \le 2$$

که تصویر آن در مختصات استوانه‌ای به شکل

$$\Omega' \,:\, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2 \,,\; 0 \le r \le 3\cos\theta \,,\; 0 \le z \le 2$$

می‌باشد. در نتیجه، جرم Ω عبارت است از

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} \delta\, dV &= \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)\, dV \\
&= \iiint\limits_{\Omega'} \Big(r\cos\theta + r\sin\theta + z\Big) r\, dV' \\
&= \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_{۰}^{۲\cos\theta} \left[\int_{۰}^{۲} \Big(r^{۲}\cos\theta + r^{۲}\sin\theta + rz\Big) dz\right] dr\right] d\theta \\
&= ۲\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_{۰}^{۲\cos\theta} \Big(r^{۲}\cos\theta + r^{۲}\sin\theta + r\Big) dr\right] d\theta \\
&= ۲\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left(\frac{۸}{۳}\cos^{۴}\theta + \frac{۸}{۳}\sin^{۴}\theta + ۲\cos^{۲}\theta\right) d\theta = ۸\pi
\end{aligned}$$

چنانچه مرکز ثقل Ω را $C = (x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$ بنامیم، $x_{۰}$ برابر است با

$$\begin{aligned}
x_{۰} &= \frac{۱}{m} \iiint\limits_{\Omega} x\delta\, dV = \frac{۱}{۸\pi} \iiint\limits_{\Omega} x(x+y+z)\, dV \\
&= \frac{۱}{۸\pi} \iiint\limits_{\Omega'} r\cos\theta\Big(r\cos\theta + r\sin\theta + z\Big) r\, dV' \\
&= \frac{۱}{۸\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_{۰}^{۲\cos\theta} \left[\int_{۰}^{۲} \Big(r^{۳}\cos^{۲}\theta \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + r^{۳}\cos\theta\sin\theta + r^{۲}z\cos\theta\Big) dz\right] dr\right] d\theta \\
&= \frac{۱}{۴\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_{۰}^{۲\cos\theta} \Big(r^{۳}\cos^{۲}\theta \right. \\
&\qquad \left. + r^{۳}\cos\theta\sin\theta + r^{۲}\cos\theta\Big) dr\right] d\theta \\
&= \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left(\cos^{٦}\theta + \cos^{۵}\theta\sin\theta + \frac{۲}{۳}\cos^{۴}\theta\right) d\theta = \frac{۹}{۱٦}
\end{aligned}$$

و بعلاوه

$$\begin{aligned}
y_{۰} &= \frac{۱}{m} \iiint\limits_{\Omega} y\delta\, dV = \frac{۱}{۸\pi} \iiint\limits_{\Omega} y(x+y+z)\, dV \\
&= \frac{۱}{۸\pi} \iiint\limits_{\Omega'} r\sin\theta\Big(r\cos\theta + r\sin\theta + z\Big).r\, dV' \\
&= \frac{۱}{۸\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_{۰}^{۲\cos\theta} \left[\int_{۰}^{۲} \Big(r^{۳}\sin\theta\cos\theta \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + r^{۳}\sin^{۲}\theta + r^{۲}z\sin\theta\Big) dz\right] dr\right] d\theta \\
&= \frac{۱}{۴\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_{۰}^{۲\cos\theta} \Big(r^{۳}\sin\theta\cos\theta \right. \\
&\qquad \left. + r^{۳}\sin^{۲}\theta + r^{۲}\sin\theta\Big) dr\right] d\theta \\
&= \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \Big(\sin\theta\cos^{۴}\theta + \cos^{۴}\theta\sin^{۲}\theta \\
&\qquad + \frac{۲}{۳}\cos^{۳}\theta\sin\theta\Big) d\theta = \frac{۱}{۱٦}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{۰} &= \frac{۱}{m} \iiint\limits_{\Omega} z\delta\, dV = \frac{۱}{۸\pi} \iiint\limits_{\Omega} z(x+y+z)\, dV \\
&= \frac{۱}{۸\pi} \iiint\limits_{\Omega'} z\Big(r\cos\theta + r\sin\theta + z\Big) r\, dV' \\
&= \frac{۱}{۸\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_{۰}^{۲\cos\theta} \left[\int_{۰}^{۲} \Big(zr^{۲}\cos\theta \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + zr^{۲}\sin\theta + z^{۲}r\Big) dz\right] dr\right] d\theta \\
&= \frac{۱}{۴\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \left[\int_{۰}^{۲\cos\theta} \Big(r^{۲}\cos\theta + r^{۲}\sin\theta + r\Big) dr\right] d\theta \\
&= \frac{۱}{۳\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \Big(\cos^{۴}\theta + \cos^{۳}\theta\sin\theta + \cos^{۲}\theta\Big) d\theta = \frac{۵}{۴۸}
\end{aligned}$$

در نتیجه $C = (۹/۱٦, ۱/۱٦, ۵/۲۴)$ مرکز ثقل Ω است.

۸.۵.۷ تمرین.

۱) در صورتی که Ω جسم محدود به مخروط $y^{۲} = x^{۲} + z^{۲}$ و صفحهٔ $y = ۲$ باشد و نقطهٔ (x, y, z) از آن دارای چگالی $\delta = y\sqrt{x^{۲} + z^{۲}}$ باشد، جرم و مرکز ثقل Ω را بیابید.

۲) در صورتی که Ω جسم محدود به کرهٔ $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۴z$ و با تابع چگالی $\delta = \sqrt{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}$ باشد، جرم و مرکز ثقل Ω را بیابید.

۳) اگر Ω بخشی از یک هشتم اول باشد که توسط بیضی‌گون به معادلهٔ $x^{۲}/a^{۲} + y^{۲}/b^{۲} + z^{۲}/c^{۲} = ۱$ جدا شده و از جنس چگال ساخته شده است، آنگاه مرکز ثقل Ω را مشخص کنید.

۴) در صورتی که Ω جسم محدود به رویهٔ $z = x^{۲} - y^{۲}$، xy–صفحه و صفحهٔ $y = ۱$ بوده و تابع چگالی آن $\delta = z$ باشد، جرم و مرکز ثقل Ω را بیابید.

۵) فرض کنید Ω کره‌ای به مرکز مبداء و شعاع R است. سهمی‌گون بیضوی $z = x^{۲} + y^{۲}$ به چه نسبتی جرم Ω را تقسیم می‌کند. تابع چگالی را $\delta = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ فرض بگیرید.

*٦) در صورتی که Ω یک جسم چگال به رویهٔ بستهٔ به معادلهٔ $(x^{۲}/a^{۲} + y^{۲}/b^{۲})^{۲} + z^{۴}/c^{۴} = ۱$، باشد، جرم آن را محاسبه کنید.

۷) مرکز ثقل جسم چگال محدود به رویهٔ بستهٔ به معادلهٔ $(x/a + y/b)^{۲} + z^{۴}/c^{۴} = ۱$ واقع در یک هشتم اول را بیابید.

۸) در صورتی که Ω یک جسم صلب چگال واقع در یک هشتم اول و محدود به رویهٔ $\sqrt[3]{x/a}+\sqrt[3]{y/b}+\sqrt[3]{z/c}=۱$ باشد، جرم آن را محاسبه کنید.

۹.۵.۷ محاسبهٔ گشتاور ماند. فرض کنید Ω جسم صلبی است که نقطهٔ (x,y,z) از آن دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ است. فرض کنید S یک نقطه، خط و یا صفحه در xyz–فضا است. بنابه تعریف، گشتاور ماند Ω حول S عبارت از

$$I_S(\Omega):=\iiint_\Omega d^{۲}(x,y,z)\delta(x,y,z)\,dV$$

است، که در آن $d(x,y,z)$ فاصلهٔ نقطهٔ (x,y,z) تا S می‌باشد. چنانچه S را مبداء بگیریم، آنگاه گشتاور ماند Ω حول مبداء

$$I_O(\Omega)=\iiint_\Omega\Big(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\Big)\delta(x,y,z)\,dV$$

خواهد شد. اگر S را x–محور، y–محور و z–محور بگیریم، در این صورت گشتاور ماند Ω حول x–محور، y–محور و z–محور بترتیب برابر

$$\begin{aligned}I_x(\Omega)&=\iiint_\Omega\Big(z^{۲}+y^{۲}\Big)\delta(x,y,z)\,dV\\I_y(\Omega)&=\iiint_\Omega\Big(x^{۲}+z^{۲}\Big)\delta(x,y,z)\,dV\\I_z(\Omega)&=\iiint_\Omega\Big(x^{۲}+y^{۲}\Big)\delta(x,y,z)\,dV\end{aligned}$$

خواهد شد. چنانچه S را xy–صفحه، yz–صفحه و xz–صفحه بگیریم، در این صورت گشتاور ماند Ω حول xy–صفحه، yz–صفحه و xz–صفحه بترتیب برابر با

$$\begin{aligned}I_{xy}(\Omega)&=\iiint_\Omega z^{۲}\delta(x,y,z)\,dV\\I_{xz}(\Omega)&=\iiint_\Omega y^{۲}\delta(x,y,z)\,dV\\I_{yz}(\Omega)&=\iiint_\Omega x^{۲}\delta(x,y,z)\,dV\end{aligned}$$

خواهد شد. از تعاریف بالا این طور نتیجه می‌گردد که

$$I_x=I_{xy}+I_{xz}\ ,\ \ I_y=I_{xy}+I_{yz}\ ,\ \ I_z=I_{xz}+I_{yz}$$
$$I_O=I_{xy}+I_{xz}+I_{yz}=\frac{۱}{۲}\left(I_x+I_y+I_z\right)$$

شعاع چرخش Ω حول S را به صورت $R_S:=\sqrt{I_S/m}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، انرژی جنبشی جسم Ω که با سرعت یک دور در ثانیه حول S می‌چرخد با انرژی نقطه‌ای به جرم m که به فاصلهٔ R_S از S و با همان سرعت زاویه‌ای می‌چرخد، برابر است.

۱۰.۵.۷ مثال. ۱) در صورتی که Ω قسمتی از یک هشتم اول باشد که توسط بیضی‌گون

$$x^{۲}/a^{۲}+y^{۲}/b^{۲}+z^{۲}/c^{۲}=۱$$

جدا شده است و چگالی Ω ثابت و برابر $\delta_{۰}$ باشد، در این صورت گشتاور ماند Ω حول x–محور، y–محور، z–محور، xy–صفحه، xz–صفحه، yz–صفحه و مبداء را محاسبه کنید.
حل. توجه دایم که در این مسأله

$$\Omega\ :\ x^{۲}/a^{۲}+y^{۲}/b^{۲}+z^{۲}/c^{۲}\le ۱\ ,\ ۰\le x\ ,\ ۰\le y\ ,\ ۰\le z$$

از تغییر مختصات $x=ar\cos\theta$، $y=br\sin\theta$ و $z=ct$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $J=abcr$ و Ω' تصویر Ω حول xy–صفحه را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}I_{xy}&=\iiint_\Omega z^{۲}\delta\,dV\\&=\delta_{۰}\iiint_\Omega z^{۲}\,dV=\delta_{۰}\iiint_{\Omega'}c^{۲}t^{۲}abcr\,dV'\\&=abc^{۳}\delta_{۰}\int_{۰}^{\pi/۲}\left[\int_{۰}^{۱}\left[\int_{۰}^{\sqrt{۱-t^{۲}}}t^{۲}r\,dt\right]dr\right]d\theta\\&=\frac{abc^{۳}\delta_{۰}}{۳}\int_{۰}^{\pi/۲}\left[\int_{۰}^{۱}(۱-r^{۲})^{۳/۲}r\,dr\right]d\theta\\&=\frac{abc^{۳}\delta_{۰}}{۱۵}\int_{۰}^{\pi/۲}d\theta=\frac{\pi}{۳۰}abc^{۳}\delta_{۰}\end{aligned}$$

به دلیل تقارنی که در δ و Ω وجود دارد، بدون محاسبه می‌توانیم بنویسیم $\quad I_{xz}=\frac{\pi}{۳۰}ab^{۳}c\delta_{۰}\quad$ و $\quad I_{yz}=\frac{\pi}{۳۰}a^{۳}bc\delta_{۰}$
و به کمک فرمولهای در ۹.۵.۷ داریم

$$\begin{aligned}I_x&=I_{xy}+I_{xz}=\frac{\pi}{۳۰}abc\delta_{۰}(b^{۲}+c^{۲})\\I_y&=I_{xy}+I_{yz}=\frac{\pi}{۳۰}abc\delta_{۰}(a^{۲}+c^{۲})\\I_z&=I_{xz}+I_{yz}=\frac{\pi}{۳۰}abc\delta_{۰}(a^{۲}+b^{۲})\\I_O&=I_{xy}+I_{xz}+I_{yz}=\frac{\pi}{۳۰}abc\delta_{۰}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})\end{aligned}$$

مثال ۲) در صورتی که Ω جسم صلب با تابع چگالی $\delta=z(x^{۲}+y^{۲})^{-۳}$ محدود به صفحات $x+y=\pm۱$، $x-y=\pm۱$ و دو سهمی‌گون $z=x^{۲}+y^{۲}$ و $۲z=x^{۲}+y^{۲}$ باشد، گشتاور ماند Ω حول z– محور را محاسبه کنید.
حل. با تعویض x به $-x$ و یا y به $-y$ نه δ تغییر می‌کند و نه Ω. در نتیجه، بجای Ω از $\Omega_{۱}$ قسمتی از Ω که در یک هشتم اول قرار داشته و بین صفحات $y=x$ و $x=۰$ محدود می‌باشد، می‌توان استفاده نمود و سپس جواب را هشت برابر کرد:

$$\begin{aligned}\Omega_{۱}\ &:\ \begin{cases}۰\le x\,,\ ۰\le y\,,\ y\le x\le ۱\,,\\(x^{۲}+y^{۲})/۲\le z\le x^{۲}+y^{۲}\end{cases}\\&:\ \begin{cases}۰\le x\le ۱\,,\ ۰\le y\le x\,,\\(x^{۲}+y^{۲})/۲\le z\le x^{۲}+y^{۲}\end{cases}\end{aligned}$$

و در نتیجه، گشتاور خواسته شده برابر است با

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right)\delta\, dV = \iiint\limits_{\Omega} z\left(x^2+y^2\right)^{-2} dV \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^x \left[\int_{(x^2+y^2)/2}^{x^2+y^2} z\left(x^2+y^2\right)^{-2} dz\right] dy\right] dx \\ &= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[\int_0^x dy\right] dx = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

مثال ۳) گشتاور ماند مکعب مستطیل محدود به صفحات مختصاتی و صفحات $x=a$، $y=b$ و $z=c$ حول قطرش را محاسبه کنید.

حل. چون در صورت مسأله سخنی از تابع چگالی آورده نشده است، فرض می‌کنیم $\delta=\delta_0$ ثابت است. قطر این مکعب خطی است که از مبدأ و نقطهٔ (a,b,c) می‌گذرد. پس تکیه‌گاه آن را O و بردار هادی آن را $\overrightarrow{(a,b,c)}$ می‌توان انتخاب نمود. فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه (x,y,z) تا این خط عبارت است از

$$\begin{aligned} h &= \frac{\left\|\overrightarrow{X_0X}\times\vec{v}\right\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{(x-0,y-0,z-0)}\times\overrightarrow{(a,b,c)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{(a,b,c)}\right\|} \\ &= \frac{\left\|\overrightarrow{(yc-zb,za-xc,xb-ya)}\right\|}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(yc-zb)^2+(za-xc)^2+(xb-ya)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}} \end{aligned}$$

بعلاوه، ناحیهٔ مورد نظر عبارت است از

$$\Omega\,:\, 0\le x\le a\,,\; 0\le y\le b\,,\; 0\le z\le c$$

و در نتیجه، گشتاور خواسته شده I برابر است با

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega} h^2\delta\, dV = \\ &= \delta_0 \iiint\limits_{\Omega} \frac{(yc-zb)^2+(za-xc)^2+(xb-ya)^2}{a^2+b^2+c^2}\, dV \\ &= \frac{\delta_0}{a^2+b^2+c^2}\int_0^a \left[\int_0^b \left[\int_0^c \left\{(yc-zb)^2 \right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left. +(za-xc)^2+(xb-ya)^2\right\} dz\right] dy\right] dx \\ &= \frac{\delta_0}{a^2+b^2+c^2}\int_0^a \left[\int_0^b \left\{\frac{c^3}{3b}(b-y)^3+\frac{c^3y^3}{3b}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. +\frac{c^3}{3a}(a-x)^3+\frac{c^3x^3}{3a}+c(xb-ya)^2\right\} dy\right] dx \\ &= \frac{\delta_0}{a^2+b^2+c^2}\int_0^a \left\{\frac{c^3b^3}{6}+\frac{c^3b}{3a}(a-x)^3\right. \\ &\qquad \left. +\frac{c^3b}{3a}x^3+\frac{cb^3}{3a}(a-x)^3+\frac{cb^3}{3a}x^3\right\} dx \\ &= \frac{\delta_0}{a^2+b^2+c^2}\left\{\frac{ac^3b^3}{6}+\frac{a^3bc^3}{6}+\frac{a^3b^3c}{6}\right\} \\ &= \frac{abc\delta_0}{6}\times\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

۱۱.۵.۷ تمرین.

۱) گشتاور ماند جسم چگال محدود به رویهٔ به معادلهٔ $(x^2+y^2+z^2)^3=a^5y$ حول $y-$محور را بیابید.

۲) گشتاور ماند جسم چگال محدود به $x^2+y^2+z^2=8$ و $x^2+y^2=z^2$ حول $z-$محور را محاسبه کنید.

۳) گشتاور ماند جسم چگال محدود به رویهٔ بستهٔ به معادلهٔ $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2$ حول مبداء را محاسبه کنید.

۴) در صورتی که Ω جسم محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ $x+y+z=a$ باشد، گشتاور ماند Ω حول $x-$محور، $y-$محور، $z-$محور، $xy-$صفحه، $xz-$صفحه، $yz-$صفحه و مبداء را با فرض ثابت بودن تابع چگالی $\delta=\delta_0$ محاسبه کنید.

*۵) فرض کنید Ω قسمتی از گوی به مرکز مبداء و شعاع R باشد که در یک هشتم اول قرار دارد و چگالی نقطهٔ (x,y,z) از آن $\delta=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ باشد. گشتاور ماند و شعاع چرخش Ω حول خط $x=y=z$ را محاسبه کنید.

۶) فرض کنید Ω گوی چگال محدود به کرهٔ به مرکز مبداء و شعاع R باشد. گشتاور ماند Ω حول نقطهٔ $X_0=(a,b,c)$ را محاسبه کنید. [راهنمایی: وضعیتهای مختلف R و $\|X_0\|$ را در نظر بگیرید.]

۶.۷ انتگرال سه‌گانهٔ ناسره

همان طوری که در ۷.۱.۷ گفته شد، چنانچه انتگرال $\iiint_\Omega f\,dV$ در شرایط قضیهٔ ۵.۱.۷ صدق کند، آن انتگرال را عادی و در غیر این صورت آن را ناسره می‌نامیم. هدف از این بخش نشان دادن چگونگی محاسبهٔ اینگونه انتگرالها است.

۱.۶.۷ تعریف. اگر مجموعهٔ Ω بسته و کراندار نباشد و یا f بر برخی از نقاط مجموعهٔ Ω به بینهایت میل کند و یا تعریف نگردد و یا اینکه مجموعهٔ ناپیوستگیهای f بر Ω دارای حجم غیر صفر باشد، در این صورت انتگرال $\iiint_\Omega f\,dV$ را **ناسره می‌نامیم**.

۲.۶.۷ چگونگی محاسبهٔ انتگرالهای ناسره.

فرض کنید $\iiint_\Omega f\,dV$ انتگرال ناسره باشد. مجموعه‌های Ω_a را طوری انتخاب می‌کنیم که بازاء هر a ای انتگرال f بر مجموعهٔ Ω_a عادی باشد و در ثانی Ω حالت حدی Ω_a ها باشد، که $a \to a_\circ$. در این حالت می‌نویسیم:

$$\Omega = \lim_{a\to a_\circ} \Omega_a \quad \Rightarrow \quad \iiint_\Omega f\,dV := \lim_{a\to a_\circ} \iiint_{\Omega_a} f\,dV$$

۳.۶.۷ مثال.

۱) از $\exp(-(x^۲+y^۲+z^۲)^{۳/۲})$ بر $\mathbb{R}^۳$ انتگرال بگیرید.

حل. به ازای هر $a > ۰$ دلخواه، مجموعهٔ Ω_a را کره‌ای به مرکز O و شعاع a در نظر می‌گیریم: $\Omega : x^۲+y^۲+z^۲ \leq a^۲$. در این صورت، به کمک تغییر مختصات کروی داریم

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega \exp\left(-(x^۲+y^۲+z^۲)^{۳/۲}\right) dV = \\
&= \lim_{a\to\infty} \iiint_{\Omega_a} \exp\left(-(x^۲+y^۲+z^۲)^{۳/۲}\right) dV \\
&= \lim_{a\to\infty} \iiint_{\Omega'_a} e^{-\rho^۳}\rho^۲ \sin\varphi\, dV' \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_۰^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_۰^{a} \rho^۲ e^{-\rho^۳}\, d\rho\right) \\
&= \lim_{a\to\infty} (۲\pi)(۲)\left(\frac{-۱}{۳}e^{-a^۳} + \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۴}{۳}\pi
\end{aligned}$$

که در اینجا Ω'_a تصویر Ω در $\rho\varphi\theta$–فضا است.

مثال ۲) از تابع $f = ۱/(x+y+z+۱)^۴$ بر یک هشتم اول انتگرال بگیرید.

حل. برای این منظور Ω_a را هرم جدا شده از یک هشتم اول توسط صفحهٔ $x+y+z=a$ تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_a : ۰ \leq x\,,\ ۰ \leq y\,,\ ۰ \leq z\,,\ x+y+z \leq a$$

از تغییر مختصات $u = x+y+z$، $v = x+y$ و $w = x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $J = ۱$ و Ω'_a تصویر Ω در uvw– فضا عبارت است از $\Omega'_a : ۰ \leq w \leq a,\, w \leq v \leq a,\, v \leq u \leq a$. در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\text{یک هشتم اول}} \frac{dV}{(x+y+z+۱)^۴} = \\
&= \lim_{a\to\infty} \iiint_{\Omega_a} \frac{dV}{(x+y+z+۱)^۴} = \lim_{a\to\infty} \iiint_{\Omega'_a} \frac{dV'}{(u+۱)^۴} \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_۰^a \left[\int_w^a \left[\int_v^a \frac{du}{(u+۱)^۴}\right] dv\right] dw \\
&= \frac{۱}{۳}\lim_{a\to\infty} \int_۰^a \left[\int_w^a \left\{\frac{۱}{(v+۱)^۳} - \frac{۱}{(a+۱)^۳}\right\} dv\right] dw \\
&= \frac{۱}{۳}\lim_{a\to\infty} \int_۰^a \left\{\frac{-۱}{۲(a+۱)^۲} - \frac{a}{(a+۱)^۳} + \frac{۱}{۲(w+۱)^۲} + \frac{w}{(a+۱)^۳}\right\} dw \\
&= \frac{۱}{۳}\lim_{a\to\infty} \left\{\frac{-a}{۲(a+۱)^۲} - \frac{۱}{۲(a+۱)} + \frac{۱}{۲} - \frac{a^۲}{۲(a+۱)^۳}\right\} = \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید p عددی مثبت است و

$$I_p := \iiint_{x^۲+y^۲+z^۲\leq ۱} \frac{dV}{(۱-x^۲-y^۲-z^۲)^p}$$

به ازاء کدام مقادیر از p، انتگرال I_p همگرا است (یعنی، وجود دارد) و مقدار آن را در صورت وجود بیابید.

حل. مشکل I_p در لبهٔ گوی واحد است، بنابراین Ω_a را به شکلی انتخاب می‌کنیم که هم به Ω همگرا باشند و هم اینکه لبهٔ کرهٔ واحد در آنها نباشد: به ازای $۱ > a > ۰$، تعریف می‌کنیم $\Omega_a : x^۲+y^۲+z^۲ \leq a^۲$. در این صورت، ملاحظه می‌گردد که $\lim_{a\to ۱-} \Omega_a = \Omega$ و به کمک تغییر مختصات کروی داریم:

$$\begin{aligned}
I_p &= \iiint_{x^۲+y^۲+z^۲\leq ۱} \frac{dV}{(۱-x^۲-y^۲-z^۲)^p} \\
&= \lim_{a\to ۱-} \iiint_{\Omega_a} \frac{dV}{(۱-x^۲-y^۲-z^۲)^p} \\
&= \lim_{a\to ۱-} \iiint_{\Omega'_a} \frac{\rho^۲\sin\varphi}{(۱-\rho^۲)^p}\, dV' \\
&= \lim_{a\to ۱-} \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_۰^{\pi} \sin\varphi\right)\left(\int_۰^{a} \frac{\rho^۲}{(۱-\rho^۲)^p}\, d\rho\right) \\
&= \lim_{a\to ۱-} ۴\pi \int_۰^a \rho^۲(۱-\rho^۲)^{-p}\, d\rho \\
&\overset{(۱)}{=} ۲\pi \lim_{a\to ۱-} \int_۰^{\sqrt{a}} u^{۱/۲}(۱-u)^{-p}\, du \\
&= ۲\pi \int_۰^۱ u^{۱/۲}(۱-u)^{-p}\, du \\
&\overset{(۲)}{=} ۲\pi B\left(\frac{۳}{۲}, ۱-p\right) = ۲\pi \frac{\Gamma(۳/۲)\,\Gamma(۱-p)}{\Gamma(۵/۲-p)} \\
&= ۲\pi \frac{(۳/۲)\Gamma(۱/۲)\,(۱-p)\Gamma(-p)}{(۵/۲-p)\,(۳/۲-p)\,\Gamma(۱/۲-p)} \\
&= \frac{۳\pi^{۳/۲}(۱-p)}{(۳-۲p)(۵-۲p)} \times \frac{\Gamma(-p)}{\Gamma(۱/۲-p)}
\end{aligned}$$

در (۱) از تغییر مختصات $u = \rho^۲$ و در (۲) از ۶.۶.۵ استفاده شده است. با توجه به دامنهٔ گاما، ملاحظه می‌گردد که برای همگرایی

I_p لازم است هیچ کدام از اعداد $-p$ و $-p-\frac{۱}{۲}$ صحیح و منفی نباشد.

۴.۶.۷ تمرین. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

$$۱)\quad \iiint\limits_{\text{یک هشتم اول}} \frac{dV}{(x^۲+y^۲+z^۲+۱)^۲}$$

$$۲)\quad \iiint\limits_{x^۲+y^۲+z^۲\geq ۱} \frac{dV}{(x^۲+y^۲+z^۲)^a}$$

$$۳)\quad \iiint\limits_{\mathbb{R}^۳} \exp\left\{-(x^۲+۲y^۲+۳z^۲)^{۳/۲}\right\} dV$$

$$۴)\quad \iiint\limits_{\text{یک هشتم اول}} \frac{zdV}{(x+y+z+۱)^۵}$$

$$۵)\quad \iiint\limits_{۰\leq x,y,z\leq ۱} \frac{dV}{x^py^qz^r} \qquad ۶)\quad \iiint\limits_{-۱\leq x,y,z\leq ۱} \frac{dV}{x+y-z}$$

۷) در صورتی که $[a_{ij}]$ ماتریس ۳×۳ حقیقی متقارن باشد (یعنی $a_{ij}=a_{ji}$) و

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} > ۰, \qquad \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} < ۰,$$

و $a_{۱۱}>۰$، آنگاه انتگرال زیر همگرا است:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^۳} \exp\left(-\sum_{j=۱}^{۳}\sum_{i=۱}^{۳} a_{ij}x_ix_j\right) dV$$

۸) نشان دهید که اگر Ω هرم واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحهٔ $x+y+z=۱$ باشد، آنگاه

$$۱)\quad \iiint\limits_{\Omega} x^py^qz^r\,dV = \frac{\Gamma(p+۱)\Gamma(q+۱)\Gamma(r+۱)}{\Gamma(p+q+r+۴)}$$

$$۲)\quad \iiint\limits_{\Omega} f(x+y+z)x^{p-۱}y^{q-۱}z^{r-۱}\,dV =$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)} \int_۰^۲ f(u)u^{p+q+r-۱}\,du$$

۷.۷ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل doc.pdf مراجعه شود.

۱.۷.۷ انتگرال سه‌گانه. برای محاسبهٔ انتگرال تابع سه متغیرهٔ $f(x,y,z)$ بر مجموعهٔ $xy-$منظم مفروض

$$\Omega\,:\, a\leq x\leq b\,,\, h(x)\leq y\leq l(x)\,,\, u(x,y)\leq z\leq v(x,y)|$$

از دستور

```
int(int(int(f(x,y,z),z=u(x,y)..v(x,y)),
                    y=h(x)..l(x)),x=a..b)
```

استفاده می‌کنیم.

۲.۷.۷ محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرال سه‌گانه. ممکن است با اجرای دستور قبلی انتگرال محاسبه نشده ظاهر شود (میپل قادر به حل تحلیلی آن نباشد) در این صورت از دستور evalf برای محاسبهٔ مقدار تقریبی آن استفاده می‌کنیم:

```
evalf(int(int(int(f(x,y,z),z=u(x,y)..v(x,y)),
                    y=h(x)..l(x)),x=a..b))
```

۳.۷.۷ یادداشت. در آدرس اینترنتی

http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm

مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.

فصل ۸

انتگرال خط

تا اینجا انتگرالهایی را مورد بررسی قرار داده‌ایم که دامنهٔ انتگرالگیری آنها صاف بود. هدف از این فصل تعمیم انتگرال معین (از توابع یک متغییره بر بازه‌ها) به انتگرال بر منحنی‌هاست. انتگرال خط بر دو نوع است. انتگرال نوع اول در مورد میدانهای اسکالری است و از آن برای محاسبهٔ ظرفیت اشیاء یک بعدی می‌توان استفاده نمود. انتگرال نوع دوم در مورد میدانهای برداری است و عملاً برای محاسبهٔ کار انجام شده توسط متحرک تحت تأثیر میدان برداری بکار می‌رود. برای مشاهدهٔ تعریف منحنی به بخش ۲ از فصل ۳ مراجعه شود.

۱.۸ انتگرال خط نوع اول

۱.۱.۸ تعریف. فرض کنید $C\ :\ \mathbf{r}(t)\,;\, a\leq t\leq b$ یک منحنی با تنها یک پارامتر در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد (به صورت مشابه در صفحه $\mathbb{R}^2$ نیز می‌تواند باشد). فرض کنید $f\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ تابعی سه متغیره ($=$ میدان اسکالر در فضا) است که بر C تعریف می‌گردد. در این صورت انتگرال f بر C را به شکل

$$\int_C f\,ds\ :=\int_a^b f\big(\mathbf{r}(t)\big)\,\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

تعریف می‌کنیم. اگر منحنی C با بیش از یک پارامتر معرفی شده باشد و برد هر یک از پارامترهای آن را C_1، C_2، ... و C_n بنامیم، در این صورت انتگرال f بر C را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

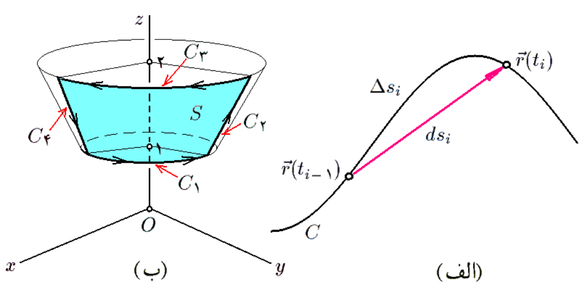
$$\int_C f\,ds\ :=\int_{C_1} f\,ds+\int_{C_2} f\,ds+\cdots+\int_{C_n} f\,ds$$

تنها شرط لازم آن است که اشتراک هر دو تا از C_i ها با هم تهی بوده و یا اینکه دارای تعدادی متناهی نقطه باشد و یا اینکه طول اشتراک هر دو تا از آنها صفر باشد. از نقطه نظر روش المانگیری (به فصل ٦ از کتاب ریاضی عمومی یک مراجعه شود)،

$$\Delta Q_i=f\big(\mathbf{r}(t_i)\big)\,\|\mathbf{r}'(t_i)\|\,\Delta t_i$$

تقریباً با مقدار f بر قطعهٔ $\mathbf{r}(t_{i-1})$ تا $\mathbf{r}(t_i)$ از منحنی C برابر است (به شکل ۱.۸ ــالف توجه شود)، چرا که

$$\begin{aligned}\Delta Q_i &\approx f\big(\mathbf{r}(t_i)\big)\,\Delta s_i\\ &\approx f\big(\mathbf{r}(t_i)\big)\,ds_i\\ &= f\big(\mathbf{r}(t_i)\big)\,\|\mathbf{r}'(t_i)\|\,\Delta t_i\end{aligned}$$



شکل ۱.۸: الف) طول قوس منحنی.
ب) انتگرال خط نوع اول

۲.۱.۸ قضیه. تعریف ۱.۱.۸ مستقل از انتخاب پارامتر است. یعنی اگر محاسبات برای بدست آوردن $\int_C f\,ds$ را برای دو انتخاب از پارامترها انجام دهیم، نتیجهٔ آخر یکی است.

۳.۱.۸ قضیه. فرض کنید C، C_1 و C_2 منحنی، f، f_1 و f_2 توابع چند متغیره و a_1 و a_2 اعداد دلخواه باشند. در این صورت

۱) $\int_C (a_1f_1+a_2f_2)\,ds=a_1\int_C f_1\,ds+a_2\int_C f_2\,ds$.

۲) اگر به ازای هر $X\ \in\ C$ ای $f_1(X)\ \leq\ f_2(X)$، آنگاه $\int_C f_1\,ds\leq\int_C f_2\,ds$.

۳) اگر $C_1\cap C_2$ تهی و یا چند نقطه باشد. در این صورت، می‌نویسیم $C_1+C_2\ :=C_1\cup C_2$. در چنین حالتی داریم

$$\int_{C_1+C_2} f\,ds=\int_{C_1} f\,ds+\int_{C_2} f\,ds$$

۴) $\int_C ds$ برابر طول منحنی است.

۴.۱.۸ مثال. ۱) فرض کنید C قسمتی از یک مارپیچ است که به شکل

$$C \;:\; \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۴\cos t+۱, ۳t-۱, ۴\sin t)}\;;\; -\pi\le t\le \pi$$

پارامتره شده است و $f=(x-۱)^۲+(y+۱)^۲+z^۲$. انتگرال f بر C را محاسبه کنید.

حل. به کمک تعریف ۱.۱.۸ داریم

$$\begin{aligned}
\int_C f\,ds &= \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\mathbf{r}(t)\big)\,\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\Big\{(۴\cos t)^۲+(۳t)^۲+(۴\sin t)^۲\Big\}\\
&\qquad \sqrt{(-۴\sin t)^۲+(۳)^۲+(۴\cos t)^۲}\,dt\\
&= ۵\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{۱۶+۹t^۲\Big\}\,dt\\
&= ۱۰\pi(۱۶+۳\pi^۲)
\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید C مثلث با رئوس $(۱,۰,۰)$، $(۰,۱,۰)$ و $(۰,۰,۱)$ است و $f=x-y+۲z$. انتگرال f بر C را محاسبه کنید.

حل. ابتدا توجه می‌کنیم که C اجتماع سه پاره خط است و هر یک از این پاره خطها را جداگانه پارامتره می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&C=C_۱+C_۲+C_۳\\
&C_۱=(۱,۰,۰)(۰,۱,۰)\\
&\quad :\;\mathbf{r}(t)=(۱-t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}\;;\;\;۰\le t\le ۱\\
&C_۲=(۰,۱,۰)(۰,۰,۱)\\
&\quad :\;\mathbf{r}(t)=(۱-t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}\;;\;\;۰\le t\le ۱\\
&C_۳=(۰,۰,۱)(۱,۰,۰)\\
&\quad :\;\mathbf{r}(t)=(۱-t)\mathbf{k}+t\mathbf{i}\;;\;\;۰\le t\le ۱
\end{aligned}$$

بنابراین، انتگرال خواسته شده برابر است با

$$\begin{aligned}
\int_C f\,ds &= \int_{C_۱} f\,ds+\int_{C_۲} f\,ds+\int_{C_۳} f\,ds\\
&= \int_۰^۱ f(۱-t,t,۰)\,\|\overrightarrow{(-۱,۱,۰)}\|\,dt\\
&\quad+\int_۰^۱ f(۰,۱-t,t)\,\|\overrightarrow{(۰,-۱,۱)}\|\,dt\\
&\quad+\int_۰^۱ f(t,۰,۱-t)\,\|\overrightarrow{(۱,۰,-۱)}\|\,dt\\
&= \int_۰^۱(۱-۲t)\sqrt{۲}\,dt+\int_۰^۱(۳t-۱)\sqrt{۲}\,dt\\
&\quad+\int_۰^۱(۱-t)\sqrt{۲}\,dt\\
&= \sqrt{۲}\int_۰^۱ ۲\,dt\\
&= ۲\sqrt{۲}
\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید S قسمت جدا شده از مخروط قائم $x^۲+y^۲=z^۲$ توسط صفحات $z=۱$ و $z=۲$ در یک هشتم اول است و C لبهٔ رویهٔ S می‌باشد. انتگرال $f=x(y+z)$ را بر C محاسبه کنید.

حل. رویهٔ S و منحنی C را در شکل ۱.۸—ب نشان داده‌ایم. C را به چهار بخش $C_۱$ تا $C_۴$ تقسیم می‌کنیم. $C_۱$ و $C_۳$ ربع دایره‌اند و $C_۲$ و $C_۴$ پاره خط هستند. آنها را به شکل زیر پارامتره می‌کنیم:

$$C_۱ \;:\; \begin{cases} x^۲+y^۲=z^۲\\ z=۱\\ ۰\le x,y\\ \text{با جهت مثلثاتی}\end{cases}$$

$$:\; \begin{cases} x^۲+y^۲=۱\\ z=۱\\ ۰\le x,y\\ \text{با جهت مثلثاتی}\end{cases}$$

$$:\;\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(\cos t,\sin t,۱)}\;;\;\;۰\le t\le\frac{\pi}{۲}$$

$$C_۲ \;:\; (۰,۱,۱)(۰,۲,۲)\ \text{پاره خط}$$

$$\begin{aligned}
:\;\mathbf{r}(t)&=(۱-t)\overrightarrow{(۰,۱,۱)}+t\overrightarrow{(۰,۲,۲)}\\
&=\overrightarrow{(۰,t+۱,t+۱)}\;;\;\;۰\le t\le ۱
\end{aligned}$$

$$C_۳ \;:\; \begin{cases} x^۲+y^۲=z^۲\\ z=۲\\ ۰\le x,y\\ \text{با جهت عکس مثلثاتی}\end{cases}$$

$$:\; \begin{cases} x^۲+y^۲=۴\\ z=۲\\ ۰\le x,y\\ \text{با جهت عکس مثلثاتی}\end{cases}$$

$$:\;\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۲\sin t,۲\cos t,۲)}\;;\;\;۰\le t\le\frac{\pi}{۲}$$

$$\begin{aligned}
C_۴ &= (۲,۰,۲)(۱,۰,۱)\\
:\;\mathbf{r}(t)&=(۱-t)\overrightarrow{(۲,۰,۲)}+t\overrightarrow{(۱,۰,۱)}\\
&=\overrightarrow{(۲-t,۰,۲-t)}\;;\;\;۰\le t\le ۱
\end{aligned}$$

پس در مجموع داریم

$$\begin{aligned}
\int_C f\,ds &= \int_{C_۱} f\,ds+\int_{C_۲} f\,ds+\int_{C_۳} f\,ds+\int_{C_۴} f\,ds\\
&= \int_۰^{\pi/۲} f(\cos t,\sin t,۰)\,\|\overrightarrow{(-\sin t,\cos t,۰)}\|\,dt\\
&\quad+\int_۰^۱ f(۰,t+۱,t+۱)\,\|\overrightarrow{(۰,۱,۱)}\|\,dt\\
&\quad+\int_۰^{\pi/۲} f(۲\sin t,۲\cos t,۲)\,\|\overrightarrow{(۲\cos t,۲\sin t,۰)}\|\,dt\\
&\quad+\int_۰^۱ f(۲-t,۰,۲-t)\,\|\overrightarrow{(-۱,۰,-۱)}\|\,dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{0}^{\pi/2} \cos t(1+\sin t)\,dt + \int_{0}^{1} 0\,dt \\
&\quad + \int_{0}^{\pi/2} 2\cos t(2+2\sin t)\,dt + \int_{0}^{1}(2-t)^2\sqrt{2}\,dt \\
&= \frac{3}{2} + 0 + 12 + \frac{7}{3}\sqrt{2} \\
&= \frac{27}{2} + \frac{7}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

مثال ۴) فرض کنید C قسمتی از سهمی $y = x^2$ است که $0 \le x \le 1$. انتگرال $f = xy/(1+4x^2)^{3/2}$ را بر منحنی C محاسبه کنید.

حل. این منحنی را به شکل

$$C\ :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t, t^2)}\ ;\ \ 0 \le t \le 1$$

پارامتره می‌کنیم و در نتیجه،

$$
\begin{aligned}
\int_C f\,ds &= \int_{0}^{1} f\big(t, t^2\big)\,\|\overrightarrow{(1, 2t)}\|\,dt \\
&= \int_{0}^{1} \frac{(t)(t^2)}{(1+4(t^2))^{3/2}}\sqrt{1+4t^2}\,dt \\
&= \int_{0}^{1} \frac{t^3\,dt}{1+4t^2} \\
&\overset{(1)}{=} \int_{1}^{5} \frac{\frac{u-1}{4}\frac{1}{8}\,du}{u} \\
&= \frac{1}{32}(4 - \ln 5)
\end{aligned}
$$

که در (۱) فرض شده است $u = 1 + 4t^2$.

۵.۱.۸ تمرین.

۱) از تابع $f = x + y + z$ بر مثلث با رئوس $(1, 0, 0)$، $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ انتگرال بگیرید.

۲) در صورتی که $f = x + y$ و منحنی C به شکل $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(2t, 1-t, t)}\,;\ -3 \le t \le 2$ باشد، انتگرال تابع f را بر منحنی C محاسبه کنید.

۳) انتگرال تابع $f = x\sin z$ را بر منحنی
$C\ :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\cos t, \sin t, t)}\,;\ -\pi \le t \le 3\pi/2$
محاسبه کنید.

۴) در صورتی که C محل برخورد کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و صفحهٔ $x = y$ باشد، انتگرال تابع $f = |z|$ را بر منحنی C محاسبه کنید.

۵) در صورتی که S قسمتی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ باشد که توسط صفحات $z = 1$ و $z = 2$ جدا شده است و C لبهٔ آن باشد، انتگرال تابع $f = z(x - y)$ را بر C محاسبه کنید.

۶) در صورتی که S قسمتی از استوانهٔ $y^2 + z^2 = 9$ باشد که توسط صفحهٔ $x = 2$ در یک هشتم اول جدا شده است و C لبهٔ آن باشد، انتگرال تابع $f = x(y^2 + z^2)$ را بر C محاسبه کنید.

۷) انتگرال خط $\int_C |y|\,ds$ را در صورتی حساب کنید که
$C\ :\ (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

۸) انتگرال خط $\int_C \frac{ds}{y^2}$ را که در آن $C\ :\ y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ محاسبه کنید.

۹) انتگرال تابع $f = xy + z$ را بر منحنی C با پارامتر
$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(t\sin t + \cos t, t\cos t - \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\right)}$
محاسبه کنید، که $0 \le t \le \pi$.

۱۰) انتگرال تابع $f = xz + yz$ را بر منحنی
$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(\frac{t^2}{2} + \ln t, \frac{t^2}{2} - \ln t, 2t\right)},\ 1 \le t \le 2$
محاسبه کنید.

۲.۸ کاربرد انتگرال خط نوع اول

به طور کلی اگر f چگالی یک کمیت فیزیکی نظیر جرم، گرما، بار الکتریکی و یا... باشد که بر سراسر منحنی C تعریف می‌گردد، آنگاه $\int_C f\,ds$ عبارت از ظرفیت کل منحنی C خواهد بود. بر همین اساس، با توجه به کاربردهای مشابه انتگرال دو گانه و یا سه‌گانه، فرمولهای به شرح زیر را می‌توان مطرح نمود:

۱.۲.۸ محاسبه جرم و مرکز ثقل.

اگر نقطهٔ (x, y, z) از منحنی C دارای چگالی جرمی $\delta(x, y, z)$ باشد، در این صورت جرم C و مرکز ثقل $P = (x_0, y_0, z_0)$ آنرا به روش زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$m = \int_C \delta\,ds, \qquad x_0 = \frac{1}{m}\int_C x\delta\,ds,$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_C y\delta\,ds, \qquad z_0 = \frac{1}{m}\int_C z\delta\,ds$$

۲.۲.۸ مثال. ۱) فرض کنید C نیم دایرهٔ به معادلهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ واقع در بالای $x-$محور است که نقطهٔ (x, y) از آن دارای چگالی $\delta = y\sqrt{x^2 + y^2}$ می‌باشد. جرم و مرکز ثقل C را بیابید.

حل. ابتدا C را پارامتره می‌کنیم:

$$C\ :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(R\cos t, R\sin t)},\ 0 \le t \le \pi$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}
m &= \int_C \delta\, ds \\
&= \int_{۰}^{\pi} \delta(R\cos t, R\sin t)\left\|\overrightarrow{(-R\cos t, R\sin t)}\right\| dt \\
&= \int_{۰}^{\pi} (R\sin t)R\,.\,R\, dt \\
&= \int_{۰}^{\pi} \underbrace{R^{۳}\sin t\, dt}_{\delta\, ds} \\
&= ۲R^{۳} \\
x_{۰} &= \frac{۱}{m}\int_C x\delta\, ds \\
&= \frac{۱}{۲R^{۳}}\int_{۰}^{\pi} R\cos t\,.\,R^{۳}\sin t\, dt = ۰ \\
y_{۰} &= \frac{۱}{m}\int_C y\delta\, ds \\
&= \frac{۱}{۲R^{۳}}\int_{۰}^{\pi} R\sin t\,.\,R^{۳}\sin t\, dt \\
&= \frac{\pi}{۴}R
\end{aligned}$$

در نتیجه، مرکز C عبارت است از $(۰, \pi R/۴)$.

مثال ۲) در صورتی که مارپیچ زیر از یک جنس چگال ساخته شده باشد، مرکز ثقل آن را بیابید:

$$\begin{aligned}
C\ :\ \mathbf{r}(t) &= (۲\sqrt{۲}\cos t)\overrightarrow{(۱,۱,۰)} + (۲\sqrt{۲}\sin t)\overrightarrow{(۱,-۱,۰)} \\
&\quad + \frac{۳}{۲}\sqrt{۲}t\overrightarrow{(۰,۰,۱)}\ ;\ ۰ \le t \le ۵\pi
\end{aligned}$$

حل. فرض کنیم چگالی ثابت C برابر $\delta_{۰}$ باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}
m &= \int_C \delta ds \\
&= \int_{۰}^{۵\pi} \delta_{۰}\Big\|(-۲\sqrt{۲}\sin t)\overrightarrow{(۱,۱,۰)} \\
&\quad +(۲\sqrt{۲}\cos t)\overrightarrow{(۱,-۱,۰)} + \frac{۳}{۲}\sqrt{۲}\overrightarrow{(۰,۰,۱)}\Big\| dt \\
&= \delta_{۰}\int^{۵\pi} ۵\, dt \\
&= ۲۵\pi\delta_{۰} \\
x_{۰} &= \frac{۱}{m}\int_C x\delta\, ds \\
&= \frac{۱}{۲۵\pi\delta_{۰}}\int_{۰}^{۵\pi}\left(۲\sqrt{۲}\cos t + ۲\sqrt{۲}\sin t\right)۵\delta_{۰}\, dt \\
&= -\frac{۴\sqrt{۲}}{۵\pi} \\
y_{۰} &= \frac{۱}{m}\int_C y\delta\, ds \\
&= \frac{۱}{۲۵\pi\delta_{۰}}\int_{۰}^{۵\pi}\left(۲\sqrt{۲}\cos t + ۲\sqrt{۲}\sin t\right)۵\delta_{۰}\, dt \\
&= -\frac{۴\sqrt{۲}}{۵\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{۰} &= \frac{۱}{m}\int_C z\delta\, ds \\
&= \frac{۱}{۲۵\pi\delta_{۰}}\int_{۰}^{۵\pi}\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}t\delta_{۰}\, dt \\
&= \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۴}\pi
\end{aligned}$$

پس مرکز ثقل C عبارت است از $\left(-\frac{۴\sqrt{۲}}{۵\pi}, -\frac{۴\sqrt{۲}}{۵\pi}, \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۴}\pi\right)$.

مثال ۳) فرض کنید A، B و C سه نقطهٔ غیر واقع در یک راستا در فضا باشند، مرکز ثقل مثلث ABC را بیابید.

حل. چون سخنی از چگالی جرمی نیامده است، فرض می‌کنیم $\delta = ۱$. مثلث ΔABC را بشکل زیر پارامتره می‌کنیم:

$$\Delta ABC = AB + BC + CA$$

$$AB\ :\ \mathbf{r}(t) = (۱-t)\mathbf{A} + t\mathbf{B}\quad ۰ \le t \le ۱$$

$$BC\ :\ \mathbf{r}(t) = (۱-t)\mathbf{B} + t\mathbf{C}\quad ۰ \le t \le ۱$$

$$CA\ :\ \mathbf{r}(t) = (۱-t)\mathbf{C} + t\mathbf{A}\quad ۰ \le t \le ۱$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned}
m &= \int_\Delta \delta\, ds = \int_\Delta ds = \ell_\Delta \\
&= \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CA}\| \\
x_{۰} &= \frac{۱}{m}\int_\Delta x\delta\, ds \\
&= \frac{۱}{m}\int_{AB} x\, ds + \frac{۱}{m}\int_{BC} x\, ds + \frac{۱}{m}\int_{CA} x\, ds \\
&= \frac{۱}{m}\Big\{\int_{۰}^{۱}\left((۱-t)x_A + tx_B\right)\|\overrightarrow{AB}\|\, dt \\
&\quad + \int_{۰}^{۱}\left((۱-t)x_B + tx_C\right)\|\overrightarrow{BC}\|\, dt \\
&\quad + \int_{۰}^{۱}\left((۱-t)x_C + tx_A\right)\|\overrightarrow{CA}\|\, dt\Big\} \\
&= \frac{۱}{m}\Big\{\|\overrightarrow{AB}\|\frac{x_A + x_B}{۲} + \|\overrightarrow{BC}\|\frac{x_B + x_C}{۲} \\
&\quad + \|\overrightarrow{CA}\|\frac{x_C + x_A}{۲}\Big\}
\end{aligned}$$

به صورت مشابه $y_{۰}$ و $z_{۰}$ قابل محاسبه است، در نتیجه مرکز ثقل $P = (x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$ مثلث Δ عبارت است از

$$\frac{۱}{m}\left\{\|\overrightarrow{AB}\|\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}}{۲} + \|\overrightarrow{BC}\|\frac{\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{۲} + \|\overrightarrow{CA}\|\frac{\overrightarrow{C}+\overrightarrow{A}}{۲}\right\}$$

به بیان دیگر،

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\|(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) + \|\overrightarrow{BC}\|(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}) + \|\overrightarrow{CA}\|(\overrightarrow{C}+\overrightarrow{A})}{۲(\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{CA}\|)}$$

۳.۲.۸ تمرین.

۱) جرم سیمی به معادلهٔ

$$C\,:\,\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t^2-1,2t)}\,;\ 0\le t\le 1$$

که چگالی جرمی آن $\delta=3y/4$ است را محاسبه کنید.

۲) جرم و مرکز ثقل میلهٔ به معادلهٔ

$$C\,:\,\mathbf{r}=\overrightarrow{\left(t,\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2},\frac{t^2}{2}\right)}\,;\ 0\le t\le 2$$

را در صورتی محاسبه کنید که چگالی جرمی آن در مکان (x,y,z) برابر $q=1/(x+1)$ است.

۳) در صورتی که نقطهٔ (x,y) از نیم دایرهٔ $x^2+y^2=1$ با $y\ge 0$ دارای چگالی جرم $\delta=|x+y|$ باشد، جرم و مرکز ثقل آنرا مشخص کنید.

۴) در صورتی که S مخروط ناقص $x^2+y^2=z^2$ محدود به صفحات $z=-1$ و $z=-2$ باشد و چگالی جرمی نقطهٔ (x,y,z) از آن برابر $\delta=-z\sqrt{x^2+y^2}$ باشد، مرکز ثقل لبهٔ S را بیابید.

۵) فرض کنید D نیم قرص محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=4$ و واقع در نیم صفحهٔ $y\le x$ بوده و C لبهٔ D باشد. اگر نقطهٔ $(x,y)\in D$ دارای چگالی جرمی $\delta=\sqrt{x^2+y^2}$ باشد، مرکز ثقل C را مشخص کنید.

۶*) فرض کنید $A=(a,0,0)$، $B=(0,b,0)$ و $C=(0,0,c)$. در صورتی که مثلث ABC از یک جنس چگال ساخته شده باشد، a، b و c را طوری انتخاب کنید که مرکز ثقل آن در مکان $(1,1,1)$ قرار بگیرد.

۴.۲.۸ محاسبهٔ گشتاور ماند و شعاع چرخش.

در صورتی که نقطهٔ (x,y,z) از C دارای چگالی جرمی $\delta(x,y,z)$ باشد و S یک نقطه، خط و یا صفحه در xyz–فضا باشد، گشتاور C حول S عبارت است از $I_S=\int_C h^2\delta ds$ که h فاصلهٔ $X=(x,y,z)$ تا S است. چنانچه S برابر مبداء o، x–محور، y–محور، z–محور، xy–صفحه، yz–صفحه، zx–صفحه بترتیب برابرند با

$$I_O=\int_C(x^2+y^2+z^2)\delta\,ds,$$

$$I_x=\int_C(y^2+z^2)\delta\,ds,\qquad I_y=\int_C(x^2+z^2)\delta\,ds,$$

$$I_z=\int_C(x^2+y^2)\delta\,ds,\qquad I_{xy}=\int_C z^2\delta\,ds,$$

$$I_{xz}=\int_C y^2\delta\,ds,\qquad I_{yz}=\int_C x^2\delta\,ds.$$

در هر مورد، **شعاع چرخش** را به صورت $R=\sqrt{I/m}$ تعریف می‌کنیم.

۵.۲.۸ مثال. ۱) فرض کنید C پاره خط از $(0,1,-1)$ تا $(1,0,1)$ است نقطهٔ (x,y,z) از آن دارای چگالی جرمی $\delta=x^2+y^2+z^2$ است. گشتاور ماند C حول z–محور را محاسبه کنید.

حل. پاره خط C را به صورت

$$\begin{aligned}C\,:\,\mathbf{r}(t)&=(1-t)\overrightarrow{(0,1,-1)}+t\overrightarrow{(1,0,1)}\\&=\overrightarrow{(t,1-t,2t-1)}\ ;\ \ 0\le t\le 1\end{aligned}$$

پارامتره می‌کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned}I_z&=\int_C(x^2+y^2)\delta\,ds\\&=\int_0^1\left(t^2+(1-t)^2\right)\left(t^2+(1-t)^2+(2t-1)^2\right)\\&\qquad\times\left\|\overrightarrow{(1,-1,2)}\right\|dt\\&=\int_0^1(2t^2-2t+1)(6t^2-6t^2+2)\sqrt{6}\,dt\\&=\frac{11}{15}\sqrt{6}\end{aligned}$$

مثال ۲) دایرهٔ چگال $x^2+y^2=R^2$ واقع در xy–صفحه را حول $x=y=z$ دوران می‌دهیم، ضمن تعیین گشتاور ماند آن، شعاع چرخش آن را مشخص کنید.

حل. لازم است فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه تا خط $x=y=z$ را بیابیم. چون تکیه‌گاه این خط $X_\circ=(0,0,0)$ و بردار هادی آن $\mathbf{v}=\overrightarrow{(1,1,1)}$ است. بنابراین، فاصلهٔ مذکور برابر است با

$$\begin{aligned}h&=\frac{\|\overrightarrow{X_\circ X}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\\&=\frac{\|\overrightarrow{(y-z,z-x,x-y)}\|}{\sqrt{3}}\\&=\sqrt{\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{3}}\end{aligned}$$

و بنابراین، گشتاور خواسته شده برابر است با

$$\begin{aligned}I&=\int_C h^2\delta\,ds\\&=\frac{\delta_\circ}{3}\int_C\left\{(y-x)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}ds\\&=\frac{\delta_\circ}{3}\int_0^{2\pi}\Big\{(R\sin t-R\cos t)^2+(R\sin t-0)^2\\&\qquad+(0-R\cos t)^2\Big\}\left\|\overrightarrow{(-R\sin t,R\cos t,0)}\right\|dt\\&=\frac{\delta_\circ}{3}R^3\int_0^{2\pi}(2-2\sin t\cos t)\,dt\\&=\frac{4}{3}\pi\delta_\circ R^3\end{aligned}$$

بعلاوه، چون $\delta=\delta_\circ$ ثابت است و طول قوس دایره $2\pi R$ است، جرم C برابر $2\pi R\delta_\circ$ می‌باشد و شعاع چرخش C برابر است با $R=\sqrt{\frac{I}{m}}=\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

۶.۲.۸ تمرین. در تمرینات ۱ تا ۵، گشتاور ماند و شعاع چرخش C حول مبداء را محاسبه کنید:

۱) $C\ :\ x^2+y^2=4\ ,\ 0\le x,\ \delta=|xy|$

۲) $C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(3\sin t, 4t-1, 3\cos t)},$

$$-\pi/2\le t\le \pi/2,\ \delta=|z|$$

۳) $C\ :\ |x|+|y|=1,\ \delta=|x|$

۴) $C\ :\ \max\{|x|+|y|\}=a,\ \delta=1$

۵) $C\ :\ x^2+y^2+z^2=2\ ,\ z=1,\ \delta=z\sqrt{x^2+y^2}$

۶) اگر $C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t\cos t, t\sin t, t)}\ ;\ \pi\le t\le 2\pi$ مارپیچ باشد و تابع چگالی آن $\delta=1/z$، گشتاور ماند آن C حول $xy-$صفحه را محاسبه کنید.

۷.۲.۸ محاسبهٔ متوسط تابع بر منحنی. فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ بر منحنی C تعریف گردد. در اینصورت متوسط مقدار f بر C عبارت است از خارج قسمت کل ظرفیت C بر طول قوس C: $\operatorname*{mean}_C f=\dfrac{1}{\ell_C}\displaystyle\int_C f\,ds$.

۸.۲.۸ مثال. ۱) متوسط مقدار تابع $f=x+2y+3z$ بر دایرهٔ حاصل از برخورد صفحهٔ $y=1$ با استوانهٔ $x^2+z^2=2x$ را محاسبه کنید.

حل. ابتدا C را پارامتره می‌کنیم:

$$\begin{aligned} C\ &:\ \begin{cases} x^2+z^2=2x\\ y=1\end{cases}\\ &:\ \begin{cases} (x-1)^2+z^2=1\\ y=1\end{cases}\\ &:\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(\cos t, 1, \sin t)}\quad 0\le t\le 2\pi\end{aligned}$$

در این صورت ملاحظه می‌گردد که $\ell_C=2\pi\times 1=2\pi$. زیرا، منحنی C دایره‌ای به شعاع ۱ است. بعلاوه

$$\begin{aligned}\operatorname*{mean}_C f &= \frac{1}{2\pi}\int_C f\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\cos t+2+3\sin t\}\\ &\qquad\times\left\|\overrightarrow{(-\cos t, 0, \sin t)}\right\|dt\\ &= 2\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید دمای نقطهٔ (x,y,z) از میلهٔ به شکل پاره خط $C=(1,1,0)(1,-1,1)$ برابر $T=xy+z$ باشد. این میله را در یک محیط ایزولهٔ گرمایی قرار می‌دهیم تا به دمای تعادلی برسد، دمای نهایی را محاسبه کنید.

حل. این منحنی را به شکل

$$\begin{aligned} C\ :\ \mathbf{r}(t) &= (1-t)\overrightarrow{(1,1,0)}+t\overrightarrow{(1,-1,1)}\\ &= \overrightarrow{(1,1-2t,t)}\ ;\ 0\le t\le 1\end{aligned}$$

پارامتره می‌کنیم. کافی است متوسط T بر C را محاسبه کنیم. چون طول پاره خط برابر اندازهٔ واصل بین دو سر آن است، داریم

$$\begin{aligned} T_0 &= \operatorname*{mean}_C T\\ &= \frac{1}{\ell_C}\int_C T\,ds\\ &= \left(\int_0^1(1+3t)\left\|\overrightarrow{(0,-2,1)}\right\|dt\right)\\ &\qquad\div\left\|\overrightarrow{(1,-1,1)}-\overrightarrow{(1,1,0)}\right\|\\ &= \int_0^1(1+3t)\,dt=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

۹.۲.۸ تمرین.

۱) متوسط فاصلهٔ نقاط بر آستروئید $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ تا مبداء را محاسبه کنید.

۲) متوسط تابع $f=z$ بر مارپیچ $C:\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(3\cos t+2, 3\sin t-1, 1-4t)},\ 0\le t\le 5\pi$ را محاسبه کنید.

۳) فرض کنید D قرص به معادلهٔ $x^2+y^2\le 2x+2y+2$ است و C لبهٔ D است. اگر دمای $(x,y)\in D$ برابر $x+y$ باشد، متوسط دمای D و نیز متوسط دمای C را محاسبه کنید! آیا برابرند؟

۴) فرض کنید C مثلث با رئوس در $\mathbf{i}$، $2\mathbf{j}$ و $3\mathbf{k}$ است و $f=x^2+y^2+z^2$. متوسط تابع f بر منحنی C را محاسبه کنید.

۱۰.۲.۸ محاسبهٔ نیروی جاذبهٔ حاصل از یک منحنی بر یک نقطه. فرض کنید نقطهٔ (x,y,z) از C دارای چگالی جرمی $\delta(x,y,z)$ است و $P_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای به جرم m_0 می‌باشد. در این صورت P_0 با بردار نیروی $\mathbf{F}=\overrightarrow{(\alpha,\beta,\gamma)}$ به سمت C کشیده می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned}\alpha &= Gm_0\int_C\frac{\delta(x,y,z)(x-x_0)\,ds}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}\\ \beta &= Gm_0\int_C\frac{\delta(x,y,z)(y-y_0)\,ds}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}\\ \gamma &= Gm_0\int_C\frac{\delta(x,y,z)(z-z_0)\,ds}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

و $G=6065\times 10^{-11}\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg.s}^2)$ ثابت گرانش نیوتونی است. پتانسیل میدان جاذبهٔ نیوتنی C نیز عبارت است از

$$U=\int_C\frac{Gm_0\delta(x,y,z)\,ds}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{1/2}}$$

روشن است که در این صورت $\mathbf{F} = \overrightarrow{\left(\frac{\partial U}{\partial x_\circ}, \frac{\partial U}{\partial y_\circ}, \frac{\partial U}{\partial z_\circ}\right)}$.

۱۱.۲.۸ مثال. پتانسیل میدان جاذبهٔ نیوتنی حاصل از میلهٔ $(۱,\circ,۱)(\circ,۱,۱)$ که نقطهٔ x,y,z از آن دارای چگالی جرمی $\delta = x + y$ است را محاسبه کنید.

حل. فرض کنیم $P_\circ$ نقطه‌ای به جرم $m_\circ$ در مکان $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ باشد. در این صورت پتانسل میدان جاذبهٔ نیوتنی اطراف منحنی C عبارت است از

$$\begin{aligned}
U(x_\circ, y_\circ, z_\circ) &= \\
&= \int_\circ^۱ \frac{Gm_\circ((۱-t)+t)\sqrt{۲}\,dt}{(۱-t-x_\circ)^۲+(t-y_\circ)^۲+(۱-z_\circ)^۲)^{۱/۲}} \\
&= Gm_\circ\sqrt{۲}\int_\circ^۱ \Big(۲t^۲ - ۲(x_\circ+y_\circ-۱)t \\
&\qquad + (x_\circ^۲+y_\circ^۲+(۱-z_\circ)^۲)\Big)^{-۱/۲} dt \\
&= Gm_\circ \int_\circ^۱ \Big(\frac{۱}{۴}(۲t-y_\circ-۱+x_\circ)^۲ \\
&\qquad + \frac{۱}{۴}(x_\circ+y_\circ-۱)^۲+۲(z_\circ-۱)^۲\Big)^{-۱/۲} dt \\
&= Gm_\circ \ln\Big|\Big(۱-y_\circ+x_\circ \\
&\qquad + \sqrt{(۱-y_\circ+x_\circ)^۲+(x_\circ+y_\circ-۱)^۲+۸(z_\circ-۱)^۲}\Big) \\
&\qquad \div\Big(۱+y_\circ-x_\circ \\
&\qquad + \sqrt{(۱+y_\circ-x_\circ)^۲+(x_\circ+y_\circ-۱)^۲+۸(z_\circ-۱)^۲}\Big)\Big|
\end{aligned}$$

۱۲.۲.۸ یادداشت. روشن است که کاربردهای انتگرال خط نوع اول به موارد بالا خلاصه نمی‌شود. به عنوان نمونه به مثال زیر توجه کنید:

۱۳.۲.۸ مثال. ۱) هواپیمایی بر حسب زمان با ضابطهٔ $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t, ۱+t^۲, t+t^۲)}$ حرکت می‌کند. اگر میزان سوخت مصرفی آن برابر $q = AV$ باشد که A یک ثابت است و V سرعت لحظه‌ای هواپیما است، میزان کل مصرف سوخت هواپیما از لحظهٔ $t = \circ$ تا $t = ۳$ را مشخص کنید.

حل. کافی است از q بر مسیر هواپیما C انتگرال بگیریم:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_C q\,ds \\
&= \int_\circ^۳ A\sqrt{(۱)^۲+(۲t)^۲+(۱+۲t)^۲}\,\left\|\overrightarrow{(۱, ۲t, ۱+۲t)}\right\| dt \\
&= A\int_\circ^۳ (۸t^۲+۴t+۲)\,dt = ۹۸A
\end{aligned}$$

مثال ۲) حصاری با قاعدهٔ به شکل آستروئید (یعنی، ستاره شکل) $x^{۲/۳}+y^{۲/۳} = ۸^{۲/۳}$ در اختیار است که ارتفاع در نقطهٔ (x,y) از آن به اندازهٔ $h = ۱/۲ + y/۸$ است. مساحت دیوارهٔ این حصار را محاسبه کنید.

حل. کافی است از h بر آستروئید C انتگرال بگیریم. ابتدا آستروئید را پارامتره می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
C \;&:\; \left(x^{۱/۳}\right)^۲ + \left(y^{۱/۳}\right)^۲ = \left(۸^{۱/۳}\right)^۲ \\
&:\; \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۸\cos^۳ t, ۸\sin^۳ t)}\;;\; \circ \le t \le ۲\pi
\end{aligned}$$

در نتیجه، مساحت جانبی حصار برابر است با

$$\begin{aligned}
A &= \int_C h\,ds \\
&= \int_\circ^{۲\pi}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}۸\sin^۳ t\right) \\
&\qquad \times\left\|\overrightarrow{(-۲۴\sin t\cos^۲ t, ۲۴\cos t\sin^۲ t)}\right\| dt \\
&= ۱۲\int_\circ^{\pi} |\sin t\cos t|\,dt \\
&= ۲۴\int_\circ^{\pi/۲} \sin t\cos t\,dt = ۱۲
\end{aligned}$$

۱۴.۲.۸ تمرین.

۱) هواپیمایی بر مسیر

$$C \;:\; \mathbf{r} = \overrightarrow{\left(t, \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}t^{۳/۲}, \frac{t^۲}{۲}\right)}\;;\; \circ \le t \le ۲$$

حرکت می‌کند و میزان مصرف سوخت آن در مکان (x,y,z) باندازهٔ $q = ۱/(x+۱)$ است. این هواپیما در کل مسیر چه مقدار سوخت مصرف می‌کند؟

۲) پله‌ای به شکل مارپیچ

$$C \;:\; \mathbf{r} = \overrightarrow{(۵\cos t, -۵\sin t, ۶t)}\;;\; \circ \le t \le ۴\pi$$

است، که ارتفاع آن در نقطهٔ (x,y,z) برابر $h = ۱ + z/۸$ می‌باشد. مساحت کل سطح نرده را محاسبه کنید.

۳) میله‌ای فلزی به شکل

$$C \;:\; \mathbf{r} = \overrightarrow{\left(t\cos t, t\sin t, \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}t^{۳/۲}\right)}\;;\; \circ \le t \le ۲\pi$$

است، که چگالی بار الکتریکی در مکان (x,y,z) از آن باندازهٔ $q = x$ است. مقدار کل بار موجود بر این میله را محاسبه کنید.

۳.۸ انتگرال خط نوع دوم

برای تعریف انتگرال خط نوع دوم، مقدمتاً باید مفهوم میدان برداری را مطرح کنیم.

۱.۳.۸ تعریف. منظور از یک میدان برداری در فضا تابعی است به شکل $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{۳}\longrightarrow\mathbb{R}^{۳}$. به بیان دیگر، سه تابع سه متغیره بنام توابع مولفه‌ای $\mathbf{F}$ چنان وجود دارند که

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y) &= \overrightarrow{(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))}\\ &= P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}\end{aligned}$$

به صورت مشابه میدان برداری در صفحه را به شکل زیر می‌توان تعریف نمود

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y) &= \overrightarrow{(P(x,y),Q(x,y))}\\ &= P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}\end{aligned}$$

۲.۳.۸ تعریف. فرض کنید H خاصیتی در مورد توابع چند متغیره است (نظیر پیوستگی، مشتق‌پذیری و...) در صورتی می‌گوئیم میدان برداری $\mathbf{F}$ دارای خاصیت H است که مؤلفه‌های آن دارای خاصیت H باشند.

۳.۳.۸ تعریف جهت بر منحنی. ابتدا فرض کنید که $C\,:\,\mathbf{r}(t)\,;\,a\le t\le b$ یک منحنی در فضا باشد، منظور از یک **تعویض پارامتر** برای C تابعی است معکوس‌پذیر و دیفرانسیل‌پذیر مانند $h\,:\,[c;d]\longrightarrow[a;b]$ در این صورت

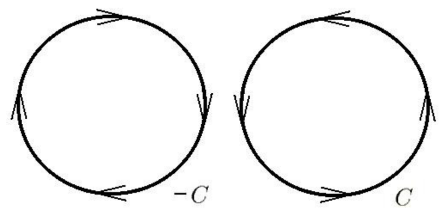
$$C\,:\,\mathbf{m}(t)\,:=\mathbf{r}(h(t))\,;\,c\le t\le d$$

را **تعویض پارامتر** C **توسط** h می‌نامیم. چون h معکوسپذیر است، بنابراین $h'(t)$ بر (c,d) یا همواره منفی است و یا همواره مثبت می‌باشد. اگر $h'(t)$ بر $(a;b)$ مثبت باشد، h **تعویض پارامتر حافظ جهت** و اگر $h'(t)$ بر $(c;d)$ منفی باشد، h را **تعویض پارامتر جهت برگردان** گوئیم. چنانچه یک پارامتر بخصوص برای C انتخاب شود و اجازه ندهیم که از تعویض پارامترهای جهت برگردان استفاده شود، اصطلاحاً C را یک **منحنی جهتدار** می‌نامیم. عمل انتخاب جهت برای منحنی را **جهتدهی** می‌نامیم. C با جهت **وارون** را با نماد $-C$ نشان می‌دهیم. منحنی‌های یکپارچه را تنها به دو صورت می‌توان جهتدار کرد در حالی که هر منحنی با k تکه را به ۲^{k} طریق می‌توان پارامتره نمود.

۴.۳.۸ مثال. ۱) فرض کنید $C\,:\,x^{۲}+y^{۲}=۴$. این منحنی را به صورت $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۲\cos t,۲\sin t)}$ که $t\in[۰;۲\pi]$ می‌توان پارامتره نمود. اگر C را با این جهت در نظر بگیریم، آنگاه $-C$ را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$-C\,:\,\mathbf{m}(t)=\overrightarrow{(۲\sin t,۲\cos t)}\,;\,-۳\pi/۲\le t\le\pi/۲$$

توجه شود که اگر $h\,:\,[-۳\pi/۲;\pi/۲]\longrightarrow[۰;۲\pi]$ با ضابطهٔ $h(t)=\pi/۲-t$ باشد، آنگاه $\mathbf{m}(t)=\mathbf{r}(h(t))$. به شکل ۲.۸ توجه شود.



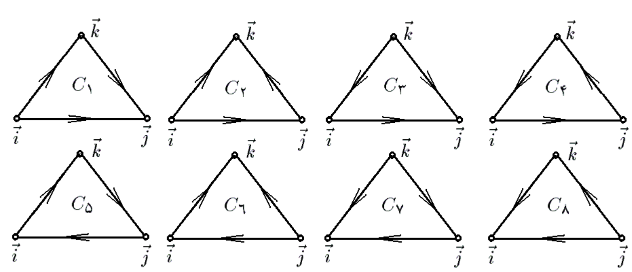
شکل ۲.۸: جهت بر یک منحنی

مثال ۲) پاره خط $C=(۰,۱,۰)(۱,۱,۲)$ را به دو صورت می‌توان جهتدار کرد، از اول به آخر یا از آخر به اول در زیر روش پارامتره کردن هر دو را آورده‌ایم:

$$\begin{aligned}C\,:\,\mathbf{r}(t)&=(۱-t)\overrightarrow{(۰,۱,۰)}+t\overrightarrow{(۱,۱,۲)}\\ &=\overrightarrow{(t,۱,۲t)}\,;\,۰\le t\le ۱\\ C\,:\,\mathbf{m}(t)&=(۱-t)\overrightarrow{(۱,۱,۲)}+t\overrightarrow{(۰,۱,۰)}\\ &=\overrightarrow{(۱-t,۱,۲-۲t)}\,;\,۰\le t\le ۱\end{aligned}$$

توجه شود که در این حالت $\mathbf{m}(t)=\mathbf{r}(۱-t)$. یعنی، تعویض پارامتر مورد نظر $h\,:\,[۰;۱]\longrightarrow[۰;۱]$ با ضابطهٔ $h(t)=۱-t$ است.

مثال ۳) فرض کنیم C مثلث با رئوس $(۱,۰,۰)$، $(۰,۱,۰)$ و $(۰,۰,۱)$ باشد. در این صورت C سه تکه است! به این معنی که به حداقل سه پارامتر نیاز می‌شود. به همین دلیل C را به $۲^{۳}=۸$ صورت می‌توان جهتدار کرد (به شکل ۳.۸ توجه شود). ملاحظه می‌شود که $C_{۸}=-C_{۱}$، $C_{۴}=-C_{۲}$، $C_{۶}=-C_{۳}$ و $C_{۵}=-C_{۴}$.



شکل ۳.۸: جهتهای مختلف بر یک مثلث

۵.۳.۸ تمرین.

۱) نشان دهید $h : [-1;1] \longrightarrow [-\pi/2;\pi/2]$ با ضابطهٔ $h(t)=\arcsin t$ تعویض پارامتر است.

۲) هر گاه $C : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\sin t,\cos t,t)}\ ,\ -\pi \le t \le 5\pi$، نشان دهید که $h(t)=\pi t$ یک متغییر پارامتر است و سپس تجدید پارامتر C توسط h را بنویسید.

۳) بیضی $C : x^2+4y^2=4$ در $\mathbb{R}^2$ را به چند صورت می‌توان جهتدار کرد؟ هر یک را بیان کنید.

۴) فرض کنید C دو لبهٔ استوانهٔ $x^2+y^2=1$ است که توسط صفحات $z=x$ و $z=2$ جدا شده‌اند. C را به چند صورت می‌توان جهتدار کرد؟ هر یک را پارامتره کنید.

۵) فرض کنید S قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=9$ است که در یک هشتم اول قرار دارد و C لبهٔ آن باشد. C را به چند صورت می‌توان جهتدار کرد؟ هر یک را پارامتره کنید.

۶.۳.۸ تعریف. فرض کنید C یک منحنی جهتدار است و $\mathbf{F}$ میدانی برداری می‌باشد. در این صورت انتگرال (خط نوع دوم) $\mathbf{F}$ بر C را به شکل

$$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\bullet\mathbf{r}'(t)\,dt$$

تعریف می‌کنیم، که در اینجا فرض شده است

$$C : \mathbf{r}(t)\,;\, a\le t\le b$$

اگر C توسط چند پارامتر توضیح داده شده باشد، بجای عبارت سمت راست در تساوی بالا، مجموع عبارتهای این چنینی را استفاده می‌کنیم:

$$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\,d\mathbf{r} + \int_{C_2}\mathbf{F}\,d\mathbf{r} + \cdots + \int_{C_n}\mathbf{F}\,d\mathbf{r}$$

به بیان مختصاتی، در صورتی که $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x(t),y(t))}$ و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P(x,y),Q(x,y))}$، آنگاه

$$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \Big\{P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big\}\,dt$$

بعلاوه، در صورتی که منحنی $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))}$ و میدان $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))}$ باشد. داریم

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \Big\{&P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)\\ &+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)\\ &+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big\}\,dt\end{aligned}$$

۷.۳.۸ قضیه. اگر $\mathbf{F}$، $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ میدان برداری، C، C_1، C_2 منحنی و a_1 و a_2 اعداد دلخواه باشند، در این صورت

۱) $$\int_C (a_1\mathbf{F}_1 + a_2\mathbf{F}_2)\bullet d\mathbf{r} = a_1\int_C \mathbf{F}_1\bullet d\mathbf{r} + a_2\int_C \mathbf{F}_2\bullet d\mathbf{r}$$

۲) $$\int_{C_1+C_2}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_2}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

۳) $$\int_{-C}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

۸.۳.۸ یادداشت. توجه شود که انتگرال خط نوع اول به جهتدهی بستگی ندارد در حالی که انتگرال خط نوع دوم بستگی تام به آن دارد.

۹.۳.۸ یادداشت. چنانچه $\mathbf{F} = P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ بجای $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ می‌توان نوشت

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

بعلاوه، اگر کسینوسهای هادی برداری یکهٔ $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/\|\mathbf{r}'\|$ را $\mathbf{v} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ بگیریم، آنگاه بجای $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ می‌توان نوشت

$$\int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

که یک انتگرال خط نوع اول است. توجه شود که α، β و γ بترتیب زاویه‌ای هستند که $\mathbf{T}$ با $x-$محور، $y-$محور و $z-$محور می‌سازد.

۱۰.۳.۸ مثال. ۱) فرض کنید

$$\mathbf{F} = \overrightarrow{\big(-y/(x^2+y^2),x/(x^2+y^2)\big)}$$

و C دایرهٔ واحد باشد که به جهت مثلثاتی جهتدار شده است. انتگرال $\mathbf{F}$ بر C را محاسبه کنید.

حل. چون $C : x^2+y^2=1$ و جهت آن مثلثاتی است، می‌نویسیم

$$C : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\cos t,\sin t)}\,;\, 0\le t\le 2\pi$$

در نتیجه، انتگرال $\mathbf{F}$ بر C عبارت است از

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{F}\big(\cos t,\sin t\big)\bullet\overrightarrow{(-\sin t,\cos t)}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\overrightarrow{(-\sin t,\cos t)}\bullet\overrightarrow{(-\sin t,\cos t)}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}dt = 2\pi\end{aligned}$$

مثال ۲) انتگرال میدان برداری $\mathbf{F} = \overrightarrow{(xy,yz,zx)}$ را بر منحنی

$$C : \mathbf{r} = \overrightarrow{(1,t,t^2)}\ ;\ -1\le t\le 1$$

محاسبه کنید.

حل. به کمک تعریف، داریم

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_{-1}^{1} \mathbf{F}\overrightarrow{(1,t,t^2)}\bullet\overrightarrow{(0,1,2t)}\,dt\\ &= \int_{-1}^{1} \overrightarrow{(t,t^3,t^2)}\bullet\overrightarrow{(0,1,2t)}\,dt\\ &= \int_{-1}^{1} 3t^3\,dt = 0\end{aligned}$$

مثال ۳ مثلث با رئوس $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ را طوری جهتدار می‌کنیم که با جهت راستگرد بردار $(1,1,1)$ سازگار باشد. از میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(z,x+y,2z)}$ بر آن انتگرال بگیرید.

حل. نظر به شکل ۴.۸–الف باید مثلث Δ مذکور را به صورت $\Delta=\mathbf{ij}+\mathbf{jk}+\mathbf{ki}$ تجزیه کنیم. اما در این صورت

$$\begin{array}{lcl}\mathbf{ij} & : & \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(1-t,t,0)}\ ;\ 0\le t\le 1\\ \mathbf{jk} & : & \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(0,1-t,t)}\ ;\ 0\le t\le 1\\ \mathbf{ki} & : & \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t,0,1-t)}\ ;\ 0\le t\le 1\end{array}$$

انتگرال مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}\int_\Delta \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{ij}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}+\int_{\mathbf{jk}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}+\int_{\mathbf{ki}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\\ &= \int_0^1 \mathbf{F}\overrightarrow{(1-t,t,0)}\bullet\overrightarrow{(-1,1,0)}\,dt\\ &\quad+\int_0^1 \mathbf{F}\overrightarrow{(0,1-t,t)}\bullet\overrightarrow{(0,-1,1)}\,dt\\ &\quad+\int_0^1 \mathbf{F}\overrightarrow{(t,0,1-t)}\bullet\overrightarrow{(1,0,-1)}\,dt\\ &= \int_0^1 \overrightarrow{(0,1,0)}\bullet\overrightarrow{(-1,1,0)}\,dt\\ &\quad+\int_0^1 \overrightarrow{(t,1-t,2t)}\bullet\overrightarrow{(0,-1,1)}\,dt\\ &\quad+\int_0^1 \overrightarrow{(1-t,t,2-2t)}\bullet\overrightarrow{(1,0,-1)}\,dt\\ &= \int_0^1 dt+\int_0^1(3t-1)\,dt+\int_0^1(t-1)dt=1\end{aligned}$$

۱۱.۳.۸ تمرین.
در هر مورد، از $\mathbf{F}$ بر C انتگرال بگیرید:

۱) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,x-y)},\ C:\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t+1,t^2-t)};\ 0\le t\le 1$

۲) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,yz,xyz)},\ C:\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t^3,t^2,t)};\ -1\le t\le 1$

۳) $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j},\quad C\ :\ \mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j};\ -2\le t\le 0$

۴) $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+y\mathbf{j}+x\mathbf{i},$

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)=\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+t\mathbf{k}\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$

در هر مورد C را پارامتره کرده و انتگرال $\mathbf{F}$ را بر C محاسبه کنید. به جهتهای ممکن توجه شود:

۵) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(1/x,1/y)},\ C=\overrightarrow{(1,1)(2,3)}$

۶) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(z,2y,3x)},\ C:x^2+y^2+z^2=2, z=1, 0\le y$

۷) $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j},\ C:y=x^2,\ y\le 4$

۸) $\mathbf{F}=(x+y+z)(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}),$

$$C:x=y=2z,\ 1\le y\le 2$$

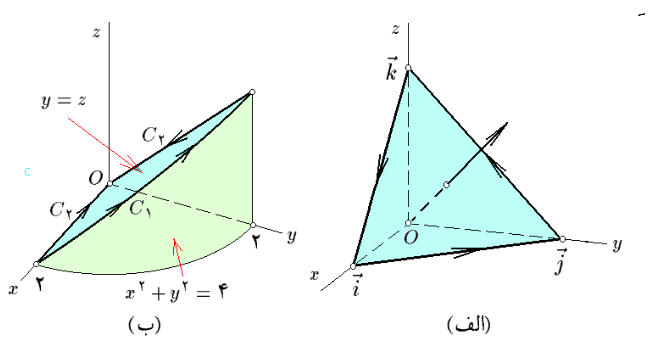
در هر مورد C را لبهٔ D یا S تصور کرده و انتگرال $\mathbf{F}$ را بر C محاسبه کنید. به جهتهای ممکن توجه شود:

۹) $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+\mathbf{j},\ D\ :\ x^2+y^2\le 1, 0\le x$

۱۰) $\mathbf{F}=x^2\mathbf{j},\ D\ :\ x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1$

۱۱) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,y-z,x+2z)},\ S\ :\ y\ge x^2, z=x+1, y\le 4$

۱۲) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(z^2,x+y,z)},\ S\ :\ x^2+y^2+z^2\le 4, y=\sqrt{3}z$



شکل ۴.۸: پارامتره نمودن منحنیها، به منظور محاسبهٔ انتگرال خط نوع دوم

۴.۸ کاربرد انتگرال خط نوع دوم

انتگرال خط نوع دوم کاربردهای متنوعی در فیزیک و به تبع آن، در مهندسی دارد که تنها سه مورد از آنها در اینجا ذکر می‌شود.

۱.۴.۸ کاربرد در محاسبهٔ کار.
فرض کنید

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)\,;\ a\le t\le b$$

مسیر حرکت متحرکی بر حسب زمان است و $\mathbf{F}$ میدانی برداری است که بر سراسر C تعریف می‌گردد. اگر بازهٔ زمانی t_i تا $t_i+\Delta t_i$ را در نظر بگیریم، بدون اینکه از کلیت بحث کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که متحرک بر مسیر مستقیم از $\mathbf{r}(t_i)$ تا $\mathbf{r}(t_i+\Delta t_i)$

حرکت می‌کند و $\mathbf{F}$ نیز بر سراسر این قطعه برابر $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i))$ است. به این ترتیب، کار انجام شده در این قطعه برابر

$$
\begin{aligned}
\Delta W_i &\overset{(۱)}{\approx} \overrightarrow{r(t_i)r(t_i+\Delta t_i)} \bullet \mathbf{F}\overrightarrow{\big(\mathbf{r}(t_i)\big)} \\
&= \big(\mathbf{r}(t_i+\Delta t_i)-\mathbf{r}(t_i)\big) \bullet \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t_i)\big) \\
&\overset{(۲)}{=} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t_i)\big) \bullet \mathbf{r}(\xi_i)\Delta t_i \\
&\approx \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t_i)\big) \bullet \mathbf{r}'(t_i)\Delta t_i
\end{aligned}
$$

است. توضیح اینکه مطابق فیزیک، کار انجام شده در حالتی که تغییر مکان خطی و میدان ثابت است، برابر حاصلضرب داخلی بردار تغییر مکان در بردار نیرو (۱) است. در (۲) از قضیهٔ لاگرانژ برای توابع برداری استفاده کرده‌ایم که ξ_i عددی بین t_i و $t_i+\Delta t_i$ می‌باشد. بنابراین، بنابه روش المانگیری، کل کار انجام شده توسط متحرک تحت تاثیر میدان $\mathbf{F}$ برابر

$$
\begin{aligned}
W &= \lim_{\substack{\Delta t_i\to ۰\\ n\to\infty}} \sum_{i=۱}^{n} \Delta W_i \\
&= \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \bullet \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

است. پس در مجموع، کافی است از $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ بر C انتگرال بگیریم.

۲.۴.۸ مثال.

۱) فرض کنید متحرکی بر مسیر

$$C\ :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۱+t^۲, t, t^۲)}\ ;\ -۱ \le t \le ۲$$

حرکت می‌کند و تحت تأثیر میدان برداری $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{k}$ قرار داد. کار انجام شده را محاسبه کنید.

حل. با توجه به داده‌های مسأله، داریم

$$
\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_{-۱}^{۲} \mathbf{F}\big(۱+t^۲, t, t^۲\big) \bullet \overrightarrow{(۲t, ۱, ۲t)}\,dt \\
&= \int_{-۱}^{۲} \overrightarrow{(t^۲, ۰, ۱+t^۲-t)} \bullet \overrightarrow{(۲t, ۱, ۲t)}\,dt \\
&= \int_{-۱}^{۲} \big(۲t+۴t^۳-۲t^۲\big)\,dt = ۱۲
\end{aligned}
$$

مثال ۲) فرض کنید متحرکی n بار به گرد دایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ و جهت عکس مثلثاتی می‌چرخد و تحت تاثیر میدان برداری

$$\mathbf{F} = \big((x+y)\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j}\big)/(x^۲+y^۲)$$

قرار داد. کار انجام شده توسط متحرک را محاسبه کنید.

حل. فرض کنیم $C\ :\ x^۲+y^۲=a^۲$. این منحنی را به صورت

$$C\ :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(a\sin t, a\cos t)}\ ;\ ۰ \le t \le ۲\pi$$

در جهت معکوس می‌توان پارامتره کرد. چون متحرک n بار چرخیده است، کافی است کار انجام شده در یک دور کامل را محاسبه نموده و سپس حاصل را در n ضرب کنیم. بنابراین،

$$
\begin{aligned}
W &= n\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \\
&= n\int_۰^{۲\pi} \mathbf{F}\big(a\sin t, a\cos t\big) \bullet \overrightarrow{(a\cos t, -a\sin t)}\,dt \\
&= n\int_۰^{۲\pi} \frac{۱}{a^۲}\overrightarrow{(a\sin t + a\cos t, a\cos t - a\sin t)} \\
&\qquad \bullet \overrightarrow{(a\cos t, -a\sin t)}\,dt \\
&= n\int_۰^{۲\pi} dt = ۲n\pi
\end{aligned}
$$

مثال ۳) متحرکی یکبار از مسیر $C_۱$ از نقطهٔ $A=(۲,۰,۰)$ به نقطهٔ $B=(۰,۲,۲)$ می‌رود و بار دیگر از مسیر $C^۲$ (به شکل ۴.۸—ب توجه شود) کار انجام شده در هر مورد را بر فرض $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ محاسبه کنید.

حل. مسیر $C_۱$ بیضی است

$$
C_۱\ :\ \begin{cases} x^۲+y^۲=۴ \\ y=z \\ ۰ \le x, y \end{cases}
\qquad :\ \begin{cases} \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۲\cos t, ۲\sin t, ۲\sin t)} \\ ۰ \le t \le \pi/۲ \end{cases}
$$

و $C_۲$ اجتماع دو پاره خط است:

$$
\begin{aligned}
C_۲^۱\ &:\ \mathbf{r}(t) = (۱-t)\overrightarrow{(۲,۰,۰)} + t\overrightarrow{(۰,۰,۰)}\ ;\ ۰ \le t \le ۱ \\
C_۲^۲\ &:\ \mathbf{r}(t) = (۱-t)\overrightarrow{(۰,۰,۰)} + t\overrightarrow{(۰,۲,۲)}\ ;\ ۰ \le t \le ۱
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
W_۱ &= \int_{C_۱} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \\
&= \int_۰^{\pi/۲} \overrightarrow{(۲\sin t, -۲\cos t, ۱)} \\
&\qquad \bullet \overrightarrow{(-۲\sin t, ۲\cos t, ۲\cos t)}\,dt \\
&= ۲\int_۰^{\pi/۲} (\cos t - ۱)\,dt = -\pi \\
W_۲ &= \int_{C_۲} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \\
&= \int_{C_۲^۱} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_۲^۲} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \\
&= \int_۰^۱ \overrightarrow{(۰, ۲t-۲, ۱)} \bullet \overrightarrow{(-۲,۰,۰)}\,dt \\
&\qquad + \int_۰^۱ \overrightarrow{(۲t, ۰, ۱)} \bullet \overrightarrow{(۰,۲,۲)}\,dt \\
&= \int_۰^۱ ۲\,dt = ۲
\end{aligned}
$$

به تفاوت کارهای انجام شده توجه شود!

۳.۴.۸ تمرین.

۱) قسمت ۳ از مثال ۱۱.۳.۸ را برای میدان برداری $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + z^۲\mathbf{k}$ حل کنید.

۲) فرض کنید C مارپیچ به شکل

$$C\,:\,\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{\left(2\cos t,2\sin t,3t+1\right)}\ ;\ -\pi\le t\le\pi$$

باشد، در هر مورد کار انجام شده توسط C تاثیر $\mathbf{F}$ را محاسبه کنید

الف) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ب) $\mathbf{F}=x^2+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$

ج) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,x+y,x+y+z)}$

د) $\mathbf{F}=(x+y+z)(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

۴.۴.۸ کاربرد در محاسبهٔ جریان در امتداد یک منحنی.

فرض کنید $\mathbf{F}$ میدانی برداری است که در سراسر ناحیهٔ Ω تعریف شده است. فرض کنید $C\ :\ \mathbf{r}(t)\,;\,a\le t\le b$ یک منحنی واقع در Ω است. می‌خواهیم جریان گذرندهٔ $\mathbf{F}$ در امتداد C را محاسبه کنیم. یعنی مشخص کنیم که چه حجمی از جریان $\mathbf{F}$ در امتداد C حرکت می‌کند. این کار را به روش المانگیری انجام می‌دهیم. فرض کنیم بجای کل C قطعهٔ از $\mathbf{r}(t)$ تا $\mathbf{r}(t+dt)$ در اختیار است. بدون کاسته شده از کلیت بحث می‌توانیم فرض کنیم که این قطعه یک پاره خط است $d\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t+dt)-\mathbf{r}(t)$ و بعلاوه $\mathbf{F}$ بر سراسر این قطعه ثابت و برابر $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ می‌باشد. در این صورت، جریان در امتداد قطعه برابر طول تصویر $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ در امتداد $d\mathbf{r}(t)$ ضرب در طول $d\mathbf{r}(t)$ است. به بیان دیگر،

$$d\mathcal{F}_n=\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet d\mathbf{r}(t)$$

در نتیجه، کل جریان در امتداد C عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n&=\int_a^b d\mathcal{F}_n\\&=\int_a^b\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet d\mathbf{r}(t)\\&=\int_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\end{aligned}$$

۵.۴.۸ مثال. ۱) مقدار جریان در امتداد منحنی

$$C\,:\,\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(2t,t^2+1,t)}\ ;\ 0\le t\le 1$$

توسط میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x^2,y^2,z^2)}$ را محاسبه کنید.

حل. به کمک تعریف، مقدار جریان مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n&=\int_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\\&=\int_0^1\mathbf{F}(2t,t^2+1,t)\bullet\overrightarrow{(2,2t,1)}\,dt\\&=\int_0^1\overrightarrow{(4t^2,t^4+2t^2+1,t^2)}\bullet\overrightarrow{(2,2t,1)}\,dt\\&=\int_0^1\left\{2t^5+4t^3+9t^2+2t\right\}\,dt=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

مثال ۲) مقدار جریان عبوری در امتداد مارپیچ

$$C\,:\,\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(3\cos t,4t,3\sin t)}\,;\ 0\le t\le 3\pi$$

توسط میدان برداری $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+2\mathbf{j}-x\mathbf{k}$ را محاسبه کنید.

حل. به کمک تعریف، مقدار شار مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n&=\int_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\\&=\int_0^{3\pi}\mathbf{F}(3\cos t,4t,3\sin t)\bullet\overrightarrow{(-3\sin t,4,3\cos t)}\,dt\\&=\int_0^{3\pi}\overrightarrow{(3\sin t,2,-3\cos t)}\bullet\overrightarrow{(-3\sin t,4,3\cos t)}\,dt\\&=\int_0^{3\pi}-dt=-3\pi\end{aligned}$$

۶.۴.۸ تمرین. در هر مورد، جریان گذرندهٔ $\mathbf{F}$ در امتداد C را محاسبه کنید:

۱) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,y,z)},\ \ C\,:\,\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t^3,t^2,t)}\ ;\ -1\le t\le 1$

۲) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,y)}/\sqrt{x^2+y^2},\ \ C\,:\,x^2+y^2=9$

۳) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(yz,xz,xy)},\ \ C\,:\,y=x^2=z^2\ ,\ y\le 4$

۴) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,2y)},\ \ C\,:\,x^{2/3}+y^{2/3}=1$

۷.۴.۸ کاربرد در محاسبهٔ شار گذرنده از یک منحنی در صفحه.

فرض کنید $\mathbf{F}$ میدانی برداری است که بر سراسر ناحیهٔ Ω تعریف شده و $C\ :\ \mathbf{r}(t)\,;\,a\le t\le b$ یک منحنی در Ω است. شار گذرنده توسط $\mathbf{F}$ از منحنی C را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، از روش المانگیری استفاده نموده و بجای C قطعهٔ از $\mathbf{r}(t)$ تا $\mathbf{r}(t+dt)$ را در نظر می‌گیریم. بدون اینکه از کلیت بحث کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که این قطعه عبارت از پاره خط از $\mathbf{r}(t)$ تا $\mathbf{r}(t+dt)$ است: $d\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t+dt)-\mathbf{r}(t)$. همچنین می‌توانیم فرض کنیم که میدان $\mathbf{F}$ بر سراسر $d\mathbf{r}(t)$ ثابت و برابر $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ است. به این ترتیب، شار گذرنده از $d\mathbf{r}(t)$ توسط $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ برابر است با طول تصویر $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ در امتداد عمود بر $d\mathbf{r}(t)$ ضرب در طول $d\mathbf{r}(t)$ به عبارت دیگر، داریم

$$\begin{aligned}d\mathcal{F}_n&\approx\mathbf{F}\overrightarrow{(\mathbf{r}(t))}\bullet\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{\|d\mathbf{r}(t)\|}\right)^{\perp}\|d\mathbf{r}(t)\|\\&=\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet(d\mathbf{r}(t))^{\perp}\\&=\overrightarrow{\Big(P(\mathbf{r}(t)),Q(\mathbf{r}(t))\Big)}\bullet\overrightarrow{(d\,y(t),-d\,x(t))}\\&=\Big(P\big(x(t),y(t)\big)y'(t)-Q\big(x(t),y(t)\big)x'(t)\Big)\,dt\end{aligned}$$

بنابراین، کل شار عبوری از C توسط $\mathbf{F}$ عبارت است از:

$$\mathcal{F}_n=\int_C d\mathcal{F}_n=\int_C P\,dy-Q\,dx$$

۸.۴.۸ مثال. ۱) شار گذرنده از منحنی $x^۲+y^۲=۴$ توسط میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{\left(x/(x^۲+y^۲),۲y/(x^۲+y^۲)\right)}$ را محاسبه کنید.

حل. این منحنی را به صورت

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۲\cos t,۲\sin t)}\ ;\ ۰\le t\le ۲\pi$$

پارامتره می‌کنیم. در نتیجه، شار گذرنده از C عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n&=\int_C P\,dy-Q\,dx\\&=\int_۰^{۲\pi}\left\{\frac{(۲\cos t)}{(۲\sin t)^۲+(۲\cos t)^۲}d(۲\sin t)\right.\\&\qquad\left.-\frac{۲(۲\sin t)}{(۲\sin t)^۲+(۲\cos t)^۲}d(۲\cos t)\right\}\\&=\int_۰^{۲\pi}\left\{(۲\cos t)(۲\cos t\,dt)-۲(۲\sin t)(-۲\sin t\,dt)\right\}\\&=\frac{۱}{۴}\int_۰^{۲\pi}(۴+۴\sin^۲ t)\,dt=۳\pi\end{aligned}$$

مثال ۲) شار گذرنده از منحنی

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۱-t,t^۲)}\,;\ -۲\le t\le ۲$$

توسط میدان برداری $\mathbf{F}=x^۲\mathbf{i}+۲y\mathbf{i}$ را محاسبه کنید.

حل. با توجه به ۷.۴.۸ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n&=\int_C P\,dy-Q\,dx\\&=\int_{-۲}^{۲}\left\{(۱-t)^۲\,d(t^۲)-(۲t^۲)\,d(۱-t)\right\}\\&=\int_{-۲}^{۲}\left\{(۱-t)^۲(۲t)-(۲t^۲)(-۱)\right\}dt=-\frac{۳۲}{۳}\end{aligned}$$

۹.۴.۸ تمرین. در هر دو مورد، جریان عبوری از C توسط میدان برداری $\mathbf{F}$ را محاسبه کنید:

۱) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(y^۲,-x^۲)}$ و $C:\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t\sin t,t\cos t)};۰\le t\le\pi$.

۲) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,y)}/\sqrt{x^۲+y^۲}$ و $C\ :\ x^۲+y^۲=۹$ با جهت مثلثاتی.

۳) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x+y,x^۲+y^۲)}$ و $C:x^{۲/۳}+y^{۲/۳}=۱$ با جهت مثلثاتی.

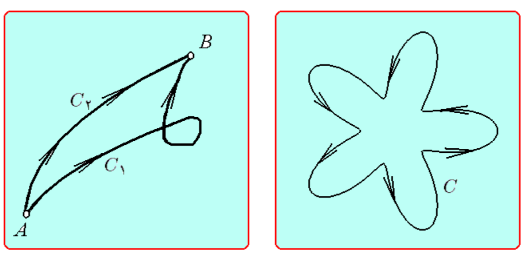
۴) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(xy,x^۲+y^۲)}$ و $C:\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(t^۲,\sin t)};-\pi\le t\le\pi$.

۵.۸ میدان ابقایی

فرض کنید $\mathbf{F}$ یک میدان برداری است که بر سراسر مجموعهٔ Ω تعریف می‌شود. فرض کنیم A و B دو نقطه از Ω هستند و $C_۱$ و $C_۲$ دو منحنی در Ω باشند که ابتدای آنها A و انتهای آنها B هستند. سوأل این است که آیا کار انجام شده توسط متحرکی که بر $C_۱$ حرکت می‌کند برابر کار انجام شده توسط متحرکی است که بر $C_۲$ حرکت می‌کند؟ به بیان مختصر آیا کار انجام شده توسط متحرکها در Ω که تحت تاثیر $\mathbf{F}$ قرار دارند به انتخاب مسیر بستگی دارد، یا خیر؟ چنانچه پاسخ این سوال منفی باشد، می‌گوئیم $\mathbf{F}$ بر Ω ابقایی است. ذیلاً به بیان و مطالعهٔ دقیق این مفهوم می‌پردازیم.

۱.۵.۸ تعریف ۱. فرض کنید $\mathbf{F}$ میدانی برداری است که بر Ω تعریف می‌گردد. در صورتی می‌گوئیم $\mathbf{F}$ بر Ω **ابقایی** است که بازاء هر دو نقطه A و B از Ω و هر دو منحنی $C_۱$ و $C_۲$ واقع در Ω با ابتدای A و انتهای B، انتگرال $\mathbf{F}$ بر $C_۱$ برابر انتگرال $\mathbf{F}$ بر $C_۲$ باشد (به شکل ۵.۸—الف توجه شود).

۲.۵.۸ تعریف ۲. فرض کنید $\mathbf{F}$ میدان برداری بر Ω باشد. در صورتی می‌گوئیم $\mathbf{F}$ بر Ω **ابقایی** است که بازاء هر منحنی بستهٔ C در Ω، انتگرال $\mathbf{F}$ بر C صفر باشد: $\int_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=۰$ (به شکل ۵.۸—الف توجه شود).



(ب) (الف)

شکل ۵.۸: توصیف تعریف میدان ابقایی

۳.۵.۸ قضیه. تعاریف ۱ و ۲ معادلند.

اثبات: فرض کنیم $\mathbf{F}$ به تعبیر در تعریف ۱ بر Ω ابقائی باشد و منحنی بستهٔ دلخواه C واقع در Ω را انتخاب می‌کنیم. در این صورت، اگر دو نقطهٔ متفاوت مثل A و B را بر C انتخاب کنیم و دو قطعهٔ حاصل را $C_۱$ و $C_۲$ بنامیم، آنگاه $C=C_۱+C_۲$ که $C_۱$ از A آغاز شده و به B ختم پیدا می‌کند، و $C_۲$ از B آغاز شده و به A ختم پیدا می‌کند. در نتیجه، هر دو منحنی $C_۱$ و $-C_۲$ از A آغاز شده و به B ختم پیدا می‌کنند، و لذا انتگرال $\mathbf{F}$ بر آنها مساوی است. بنابراین

$$\int_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_{C_۱}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}-\int_{-C_۲}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=۰$$

و لذا $\mathbf{F}$ به تعبیر در تعریف ۲ بر Ω ابقائی می‌باشد.

فرض کنیم $\mathbf{F}$ به تعبیر در تعریف ۲ بر Ω ابقائی باشد و دو نقطه A و B از Ω و دو منحنی $C_۱$ و $C_۲$ واقع در Ω با ابتدای A

و انتهای B به صورت دلخواه انتخاب می‌کنیم. در این صورت، منحنی $C = C_۱ - C_۲$ یک منحنی بسته در Ω است، و بنابراین انتگرال $\mathbf{F}$ بر C صفر است. در نتیجه

$$\int_{C_۱} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} - \int_{C_۲} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = ۰$$

و لذا $\mathbf{F}$ به تعبیر در تعریف ۱ بر Ω ابقائی می‌باشد. □

برای تحقیق ابقایی بودن میدان برداری نیاز به قضیه‌ای بنام قضیهٔ میدانهای ابقایی داریم: در این قضیه اصطلاح **مجموعهٔ ستاره شکل** وجود دارد، که در ۱۴.۱۲.۵ تشریح شده است.

۴.۵.۸ قضیه. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ستاره شکل و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P, Q, R)}$ میدانی برداری است که بر Ω مشتقپذیر می‌باشد. در این صورت، احکام زیر معادلند:

۱) میدان برداری $\mathbf{F}$ بر مجموعهٔ Ω ابقائی است، یعنی انتگرالگیری از $\mathbf{F}$ بر منحنیهای واقع در Ω، مستقل از مسیر است.

۲) عبارت دیفرانسیلی $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ بر Ω کامل است، یعنی تابعی f مشتقپذیر بر Ω چنان وجود دارد که $df = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$. بعبارت دیگر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \ \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \ \frac{\partial f}{\partial z} = R. \qquad (۱.۸)$$

یا به بیان معادل

$$f = \int P\,dx, \ f = \int Q\,dy, \ f = \int R\,dz. \quad (۲.۸)$$

که با مقایسهٔ مقدار این سه انتگرال، می‌توان f را بدست آورد.

۳) عبارت دیفرانسیلی $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ بر Ω دقیق است، یعنی دیفرانسیل آن بر Ω صفر است. بعبارت دیگر

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \quad (۳.۸)$$

۴) تابعی f دیفرانسیلپذیر بر Ω به گونه‌ای وجود دارد که به ازای هر منحنی دلخواه C در Ω با ابتدای A و انتهای B، داریم

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = f(B) - f(A) \qquad (۴.۸)$$

تابع f در بالا را **پتانسیل میدان برداری $\mathbf{F}$** می‌نامیم.

اثبات: فرض کنیم Ω ستاره شکل بوده و H نقطه‌ای باشد که اگر هر نقطهٔ دلخواه از Ω مثل A را به آن وصل کنیم، پاره خط واصل تماماً در Ω جا بگیرد.

معادل بودن احکام (۲) و (۳) قبلاً در فصل ۵ آورده شده است. در اینجا اثبات می‌کنیم که (۱) با (۴) معادل است و (۲) نیز با (۴) معادل است.

اثبات اینکه (۴) $\Rightarrow$ (۱): فرض کنیم $\mathbf{F}$ بر Ω ابقائی بوده و تابع با مقدار حقیقی f را بر Ω به این صورت تعریف می‌کنیم که $f(A)$ برابر کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ بر پاره خط راست $\overline{HA}$ از H به A باشد، به عبارت دیگر

$$f(A) := \int_۰^۱ \mathbf{F}((۱-t)H + tA)\,dt$$

حال فرض کنیم C یک منحنی دلخواه در Ω با ابتدای در A و انتهای در B باشد. در این صورت منحنی $C_۰ = \overline{HA} + C - \overline{HB}$ در Ω بسته است و لذا انتگرال $\mathbf{F}$ بر آن صفر است. در نتیجه

$$\begin{aligned} ۰ &= \int_{C_۰} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \\ &= \int_{\overline{HA}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} - \int_{\overline{HB}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \\ &= f(A) + \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} - f(B) \end{aligned}$$

و بنابراین تساوی (۵.۸) اثبات شد.

اثبات اینکه (۱) $\Rightarrow$ (۴): فرض کنیم (۴) برقرار باشد و $C_۱$ و $C_۲$ دو منحنی با ابتدای در A و انتهای در B واقع در Ω باشند، در این صورت هر دو انتگرال $\int_{C_۱} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ و $\int_{C_۲} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ با مقدار مشترک $f(B) - f(A)$ برابرند و لذا (۱) برقرار است.

اثبات اینکه (۴) $\Rightarrow$ (۲): فرض کنیم $\mathbf{F}$، f و Ω در (۲) صدق کنند. فرض کنیم $C_i \ : \ \mathbf{r}_i\, ; a \leq t \leq b$ (با $i = ۱, ۲$) دو منحنی دلخواه در Ω با ابتدای و انتهای مشترک باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_a^b P(\mathbf{r}(t))\, x'(t)\, dt \\ &\quad + \int_a^b Q(\mathbf{r}(t))\, y'(t)\, dt + \int_a^b R(\mathbf{r}(t))\, z'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t)).\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t)).\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r}(t)).\frac{dz}{dt} \\ &\overset{(۱)}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt = f(\mathbf{r}(t))\Big|_a^b \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق استفاده شده است. بنابراین (۴) برقرار است.

اثبات اینکه (۲) $\Rightarrow$ (۴): فرض کنیم (۴) برقرار باشد. نقطهٔ دلخواه $A = (x, y, z)$ از Ω و نقطهٔ بسیار نزدیک به آن مانند $B = A + (\varepsilon, ۰, ۰)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، اگر

C_ε پاره خط از A به B باشد، آنگاه بنابه قضیهٔ لاگرانژ از ریاضی عمومی ۱، عددی δ بین ۰ و ε چنان وجود دارد که

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= f(B)-f(A)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+\delta,y,z).\varepsilon\end{aligned}$$

از طرفی منحنی C را به صورت

$$\mathbf{r}(t)=(1-t)A+tB=(x+t\varepsilon,y,z)$$

می‌توان پارامتره نمود، که $0\leq t\leq 1$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_0^1 P(x+t\varepsilon,y,z)\,dt\\ &= P(x+\varepsilon,y,z)-P(x,y,z)\end{aligned}$$

پس ثابت شد که به ازای هر $\varepsilon>0$، یک $\varepsilon>\delta>0$ یافت می‌شود که

$$P(x+\varepsilon,y,z)-P(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x+\delta,y,z).\varepsilon$$

به دلیل یکتایی مشتق، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر (x,y,z) ای از Ω، داریم $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=P(x,y,z)$. به صورت مشابه دو تساوی دیگر در (۱.۸) نتیجه می‌گردد. □

توجه شود که اگر میدان برداری و منحنی در صفحه باشند، آنگاه قضیهٔ ۵.۵.۸ را به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

۵.۵.۸ قضیه. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ستاره شکل در صفحه Oxy و $\mathbf{F}=\overrightarrow{(P,Q)}$ میدانی برداری است که بر Ω مشتقپذیر می‌باشد. در این صورت، احکام زیر معادلند:

۱) میدان برداری $\mathbf{F}$ بر مجموعهٔ Ω ابقائی است، یعنی انتگرالگیری از $\mathbf{F}$ بر منحنیهای واقع در Ω، مستقل از مسیر است.

۲) عبارت دیفرانسیلی $\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=P\,dx+Q\,dy$ بر Ω کامل است، یعنی تابعی f مشتقپذیر بر Ω چنان وجود دارد که $df=\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$. بعبارت دیگر

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P,\ \frac{\partial f}{\partial y}=Q.$$

یا به بیان معادل

$$f=\int P\,dx,\ f=\int Q\,dy.$$

که با مقایسهٔ مقدار این سه انتگرال، می‌توان f را بدست آورد.

۳) عبارت دیفرانسیلی $\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=P\,dx+Q\,dy$ بر Ω دقیق است، یعنی دیفرانسیل آن بر Ω صفر است. بعبارت دیگر

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

۴) تابعی f دیفرانسیلپذیر بر Ω به گونه‌ای وجود دارد که به ازای هر منحنی دلخواه C در Ω با ابتدای A و انتهای B، داریم

$$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=f(B)-f(A) \qquad (۵.۸)$$

تابع f در بالا را **پتانسیل میدان برداری $\mathbf{F}$** می‌نامیم.

۶.۵.۸ مثال. ۱) میدان برداری $\mathbf{F}$ با ضابطهٔ $\overrightarrow{(e^y-y,xe^y-x-1)}$ بر $\mathbb{R}^2$ ابقایی است. زیرا، اولاً $\mathbf{F}$ بر $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود و در ثانی

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(e^y-y)_y=e^y-1=(xe^y-x+1)_x=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

به این ترتیب، پتانسیل این میدان عبارت است از

$$f=xe^y-xy-y+\text{ثابت}$$

مثال ۲) میدان $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x^2+y^2,xy)}$ ابقایی نیست، زیرا

$$\frac{\partial P}{\partial x}=(xy)_x=y\neq 2y=(x^2+y^2)_y=\frac{\partial Q}{\partial y}$$

مگر بر $x-$محور که بر آن $y=0$، و بنابراین $y=2y$.

مثال ۳) میدان

$$\mathbf{F}=\overrightarrow{(yz+2xy+z^2+1,xz+x^2+2yz+1,xy+2xz+y^2+1)}$$

بر $\mathbb{R}^3$ ابقایی است، زیرا اولاً $\mathbb{R}^3$ ستاره شکل است و $\mathbf{F}$ بر Ω تعریف می‌شود و در ثانی

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= (yz+2xy+z^2+1)_y\\ &= z+2x\\ &= (xz+x^2+2yz+1)_x=\frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial P}{\partial z} &= (yz+2xy+z^2+1)_z\\ &= y+2z\\ &= (xy+2xz+y^2+1)_x=\frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= (xz+x^2+2yz+1)_z\\ &= x+2y\\ &= (xy+2xz+y^2+1)_y=\frac{\partial R}{\partial y}\end{aligned}$$

پتانسیل این میدان عبارت است از

$$f=xyz+x^2y+y^2z+z^2x+x+y+z+\text{ثابت}$$

مثال ۴) میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x^۲-z^۲,xy,z)}$ ابقایی نیست، زیرا

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= (x^۲-z^۲)_y = ۰ \neq y = (xy)_x = \frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial P}{\partial y} &= (x^۲-z^۲)_z = -۲z \neq ۰ = (z)_x = \frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= (xy)_z = ۰ = (z)_y = \frac{\partial R}{\partial y}\end{aligned}$$

مگر آنکه $y=z=۰$، یعنی میدان تنها بر $x-$ محور ابقایی است.

مثال ۵) مقدار انتگرال $\int_{(۰,۱)}^{(۳,-۴)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ را محاسبه کنید.

حل. در اینجا مسیر C از $(۰,۱)$ تا $(۳,-۴)$ دلخواه است و $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x+y,x-y)}$ است. این میدان ابقایی است. زیرا، $\mathbf{F}$ بر مجموعهٔ ستاره شکل $\mathbb{R}^۲$ دیفرانسیلپذیر است و همچنین

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (x+y)_y = ۱ = (x-y)_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

بعلاوه، پتانسیل $\mathbf{F}$ نیز عبارت است از

$$\begin{aligned}f &= \int P\,dx\\ &= \int (x+y)\,dx = \frac{x^۲}{۲} + xy + A(y)\\ f &= \int Q\,dy\\ &= \int (x-y)\,dy = xy - \frac{y^۲}{۲} + B(x)\end{aligned}$$

که A و B توابعی دلخواهند. بنابراین

$$f = \frac{x^۲}{۲} + xy - \frac{y^۲}{۲} + \text{ثابت}$$

در نتبجه، داریم

$$\begin{aligned}\int_{(۰,۱)}^{(۳,-۴)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy &= \int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\\ &= f(۳,-۴) - f(۰,۱) = -۱۵\end{aligned}$$

مثال ٦) در صورتی که مسیر از $(۲,۰,۰)$ تا $(۱,۲,۲)$ از مبداء نگذرد. انتگرال $\int_{(۲,۰,۰)}^{(۱,۲,۲)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$ را محاسبه کنید.

حل. در این مسأله C یک منحنی دلخواه از $(۲,۰,۰)$ به $(۱,۲,۲)$ است که از مبداء نمی‌گذرد. این منحنی را به زنجیره‌ای از منحنیها می‌توان تجزیه کرد که یا کلاً در نیم فضای $x \leq ۰$ قرار دارند و یا کلاً در نیم فضای $۰ \leq x$. چون هر یک از این نیم فضاها ستاره شکلند و میدان برداری $\mathbf{F} = \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$ بر هر یک از آنها مشتقپذیر است و نیز چون

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\right)_y =\\ &= \frac{-xy}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{۳/۲}}\\ &= \left(\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\right)_x = \frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\right)_z =\\ &= \frac{-xz}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{۳/۲}}\\ &= \left(\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\right)_x = \frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \left(\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\right)_z =\\ &= \frac{-yz}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{۳/۲}}\\ &= \left(\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\right)_y = \frac{\partial R}{\partial y}\end{aligned}$$

که A، B و C توابعی دلخواهند. بنابراین $\mathbf{F}$ ابقایی است. برای بدست آوردن پتانسیل $\mathbf{F}$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f &= \int P\,dx\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\,dx\\ &= \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} + A(y,z)\\ f &= \int Q\,dy\\ &= \frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\,dy\\ &= \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} + B(x,z)\\ f &= \int R\,dz\\ &= \frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\,dz\\ &= \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} + C(x,y)\end{aligned}$$

و بنابراین، با مقایسهء این سه مورد داریم

$$f = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} + \text{ثابت}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{(۲,۰,۰)}^{(۱,۲,۲)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} &= f(۱,۲,۲) - f(۲,۰,۰)\\ &= ۳-۲ = ۱\end{aligned}$$

۷.۵.۸ تمرین.

در هر مورد مشخص کنید که میدان داده شده بر چه مجموعه‌ای ابقایی است. چنانچه $\mathbf{F}$ ابقایی بود، پتانسیل آن را مشخص کنید:

$۱)\ \mathbf{F}=\overrightarrow{\left(x^{۲}+y^{۲},x^{۲},y^{۲}+y\right)}$

$۲)\ \mathbf{F}=\overrightarrow{\left(۱/y-y/x^{۲},\,۱/x-x/y^{۲}\right)}/\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$

$۳)\ \mathbf{F}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\,/\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ $\quad ۴)\ \mathbf{F}=(y\mathbf{i}-x\mathbf{j})\,/\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$

$۵)\ \mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}$ $\quad ۶)\ \mathbf{F}=(x/y)\,\mathbf{i}+\mathbf{j}$

$۷)\ \mathbf{F}=\overrightarrow{\left(x,y^{۲},z^{۳}\right)}$ $\quad ۸)\ \mathbf{F}=\overrightarrow{(yz-۱,xz+۱,xy)}$

هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید. مشخص کنید که چه مسیری از ابتدا تا انتهای خواسته شده مجاز است.

$$۹)\ \int_{(۰,۰,۱)}^{(۰,۱,۲)} x\,dx-y\,dy+z^{۲}\,dz$$

$$۱۰)\ \int_{(۱,-۱)}^{(۲,۱)} (۲xy-۱)\,dx+(x^{۲}+۱)\,dy$$

$$۱۱)\ \int_{(۰,۱)}^{(۱,۱)} (x-y)(dy-dx)\quad ۱۲)\ \int_{(۱,۰)}^{(۶,۸)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$$

$$۱۳)\ \int_{(-۲,-۱)}^{(۳,۰)} (x^{۴}+۴xy^{۳})\,dx+(۶x^{۲}y^{۲}-۵y^{۴})\,dy$$

$$۱۴)\ \int_{(۱,۰,۰)}^{(۰,۱,۰)} (x^{۲}-۲yz)\,dx+(y^{۲}-۲xz)\,dy +(z^{۲}-۲xy)\,dz$$

$$۱۵)\ \int_{(۰,۱,۱)}^{(۱,-۱,۲)} \Big\{(x+y-z)\,dx+(x+y-z)\,dy +(x+y+z)\,dz\Big\}/\Big\{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+۲xy\Big\}$$

$$۱۶)\ \int_{(۱,۱,۱)}^{(-۱,۱,۲)} \left(۱-\frac{۱}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^{۲}}\right)dy-\frac{xy}{z^{۲}}dz$$

۱۷) نشان دهید که اگر Ω مجموعه‌ای ستاره شکل بامرکز A باشد و $\mathbf{F}$ بر Ω ابقایی باشد، آنگاه بازاء هر $X\in\Omega$ ای

$$f(X)=\int_{AX}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_{۰}^{۱}\mathbf{F}\big((۱-t)\mathbf{A}+t\mathbf{X}\big)\bullet(\mathbf{X}-\mathbf{A})\,dt$$

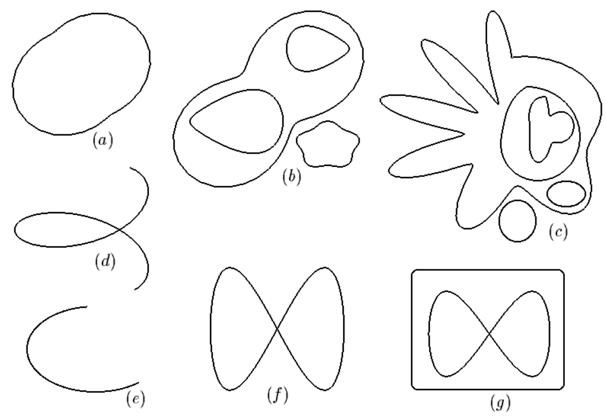
اگر $A=O$ مبدأ باشد، آنگاه $f(X)=\int_{۰}^{۱}\mathbf{F}(t\mathbf{X})\bullet\mathbf{X}\,dt$.

۶.۸ قضیهٔ گرین

به اختصار می‌توان گفت که قضیهٔ گرین تعمیم قضیهٔ میدانهای ابقایی ۶.۴.۸ است. به کمک این قضیه می‌توان انتگرال خط بر مسیر بسته را به انتگرال دوگانه بر داخل آن مسیر تبدیل نمود. این قضیه به همراه قضایای استوکس و گاوس شالودهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری را تشکیل می‌دهند. دو قضیهٔ آخر در فصل ۹ خواهند آمد. قبل از بیان صورت این قضیه، لازم است چند تعریف آورده شود.

۱.۶.۸ تعریف. فرض کنید $C\ :\ \mathbf{r}(t)\ ;\ a\le t\le b$ با تنها یک پارامتر بیان شده باشد. در صورتی می‌گوئیم منحنی C **بسته** است که $\mathbf{r}(a)=\mathbf{r}(b)$. اجتماع چند منحنی بسته را نیز منحنی بسته می‌نامیم. منحنی C را در صورتی **بدون خود قطعی** گوئیم که بتوان آنرا طوری پارامتره نمود که بجز دو انتهای هر پارامتر، هیچ نقطه‌ای توسط یک پارامتر دو بار پیموده نشود و بعلاوه هیچ نقطه‌ای توسط دو پارامتر مجزا پیموده نشود. منحنی C را در صورتی **ژردان** گوئیم که بسته و بدون خود قطعی باشد.

۲.۶.۸ مثال. در شکل ۷.۸ موارد a، b و c ژردان هستند در حالی که d، e، f و g نیستند. مشکل d، f و g آن است که آنها خود قطعی دارند و منحنی (e) بسته نیست.



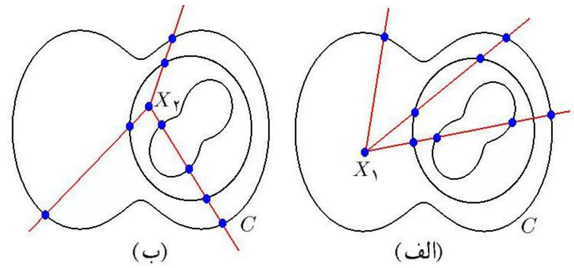
شکل ۷.۸: منحنی ژردان و غیر ژردان

۳.۶.۸ قضیهٔ ژردان. فرض کنید C یک منحنی ژردان در صفحه باشد. در این صورت کل صفحه را به صورت اجتماع سه مجموعهٔ مجزای $C\cup\mathrm{Int}(C)\cup\mathrm{Ext}(C)$ می‌توان نوشت طوری که

الف) $X\in\mathrm{Int}(C)\ \Leftrightarrow$ هر شعاع با آغاز از X و غیر مماس بر C، مجموعهٔ C را در تعدادی فرد نقطه قطع کند.

ب) $X\in\mathrm{Ext}(C)\ \Leftrightarrow$ هر شعاع با آغاز از X و غیر مماس بر C، مجموعهٔ C را در تعدادی زوج نقطهٔ قطع کند. $\mathrm{Int}(C)$ را **درون** C، $\mathrm{Ext}(C)$ را **بیرون** C می‌نامیم (به شکل ۸.۸ توجه شود، $X_{۱}$ یک نقطهٔ درونی و $X_{۲}$ یک نقطهٔ بیرونی C است).

۴.۶.۸ تعریف. فرض کنید C یک منحنی ژردان با درون D است. منظور از **جهت مثبت استاندارد** بر C جهتی است که در آن همواره سمت چپ متحرک مجموعهٔ D قرار دارد. به شکل ۹.۸ توجه شود.

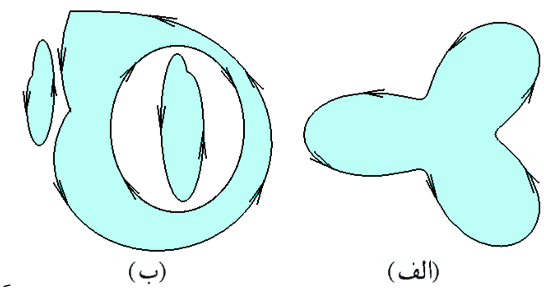


شکل ۸.۸: الف) نقطهٔ درونی. ب) نقطهٔ بیرونی

۵.۶.۸ مثال. ۱) فرض کنید $C\,:\,x^۲+y^۲=۴$. در این صورت C یک منحنی ژردان است و بعلاوه

$$\mathrm{Int}(C)\,:\,x^۲+y^۲<۴\quad,\quad \mathrm{Ext}(C)\,:\,x^۲+y^۲>۴$$

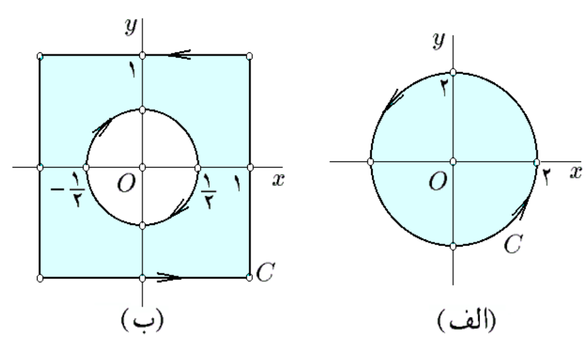
جهت مثبت حرکت بر C همان جهت مثلثاتی است. به شکل ۱۰.۸—الف توجه شود.



شکل ۹.۸: درون یک منحنی ژردان و جهت مثبت استاندارد بر آن

مثال ۲) فرض کنید D داخل مربع با رئوس $(-۱,-۱)$، $(-۱,۱)$، $(۱,-۱)$ و $(۱,۱)$ و خارج دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱/۴$ است و C لبهٔ D باشد. در این صورت C یک منحنی ژردان است. به شکل ۱۱.۸—ب توجه شود. جهت مثبت استاندارد بر اضلاع مربع همان جهت مثلثاتی است، اما جهت بر دایرهٔ داخل، خلاف مثلثاتی است. در اینجا

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}(C)\quad&:\quad -۱<x<۱\,,\,-۱<y<۱\,,\,x^۲+y^۲>۱/۴\\ \mathrm{Ext}(C)\quad&:\quad \text{"}|x|>۱\,,\,|y|>۱\text{"}\ \text{یا}\ x^۲+y^۲<۱/۴\end{aligned}$$



شکل ۱۰.۸: درون منحنیهای ژردان و جهت مثبت استاندارد بر آن

۶.۶.۸ تمرین. در هر مورد درون منحنی داده شده را مشخص نموده و جهت مثبت استاندارد بر آن را معلوم کنید.

۱) $|x|+|y|=۲$ ۲) $x^۲+۴y^۲=۴$

۳) $\text{" }\max\{|x|,|y|\}=۱\text{"}\cup\text{" }\max\{|x|,|y|\}=۲\text{"}$

۴) $\text{"}x^۲+y^۲=۹\text{"}\cup\text{"}x^۲+y^۲=۲x\text{"}\cup\text{"}|x|+|y|=۵\text{"}$

در هر مورد مجموعه‌ی D معرفی می‌شود. فرض کنید C لبهٔ D است. درون C را مشخص کرده و جهت مثبت استاندارد بر C را مشخص کنید.

۵) $x^۲+y^۲\le ۴$ ۶) $۱\le x^۲+y^۲\le ۹$

۷) $x^۲+y^۲\le ۹\,,\,|x|+|y|\ge ۲$

۸) $۰\le x\,,\,۰\le y, x+y\le ۱$

۹) $\text{"}۱\le x^۲+y^۲\le ۴\text{"}\cup\text{"}(x-۴)^۲+y^۲\le ۱\text{"}$
$\cup\text{"}(x+۴)^۲+y^۲\le ۱\text{"}$

۱۰) $x^۲+y^۲\le ۱۰۰\,,\,۰\le y\,,\,۰\le x\,,$
$(x-۲)^۲+(y-۲)^۲\ge ۱$

۷.۶.۸ قرار داد. اگر C منحنی ژردان بوده و D برابر اجتماع C با درون C باشد. در این صورت، می‌نویسیم $C=\partial D$ و C را لبهٔ D می‌نامیم. اگر C منحنی ژردان با جهت مثبت استاندارد باشد، آنگاه بجای $\int_C \mathbf{F}\boldsymbol{\cdot}d\mathbf{r}$ از نماد $\oint_C \mathbf{F}\boldsymbol{\cdot}d\mathbf{r}$ استفاده می‌کنیم.

۸.۶.۸ قضیهٔ گرین. فرض کنید D مجموعه‌ای در صفحه است و منحنی ژردان C لبهٔ آن باشد و جهت بر C جهت مثبت استاندارد باشد. همچنین فرض کنید $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$ مشتقپذیر و بر D پیوسته باشد، در این صورت

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

اثبات: ابتدا قضیه را برای حالتی اثبات می‌کنیم که D هم x—منظم است و هم y—منظم. چنین مجموعه‌هایی را اختصاراً «منظم» می‌نامیم. بنابراین، فرض کنیم ناحیهٔ D در شکل ۱۱.۸—الف را به صورت زیر بتوان نوشت:

$$R\,:\,a\le x\le b\,,\,f(x)\le y\le g(x)$$

در این صورت مرز ناحیهٔ D را به صورت زیر می‌توان پیمایش نمود:

$$\begin{aligned}C\quad&=\quad AEB+BFA\\ -BFA\quad&:\quad r(x)=(x,f(x))\,;\,a\le x\le b\\ AEB\quad&:\quad r(x)=(x,g(x))\,;\,a\le x\le b\end{aligned}$$

به این ترتیب، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}\oint_C P\,dx &= \int_{AEB} P\,dx - \int_{-BFA} P\,dx\\ &= \int_a^b \Big\{P(x,g(x)) - P(x,f(x))\Big\}\,dx\\ &= \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right]dx\\ &= \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA\end{aligned}$$

به صورت مشابه، فرض کنیم D را به صورت زیر نیز بتوان نوشت:

$$R\,:\,c\le y\le d\,,\;m(y)\le x\le n(y)$$

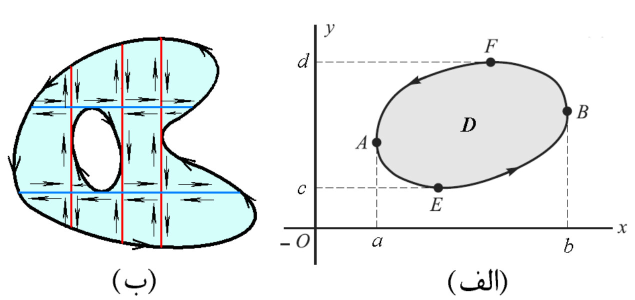
در این صورت مرز ناحیهٔ D را به صورت زیر می‌توان پیمایش نمود:

$$\begin{aligned}C &= EBF+FAE\\ EBF &: \quad r(y)=(n(y),y)\,;\;c\le y\le d\\ -FAE &: \quad r(y)=(m(y),y)\,;\;c\le y\le d\end{aligned}$$

به این ترتیب، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}\oint_C Q\,dy &= \int_{EBF} Q\,dy - \int_{-FAE} Q\,dy\\ &= \int_c^d \Big\{Q(n(y),y) - Q(m(y),y)\Big\}\,dy\\ &= \int_c^d \left[\int_{m(y)}^{n(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right]dy\\ &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA\end{aligned}$$

اکنون، با جمع دو عبارت بالا قضیهٔ گرین برای این نوع خاص از نواحی D اثبات می‌گردد.



شکل ۱۱.۸: الف) مجموعهٔ منظم
ب) درون هر منحنی ژردانی را به صورت اجتماعی
از مجموعه‌های منظم می‌توان نوشت

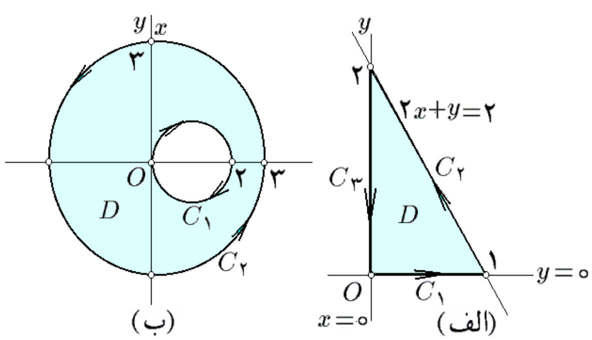
حال فرض کنید یک منحنی ژردان دلخواه C در اختیار باشد، و درون آن را D بنامیم. مجموعهٔ D را با استفاده از خطوط موازی x–محور و y–محور، به نواحی منظم تقسیم می‌کنیم:

$$D=\bigcup_{i=۱}^{n} D_i$$

به شکل ۱۱.۸—ب توجه شود. اکنون مرز C_i هر یک از این مجموعه‌ها D_i را طوری چهتدار می‌کنیم که جهت آنها با جهت انتخابی بر C سازگار باشد. در این صورت، در فصل مشترک هر دو تا از این مجموعه‌ها، دو منحنی وجود دارد که از حیث مجموعه یکی هستند، ولی از نظر جهت متفاوتند. بنابراین انتگرال میدان برداری $\mathbf{F}=(P,Q)$ بر اجتماع آنها صفر است. در نتیجه، $\oint_C P\,dx+Q\,dy$ با مجموع

$$\sum_{i=۱}^{n}\oint_{C_i} P\,dx+Q\,dy$$

برابر است، و درون هر یک از C_i ها مجموعه‌ای منظم می‌باشد. بنابراین، قضیهٔ گرین برای هر منحنی دلخواه درست است. □



شکل ۱۲.۸: الف) مثال ۹.۶.۸—۱.
ب) مثال ۹.۶.۸—۲.

۹.۶.۸ مثال. ۱) قضیهٔ گرین را برای میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x+y,x^۲+y^۲)}$ و مثلث C با رئوس $(\circ,\circ)$، $(۱,\circ)$ و $(\circ,۲)$ تحقیق کنید.

حل. توجه می‌کنیم که از نقاط $(\circ,\circ)$ و $(۱,\circ)$ خط $y=\circ$، از نقاط $(\circ,\circ)$ و $(\circ,۲)$ خط $x=\circ$ و از نقاط $(۱,\circ)$ و $(\circ,۲)$ خط $۲x+y=۲$ می‌گذرد (به شکل ۱۲.۸—الف توجه شود). به این ترتیب منحنی C (مثلث) یک منحنی ژردان است و جهت مثبت استاندارد بر آن همان جهت مثبت مثلثاتی است؛ یعنی، از $(\circ,\circ)$ به $(۱,\circ)$ و سپس $(\circ,۲)$. منحنی C را به صورت اجتماعی از سه پاره خط می‌نویسیم

$$\begin{aligned}&C=C_۱+C_۲+C_۳\\ &C_۱ \quad : \quad \mathbf{r}(t)=(۱-t)(\mathbf{0})+t(\mathbf{i}) \;\;;\;\; \circ\le t\le ۱\\ &C_۲ \quad : \quad \mathbf{r}(t)=(۱-t)(\mathbf{i})+t(۲\mathbf{j}) \;\;;\;\; \circ\le t\le ۱\\ &C_۳ \quad : \quad \mathbf{r}(t)=(۱-t)(۲\mathbf{j})+t(\mathbf{0}) \;\;;\;\; \circ\le t\le ۱\end{aligned}$$

در نتیجه، سمت چپ فرمول گرین عبارت است از

$$\begin{aligned}
\oint_C P\,dx+Q\,dy &= \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\\
&= \int_{C_۱}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}+\int_{C_۲}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}+\int_{C_۳}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\\
&= \int_۰^۱ \overrightarrow{(t,t^۲)}\bullet\overrightarrow{(۱,۰)}\,dt\\
&\quad+\int_۰^۱ \overrightarrow{(t+۱,۵t^۲-۲t+۱)}\bullet\overrightarrow{(-۱,۲)}\,dt\\
&\quad+\int_۰^۱ \overrightarrow{(۲-۲t,۴(t-۱)^۲)}\bullet\overrightarrow{(۰,-۲)}\,dt\\
&= \int_۰^۱ t\,dt+\int_۰^۱ (۱۰t^۲-۵t+۱)\,dt-۸\int_۰^۱ (t-۱)^۲\,dt\\
&= \int_۰^۱ (۲t^۲+۱۲t-۷)\,dt=\frac{-۱}{۳}
\end{aligned}$$

در مرحلهٔ بعدی، ابتدا درون C را مشخص می‌کنیم، روشن است که C لبهٔ مجموعهٔ

$$D\,:\,۰\le x\le ۱\,,\,۰\le y\le ۲(۱-x)$$

است. بنابراین، سمت راست فرمول گرین عبارت است از

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA &= \iint\limits_D (۲x-۱)\,dA\\
&= \int_۰^۱\left[\int_۰^{۲(۱-x)}(۲x-۱)\,dy\right]dx\\
&= \int_۰^۱\left[۲xy-y\right]_{y=۰}^{y=۲(۱-x)}dx\\
&= \int_۰^۱ ۲(۳x-۱-۲x^۲)\,dx=\frac{-۱}{۳}
\end{aligned}$$

مثال ۲) قضیهٔ گرین را برای میدان برداری

$$\mathbf{F}=\overrightarrow{(x-y^۲,x^۲-y)}$$

و منحنی C حاصل از اجتماع دوایر $x^۲+y^۲=۲x$ و نیز $x^۲+y^۲=۹$. تحقیق کنید.

حل. منحنی C ژردان است و درون آن ناحیهٔ بین دوایر می‌باشد، در نتیجه $x^۲+y^۲=۲x$ را در خلاف جهت مثلثاتی و همچنین $x^۲+y^۲=۹$ را در جهت مثلثاتی باید جهتدار کنیم. به شکل ۱۲.۸—ب توجه شود. در نتیجه منحنی C را به شکل مجموع $C=C_۱+C_۲$ نوشته، و به صورت زیر پارامتره می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
C_۱ &: \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۱+\sin t,\cos t)}\;;\;۰\le t\le ۲\pi\\
C_۲ &: \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۳\cos t,۳\sin t)}\;;\;۰\le t\le ۲\pi
\end{aligned}$$

در نتیجه، سمت راست فرمول گرین عبارت است از

$$\begin{aligned}
\oint_C P\,dx+Q\,dy &= \int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\\
&= \int_{C_۱}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}+\int_{C_۲}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\\
&= \int_۰^{۲\pi}\overrightarrow{(۱+\sin t-\cos^۲ t,-\cos t+۱+۲\sin t+\sin^۲ t)}\\
&\qquad\bullet\overrightarrow{(\cos t,-\sin t)}\,dt\\
&\quad+\int_۰^{۲\pi}\overrightarrow{(۳\cos t-۹\sin^۲ t,-۳\sin t+۹\cos^۲ t)}\\
&\qquad\bullet\overrightarrow{(-۳\sin t,۳\cos t)}\,dt\\
&= \int_۰^{۲\pi}(۲۶\cos^۳ t+۲۶\sin^۳ t-۱۶\sin t\cos t\\
&\qquad-۲\sin^۲ t+\cos t-\sin t)\,dt\\
&= -۲\int_۰^{۲\pi}\sin^۲ t=-۲\pi
\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ سمت راست فرمول گرین توجه می‌کنیم که C لبهٔ حلقهٔ $D\,:\,۲x\le x^۲+y^۲\le ۹$ است، که آنرا به صورت تفاضل $D=D_۱-D_۲$ می‌توان نوشت، که

$$D_۱\,:\,x^۲+y^۲\le ۹\qquad \text{و} \qquad D_۲\,:\,x^۲+y^۲\le ۲x$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA &= \iint\limits_D (۲x-(-۲y))\,dA\\
&= ۲\iint\limits_D (x+y)\,dA\\
&= ۲\iint\limits_{D_۱}(x+y)\,dA-۲\iint\limits_{D_۲}(x+y)\,dA\\
&= ۰-۲\iint\limits_{D_۲}x\,dA\\
&= -۲\int_۰^۲\left[\int_{-\sqrt{۲x-x^۲}}^{\sqrt{۲x-x^۲}}x\,dy\right]dx\\
&= -۲\int_۰^۲ ۲x\sqrt{۲x-x^۲}\,dx\\
&= -\frac{۲}{۳}\Big[(۲x^۲-x-۳)\sqrt{۲x-x^۲}+۳\arcsin(x-۱)\Big]_۰^۲\\
&= -۲\pi
\end{aligned}$$

مثال ۳) در صورتی که C قسمتی از دایرهٔ $x^۲+y^۲=ax$ باشد که از $(a,۰)$ در جهت مثلثاتی به سوی $(۰,۰)$ پیموده می‌شود، انتگرال $I=\int_C(e^x\sin y-۲y)\,dx+(e^x\cos y+x)\,dy$ را محاسبه کنید.

حل. برای اینکه بتوان از قضیهٔ گرین استفاده کرد، منحنی C را توسط پاره خط $C_۱$ از $(۰,۰)$ تا $(a,۰)$ به یک منحنی بسته تبدیل می‌کنیم. به شکل ۱۳.۸—الف توجه شود. در این صورت منحنی ژردان $C+C_۱$ لبهٔ نیم دایرهٔ $D\,:\,x^۲+y^۲\le ax,\,۰\le y$ است. بعلاوه منحنی $C_۱$ را به صورت زیر می‌توان پارامتره نمود:

$$C_۱\,:\,\mathbf{r}(t)=(۱-t)\overrightarrow{(۰,۰)}+t\overrightarrow{(a,۰)}\;;\;۰\le t\le ۱$$

در نتیجه، داریم

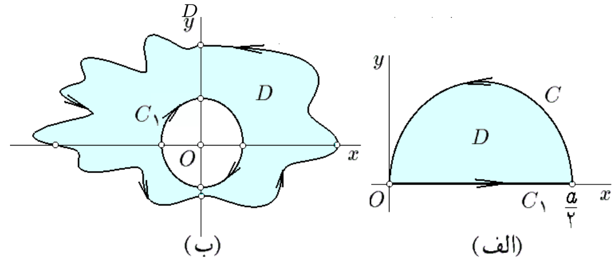
$$\begin{aligned} I &= \int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} \\ &= \oint_{C+C_۱} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} - \int_{C_۱} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} \\ &= \iint_D \Big\{ \big(e^x\cos y + ۱\big) - \big(e^x \cos y - ۲\big)\Big\}\, dA \\ &\qquad - \int_۰^۱ \mathbf{F}(at, ۰)\bullet \overrightarrow{(a, ۰)}\, dt \\ &= ۳\iint_D dA - \int_۰^۱ \overrightarrow{(۰, at+e^{at})}\bullet\overrightarrow{(a,۰)}\, dt \\ &= ۳\text{Area}(D) = \frac{۳}{۸}\pi a^۲ \end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنید C یک منحنی ژردان غیر گذرنده از مبداء مختصات است، مقدار انتگرال $I(C) = \oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^۲+y^۲}$ را بر اساس وضعیتهای مختلف C محاسبه کنید.

حل. دو حالت در نظر می‌گیریم: الف) مبداء در درون منحنی C قرار نداشته باشد، ب) مبداء در بیرون منحنی C قرار داشته باشد.

در حالت الف، به کمک قضیهٔ گرین، انتگرال $I(C)$ صفر است، زیرا اگر D درون C باشد، آنگاه چون $۰ \notin D$، بنابراین $\mathbf{F} = \big(-y/(x^۲+y^۲), x/(x^۲+y^۲)\big)$ بر D مشتق‌پذیر است و

$$\begin{aligned} I(C) &= \iint_D \left\{ \frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} - \frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}\right\} dA \\ &= \iint_D ۰\, dA = ۰ \end{aligned}$$



شکل ۱۳.۸: الف) مثال ۹.۶.۸—۳.
ب) مثال ۹.۶.۸—۴.

اما در حالت (ب)، چون C یک منحنی ژردان است، درون C مجموعه‌ای باز می‌باشد و در نتیجه، عددی مانند R می‌توان یافت، طوری که دایرهٔ به مرکز O و شعاع R کاملاً در درون D قرار می‌گیرد. اکنون منحنی ژردان $C+C_۱$ حاصل از اجتماع C و این دایره را در نظر می‌گیریم. دیگر o به درون $C+C_۱$ متعلق نیست و لذا به حالت (الف) باز می‌گردد. به شکل ۱۳.۸—ب توجه شود. در نتیجه $I(C)$ برابر است با

$$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \oint_{C+C_۱} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} - \int_{C_۱} \mathbf{F}\bullet dr$$

$$\begin{aligned} &= ۰ - \int_۰^{۲\pi} \mathbf{F}(R\cos t, R\sin t)\bullet\overrightarrow{(-R\sin t, R\cos t)}\, dt \\ &= -\int_۰^{۲\pi} \overrightarrow{\left(-\frac{۱}{R}\sin t, \frac{۱}{R}\cos t\right)}\bullet\overrightarrow{(-R\sin t, R\cos t)}\, dt \\ &= -\int_۰^{۲\pi} dt = -۲\pi \end{aligned}$$

۱۰.۶.۸ تمرین.

در ۱ تا ۸، قضیهٔ گرین را در مورد منحنی و میدان داده شده تحقیق کنید:

۱) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(۲xy - x^۲, x+y^۲)}$ و C منحنی بسته‌ای است که مرز ناحیهٔ محدود به دو سهمی $y = x^۲$ و $x = y^۲$ می‌باشد.

۲) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x^۲ - y, ۲x+y^۲)}$ و C مربعی است با اضلاع واقع بر خطوط $x = ۰$، $x = ۱$، $y = ۰$ و $y = ۱$.

۳) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x, x+y)}$ و $C : x^۲+۴y^۲ = ۴$.

۴) $\mathbf{F} = (x+y)^۲\mathbf{i} - (x^۲+y^۲)^۲\mathbf{j}$ و $C : |x|+|y| = ۱$.

۵) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(y^۲, x^۲)}$ و C مثلث با رئوس $(۰,۰)$، $(۲,۰)$ و $(۰,۳)$ است.

٦) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(y^۲, x^۲)}$ و C اجتماع دو دایرهٔ $x^۲+y^۲ = ۲x$ و $x^۲+y^۲ = ۹$ می‌باشد.

۷) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x^۲-y^۲, xy)}$ و C لبهٔ ناحیهٔ محدود به خطوط $x = ۰$، $y = ۰$، $x+y = ۱$ و $x+y = ۲$ می‌باشد.

۸) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x+y, y)}$ و C اجتماع مربع $\max\{|x|, |y|\} = ۲$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲ = ۱$ است.

در تمرینات ۹ تا ۱۳، با استفاده از قضیهٔ گرین از میدان برداری $\mathbf{F}$ بر منحنی داده شده انتگرال بگیرید:

۹) $\mathbf{F} = \sqrt{x^۲+y^۲}\mathbf{i} + (xy^۲ + y\ln(x+\sqrt{x^۲+y^۲}))\mathbf{j}$ و C مربعی است با رئوس $(۱,۰)$، $(۴,۰)$، $(۴,۵)$ و $(۱,۵)$.

۱۰) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(-y\sec^۲ x, \tan x)}$ و C مثلثی است با رئوس $(۰,۰)$، $(\pi/۴, \pi/۲)$ و $(\pi/۴, ۰)$.

۱۱) $\mathbf{F} = (y^۲ - x^۲y)\mathbf{i} + xy^۲\mathbf{j}$ و C مرز ربع دایرهٔ محدود به $x^۲+y^۲ = ۴$ واقع در ربع سوم می‌باشد.

۱۲) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(y^۲-x^۲, x^۲+y^۲)}$ و C مثلث محدود به خطوط $y = ۰$، $x = ۱$ و $y = x$ است.

۱۳) $\mathbf{F} = \arctan(y/x)\mathbf{i} + \ln(x^۲+y^۲)\mathbf{j}$ و C مرز ناحیهٔ $۱ \le r \le ۲$ و $۰ \le \theta \le \pi$ در صفحهٔ قطبی است.

۱۴) $\oint_C \sqrt{x^۲+y^۲}\,dx + y\left(x-\sqrt{x^۲+y^۲}\right)dy$ را در صورتی محاسبه کنید که D داخل دایرهٔ به مرکز مبداء و شعاع ۳ بوده و C لبهٔ آن باشد. آیا از قضیهٔ گرین می‌توان استفاده نمود؟ چرا؟

اکنون به ذکر کاربردی از قضیهٔ گرین می‌پردازیم:

۱۱.۶.۸ قضیه. اگر D ناحیه‌ای در صفحه باشد که درون منحنی ژردان C است، در این صورت مساحت D عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(D) &= \oint_C x\,dy\\ &= -\oint_C y\,dx\\ &= \frac{۱}{۲}\oint_C x\,dy - y\,dx\end{aligned}$$

۱۲.۶.۸ مثال. ۱) مساحت ناحیهٔ آستروئید شکل $x^{۲/۳}+y^{۲/۳}\leq a^{۲/۳}$ را محاسبه کنید.
حل. در اینجا منحنی ژردان C عبارت است از

$$x^{۲/۳}+y^{۲/۳}=a^{۲/۳}$$

که آن را بشکل $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(a\cos^۳ t, a\sin^۳ t)}$ می‌توان پارامتره نمود، که $۰\leq t\leq ۲\pi$. در نتیجه، مساحت خواسته شده برابر است با

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(D) &= \frac{۱}{۲}\oint_C x\,dy - y\,dx\\ &= \frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi}\left(a\cos^۳ t\right)\left(۳a\cos t\sin^۲ t\,dt\right)\\ &\qquad -\left(a\sin^۳ t\right)\left(-۳a\sin t\cos^۲ t\,dt\right)\\ &= \frac{۳}{۲}a^۲\int_۰^{۲\pi}\left(\sin^۲ t\cos^۲ t\right)dt\\ &= \frac{۳}{۸}a^۲\int_۰^{۲\pi}\sin^۲(۲t)\,dt = \frac{۳}{۸}\pi a^۲\end{aligned}$$

مثال ۲) مساحت محدود به منحنی $x^۳+y^۳=x^۲+y^۲$ و محورهای مختصاتی را بدست آورید.
حل. از تغییر پارامتر $y=xt$ استفاده می‌کنیم، پس از قرار دادن در معادلهٔ داده شده، بدست می آید $x=\frac{t^۲+۱}{t^۳+۱}$ و $y=\frac{t^۲+۱}{t^۳+۱}t$. چون معادله نسبت به x و y متقارن هستند، می‌توانیم فرض کنیم $x\leq ۰$ و $x\leq y\leq ۰$. یعنی $x\leq xt\leq ۰$ یا $۱\leq t\leq ۰$. در این صورت بجای مساحت ناحیهٔ خواسته شده

$$D\,:\,۰\leq x\,,\,۰\leq y\,,\,x^۳+y^۳\leq x^۲+y^۲$$

می‌توان مساحت نصف ناحیه

$$D_۱\,:\,۰\leq x\,,\,۰\leq y\leq x\,,\,x^۳+y^۳\leq x^۲+y^۲$$

را محاسبه کرده و حاصل را دو برابر نمود. مرز این مجموعه عبارت است از $C=C_۱+C_۲+C_۳$، که

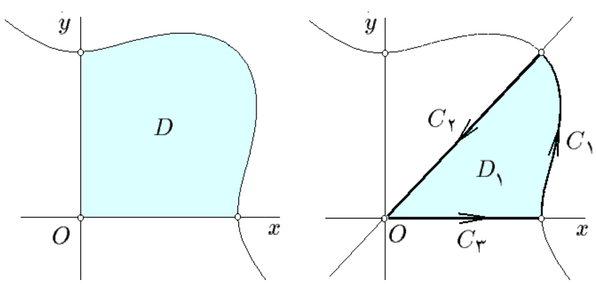
$$C_۱\,:\,\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{\left(\frac{t^۲+۱}{t^۳+۱},t\frac{t^۲+۱}{t^۳+۱}\right)}\,;\,۰\leq t\leq ۱$$

$$C_۲\,:\,\mathbf{r}(t)=(۱-t)\overrightarrow{(۱,۱)}+t\overrightarrow{(۰,۰)}\,;\,۰\leq t\leq ۱$$

$$C_۱\,:\,\mathbf{r}(t)=(۱-t)\overrightarrow{(۰,۰)}+t\overrightarrow{(۱,۰)}\,;\,۰\leq t\leq ۱$$

به شکل ۱۴.۸ توجه شود. بنابراین $\mathrm{Area}(D)$ برابر است با

$$\begin{aligned}&\int_۰^۱\frac{(t^۲+۱)^۲\,dt}{(t+۱)^۲(t^۲-t+۱)^۲}+\int_۰^۱ dt+\int_۰^۱ ۰\,dt\\ &= \int_۰^۱\Big\{\frac{۴}{۹(۹(t+۱)^۲)}+\frac{۵}{۹(t^۲-t+۱)}\\ &\qquad+\frac{t}{۳(t^۲-t+۱)^۲}\Big\}\,dt\\ &= \Big[\frac{-۴}{۹(t+۱)}+\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}\arctan\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۲t-۱)\right)\\ &\qquad+\frac{۲-t}{۹(t^۲-t+۱)}\Big]_۰^۱\\ &= \frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۲۴}\sqrt{۳}\pi\end{aligned}$$



شکل ۱۴.۸: قسمتی از ربع اول که توسط منحنی $x^۳+y^۳=x^۲+y^۲$ جدا شده است

۱۳.۶.۸ تمرین. به کمک قضیهٔ گرین، مساحت ناحیهٔ محدود به هر یک از منحنی‌های زیر را محاسبه کنید:

۱) $(x-x_۰)^۲/a^۲+(y-y_۰)^۲/b^۲=۱$

۲) $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۲\cos t-\cos ۲t, ۲\sin t-\sin ۲t)},\ ۰\leq t\leq ۲\pi$

۳) $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{\left(\frac{t^۲-۱}{t^۲+۱},\frac{t(t^۲-۱)}{t^۲+۱}\right)},\ -۱\leq t\leq ۱$

۴) $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۲\cos t-\sin ۲t, \sin t)}\ ۰\leq t\leq ۲\pi$

۵) $(x/a)^{۳/۲}+(y/b)^{۳/۲}=۱$

۶) $(x^۲+y^۲)^۲=a^۲(x^۲-y^۲)$

۷) $x^۳+y^۳=۳axy$

۸) $(x+y)^{n+m+۱}=ax^ny^m\,,\ ۰<a,n,m\in\mathbb{N}$

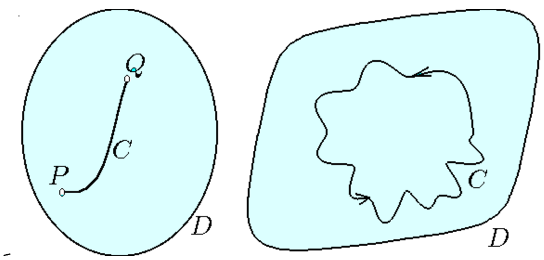
۹) $(x/a)^n + (y/b)^n = ۱\ ,\ ۰ < a, b,\ n \in \mathbb{N}$

۱۰) $(x/a)^n + (y/b)^n = (x/a)^{n-۱} + (y/b)^{n+۱}\ ,\ ۰ < a, b,\ n \in \mathbb{N}$

۱۱) فرض کنید دایره‌ای به شعاع r را درون دایره‌ای به شعاع $R = nr$ (که $n \in \mathbb{N}$) بدون لغزش چرخانیده‌ایم و منحنی C حاصل شده است. مساحت محدودبه این منحنی را محاسبه کنید. چنین منحنی‌ای را اپی سیکلوئید می‌نامند.

به کمک قضیهٔ گرین می‌توان قضیهٔ ۶.۴.۸ در خصوص ابقایی بودن میدانها را تعمیم داد. برای طرح این تعمیم به تعریف زیر نیاز است.

۱۴.۶.۸ تعریف. زیر مجموعهٔ D از صفحه را در صورتی **همبند راهی** گوئیم که اولاً هر دو نقطه از آنرا بتوان توسط یک منحنی بطول متناهی بهم متصل نمود و در ثانی درون هر منحنی ژردان واقع در D، تماماً در D قرار بگیرد. به شکل ۱۵.۸ توجه شود.



شکل ۱۵.۸: میدان ابقایی

۱۵.۶.۸ قضیه. (تعمیم قضیهٔ ۶.۴.۸) اگر منحنی C لبهٔ مجموعهٔ همبند راهی D باشد، در این صورت شرط لازم و کافی برای ابقایی بودن میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ آن است که رابطهٔ $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ بر $\mathrm{Int}(D)$ برقرار باشد.

بنابراین ممکن است D ستاره شکل نباشد ولی همبند راهی بوده و همچنان حکم قضیهٔ ۶.۴.۸ برقرار باشد.

۱۶.۶.۸ تعبیر فیزیکی قضیهٔ گرین ۱. فرض کنید میدان برداری $\mathbf{F}$ بر ناحیهٔ Ω از صفحه تعریف شده باشد. فرض کنیم $X_۰ \in \Omega$ نقطه‌ای دلخواه است و C یک دایرهٔ به شعاع R و مرکز در $X_۰$ است که تماماً در Ω قرار دارد. میزان شار گذرنده از C توسط $\mathbf{F}$ تقسیم بر مساحت داخل C را **واگرایی** $\mathbf{F}$ در $X_۰$ نسبت به C تعریف می‌کنیم، در حالی که R به صفر میل کند؛ به بیان دیگر

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{F}) &= \lim_{R\to ۰} \frac{\text{شار کل توسط } \mathbf{F} \text{ از } C}{\text{مساحت داخل } C}\\ &= ۲\lim_{R\to ۰}\left(\oint_C P\,dy - Q\,dx\right) \div \left(\oint_C -y\,dx + x\,dy\right)\end{aligned}$$

ثابت می‌شود که، اگر $\mathbf{F}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، در این صورت $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$. اکنون قضیهٔ گرین را به صورت زیر می‌توان تعبیر نمود:

۱۷.۶.۸ قضیه. شار گذرنده از منحنی ژردان C توسط میدان برداری $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ برابر است با انتگرال واگرایی میدان $\mathbf{F}$ بر ناحیهٔ D درون C:

$$\oint_C P\,dy - Q\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA$$

۱۸.۶.۸ تعبیر فیزیکی قضیهٔ گرین ۲. فرض کنید میدان برداری $\mathbf{F}$ بر ناحیهٔ Ω از صفحه تعریف شده باشد. فرض کنید $X_۰ \in \Omega$ نقطه‌ای دلخواه است و C یک دایرهٔ به شعاع R و مرکز در $X_۰$ است که تماماً در Ω قرار دارد. میزان شار گذرنده توسط $\mathbf{F}$ در امتداد منحنی C تقسیم بر مساحت ناحیهٔ داخل C را چرخش $\mathbf{F}$ نسبت به C هنگامی که R به صفر میل می‌کند را چرخش $\mathbf{F}$ در $X_۰$ نامیده و با نماد $\mathrm{Curl}(\mathbf{F})$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر

$$\begin{aligned}\mathrm{Curl}(\mathbf{F})\Big|_{X_۰} &:= \lim_{R\to ۰} \frac{\text{شار } \mathbf{F} \text{ در امتداد } C}{\text{مساحت داخل } C}\\ &= ۲\lim_{R\to ۰}\left(\oint_C P\,dx + Q\,dy\right) \div \left(\oint_C -y\,dx + x\,dy\right)\end{aligned}$$

ثابت می‌شود که اگر $\mathbf{F}$ دیفرانسیل باشد، در این صورت رابطهٔ $\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ برقرار است. اکنون قضیهٔ گرین را به صورت زیر می‌توان تعبیر نمود:

۱۹.۶.۸ قضیه. شار گذرنده توسط میدان برداری $\mathbf{F}$ در راستای منحنی ژردان C برابر است با انتگرال چرخش $\mathbf{F}$ بر ناحیهٔ D درون C:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

۷.۸ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل doc.pdf مراجعه شود.

۱.۷.۸ انتگرال خط نوع اول. فرض کنید میدان اسکالر $\mathrm{f(x, y, z)}$ و منحنی C که به صورت $\mathrm{r\ :=\ vector\ ([X, Y, Z])}$ بر حسب t پارامتره شده است، در اختیار باشد و نیز دامنهٔ t به صورت $\mathrm{a \le t \le b}$ باشد. در این صورت، برای جلوگیری از تکرار مطالب

تعریف می‌کنیم:

```
LinIntFirTyp:=proc(f,r,a,b) local INT ;
INT:=subs({x=r[1],y=r[2],z=r[3]},f) ;
INT:=linalg[norm](map(diff,r,t))*INT ;
return(int(INT,t=a..b)) ;
end :
```

اکنون برای محاسبهٔ انتگرال f بر C از دستور

```
LinIntFirTyp(f,r,a,b)
```

استفاده می‌کنیم.

۲.۷.۸ تعریف میدان برداری. برای تعریف میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(P,Q,R)}$ در محیط میپل از دستور

```
F:=vector([P,Q,R])
```

استفاده می‌کنیم.

۳.۷.۸ انتگرال خط نوع دوم. فرض کنید میدان برداری `F:=vector([P,Q,R])` با متغیرهای `[x,y,z]` و منحنی C که به صورت `r:=vector([X,Y,Z])` بر حسب t پارامتره شده است، در اختیار باشد و نیز دامنهٔ t به صورت $\mathrm{a}\leq \mathrm{t}\leq \mathrm{b}$ باشد. در این صورت، برای جلوگیری از تکرار مطالب تعریف می‌کنیم:

```
LinIntSecTyp:=proc(F,r,a,b) local INT ;
INT:=subs({x=r[1],y=r[2],z=r[3]},F) ;
INT:=linalg[dotprod](INT,map(diff,r,t)) ;
return(int(INT,t=a..b)) ;
end :
```

اکنون برای محاسبهٔ انتگرال F بر C از دستور

```
LinIntSecTyp(F,r,a,b)
```

استفاده می‌کنیم.

۴.۷.۸ یادداشت. در آدرس اینترنتی

http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm

مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.

فصل ۹

انتگرال سطح

به اختصار می‌توان گفت که انتگرال سطح تعمیم انتگرال خط از یک سو و انتگرال دو گانه از سوی دیگر است. به این معنی که انتگرال بر اشیاء دو بعدی منحنی الخط است! این انتگرال همانند انتگرال خط بر دو نوع است، بسته به این که از یک میدان اسکالر (تابع چند متغیره) انتگرال گرفته شود و یا از یک میدان برداری. ابتدا لازم است که مفهوم رویه را روشن کنیم.

۱.۹ رویه یا سطح

رویه یک شیء دو بعدی در فضای سه بعدی است. اغلب رویه‌ها تمام و یا قسمتی از سطح خارجی جسم صلب هستند. به طور کلی، رویه‌ها را به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌کنیم: رویه‌های جبری و رویه‌های پارامتری.

۱.۱.۹ تعریف. فرض کنید f تابعی سه متغیره است و S سطح تراز تابع f نظیر به عدد c است؛ به اختصار

$$S\,:\,f(x,y,z)=c$$

در صورتی S را **رویهٔ جبری** نامیم که f دیفرانسیلپذیر بوده و به ازاء هر $X\in S$ ای $f'(X)\neq\mathbf{0}$. چنانچه $f'(X)\neq\mathbf{0}$ به ازای برخی نقاط و یا منحنیهای واقع بر S برقرار نباشد، S را **رویهٔ جبری تکه‌ای** می‌نامیم. اجتماع چند رویهٔ جبری تکه‌ای را نیز **رویهٔ جبری تکه‌ای** می‌نامیم.

در قسمت ۹.۱۴.۵ مثالهایی از رویه‌های جبری تکه‌ای مطرح شده است. مثالهای زیر جنبه‌های کلی دارند و هر یک عملاً بینهایت نمونه دارد.

۲.۱.۹ نمودار تابعی از x و y. فرض کنید f تابعی دو متغیره بوده و D زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ f باشد. اگر f بر درون مجموعهٔ D مشتقپذیر باشد، آنگاه مجموعهٔ

$$S\,:\,z=f(x,y)\,;\,(x,y)\in D$$

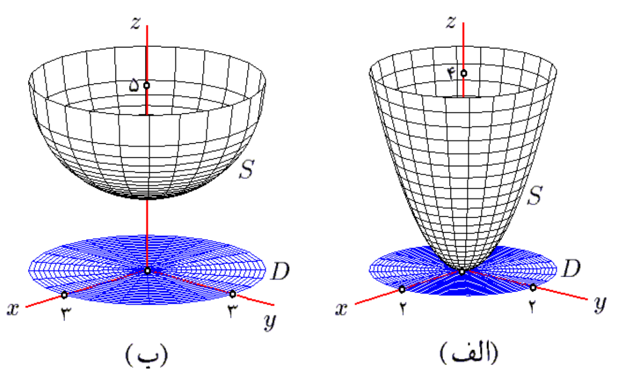
یک رویهٔ جبری تکه‌ای است. چرا که اگر فرض شود $g=f(x,y)-z$، آنگاه می‌توان نوشت $S\,:\,g(x,y,z)=0$ و $g'=\overrightarrow{(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y,-1)}\neq\mathbf{0}$. به عنوان نمونه، به موارد زیر توجه شود:

مثال ۱) فرض کنید $f=x^2+y^2$ و $D\,:\,x^2+y^2\leq 4$. در این صورت، رویهٔ $S\,:\,z=x^2+y^2\,;\,x^2+y^2\leq 4$ قسمتی از سهمی‌گون بیضوی $z=x^2+y^2$ است که تصویر آن بر xy–صفحه برابر مجموعهٔ D می‌باشد. به شکل ۱.۹—الف توجه شود.

مثال ۲) فرض کنید $f=5-\sqrt{9-x^2-y^2}$. در این صورت، دامنهٔ f دایرهٔ $D\,:\,x^2+y^2\leq 9$ است. بعلاوه، رویهٔ

$$S\,:\,z=5-\sqrt{9-x^2-y^2}\,;\,x^2+y^2\leq 9$$

نیمهٔ پائینی کرهٔ به مرکز $5\mathbf{k}$ و شعاع ۳ است. به شکل ۱.۹—ب توجه شود.



شکل ۱.۹: قسمت ۱ و ۲ از مثال ۲.۱.۹

۳.۱.۹ نمودار تابعی از x و z. فرض کنید f تابعی دو متغیره بوده و D زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ f باشد. اگر f بر درون

مجموعهٔ D مشتقپذیر باشد، آنگاه مجموعهٔ

$$S : y = f(x,z) \,;\, (x,z) \in D$$

یک رویهٔ جبری تکه‌ای است. چرا که اگر فرض شود $g = f(x,z) - y$، آنگاه می‌توان نوشت $S : g(x,y,z) = ۰$ و $g' = \overrightarrow{(\partial f/\partial x, -۱, \partial f/\partial z)} \neq \mathbf{0}$. به عنوان نمونه، به موارد زیر توجه شود:

مثال ۱) فرض کنید $f = x^۲ - z^۲$ و

$$D : -۱ \le x \le ۱ \,,\, -۱ \le z \le ۱$$

در این صورت رویهٔ

$$S : y = x^۲ - z^۲ \,,\, -۱ \le x \le ۱ \,,\, -۱ \le z \le ۱$$

قسمتی از سهمی‌گون هذلولوی $y = x^۲ - z^۲$ در راستای y–محور است که تصویر آن بر xz–صفحه D است. به شکل ۲.۹—الف توجه شود.

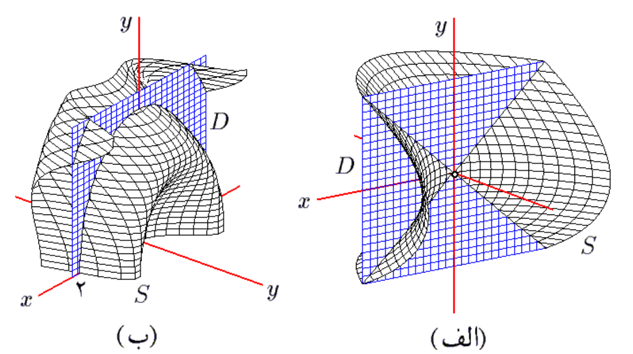
مثال ۲) فرض کنید $f = \sin(x^۲ + z^۲)$ و

$$D : -۲ \le x \le ۲ \,,\, ۰ \le z \le ۲$$

در این صورت

$$S : y = \sin(x^۲ + z^۲) \,,\, -۲ \le x \le ۲ \,,\, ۰ \le z \le ۲$$

یک رویهٔ جبری تکه‌ای است که تصویر آن بر xz–صفحه D می‌باشد. به شکل ۲.۹—ب توجه شود.



شکل ۲.۹: قسمت ۱ و ۲ از مثال ۳.۱.۹

۴.۱.۹ نمودار تابعی از y و z.

فرض کنید f تابعی دو متغیره بوده و D زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ f باشد. اگر f بر درون مجموعهٔ D مشتقپذیر باشد، آنگاه مجموعهٔ

$$S : x = f(y,z) \,;\, (y,z) \in D$$

یک رویهٔ جبری تکه‌ای است. چرا که اگر فرض شود $g = f(y,z) - x$، آنگاه می‌توان نوشت $S : g(x,y,z) = ۰$ و $g' = \overrightarrow{(-۱, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)} \neq \mathbf{0}$. به عنوان نمونه، به موارد زیر توجه شود:

مثال ۱) فرض کنید $f = \sqrt{۱ + y^۲ - z^۲}$ و

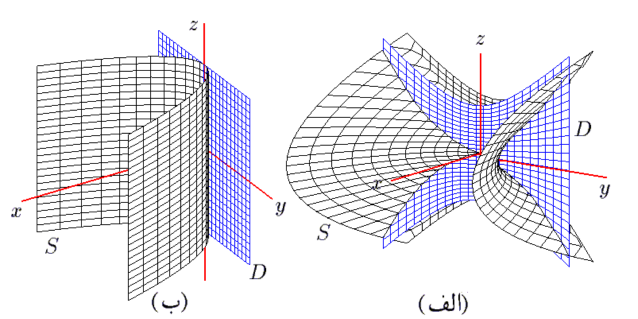
$$D : y^۲ \le ۴ \,,\, y^۲ - z^۲ \le ۱$$

در این صورت

$$S : x = \sqrt{۱ + y^۲ - z^۲} \,,\, y^۲ \le ۴ \,,\, y^۲ - z^۲ \le ۱$$

یک رویهٔ جبری تکه‌ای است که تصویر آن بر yz–صفحه هذلولی توپر D است. به شکل ۳.۹—الف توجه شود.

مثال ۲) فرض کنید $f = y^۲$ و $D : y^۲ \le ۱ \,,\, z^۲ \le ۱$. در این صورت، رویهٔ $S : x = y^۲ \,,\, y^۲ \le ۱ \,,\, z^۲ \le ۱$ قسمتی از استوانهٔ سهموی $x = y^۲$ است که تصویر آن بر xz–صفحه مستطیل D می‌باشد. به شکل ۳.۹—ب توجه شود.



شکل ۳.۹: قسمت ۱ و ۲ از مثال ۴.۱.۹

۵.۱.۹ سطح تراز یک تابع سه متغیره.

فرض کنید f تابعی سه متغیره و مشتقپذیر باشد و Ω زیر مجموعه‌ای از فضا باشد و نیز $S : f(x,y,z) = a \,,\, (x,y,z) \in \Omega$. بعلاوه، فرض کنید که به ازاء همه (بجز تعدادی متناهی از نقاط و یا تعداد متناهی از منحنیها در S) مشتق f مخالف صفر باشد. توجه شود که شرط $f' \neq \mathbf{0}$ می‌تواند در چند نقطه از S و یا نقاط بر چند منحنی از S برقرار نباشد. نقاطی که به ازاء آن شرط $f' \neq \mathbf{0}$ برقرار نباشد را **تکین** می‌نامند و سایر نقاط را **منظم** می‌گوئیم. در این صورت S یک رویهٔ تکه‌ای است و عبارت است از مقطع سطح تراز f در a با مجموعهٔ Ω. به عنوان نمونه به موارد زیر توجه شود:

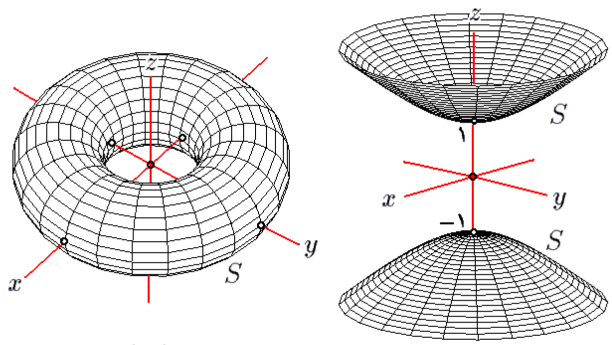
مثال ۱) فرض کنید $f = x^۲ + y^۲ - z^۲$، $\Omega : x^۲ + y^۲ + z^۲ \le ۹$ و $a = -۱$. در این صورت

$$\begin{aligned} S \;&:\; x^۲ + y^۲ - z^۲ = -۱ \,,\, x^۲ + y^۲ + z^۲ \le ۹ \\ &:\; -x^۲ - y^۲ + z^۲ = ۱ \,,\, x^۲ + y^۲ \le ۴ \end{aligned}$$

که قسمتی از یک هذلولی‌گون دو پارچهٔ به مرکز مبداء و محور تقارن z–محور است که تصویر آن بر xy–صفحه دایرهٔ $x^۲ + y^۲ \le ۴$ می‌باشد. به شکل ۴.۹—الف توجه شود.

مثال ۲) فرض کنید $f = (\sqrt{x^۲ + y^۲} - ۲)^۲ + z^۲$، $\Omega = \mathbb{R}^۳$ و $a = ۱$. در این صورت $S : f(x,y) = a$ رویه‌ای جبری به شکل یک تیوب است که از دوران دایره‌ای به شعاع یک و مرکز

در $(۲, ۰, ۰)$ واقع در xy−صفحه حول z−محور حاصل می‌شود. به شکل ۴.۹−ب توجه شود.



(ب) (الف)

شکل ۴.۹: قسمت ۱ و ۲ از مثال ۵.۱.۹

۶.۱.۹ تمرین. نشان دهید که هر یک از موارد زیر یک رویهٔ جبری تکه‌ای است. سعی شود شکل رویه ترسیم گردد. برای این کار از میپل می‌توانید کمک بگیرید:

۱) $z = xy, -۱ \le x \le ۱, -۱ \le y \le ۱$

۲) $y = \sqrt{x^۲ + z^۲}, y \le ۲, ۰ \le x$

۳) $(x^۲ + y^۲)^۲ = x^۲ - y^۲\,,\, z^۲ \le ۱$

۴) $x^۲ + y^۲ = ۲z\,,\, -۱ \le y \le ۲$

۵) $z = x^۲ + ۴y^۲\,,\, z \le ۴$ ۶) $y = x + z\,,\, x^۲ + z^۲ \le ۴$

۷) $x = ۱ + \sqrt{۱ - y^۲ - z^۲}$ ۸) $x = z^۲\,,\, x \le ۱\,,\, y^۲ \le ۴$

۹) $x^۲ + y^۲ + ۴z^۲ = ۴$ ۱۰) $xyz = ۳۰$

۱۱) $x^{۳/۲} + y^{۳/۲} + z^{۳/۲} = ۱$ ۱۲) $|x| + |y| + |z| = ۱$

۱۳) $(x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲ = x^۲ y$ ۱۴) $\max\{|x|, |y|, |z|\} = ۲$

۱۵) $x^۲ + y^۲ + z^۲ = xyz$ ۱۶) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = ۱$

در برخی از موارد امکان تعریف یک رویه به کمک معادله وجود ندارد. اغلب در چنین مواردی از رویه‌های پارامتری استفاده می‌شود. قبل از آن به تعریف نقشه نیاز داریم.

۷.۱.۹ تعریف. منظور از **نقشه**، تابعی است به شکل $\mathbf{r} : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۳$، که اگر دامنه‌اش را D بنامیم و بنویسیم $\mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{(x(u, v), y(u, v), z(u, v))}$، آنگاه

۱) دامنهٔ D بسته و کراندار باشد.

۲) $\mathbf{r}$ بر D پیوسته باشد. یعنی، توابع دو متغیرهٔ x، y و z بر D پیوسته باشند.

۳) $\mathbf{r}$ بر $\mathrm{Int}D$ هموار باشد. یعنی، توابع دو متغیرهٔ x، y و z بر $\mathrm{Int}D$ مشتق پذیر باشند.

۴) اگر تعریف کنیم

$$\mathbf{r}_u = \overrightarrow{\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)} \qquad \mathbf{r}_v = \overrightarrow{\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)}$$

آنگاه به ازای هر $(u, v) \in \mathrm{Int}D$ ای داشته باشیم $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \neq \mathbf{0}$. در این حالت، اصطلاحاً گفته می‌شود که $\mathbf{r}$ بر $\mathrm{Int}D$ منظم است.

۵) $\mathbf{r}$ بر $\mathrm{Int}D$ یکبیک باشد.

۸.۱.۹ تعریف. مجموعه‌ای که برابر اجتماع برد یک یا چند نقشه باشد، **رویهٔ پارامتری** نامیده می‌شود. مجموعهٔ نقشه‌هایی که برد آنها رویهٔ S را می‌پوشاند، یک **اطلس برای** S نامیده می‌شود. عمل تعیین اطلس برای یک رویه را **پارامتره کردن** S می‌نامیم.

۹.۱.۹ مثال. ۱) فرض کنید Ω مخروط محدود به رویه‌های $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $z = ۲$ بوده و S سطح خارجی آن باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که S یک رویه است (شکل ۵.۹−الف).

حل. برای این منظور S را به دو قطعهٔ $S_۱$ و $S_۲$ تقسیم می‌کنیم. اگر $D : x^۲ + y^۲ \le ۴$ آنگاه

$$\begin{aligned} S_۲ &: \quad z = ۲\,;\, (x, y) \in D \\ S_۱ &: \quad z = \sqrt{x^۲ + y^۲}\,;\, (x, y) \in D \end{aligned}$$

روشن است که $S_۱$ برد نقشهٔ $\mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{\left(u, v, \sqrt{u^۲ + v^۲}\right)}$ و $S_۲$ برد نقشهٔ $\mathbf{h}(u, v) = \overrightarrow{(u, v, ۲)}$ می‌باشد، که در هر دو $(u, v) \in D$. در این صورت $\mathcal{A} = \{\mathbf{r}, \mathbf{h}\}$ اطلسی برای S می‌باشد. البته انتخاب نقشه سلیقه‌ای است. مثلاً بجای $\mathbf{r}$ می‌توان از نقشهٔ دیگری استفاده کرد: $\mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{(u\cos v, u\sin v, u)}$ که در آن $۰ \le u \le ۲\,,\, ۰ \le v \le ۲\pi$.

مثال ۲) فرض کنید S سطح خارجی مکعب

$$\Omega : ۰ \le x \le ۱, ۰ \le y \le ۱, ۰ \le z \le ۱$$

است. می‌خواهیم نشان دهیم که S یک رویه است (به شکل ۵.۹ توجه شود). برای این منظور، توجه می‌کنیم که Ω به شش صفحهٔ $x = ۰$، $y = ۰$، $z = ۰$، $x = ۱$، $y = ۱$ و $z = ۱$ محدود است. بر همین اساس S را به شش مربع تقسیم می‌کنیم: که $S = S_۱ \cup S_۲ \cup S_۳ \cup S_۴ \cup S_۵ \cup S_۶$

$$S_۱ : x = ۱\,;\, ۰ \le y \le ۱, ۰ \le z \le ۱$$

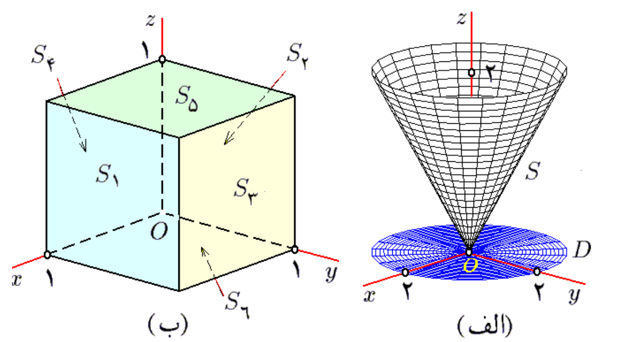
$$S_۲ : x = ۰\,;\, ۰ \le y \le ۱, ۰ \le z \le ۱$$

$$S_۳ : y = ۱\,;\, ۰ \le x \le ۱, ۰ \le z \le ۱$$

$$S_4 : y = 0 \; ; \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le z \le 1$$

$$S_5 : z = 1 \; ; \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1$$

$$S_6 : z = 0 \; ; \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1$$



شکل ۵.۹: قسمت ۱ و ۲ از مثال ۹.۱.۹

هر یک از آنها را به شکل زیر می‌توان پارامتره نمود:

$$S_1 : \mathbf{r}_1(u,v) = \overrightarrow{(1, u, v)} \qquad S_2 : \mathbf{r}_2(u,v) = \overrightarrow{(0, u, v)}$$

$$S_3 : \mathbf{r}_3(u,v) = \overrightarrow{(u, 1, v)} \qquad S_4 : \mathbf{r}_4(u,v) = \overrightarrow{(u, 0, v)}$$

$$S_5 : \mathbf{r}_5(u,v) = \overrightarrow{(u, v, 1)} \qquad S_6 : \mathbf{r}_6(u,v) = \overrightarrow{(u, v, 0)}$$

که در همهٔ آنها $0 \le v \le 1$ و $0 \le u \le 1$. بنابراین $\mathcal{A} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6\}$ یک اطلس برای S می‌باشد.

مثال ۳) فرض کنید S سطح خارجی استوانهٔ محدود به رویهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و صفحات $z = 0$ و $z = 9$ می‌باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که S یک رویه است. برای این منظور S را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \qquad S_1 : z = 9; \; x^2 + y^2 \le 4$$

$$S_2 : z = 0; \; x^2 + y^2 \le 4 \qquad S_3 : x^2 + y^2 = 4; \; 0 \le z \le 9$$

برای این سه مجموعه، نقشه‌هایی به شرح زیر طراحی می‌کنیم (به شکل ۶.۹—الف):

$$\mathbf{r}_1(u,v) = \overrightarrow{(u, v, 9)} \, ; \; u^2 + v^2 \le 4$$

$$\mathbf{r}_2(u,v) = \overrightarrow{(u, v, 0)} \, ; \; u^2 + v^2 \le 4$$

$$\mathbf{r}_3(u,v) = \overrightarrow{(2\cos u, 2\sin u, v)} \, ; \; 0 \le u \le 2\pi \, , \; 0 \le v \le 9$$

در این صورت $\mathcal{A} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$ اطلسی برای S است.

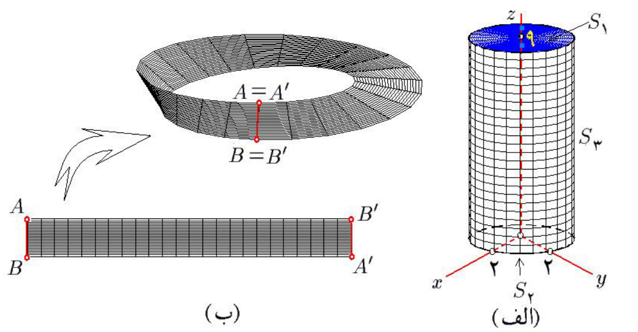
مثال ۴) نوار موبیوس . اگر نوار کاغذی مستطیل شکل بلندی در اختیار باشد و آنرا یک نیم دور چرخانده و سپس دو سر آنرا بهم وصل کنیم، شکلی حاصل می‌گردد که بنام نوار موبیوس معروف است (به شکل ۶.۹—ب توجه شود). یک روش برای پارامتره کردن آن، استفاده از نقشهٔ زیر است:

$$\mathbf{r}(u,v) = \{2 - v\sin(u/2)\} \cos u \, \mathbf{i}$$

$$+ \{2 - v\sin(u/2)\} \sin u \, \mathbf{j} + v\cos(u/2) \, \mathbf{k}$$

$$D : 0 \le u \le 2\pi \, , \; -1 \le v \le 1$$

این رویه جهت ناپذیر است! به این معنی که تنها یک رو دارد (چرا؟). به ۹.۴.۹ توجه شود.



شکل ۶.۹: قسمت ۳ و ۴ از مثال ۹.۱.۹

مثال ۵) فرض کنید $S : z = x^2 + y^2$. در این صورت $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ و $f' = \overrightarrow{(-2x, -2y, 1)}$ که همواره مخالف صفر است. پس S رویه است. این رویه را قبلاً سهمی‌گون بیضوی نامیده‌ایم، که رویه‌ای بی‌کران (یعنی، نامحدود) است (به شکل ۷.۹—الف توجه شود). با فرض $x = u\cos v$ و $y = u\sin v$ نتیجه می‌گیریم که $z = u^2$. بنابراین، اگر فرض شود $D : 0 \le u \, , \; 0 \le v \le 2\pi$، آنگاه

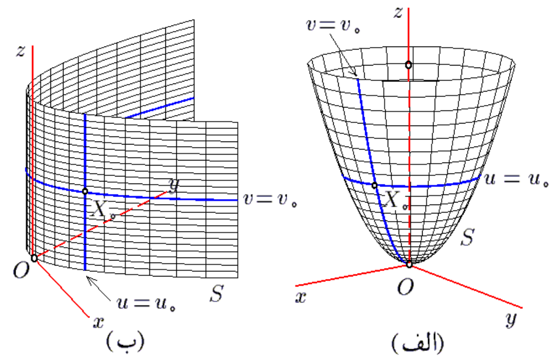
$$S : \mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{(u\cos v, u\sin v, u^2)} \; ; \; (u,v) \in D$$

به این ترتیب، رویهٔ S **پارامتره** شد، یعنی به شکل پارامتری نوشته شد.

مثال ۶) فرض کنید $S : y = x^2$. در این صورت، داریم $f(x,y,z) = y - x^2$ و $f' = \overrightarrow{(-2x, 1, 0)}$ که همیشه مخالف صفر است. بنابراین استوانهٔ سهموی S رویه است. این رویه را به صورت $S : \mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{(u, u^2, v)} \, ; \; (u,v) \in D$ زیر می‌توان پارامتره نمود (به شکل ۷.۹—ب توجه شود). برای یافتن معادلهٔ صفحهٔ مماس بر S در نقطهٔ $X_\circ = (-2, 4, 3)$، بردار نرمال

$$\mathbf{n} = f'(X_\circ) = \overrightarrow{(-2x, 1, 0)}\Big|_{X_\circ} = \overrightarrow{(4, 1, 0)}$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر $4x + y + 4 = 0$ است. معادلهٔ خط عمود بر S در نقطهٔ $X_\circ$ نیز عبارت است از $\frac{x+2}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-0}{0}$ یا ساده‌تر «$x + 18 = 4y \, , \; z = 0$».



شکل ۷.۹: قسمت ۵ و ۶ از مثال ۹.۱.۹

مثال ۷) فرض کنید $S: x^2+y^2+z^2=9$. در این صورت $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ و $f'=\overrightarrow{(2x,2y,2z)}$. پس شرط «$X\in S$ و $f'(X)=0$» به معنی «$x=y=z=0$ و $x^2+y^2+z^2=9$» است، که تناقض می‌باشد. پس کرهٔ S یک رویهٔ کراندار است. با فرض $x=3\cos u\cos v$، $y=3\cos u\sin u$ و $z=3\sin u$ (مختصات کروی با $\rho=3$، $\theta=u$ و $\varphi=v$) می‌توان نوشت:

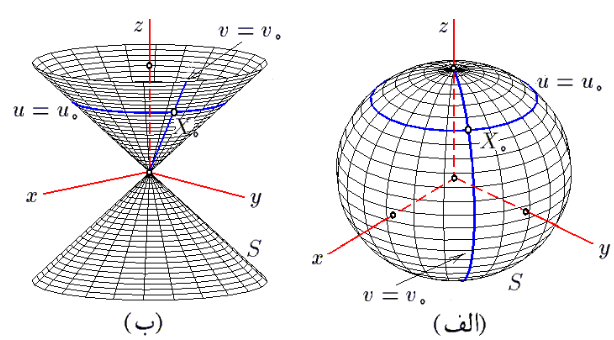
$$S:\begin{cases}\mathbf{r}(u,v)=\overrightarrow{(3\cos u\cos v,3\cos u\sin v,3\sin u)}\\(u,v)\in D\end{cases}$$

که در آن $D:-\pi/2\le u\le\pi/2,\ 0\le v\le 2\pi$. به شکل ۸.۹—الف توجه شود.

مثال ۸) فرض کنید $S: z^2=x^2+y^2$. در این صورت $f(x,y,z)=z^2-x^2-y^2$ و بنابراین $f'=\overrightarrow{(-2x,-2y,2z)}$، که بر S تنها در $(0,0,0)$ صفر می‌گردد. پس S یک رویهٔ تکه‌ای می‌باشد. با فرض $x=u\cos v$، $y=u\sin u$ و $z=u$ مخروط S را به شکل

$$S:\begin{cases}\mathbf{r}(u,v)=\overrightarrow{(u\cos v,u\sin v,u)}\\(u,v)\in D\end{cases}$$

می‌توان پارامتره نمود (مختصات استوانه‌ای با $r=z=u$ و $\theta=v$) که در آن دامنه $D: u\in\mathbb{R},\ 0\le v\le 2\pi$ است. به شکل ۸.۹—ب توجه شود.



شکل ۸.۹: قسمت ۷ و ۸ از مثال ۹.۱.۹

۱۰.۱.۹ تمرین.

در هر مورد، S سطح خارجی Ω است. اطلسی برای S بیابید:

۱) $\Omega: x^2+y^2+z^2=2x$

۲) $\Omega: x^2+4y^2+z^2=4$

۳) $\Omega: x^2+y^2=1,\ x^2+z^2=1$

۴) $\Omega: x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=1$

۵) $\Omega: |x|+|y|+|z|=1$

۶) $\Omega: x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=1$

۷) $\Omega: x^2+y^2=1,\ z=0,\ x+y+z=1$

۸) $\Omega: x=y^2, y=x^2,\ z=0,\ z=1$

۹) $\Omega: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$

۱۰) $\Omega: x=0,\ x=1,\ y=z^2,\ z=1$

۱۱.۱.۹ قضیه. گیریم $S:\mathbf{r}(u,v);(u,v)\in D$، $(u_\circ,v_\circ)\in \mathrm{Int}D$ و $X_\circ=\mathbf{r}(u_\circ,v_\circ)$. در این صورت، بردارهای $\mathbf{r}_u(u_\circ,v_\circ)$ و $\mathbf{r}_v(u_\circ,v_\circ)$ در نقطهٔ $X_\circ$ به S مماسند و لذا $\mathbf{r}_u(u_\circ,v_\circ)\times\mathbf{r}_v(u_\circ,v_\circ)$ در نقطهٔ $X_\circ$ به S عمود می‌باشد.

اثبات: منحنی $\mathbf{h}(t)=\mathbf{r}(t,v_\circ)$ واقع بر S را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\mathbf{h}(u_\circ)=\mathbf{r}(u_\circ,v_\circ),\qquad\qquad \mathbf{h}'(u_\circ)=\mathbf{r}_u(u_\circ,v_\circ).$$

بنابراین، $\mathbf{r}_u(u_\circ,v_\circ)$ به S در $X_\circ=\mathbf{r}(u_\circ,v_\circ)$ مماس است. به صورت مشابه، $\mathbf{r}_v(u_\circ,v_\circ)$ به S در $X_\circ=\mathbf{r}(u_\circ,v_\circ)$ مماس است. مطلب سوم، بدیهی است. □

۱۲.۱.۹ نتیجه. گیریم $S: f(x,y,z)=c$ و $X_\circ\in S$ نقطه‌ای منظم است (یعنی، $f'(X_\circ)\neq\mathbf{0}$). در این صورت، $f'(X_\circ)$ به S در $X_\circ$ قائم است.

اثبات: کافی است معادلهٔ معرف رویه $f(x,y,x)=c$ را مثلاً بر حسب z حل نمود: $z=h(x,y)$. سپس، رویه S را به صورت $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,h(x,y))$ پارامتره می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x(x_\circ,y_\circ)&=\overrightarrow{(1,0,h_x(X_\circ))}=\overrightarrow{\left(1,0,-\frac{f_z}{f_x}\Big|_{X_\circ}\right)},\\ \mathbf{r}_y(x_\circ,y_\circ)&=\overrightarrow{(0,1,h_y(X_\circ))}=\overrightarrow{\left(0,1,-\frac{f_z}{f_y}\Big|_{X_\circ}\right)}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x(x_\circ,y_\circ)\times\mathbf{r}_y(x_\circ,y_\circ)&=\overrightarrow{\left(\frac{f_x}{f_z}\Big|_{X_\circ},\frac{f_y}{f_z}\Big|_{X_\circ},1\right)}\\&=\frac{1}{f_z(X_\circ)}f'(X_\circ)\end{aligned}$$

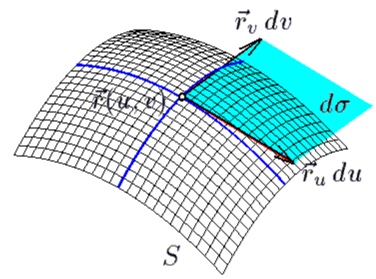
که موازی بردار $f'(X_\circ)$ است. اکنون، حکم از قضیهٔ ۱۱.۱.۹ نتیجه می‌گردد. □

مثالهایی در خصوص کاربرد این قضیه و نتیجهٔ آن، در بخش ۱۴ از فصل ۵ آورده شده است.

۲.۹ انتگرال سطح نوع اول

انتگرال سطح نوع اول، انتگرال یک میدان اسکالر بر یک رویه (یا سطح) است. این انتگرال از سویی تعمیم انتگرال خط نوع اول است و از سوی دیگر تعمیم مفهوم انتگرال دو گانه می‌باشد. برای تعریف این انتگرال به مفهوم المان مساحت نیاز داریم، که به تشریح آن می‌پردازیم.

۱.۲.۹ تعریف. فرض کنید S یک رویهٔ پارامتره شده توسط نقشهٔ $\mathbf{r}(u,v)$ باشد، در این صورت **المان مساحت** S را بشکل $d\sigma = \|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\, dudv$ تعریف می‌کنیم. به اختصار می‌توان گفت که $d\sigma$ مساحت متوازی الاضلاع کوچک مماس بر S در نقطهٔ $\mathbf{r}(u,v)$ است که دو ضلع آن عبارت از $\mathbf{r}_u\, du$ و $\mathbf{r}_u\, dv$ هستند (به شکل ۹.۹ توجه شود).



شکل ۹.۹: المان مساحت یک رویه

۲.۲.۹ قضیه. المان مساحت را در مورد خاص به شکل زیر می‌توان محاسبه نمود:

الف) اگر $S\,:\, f(x,y,z)=۰$، آنگاه
$$d\sigma = \frac{\|f'\|}{|f_z|}\, dxdy = \frac{\|f'\|}{|f_y|}\, dxdz = \frac{\|f'\|}{|f_x|}\, dydz$$

ب) اگر $S\,:\, z=f(x,y)$ آنگاه
$$d\sigma = \sqrt{۱+(f_x)^۲+(f_y)^۲}\, dxdy$$

ج) اگر $S\,:\, y=f(x,z)$ آنگاه
$$d\sigma = \sqrt{۱+(f_x)^۲+(f_z)^۲}\, dxdz$$

د) اگر $S\,:\, x=f(y,z)$ آنگاه
$$d\sigma = \sqrt{۱+(f_y)^۲+(f_z)^۲}\, dydz$$

اثبات: چنانچه معادلهٔ معرف رویه $f(x,y,x)=c$ را بر حسب z حل کنیم: $z=h(x,y)$. رویهٔ S را به صورت

$$\mathbf{r}(x,y) = \overrightarrow{(x,y,h(x,y))}$$

می‌توان پارامتره نمود. در نتیجه

$$\begin{aligned} d\sigma &= \|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y\|\, dxdy = \left\|\overrightarrow{(۱,۰,h_x)}\times\overrightarrow{(۰,۱,h_y)}\right\| dxdy \\ &= \left\|\overrightarrow{(-h_x,-h_y,۱)}\right\| dxdy = \sqrt{۱+h_x^۲+h_y^۲}\, dxdy \\ &= \sqrt{۱+\left(-\frac{f_x}{f_z}\right)^۲+\left(-\frac{f_y}{f_z}\right)^۲}\, dxdy \\ &= \frac{۱}{|f_z|}\sqrt{f_x^۲+f_y^۲+f_z^۲}\, dxdy = \frac{۱}{|f_z|}\|f'(X_۰)\|\, dxdy \end{aligned}$$

سایر موارد، به صورت مشابه قابل اثباتند. □

۳.۲.۹ تعریف. فرض کنید $S\,:\,\mathbf{r}(u,v)\in D$ رویه‌ای پارامتره شده باشد و میدان اسکالر ($=$ تابع سه متغیرهٔ) $f(x,y,z)$ بر سراسر آن تعریف شده بود. در این صورت، انتگرال سطح نوع اول f بر S را به شکل

$$\iint\limits_{(S)} f\, d\sigma := \iint\limits_{D} f\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\, \|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\, dudv$$

تعریف می‌کنیم. به بیان دیگر، این مقدار برابر ظرفیت کل رویهٔ S است، زیرا اگر قطعهٔ کوچک با رئوس $\mathbf{r}(u,v)$، $\mathbf{r}(u+du,v)$، $\mathbf{r}(u,v+dv)$ و $\mathbf{r}(u+du,v+dv)$ را بر S در نظر بگیریم، آنگاه بجای آن متوازی الاضلاع با یک رأس در $\mathbf{r}(u,v)$ و اضلاع $\mathbf{r}_u\, du$ و $\mathbf{r}_v\, dv$ را می‌توان در نظر گرفت و نیز فرض نمود که f بر آن ثابت و برابر $f(\mathbf{r}(u,v))$ می‌باشد. در نتیجه، مقدار ظرفیت این قطعهٔ کوچک از S برابر است با حاصلضرب مساحت متوازی الاضلاع در مقدار تابع f در نقطهٔ $\mathbf{r}(u,v)$. اما، مساحت این متوازی الاضلاع برابر اندازهٔ حاصلضرب خارجی بردارهای سازندهٔ آن می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} dQ &= \|\mathbf{r}_u du\times\mathbf{r}_v dv\|\; f\big(\mathbf{r}(u,v)\big) \\ &= f\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\, \|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\, dudv \end{aligned}$$

چنانچه رویهٔ S از چند قسمت تشکیل شده باشد، ابتدا انتگرال f را بر هر یک از آنها جدا گانه محاسبه نموده و سپس اعداد بدست آمده را جمع می‌زنیم.

۴.۲.۹ قضیه. فرض کنید S رویه و h تابعی سه متغیره باشد که بر S تعریف می‌گردد. در این صورت

الف) اگر $S\,:\, f(x,y,z(x,y))=a\,,\,(x,y)\in D$، آنگاه
$$\iint\limits_{(S)} h\, d\sigma = \iint\limits_{D} h\big(x,y,z(x,y)\big)\,\frac{\|f'\|}{|f_z|}\, dxdy$$

ب) اگر $S\,:\, f(x,y(x,z),z)=a\,,\,(x,z)\in D$، آنگاه
$$\iint\limits_{(S)} h\, d\sigma = \iint\limits_{D} h\big(x,y(x,z),z\big)\,\frac{\|f'\|}{|f_y|}\, dxdz$$

ج) اگر $S\,:\, f(x(y,z),y,z)=a\,,\,(y,z)\in D$، آنگاه
$$\iint\limits_{(S)} h\, d\sigma = \iint\limits_{D} h\big(x(y,z),y,z\big)\,\frac{\|f'\|}{|f_x|}\, dydz$$

د) اگر $S\,:\,z=f(x,y)\,,\,(x,y)\in D$، آنگاه

$$\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma=\iint\limits_{D} h\big(x,y,f(x,y)\big)\sqrt{۱+(f_x)^۲+(f_y)^۲}\,dxdy$$

هـ) اگر $S\,:\,y=f(x,z)\,,\,(x,z)\in D$، آنگاه

$$\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma=\iint\limits_{D} h\big(x,f(x,z),z\big)\sqrt{۱+(f_x)^۲+(f_z)^۲}\,dxdz$$

و) اگر $S\,:\,x=f(y,z)\,,\,(y,z)\in D$، آنگاه

$$\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma=\iint\limits_{D} h\big(f(y,z),y,z\big)\sqrt{۱+(f_y)^۲+(f_z)^۲}\,dydz$$

اثبات: کافی است از تعریف انتگرال سطح و قضیهٔ ۲.۲.۹ استفاده شود. □

۵.۲.۹ مثال. ۱) در صورتی که S نیمهٔ بالایی کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ باشد، انتگرال $h=۱۵z^۲\sqrt{x^۲+y^۲}$ را بر S محاسبه کنید.

حل. در این مسأله تابع معرف S عبارت از $f=x^۲+y^۲+z^۲$ است، در نتیجه

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{\|f'\|}{|f_z|}\,dxdy=\frac{\|\overrightarrow{(۲x,۲y,۲z)}\|}{|۲z|}\,dxdy\\ &= \frac{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}{z}\,dxdy=\frac{۱}{z}\,dxdy\end{aligned}$$

از طرفی با حل معادلهٔ $f=۱$ بر حسب z، نتیجه می‌گیریم $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ که تصویر آن بر xy–صفحه عبارت است از $D\,:\,x^۲+y^۲\le ۱$. در نتیجه، بنابه قسمت (الف) از ۴.۲.۹ داریم

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma &= \iint\limits_{D} ۱۵z^۲\sqrt{x^۲+y^۲}\,\frac{۱}{z}\,dxdy\\ &= ۱۵\iint\limits_{D}(۱-x^۲-y^۲)\sqrt{x^۲+y^۲}\,dA\\ &= ۱۵\iint\limits_{D'}(۱-r^۲)rr\,dA'\\ &= ۱۵\left(\int_۰^{۲\pi}d\theta\right)\left(\int_۰^۱(۱-r^۲)r^۲\,dr\right)\\ &= ۱۵(۲\pi)\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}\right)=۴\pi\end{aligned}$$

مثال ۲) در صورتی که S قسمتی از سهمی گون بیضوی $y=x^۲+z^۲$ باشد که $۰\le x$ و $y\le ۲$. انتگرال تابع $h=xz+y$ بر S را محاسبه کنید.

حل. تابع معرف رویهٔ S عبارت است از $f=x^۲+z^۲-y$. در نتیجه،

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{\|f'\|}{|f_y|}\,dxdz=\frac{\|\overrightarrow{(۲x,-۱,۲z)}\|}{|-۱|}\,dxdz\\ &= \sqrt{۴x^۲+۴z^۲+۱}\,dxdz\end{aligned}$$

با توجه به این که تصویر S بر xz–صفحه، نیم دایرهٔ

$$D\,:\,x^۲+z^۲\le ۲\,,\,۰\le x$$

می‌باشد و نیز با توجه به اینکه بر S داریم $y=x^۲+z^۲$، در نتیجه بنابه قسمت (ب) از ۴.۲.۹ داریم

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma &= \iint\limits_{D}\big(xz+(x^۲+z^۲)\big)\sqrt{۴x^۲+۴z^۲+۱}\,dxdz\\ &= \iint\limits_{D'}\big(r^۲\cos\theta\sin\theta+r^۲\big)\sqrt{۴r^۲+۱}\,r\,drd\theta\\ &= \int_۰^۲\left[\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\big(\cos\theta\sin\theta+۱\big)r^۳\sqrt{۴r^۲+۱}\,d\theta\right]dr\\ &= \frac{۱}{۲}\int_۰^۲\left[r^۳\sqrt{۴r^۲+۱}(۲\theta-\cos^۲\theta)\right]_{-\pi/۲}^{\pi/۲}dr\\ &= \pi\int_۰^{\sqrt{۲}}r^۳\sqrt{۴r^۲+۱}\,dr\\ &\overset{(۱)}{=} \frac{\pi}{۱۶}\int_۱^۳u^۲(u^۲-۱)\,du=\frac{۱۴۹}{۶۰}\pi\end{aligned}$$

که در (۱) فرض شده است $u=\sqrt{۴r^۲+۱}$، و D' تصویر D در $r\theta$–صفحه است:

$$D'\,:\,-\pi/۲\le\theta\le\pi/۲\,,\,۰\le r\le\sqrt{۲}$$

مثال ۳) در صورتی که S قسمتی از مخروط $x^۲=y^۲+z^۲$ باشد که در آن $x\le ۰$ و تصویر آن بر yz–صفحه مربع

$$D\,:\,-۱\le z\le ۱\,,\,-۱\le y\le ۱$$

است، انتگرال $h=x^۲$ را بر D محاسبه کنید.

حل. تابع معرف رویهٔ S عبارت است از $f=y^۲+z^۲-x^۲$، در نتیجه

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{\|f'\|}{|f_x|}\,dydz=\frac{\|\overrightarrow{(-۲x,۲y,۲z)}\|}{|-۲x|}\,dydz\\ &= \frac{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}{|x|}\,dydz\end{aligned}$$

با توجه به اینکه تصویر S بر yz–صفحه عبارت از مربع D است و نیز بر رویهٔ S داریم $x=-\sqrt{y^۲+z^۲}$، در نتیجه بنابه قسمت (ج) از ۴.۲.۹ داریم

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma &= \iint\limits_{D}\left(-\sqrt{y^۲+z^۲}\right)^۲\frac{\sqrt{(y^۲+z^۲)+y^۲+z^۲}}{|-\sqrt{y^۲+z^۲}|}\,dydz\\ &= \sqrt{۲}\iint\limits_{D}(y^۲+z^۲)\,dydz\\ &= \sqrt{۲}\int_{-۱}^۱\left[\int_{-۲}^۲(y^۲+z^۲)\,dy\right]dz\\ &= \sqrt{۲}\int_{-۱}^۱\left(\frac{۱}{۳}+z^۲\right)dz=\frac{۴}{۳}\sqrt{۲}\end{aligned}$$

مثال ۴) از تابع $h = \dfrac{x+y}{x+y+z}$ بر قسمتی از صفحهٔ $x+y+z=۱$ که در یک هشتم اول قرار دارد انتگرال بگیرید.

حل. ملاحظه می‌شود که در این مسأله

$$S \,:\, z = ۱ - x - y\,;\, (x,y)\in D$$

که $D' \,:\, ۰\le x\le ۱\,,\, ۰\le y\le ۱-x$ تصویر S بر $xy-$صفحه است. درنتیجه بنابه قسمت (د) از ۴.۲.۹ داریم

$$\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{x+y}{x+y+(۱-x-y)}\sqrt{۱+(-۱)^۲+(-۱)^۲}\,dxdy$$

$$= \sqrt{۳}\iint\limits_{D}(x+y)\,dxdy = \sqrt{۳}\int_۰^۱\left[\int_۰^{۱-x}(x+y)dy\right]dx$$

$$= \sqrt{۳}\int_۰^۱\left(x(۱-x)+\frac{۱}{۲}(۱-x)^۲\right)dx = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۵) از تابع $h = z/\sqrt{۱+۴x^۲+۴z^۲}$، بر قسمتی از سهمی‌گون هذلولوی $y = x^۲ - z^۲$ که توسط استوانهٔ $x^۲+z^۲ = ۲z$ جدا شده است، انتگرال بگیرید.

حل. ملاحظه می‌شود که در این مسأله

$$S \,:\, y = x^۲ - z^۲\,;\, (x,z)\in D$$

که قرص $D \,:\, x^۲+z^۲\le ۲z$ تصویر S بر $xz-$صفحه است. در نتیجه بنابه قسمت (ه) از ۴.۲.۹ داریم

$$\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma = \iint\limits_{D}\frac{z}{\sqrt{۱+۴x^۲+۴z^۲}}\sqrt{۱+۴x^۲+۴z^۲}\,dxdz$$

$$= \iint\limits_{D} z\,dz = \iint\limits_{D'} r\sin\theta . r\,drd\theta$$

$$= \int_۰^{\pi}\left[\int_۰^{۲\sin\theta} r^۲\sin\theta\,dr\right]d\theta = \frac{۸}{۳}\int_۰^{\pi}\sin^۴\theta\,d\theta = \pi$$

مثال ۶) از تابع $h = x(z-y)$ بر قسمتی از استوانهٔ $x = \sqrt{۱-y^۲}$ که توسط صفحات $z=۰$ و $z=۱$ جدا شده است، انتگرال بگیرید.

حل. ملاحظه می‌شود که در این مسأله

$$S \,:\, x = \sqrt{۱-y^۲}\,;\, (y,z)\in D$$

و D تصویر S بر $yz-$صفحه، عبارت از مستطیل

$$D \,:\, ۰\le z\le ۱\,,\, -۱\le y\le ۱$$

است. درنتیجه، بنابه قسمت (و) از قضیهٔ ۴.۲.۹ داریم

$$\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D}\sqrt{۱-y^۲}(z-y)\sqrt{۱+\left(\frac{-y}{\sqrt{۱-y^۲}}\right)^۲+(۰)^۲}\,dydz$$

$$= \iint\limits_{D}(z-y)\,dydz = \int_۰^۱\left[\int_{-۱}^۱(z-y)\,dy\right]dz$$

$$= \int_۰^۱ ۲z\,dz = ۱$$

مثال ۷) از تابع $h = z^۲/۹$ بر کرهٔ $S \,:\, x^۲+y^۲+z^۲ = ۹$ انتگرال بگیرید.

حل. کرهٔ S را به کمک مختصات کروی پارامتره می‌کنیم:

$$\mathbf{r}(\varphi,\theta) = \overrightarrow{(۳\cos\varphi\cos\theta, ۳\cos\varphi\sin\theta, ۳\sin\varphi)}$$

که در آن $D \,:\, -\pi/۲\le\varphi\le\pi/۲\,,\, ۰\le\theta\le ۲\pi$. با توجه به ۳.۲.۹، ابتدا باید المان مساحت $d\sigma = \|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\varphi\|\,d\varphi d\theta$ را محاسبه کنیم:

$$d\sigma = \|\overrightarrow{(-۳\sin\varphi\cos\theta, -۳\sin\varphi\sin\theta, ۳\cos\varphi)}$$
$$\times\overrightarrow{(-۳\cos\varphi\sin\theta, ۳\cos\varphi\cos\theta, ۰)}\|\,d\varphi d\theta$$
$$= \|\overrightarrow{(-۹\cos^۲\varphi\cos\theta, -۹\cos^۲\varphi\cos\theta, -۹\sin\varphi\sin\theta)}\|d\varphi d\theta$$
$$= ۹\cos\varphi\,d\varphi d\theta$$

درنتیجه، داریم

$$\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma = \iint\limits_{D}\frac{۱}{۹}(۳\sin\varphi)^۲\,۹\cos\varphi\,d\varphi d\theta$$
$$= ۹\left(\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\sin^۲\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_۰^{۲\pi}d\theta\right)$$
$$= ۹\times\frac{۲}{۳}\times ۲\pi = ۱۲\pi$$

مثال ۸) در صورتی که Ω مکعب محدود به صفحات مختصاتی و صفحات $x=۱$، $y=۱$ و $z=۱$ بوده و S سطح خارجی Ω باشد، انتگرال $h = xyz$ را بر S محاسبه کنید.

حل. این رویه از شش قطعه مربع شکل تشکیل می‌شود:

$$S = S_۱+S_۲+S_۳+S_۴+S_۵+S_۶,$$

$$S_۱ \,:\, z = ۱\,;\,(x,y)\in D_{xy},\quad S_۲ \,:\, z=۰\,;\,(x,y)\in D_{xy},$$

$$S_۳ \,:\, y = ۱\,;\,(x,z)\in D_{xz},\quad S_۴ \,:\, y=۰\,;\,(x,z)\in D_{xz},$$

$$S_۵ \,:\, x = ۱\,;\,(y,z)\in D_{yz},\quad S_۶ \,:\, x=۰\,;\,(y,z)\in D_{yz},$$

که D_{xy}، D_{xz} و D_{yz} بترتیب عبارت از تصویر S بر $xy-$صفحه، $xz-$صفحه و $yz-$صفحه هستند:

$$D_{xy} \,:\, ۰\le x\,,\,y\le ۱.\quad D_{xz} \,:\, ۰\le x\,,\,z\le ۱,$$
$$D_{yz} \,:\, ۰\le y\,,\,z\le ۱.$$

در نتیجه، با توجه به موارد (د)، (ه) و (و) از ۳.۲.۹ داریم

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma &= \iint\limits_{(S_۱)} xy(۱)\sqrt{۱+(۰)^۲+(۰)^۲}\,dxdy \\
&\quad + \iint\limits_{(S_۲)} xy(۰)\sqrt{۱+(۰)^۲+(۰)^۲}\,dxdy \\
&\quad + \iint\limits_{(S_۳)} x(۱)z\sqrt{۱+(۰)^۲+(۰)^۲}\,dxdz \\
&\quad + \iint\limits_{(S_۴)} x(۰)z\sqrt{۱+(۰)^۲+(۰)^۲}\,dxdz \\
&\quad + \iint\limits_{(S_۵)} (۱)yz\sqrt{۱+(۰)^۲+(۰)^۲}\,dydz \\
&\quad + \iint\limits_{(S_۶)} (۰)yz\sqrt{۱+(۰)^۲+(۰)^۲}\,dydz \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} xy\,dxdy + \iint\limits_{D_{xz}} xz\,dxdz + \iint\limits_{D_{yz}} yz\,dydz \\
&= ۳\left(\int_۰^۱ x\,dx\right)\left(\int_۰^۱ y\,dy\right) = \frac{۳}{۴}
\end{aligned}$$

مثال ۹) منحنی $y = \sin x$ که $۰ \leq x \leq \pi$ را حول $x-$محور دوران داده و رویهٔ S حاصل می‌گردد. از تابع $f = ۱/\sqrt{۲-y^۲-z^۲}$ بر S انتگرال بگیرید.

حل. رویهٔ S را به صورت

$$S\,:\,y^۲+z^۲ = \sin^۲ x\,;\, y^۲+z^۲ \leq ۱$$

می‌توان بیان نمود. فرض کنیم $u = x$ و v زاویهٔ دوران حول $x-$محور است. به این ترتیب، داریم

$$S\,:\,\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{(u, \sin u\cos v, \sin u \sin v)}\,;\,(u,v)\in D$$

که در آن $D\,:\,۰\leq u\leq \pi\,,\,۰\leq v\leq ۲\pi$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \left\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right\|dudv \\
&= \Big\|\overrightarrow{(۱,\cos u\cos v,\cos u\sin v)} \\
&\qquad \times\overrightarrow{(۰,-\sin u\sin v,\sin u\cos v)}\Big\|\,dudv \\
&= \left\|\overrightarrow{(\sin u\cos u,-\sin u\cos v,-\sin u\sin v)}\right\|dudv \\
&= \sin u.\sqrt{۱+\cos^۲ u}\,dudv
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(S)} f\,d\sigma &= \iint\limits_{D} \frac{۱}{\sqrt{۲-\sin^۲ u}}.\sin u.\sqrt{۱+\cos^۲ u}\,dudv \\
&= \iint\limits_{D} \sin u\,ddv = \left(\int_۰^{\pi}\sin u\,du\right)\left(\int_۰^{۲\pi}dv\right) = ۴\pi
\end{aligned}$$

۶.۲.۹ تمرین. در هر مورد، از h بر S انتگرال بگیرید:

۱) $f = z$ و S قسمتی از سهمی‌گون بیضوی $z = ۲-x^۲-y^۲$ که در بالای $xy-$صفحه قرار دارد.

۲) $f = z\sqrt{x^۲+y^۲}$ و S قسمت کوچکتر جدا شده از کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ توسط صفحهٔ $z = a/۲$ است.

۳) $f = x^۲+y^۲+z^۲$ و S قسمتی از کرهٔ ۴ $x^۲+y^۲+z^۲ = $ است که توسط استوانهٔ $x^۲+y^۲ = ۲x$ جدا شده است.

۴) $f = y$ و S قسمتی از استوانهٔ $x^۲+z^۲ = ۱$ است که توسط صفحات $y = ۰$ و $y = ۱$ جدا شده است.

۵) $f = x^۲+y^۲+z^۲$ و S قسمتی از صفحهٔ $x+y+z = ۱$ است که در یک هشتم اول قرار دارد.

۶) $f = ۲z^۲$ و S نیمکرهٔ واقع در نیم فضای $x \leq ۰$ از $x^۲+y^۲+z^۲ = ۹$ است.

۷) $f = x^۲+y^۲+z^۲$ و S سطح خارجی استوانهٔ توپر محدود به $x^۲+y^۲ = ۱$ و صفحات $z = ۰$ و $z = ۲$ است.

۸) $f = x^۲$ و S قسمتی از کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲ = ۹$ است که توسط سطوح $x^۲+y^۲ = ۲z^۲$ و $x^۲+y^۲ = ۸z^۲$ جدا می‌گردد و در نیم فضای $x \leq ۰$ قرار دارد.

۹) $f = x+۲y+۳z$ و S سطح خارجی مخروط محدود به $x^۲ = y^۲+z^۲$ و صفحهٔ $x = ۴$ می‌باشد.

۱۰) $f = z$ و S سطح خارجی هرم محدود به صفحهٔ $x+y+z = ۱$ و صفحات مختصاتی است.

۱۱) $f = y\sqrt{x^۲+z^۲}$ و S سطح خارجی مخروط ناقص محدود به $y^۲ = x^۲+z^۲$ و صفحات $y = ۱$ و $y = ۲$ می‌باشد و در نیم فضای $x \leq ۰$ قرار دارد.

۱۲) $f = |x|^۳+|y|^۳+|z|^۳$ و S هشت وجهی $|x|+|y|+|z| = ۱$ است.

انتگرال سطح نوع اول دارای خواص ذیل است، که همهٔ آنها به راحتی با استفاده از خواص انتگرال دو گانه قابل اثباتند:

۷.۲.۹ قضیه. فرض کنید h، $h_۱$ و $h_۲$ توابع سه متغیره، a و b اعداد ثابت و S، $S_۱$ و $S_۲$ رویه باشند. بعلاوه فرض کنیم که مساحت $S_۱\cap S_۲$ صفر باشد. در این صورت

$$۱)\ \ \forall X\in S : h_۱(X)\leq h_۲(X) \Rightarrow \iint_{(S)} h_۱\,d\sigma \leq \iint_{(S)} h_۲\,d\sigma$$

$$۲)\ \ \min\left\{h(X)\,|\,X\in S\right\}\times \mathrm{Area}(S) \leq \iint_{(S)} h\,d\sigma$$

$$\leq \max\{h(X) \mid X \in S\} \times \mathrm{Area}(S)$$

۳) $\displaystyle\iint_{(S)} (ah_۱ + bh_۲)\, d\sigma = a\iint_{(S)} h_۱\, d\sigma + b\iint_{(S)} h_۲\, d\sigma$

۴) $\displaystyle\iint_{(S_۱+S_۲)} h\, d\sigma = \iint_{(S_۱)} h\, d\sigma + \iint_{(S_۲)} h\, d\sigma$

۵) $\displaystyle \mathrm{Area}(S) = \iint_{(S)} d\sigma$ ۶) $\displaystyle \left|\iint_{(S)} h\, d\sigma\right| \leq \iint_{(S)} |h|\, d\sigma$

۳.۹ کاربرد انتگرال سطح نوع اول

به طور کلی به کمک انتگرال سطح نوع اول ظرفیت کل اجسام دو بعدی در فضای سه بعدی را می‌توان محاسبه نمود. مثلاً، اگر چگالی جرم هر نقطه از یک رویه را بدانیم، آنگاه به کمک انتگرال سطح نوع اول، جرم، مرکز ثقل و شعاع چرخش رویه را می‌توان محاسبه نمود. در اینجا، ابتدا اصول کلی در بکارگیری این نوع انتگرال را تشریح می‌کنیم.

۱.۳.۹ روش المانگیری. فرض کنید S یک رویه با نقشهٔ $\mathbf{r}(u,v)$ است که $(u,v) \in D$. فرض کنید $h(x,y,z)$ میدان اسکالری (= تابع سه متغیره‌ای) است که بر سراسر S تعریف می‌گردد. برای محاسبهٔ ظرفیت کل h بر S ابتدا المان ظرفیت را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور کافی است قطعهٔ با رئوس $\mathbf{r}(u,v)$، $\mathbf{r}(u+du,v)$، $\mathbf{r}(u,v+dv)$ و $\mathbf{r}(u+du,v+dv)$ را بر S در نظر گرفته و آن را با متوازی الاضلاع استوار بر بردارهای $\mathbf{r}_u\, du$ و $\mathbf{r}_v\, dv$ تقریب بزنیم. سپس فرض کنیم h بر این قطعه ثابت و برابر $h(\mathbf{r}(u,v))$ می‌باشد. به این ترتیب، ظرفیت این قطعه برابر است با

$$\begin{aligned} dQ &= \text{مساحت متوازی لااضلاع} \times h\big(\mathbf{r}(u,v)\big) \\ &= \|\mathbf{r}_u\, du \times \mathbf{r}_v\, dv\|\, h(\mathbf{r}) \\ &= h(\mathbf{r})\, \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dudv \end{aligned}$$

در نتیجه، ظرفیت کل S برابر انتگرال سطح نوع اول h بر S است:

$$\begin{aligned} Q &= \iint\limits_D dQ \\ &= \iint\limits_D h\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dudv \\ &= \iint\limits_S h\, d\sigma \end{aligned}$$

در ادامه به بیان برخی از کاربردهای انتگرال سطح می‌پردازیم. بدیهی است که در انتخاب این کاربردها تنها عمومی بودن مطلب یعنی قابل فهم بودن برای تعداد بیشتری از خوانندگان در نظر گرفته شده است و بنابراین کاربردهای داده شده تنها تعداد قلیلی از همهٔ کاربردهای ممکن انتگرال سطح می‌باشند.

۲.۳.۹ محاسبهٔ مساحت. چنانچه h را ثابت و برابر یک بگیریم، آنگاه ظرفیت یک المان کوچک از S به معنی مساحت آن است. در نتیجه، ظرفیت کل S به معنی مساحت S می‌باشد. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{Area}(S) = \iint_{(S)} d\sigma$.

۳.۳.۹ مثال. **مثال ۱)** مساحت سطح تیوب حاصل از دوران دایرهٔ به شعاع a حول دایره‌ای به شعاع b $a < b$ را محاسبه کنید.

حل. به کمک قسمت (۶) از ؟؟ نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ این رویه عبارت از $S\,:\, \left(\sqrt{x^۲+y^۲} - b\right)^۲ + z^۲ = a^۲$ است، که به صورت

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{\big((a\cos u + b)\cos v, (a\cos u + b)\sin v, a\sin u\big)}$$

قابل پارامتره کردن است، و در آن

$$D\,:\, ۰ \leq u \leq ۲\pi\,,\ ۰ \leq v \leq ۲\pi$$

بعلاوه المان مساحت آن برابر است با

$$\begin{aligned} d\sigma &= \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dudv \\ &= \Big\|\overrightarrow{(-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u)} \times \\ &\quad \times \overrightarrow{\big(-(a\cos u + b)\sin v, (a\cos u+b)\cos v, ۰\big)}\Big\|\, dudv \\ &= \Big\|a(a\cos u+b)\overrightarrow{(-\cos u\sin v, \cos u\cos v, -\sin u)}\Big\| dudv \\ &= a(a\cos u + b)\, dudv \end{aligned}$$

در نتیجه، مساحت کل S برابر است با

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(S) &= \iint\limits_{(S)} d\sigma = \iint\limits_D a(a\cos u + b)\, dudv \\ &= a\left(\int_۰^{۲\pi} (a\cos u + b)\, du\right)\left(\int_۰^{۲\pi} dv\right) = ۴\pi^۲ ab \end{aligned}$$

این شکل از دوران دایرهٔ $y = ۰$، $C_۱\,:\, x^۲ + z^۲ = a^۲$ حول محور z ها حاصل می‌شود. این دایره بر صفحه‌ای قرار دارد که از محور z ها می‌گذرد و مرکز آن بر دایرهٔ $C_۲\,:\, x^۲+y^۲ = b^۲$ قرار دارد. جالب اینکه، مساحت S برابر حاصلضرب محیط $C_۱$ در محیط $C_۲$ است!

مثال ۲) مساحت قسمتی از سهمی‌گون بیضوی $z = x^۲ + y^۲$ که به صفحهٔ $z = a^۲$ محدود است را محاسبه کنید.

حل. به کمک مختصات استوانه‌ای، این رویه را به صورت

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{(u\cos v, u\sin v, u^۲)}$$

پارامتره می‌کنیم، که در آن $D\,:\,\circ \le u \le a\,,\,\circ \le v \le ۲\pi$. در نتیجه، المان مساحت رویهٔ مذکور عبارت است از

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right\| dudv \\ &= \left\|\overrightarrow{(\cos v, \sin v, ۲u)} \times \overrightarrow{(-u\sin v, u\cos v, \circ)}\right\| dudv \\ &= \left\|\overrightarrow{(-۲u^۲\cos v, -۲u^۲\sin v, u)}\right\| dudv \\ &= u\sqrt{۱+۴u^۲}\,dudv \end{aligned}$$

بنابراین، مساحت S برابر است با

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(S) &= \iint\limits_{(S)} d\sigma = \iint\limits_{D} u\sqrt{۱+۴u^۲}\,dudv \\ &= \left(\int_\circ^{۲\pi} dv\right)\left(\int_\circ^a u\sqrt{۱+۴u^۲}\,du\right) \\ &= ۲\pi\left[\frac{۱}{۱۲}(۱+۴u^۲)^{۳/۲}\right]_\circ^a \\ &= \frac{\pi}{۶}\left((۴a^۲+۱)^{۳/۲}-۱\right) \end{aligned}$$

۴.۳.۹ تمرین.

مساحت هر یک از رویه‌های زیر را محاسبه کنید:

۱) قسمتی از سهمی‌گون بیضوی $z = x^۲ + y^۲$ که توسط صفحات $z = ۱$ و $z = ۴$ جدا شده است.

۲) قسمتی از مخروط $y^۲ = x^۲ + ۴z^۲$ که توسط صفحهٔ $y = ۲$ جدا شده است.

۳) قسمتی از سهمی‌گون هذلولوی $z = x^۲ - y^۲$ که توسط استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۹$ جدا شده است.

۴) سطح بلور $|x| + |y| + |z| = a$.

*۵) سطح رویهٔ $(x^۲+y^۲+z^۲)^۲ = a^۲(x^۲+y^۲-z^۲)$.

۶) نمودار تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ را حول $x-$محور دوران داده و رویهٔ S را بدست می آوریم.

۷) منحنی $C\,:\,\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x(t), y(t))}; a \le t \le b$ را حول $x-$محور دوران داده و رویهٔ S را بدست آورده‌ایم.

۸) مساحت نوار موبیوس آمده شده در مثال ۴ از ۹.۱.۹ را محاسبه کنید.

۵.۳.۹ کاربرد در محاسبهٔ جرم و مرکز ثقل یک رویه.

فرض کنید نقطهٔ (x,y,z) از رویهٔ S دارای چگالی جرمی $\delta(x,y,z)$ باشد. در این صورت، با بکارگیری روش المانگیری (کاملاً شبیه به انتگرال دو گانه) مشاهده می‌گردد که جرم m و مرکز ثقل $C = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ رویهٔ S عبارت چنین است:

$$m = \iint\limits_{(S)} \delta\,d\sigma\,, \qquad x_\circ = \frac{۱}{m}\iint\limits_{(S)} x\delta\,d\sigma,$$

$$y_\circ = \frac{۱}{m}\iint\limits_{(S)} y\delta\,d\sigma\,, \qquad z_\circ = \frac{۱}{m}\iint\limits_{(S)} z\delta\,d\sigma.$$

۶.۳.۹ مثال. ۱) گیریم نقطهٔ (x,y,z) از مخروط $z = \sqrt{x^۲+y^۲}$ با $z \le ۲$ دارای چگالی جرم $\delta = x^۲+y^۲+z^۲$ است. جرم و مرکز ثقل آن را بیابید.

حل. این رویه را به صورت $S\,:\,z = \sqrt{x^۲+y^۲}\,;\,(x,y) \in D$ می‌توان تشریح نمود، که $D\,:\,x^۲+y^۲ \le ۴$. المان مساحت آن عبارت از

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{۱ + \left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right)}\,dxdy \\ &= \sqrt{۲}\,dxdy \end{aligned}$$

است. در نتیجه، جرم S برابر

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_{(S)} \delta\,d\sigma \\ &= \iint\limits_{D} \left(x^۲+y^۲+\left(\sqrt{x^۲+y^۲}\right)^۲\right)\sqrt{۲}\,dxdy \\ &= ۲\sqrt{۲}\iint\limits_{D}(x^۲+y^۲)\,dxdy = ۲\sqrt{۲}\iint\limits_{D'} r^۲ r\,drd\theta \\ &= ۲\sqrt{۲}\left(\int_\circ^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_\circ^{۲} r^۳\,dr\right) \\ &= ۲\sqrt{۲}(۲\pi)(۴) = ۱۶\pi\sqrt{۲} \end{aligned}$$

است. چون رویهٔ S و تابع چگالی آن با تعویض x به $-x$ تغییر نمی‌کند، مرکز ثقل S بر صفحهٔ $x = \circ$ قرار دارد و در نتیجه مختص x مرکز ثقل S صفر است. به دلیل مشابه مختص y مرکز ثقل S نیز صفر می‌باشد. مختص z مرکز ثقل S برابر است با

$$\begin{aligned} z_\circ &= \frac{۱}{m}\iint\limits_{(S)} z\delta\,d\sigma \\ &= \frac{۱}{m}\iint\limits_{D} \sqrt{x^۲+y^۲}\,۲\sqrt{۲}(x^۲+y^۲)\,dxdy \\ &= \frac{۱}{۱۶}\iint\limits_{D}\left(x^۲+y^۲\right)^{۳/۲} dxdy = \frac{۱}{۱۶}\iint\limits_{D'} r^۳ r\,drd\theta \\ &= \frac{۱}{۱۶}\left(\int_\circ^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_\circ^{۲} r^۴\,dr\right) = \frac{۴}{۵}\pi \end{aligned}$$

بنابراین، مرکز ثقل S برابر $C = (\circ, \circ, ۴\pi/۵)$ است.

مثال ۲) جرم سطح مکعب واحد، مشروط بر آن که نقطهٔ (x,y,z) از آن دارای چگالی جرم $\delta = x+y+z$ باشد، را بدست آورید.

حل. این رویه را در قسمت ۸ از ۵.۲.۹ توصیف نموده‌ایم. جرم رویهٔ S برابر است با

$$\begin{aligned}
m &= \iint\limits_{(S)} \delta\, d\sigma \\
&= \iint\limits_{(S_۱)} (x+y+۱)\, d\sigma + \iint\limits_{(S_۲)} (x+y+۰)\, d\sigma \\
&\quad + \iint\limits_{(S_۳)} (x+۱+z)\, d\sigma + \iint\limits_{(S_۴)} (x+۰+z)\, d\sigma \\
&\quad + \iint\limits_{(S_۵)} (۱+y+z)\, d\sigma + \iint\limits_{(S_۵)} (۰+y+z)\, d\sigma \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} (۲x+۲y+۱)\, d\sigma + \iint\limits_{D_{xz}} (۲x+۲z+۱)\, d\sigma \\
&\quad + \iint\limits_{D_{yz}} (۲y+۲z+۱)\, d\sigma \\
&= ۳\int_۰^۱ \left(\int_۰^۱ (۲x+۲y+۱)\, dy\right) dx \\
&= ۳\int_۰^۱ (۲x+۲)\, dx = ۹
\end{aligned}$$

۷.۳.۹ تمرین.

۱) مختصات مرکز ثقل رویهٔ در قسمت ۲ از مثال ۶.۳.۹ را بیابید.

۲) مختصات مرکز ثقل بخشی از سطح همگن $z = \sqrt{x^۲+y^۲}$ که توسط سطح $x^۲+y^۲ = ۲ax$ بریده شده است را محاسبه کنید.

۳) در صورتی که S سطح مکعب واحد $\Omega : ۰ \le x,y,z \le ۱$ باشد و چگالی نقطهٔ (x,y,z) برابر $\delta = x^۲+y^۲+z^۲$ باشد، جرم و مرکز ثقل S را بیابید.

۴) مختصات مرکز ثقل قسمتی از سطح کرهٔ همگن $x^۲+y^۲+z^۲ = R^۲$ که توسط صفحات $z=۰$ و $z=a$ جدا شده است و در نیم فضای $y \le ۰$ قرار دارد را بیابید. در اینجا $۰ < a < R$.

۵) مختصات مرکز ثقل سطح خارجی هرم محدود به صفحات مختصاتی و صفحهٔ $x+y+z = ۱$ را در صورتی بیابید که نقطهٔ (x,y,z) از آن دارای چگالی جرمی $\delta = x+۲y+۳z$ باشد.

۸.۳.۹ کاربرد در محاسبهٔ گشتاور ماند و شعاع چرخش یک رویهٔ جرمدار.

فرض کنید نقطهٔ (x,y,z) از رویهٔ S دارای چگالی جرمی $\delta(x,y,z)$ بوده و P یک نقطه، یک خط و یا یک صفحه باشد. در این صورت، گشتاور ماند S حول P عبارت است از $I_P := \iint_{(S)} h^۲\delta\, d\sigma$، که h فاصلهٔ نقطهٔ $(x,y,z) \in S$ تا مجموعهٔ P می‌باشد. اگر m جرم S باشد، در این صورت $R_P := \sqrt{I_P/m}$ را شعاع چرخش S حول P می‌نامیم.

در حالت خاص، اگر P برابر مبداء O، x–محور، y–محور، z–محور، xy–صفحه، xz–صفحه و یا yz–صفحه باشد، در این صورت، گشتاور ماند رویهٔ S حول P بترتیب برابرند با

$$I_O = \iint_{(S)} (x^۲+y^۲+z^۲)\delta\, d\sigma$$

$$I_x = \iint\limits_{(S)} (y^۲+z^۲)\delta\, d\sigma \qquad I_y = \iint\limits_{(S)} (x^۲+z^۲)\delta\, d\sigma$$

$$I_z = \iint\limits_{(S)} (x^۲+y^۲)\delta\, d\sigma \qquad I_{xy} = \iint\limits_{(S)} z^۲\delta\, d\sigma$$

$$I_{xz} = \iint\limits_{(S)} y^۲\delta\, d\sigma \qquad I_{yz} = \iint\limits_{(S)} x^۲\delta\, d\sigma$$

۹.۳.۹ مثال. ۱) در صورتی که S قسمتی از صفحهٔ $x+y=۱$ باشد که توسط صفحات مختصاتی و $z=۲$ برش خورده است و نقطهٔ $(x,y,z) \in S$ دارای چگالی $\delta = z$ باشد، گشتاور ماند S حول مبداء را محاسبه کنید.

حل. این رویه را به صورت $S : y = ۱-x; (x,z) \in D$ می‌توان تشریح نمود، که $D : ۰ \le x \le ۱, ۰ \le z \le ۲$. در نتیجه، گشتاور ماند S حول مبداء برابر است با

$$\begin{aligned}
I_O &= \iint\limits_{(S)} (x^۲+y^۲+z^۲)\delta\, d\sigma \\
&= \iint\limits_{D} (x^۲+(۱-x)^۲+z^۲)z\sqrt{۱+(-۱)^۲+(۰)^۲}\, dxdy \\
&= \sqrt{۲}\int_۰^۱ \left[\int_۰^۲ z(۲x^۲-۲x+۱+z^۲)\, dz\right] dx \\
&= \sqrt{۲}\int_۰^۱ \left\{۴x^۲-۴x+۶\right\} dx = \frac{۱۶}{۳}\sqrt{۲}
\end{aligned}$$

مثال ۲) شعاع چرخش کرهٔ چگال $x^۲+y^۲+z^۲ = R^۲$ حول z–محور را محاسبه کنید.

حل. از مختصات کروی کمک گرفته و S را پارامتره می‌کنیم:

$$\mathbf{r}(\varphi,v) = \overrightarrow{(R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)}$$

که در آن $D : ۰ \le \varphi \le \pi\,,\, ۰ \le \theta \le ۲\pi$. همانند قسمت ۷ از ۵.۲.۹ ملاحظه می‌گردد که

$$d\sigma = \|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta\|\, d\varphi d\theta = R^۲\sin\varphi\, d\varphi d\theta$$

در نتیجه، گشتاور ماند S حول z–محور عبارت است از

$$I_z(S) = \iint\limits_{(S)} (x^۲+y^۲)\delta\, d\sigma$$

$$= \iint_D (R^2 \sin^2 \varphi)\delta_0 R^2 \sin\varphi \, d\varphi d\theta$$
$$= \delta_0 R^4 \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \, d\varphi\right) = \frac{8}{3}\pi\delta_0 R^4$$

از طرفی، چون چگالی S ثابت است، جرم آن برابر

$$m = \iint_{(S)} \delta \, d\sigma = \delta_0 \iint_{(S)} d\sigma = \delta_0 \operatorname{Area}(S) = 4\pi\delta_0 R^2$$

است. بنابراین، شعاع چرخش S حول $z-$محور برابر

$$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{8\pi\delta_0 R^4/3}{4\pi\delta_0 R^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

است. توجه شود که به دلیل تقارن موجود در δ و S، گشتاور ماند و شعاع چرخش S حول هر محور دیگری که از مبداء بگذرد نیز همین مقدار می‌باشد.

۱۰.۳.۹ تمرین.

۱) گشتاور ماند پوستهٔ همگن $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ نسبت به $z-$محور را محاسبه کنید.

۲) گشتاور ماند سطح مکعب $\max\{|x|, |y|, |z|\} = a$ حول مبداء مختصات را با فرض این که تابع چگالی سطح $\delta = |x| + |y| + |z|$ است، محاسبه کنید.

۳) گشتاور ماند قسمتی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ که توسط صفحات $z = 1$ و $z = 2$ بریده شده است را حول $x-$محور محاسبه کنید. فرض شود که تابع چگالی جرم $\delta = z\sqrt{x^2 + y^2}$ می‌باشد.

*۴) گشتاور ماند مربع همگن

$$S : z = 0 \,,\; 0 \le x \le 1 \,,\; 0 \le y \le 1$$

حول خط $x/a = y/b = z/c$ را محاسبه کنید.

۱۱.۳.۹ کاربرد در محاسبهٔ متوسط یک تابع بر یک سطح.

فرض کنید تابع سه متغیرهٔ h بر رویهٔ S تعریف شده باشد. متوسط h بر S را به صورت

$$\operatorname*{mean}_S h = \frac{1}{\operatorname{Area}(S)} \iint_{(S)} h \, d\sigma$$

می‌توان محاسبه نمود.

۱۲.۳.۹ مثال. ۱) متوسط مربع فاصلهٔ نقاط واقع بر استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4$ محدود به صفحات مختصاتی و صفحهٔ $z = 3$ را تا $x-$محور محاسبه کنید.

حل. رویه را به شکل $S : y = \sqrt{4 - x^2}\,;\, (x, z) \in D$ که در آن $D : 0 \le x \le 2 \,,\; 0 \le z \le 3$ پارامتره می‌کنیم. در نتیجه،

$$\operatorname{Area}(S) = \iint_{(S)} d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2 + (0)^2}$$
$$= \iint_D \frac{2\,dxdz}{\sqrt{4 - x^2}} = 2\left(\int_0^3 dz\right)\left(\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}\right)$$
$$= 2\,[z]_0^3 \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2} = 6\pi$$

با توجه به این که فاصلهٔ (x, y, z) تا $x-$محور برابر $h = \sqrt{y^2 + z^2}$ است، داریم

$$\operatorname*{mean}_S h^2 = \frac{1}{\operatorname{Area}(S)} \iint_{(S)} h^2 \, d\sigma$$
$$= \frac{1}{6\pi} \iint_D \left\{(4 - x^2) + z^2\right\} \frac{2\,dxdz}{\sqrt{4 - x^2}}$$
$$= \frac{1}{3\pi} \int_{-2}^{2} \left[\int_0^3 \frac{4 - x^2 + z^2}{\sqrt{4 - x^2}} dz\right] dx$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{2} \left\{\frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{4 - x^2}\right\} dx$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{3}{2}x\sqrt{4 - x^2} + 15 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2} = 15$$

مثال ۲) فرض کنید S سطح خارجی هرم محدود به صفحات مختصاتی و صفحهٔ $x + y + z = 1$ است که نقطهٔ (x, y, z) از آن دارای دمای $T = x + y + z$ است. متوسط دمای نقاط این رویه را محاسبه کنید.

حل. این هرم از چهار قطعه تشکیل می‌گردد:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$S_1 : z = 1 - x - y \,;\, (x, y) \in D_{xy}$$

$$S_2 : z = 0 \,;\, (x, y) \in D_{xy} \quad S_3 : y = 0 \,;\, (x, z) \in D_{xz}$$

$$S_4 : x = 0 \,;\, (y, z) \in D_{yz}$$

$$D_{xy} : 0 \le x \le 1 \,,\; 0 \le y \le 1 - x$$

$$D_{xz} : 0 \le x \le 1 \,,\; 0 \le z \le 1 - x$$

$$D_{yz} : 0 \le y \le 1 \,,\; 0 \le z \le 1 - y$$

که D_{xy}، D_{xz} و D_{yz} بترتیب تصویر هرم بر $xy-$صفحه، $xz-$صفحه و $yz-$صفحه هستند. به شکل ۱۰.۹ توجه شود. به این ترتیب، متوسط T عبارت است از

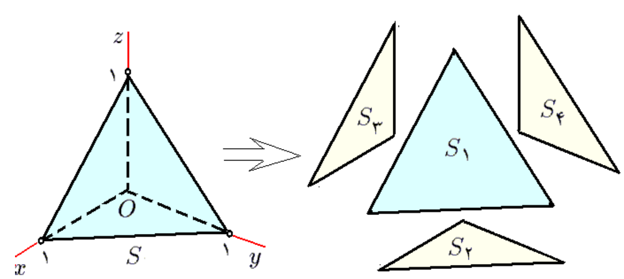
$$\operatorname*{mean}_S T = \iint_{(S)} T \, d\sigma \div \iint_{(S)} d\sigma$$
$$= \left(\iint_{(S_1)} T \, d\sigma + \iint_{(S_2)} T \, d\sigma + \iint_{(S_3)} T \, d\sigma + \iint_{(S_4)} T \, d\sigma\right)$$

$$\div\Big(\iint\limits_{(S_1)} d\sigma+\iint\limits_{(S_2)} d\sigma+\iint\limits_{(S_3)} d\sigma+\iint\limits_{(S_4)} d\sigma\Big)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1)}{=} \Big(\iint\limits_{(S_1)} T\,d\sigma+3\iint\limits_{(S_2)} T\,d\sigma\Big)\div\Big(\iint\limits_{(S_1)} d\sigma+3\iint\limits_{(S_2)} d\sigma\Big)\\
&= \Big(\iint\limits_{D_{xy}} \{x+y+(1-x-y)\}\\
&\qquad\times\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy\\
&\qquad+3\iint\limits_{D_{xy}} (x+y+0)\sqrt{1+(0)^2+(0)^2}\,dxdy\Big)\\
&\quad\div\Big(\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy\\
&\qquad+3\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+(0)^2+(0)^2}\,dxdy\Big)\\
&= \Big(\iint\limits_{D_{xy}} \{x+y+\sqrt{3}\}\,dxdy\Big)\\
&\quad\div\Big(\iint\limits_{D_{xy}} \{1+\sqrt{3}\}\,dxdy\Big)\\
&= \Big(\int_0^1\Big[\int_0^{1-x}\{x+y+\sqrt{3}\}\,dy\Big]\,dx\Big)\\
&\quad\div\Big(\{1+\sqrt{3}\}\mathrm{Area}(D_{xy})\Big)\\
&= \Big(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\div\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{7-\sqrt{3}}{24}
\end{aligned}$$

توضیح این که در (۱) ار تقارن موجود بین S_1، S_2 و S_3 استفاده کرده‌ایم.

مثال ۳) فرض کنید S قسمتی از $xy-$صفحه باشد که به دایرهٔ $x^2+y^2=4x$ محدود می‌باشد و چگالی جرم نقطهٔ (x,y,z) از آن برابر $\delta=x^2+y^2+z^2$ است. متوسط گشتاور ماند S حول خط $x=y=z$ را محاسبه کنید.



شکل ۱۰.۹: قسمت ۲ از مثال ۱۲.۳.۹

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که فاصلهٔ نقطهٔ (x,y,z) تا خط با تکیه گاه X_0 و هادی $\mathbf{v}$ برابر

$$h=\frac{\|\overrightarrow{X_0X}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

است و با توجه به این که در این مسأله فرض شده است $X_0=(0,0,0)$ و $\mathbf{v}=\overrightarrow{(1,1,1)}$، داریم

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left\|\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x&y&z\\1&1&1\end{vmatrix}\right\|\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2}
\end{aligned}$$

بعلاوه، رویهٔ مذکور را به شکل $S\,:\,z=0\,;\,(x,y)\in D$ می‌توان بیان نمود، که $D\,:\,x^2+y^2\leq 4x$. در نتیجه، گشتاور S عبارت است از

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{(S)} h^2\delta\,d\sigma\\
&= \frac{1}{3}\Big((x-y)^2+x^2+y^2\Big)\sqrt{1+0+0}\,dxdy\\
&= \frac{2}{3}\iint\limits_{D}(x^2+y^2-xy)\,dxdy\\
&= \frac{2}{3}\iint\limits_{D'}(1-\cos\theta\sin\theta)r^3\,drd\theta\\
&= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big[\int_0^{4\cos\theta}(1-\cos\theta\sin\theta)r^3\,dr\Big]\,d\theta\\
&= \frac{32}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\big(1-\cos\theta\sin\theta\big)\,d\theta=\frac{128}{9}
\end{aligned}$$

با توجه به این که مساحت S برابر مقدار $4\pi=2^2\times\pi$ است، بنابراین متوسط گشتاور S حول خط $x=y=z$ برابر است با

$$\operatorname*{mean}_{S} I=\frac{I}{\mathrm{Area}(S)}=\frac{32}{9\pi}$$

۱۳.۳.۹ تمرین.

۱) متوسط ارتفاع نقاط بر سطح $z=x^2+y^2$ که $z\leq 2$ را محاسبه کنید.

۲) فرض کنید S قسمتی از صفحهٔ $x+y=2$ است که توسط صفحات مختصاتی و صفحهٔ $x+z=2$ جدا شده است و $f=x+y+z$. متوسط f بر S را محاسبه کنید.

۳) فرض کنید x، y و z سه عدد نامنفی‌اند که مجموع آنها برابر a است. متوسط حاصلضرب آنها را محاسبه کنید.

۴) فرض کنید Ω مخزنی است مالامال از یک مایع چگال با چگالی ثابت δ_0 که از اطراف به استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$، از پائین به سهمی‌گون بیضوی $z=x^2+y^2$ و از بالا به صفحهٔ $z=2a^2$ محدود است. متوسط فشار بر سطح قاعدهٔ Ω را محاسبه کنید.

۵) فرض کنید نقطهٔ (x,y,z) از کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=R^۲$ دارای چگالی جرم $\delta = |xyz|$ است. متوسط جرم آن قسمت از کره که در یک هشتم سوم قرار دارد را محاسبه کنید.

۴.۹ انتگرال سطح نوع دوم

به بیان ساده می‌توان گفت که انتگرال سطح نوع دوم میدان برداری $\mathbf{F}$ بر سطح جهتدار S، مقدار شار عبوری از S توسط $\mathbf{F}$ می‌باشد. قبل از تعریف این نوع انتگرال، لازم است تا مفهوم جهت بر یک سطح را تشریح کنیم.

۱.۴.۹ تعریف. فرض کنید S رویه و $X_۰$ نقطه‌ای از آن باشد. در صورتی می‌گوئیم $X_۰$ یک **نقطهٔ منظم** است که نقشه‌ای مانند $\mathbf{r}$ با دامنهٔ D برای S چنان یافت گردد که $X_۰$ را به ازای یک نقطهٔ درونی چون $(u_۰,v_۰) \in \mathrm{Int}(D)$ به صورت $\mathbf{r}(u_۰,v_۰) = X_۰$ بتوان نوشت (برای مشاهدهٔ تعریف نقطهٔ درونی به ۳.۶.۸ مراجعه شود). مجموعهٔ نقاط منظم رویهٔ S را درون S نامیده و با نماد $\mathrm{Int}S$ نشان می‌دهیم.

۲.۴.۹ مثال. ۱) فرض کنید S قسمتی از سهمی‌گون بیضوی $z = x^۲ + y^۲$ است که توسط صفحهٔ $z = ۴$ جدا شده است. S را توسط تنها یک نقشه $\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{(u,v,u^۲+v^۲)}$ می‌توان پارامتره نمود، که $D \ : \ u^۲ + v^۲ \leq ۴$. در نتیجه، همهٔ نقاطی که توسط $\mathbf{r}$ از روی $\mathrm{Int}(D) \ : \ u^۲+v^۲ < ۴$ تصویر می‌گردند، نقاط منظم S هستند. اما هیچ نقشه‌ای برای S نمی‌توان یافت که نقاط تصویر شدهٔ $u^۲+v^۲ = ۴$ بر S را بعنوان نقاط منظم در بر گیرد. به این ترتیب، نقاط غیر منظم S عبارتند از $S - \mathrm{Int}(S) \ : \ x^۲ + y^۲ = ۴ \, , \, z = ۴$ که دایره‌ای به مرکز $(۰,۰,۴)$ و شعاع ۲ در صفحهٔ $z = ۴$ است. به شکل ۱۱.۹—الف توجه شود.

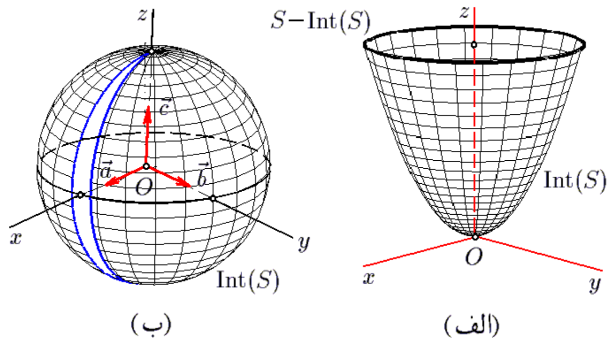
مثال ۲) فرض کنیم S کرهٔ به مرکز $X_۰$ و شعاع R باشد. عملاً، بینهایت نقشهٔ جغرافیایی (کروی) برای S می‌توان تهیه نمود. فرض کنیم $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار متعامد یکه با ابتدای در $X_۰$ باشند. حال نقشه‌ای به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{r}(\varphi,\theta) = (R\cos\varphi\cos\theta)\mathbf{a} + (R\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{b} + (R\sin\varphi)\mathbf{c}$$
$$D \, : \, ۰ \leq \varphi \leq \pi \, , \, ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$

چون درون D عبارت از

$$\mathrm{Int}(D) \, : \, ۰ < \varphi < \pi \, , \, ۰ < \theta < ۲\pi$$

است، تمام نقاطی که توسط $\mathbf{r}$ از مربع $\mathrm{Int}(D)$ بر S تصویر می‌شوند، نقاط منظمند. توجه شود که تنها یک نیمدایره بر S ظاهراً از نقاط غیر منظم تشکیل شده است (به ۱۱.۹—ب توجه شود). اما، چون بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ دلخواهند، تمام کرهٔ S منظمند.



شکل ۱۱.۹: قسمتهای ۱ و ۲ از ۲.۴.۹

مثال ۳) فرض کنید Ω هرم محدود به صفحهٔ $x+y+z = ۱$ و صفحات مختصاتی است و S سطح خارجی آن می‌باشد (به شکل ۱۰.۹ توجه شود). چهار نقشه به شرح زیر برای پوشانیدن چهارتکهٔ S می‌توان مطرح نمود (به قسمت ۲ از ۱۲.۳.۹ توجه شود):

$$\mathbf{r}_۱(u,v) = \overrightarrow{(u,v,\ ۱-u-v)}, \ \mathbf{r}_۲(u,v) = \overrightarrow{(u,v,\ ۰)},$$
$$\mathbf{r}_۳(u,v) = \overrightarrow{(u,\ ۰\ ,v)}, \qquad \mathbf{r}_۴(u,v) = \overrightarrow{(۰\ ,u,v)}.$$

که در هر چهار تای آنها (u,v) به مجموعهٔ

$$D \, : \, ۰ \leq u \leq ۱ \, , \, ۰ \leq v \leq ۱-u$$

متعلق است. بنابراین، بجز چهار ضلع هرم S، تمام نقاط آن منظمند. سایر نقاط که عبارتند از گوشه‌ها و یالهای S، به وضوح غیر منظمند.

۳.۴.۹ تمرین. در هر یک از موارد زیر، مجموعهٔ نقاط منظم رویهٔ داده شده را مشخص کنید:

۱) S قسمتی از صفحهٔ $z = ۲$ است که توسط صفحات مختصاتی و صفحات $x = ۱$ و $y = ۱$ جدا شده است.

۲) S قسمتی از استوانهٔ $x^۲+y^۲ = ۴$ است که توسط صفحات $z = ۰$ و $x+z = ۹$ جدا شده است.

۳) S قسمتی از مخروط $x^۲ = y^۲ + z^۲$ است که توسط صفحات $x = ۱$ و $x = ۲$ جدا شده است.

۴) S سطح مکعب واحد است.

۴.۴.۹ تعریف. فرض کنید S رویه است و $X_\circ$ نقطه‌ای منظم از آن می‌باشد. فرض کنیم $\mathbf{r}$ یک نقشه برای S است طوری که $\mathbf{r}(u_\circ, v_\circ) = X_\circ$. در این صورت، بردارهای

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\mathbf{r}_u(u_\circ, v_\circ)\times\mathbf{r}_v(u_\circ, v_\circ)}{\|\mathbf{r}_u(u_\circ, v_\circ)\times\mathbf{r}_v(u_\circ, v_\circ)\|}$$

در نقطهٔ $X_\circ$ به S عمودند و طول هر کدام از آنها برابر یک است. ثابت می‌شود که $\pm\mathbf{n}$ مستقل از انتخاب نقشهٔ $\mathbf{r}$ هستند. یعنی، اگر با نقشهٔ دیگری نیز بتوان $X_\circ$ را توضیح داد، در این صورت بردارهای حاصل برای $\mathbf{n}$ و $-\mathbf{n}$ خواهند بود. بنابراین، در هر نقطهٔ منظم از رویهٔ S دو و تنها دو بردار یکهٔ قائم وجود دارد.

قضیهٔ زیر به راحتی از قضیهٔ ۱۲.۱.۹ قابل استنتاج است:

۵.۴.۹ قضیه. بردارهای $\mathbf{n}$ و $-\mathbf{n}$ را در حالتهای خاص، به شکل زیر می‌توان تهیه نمود:

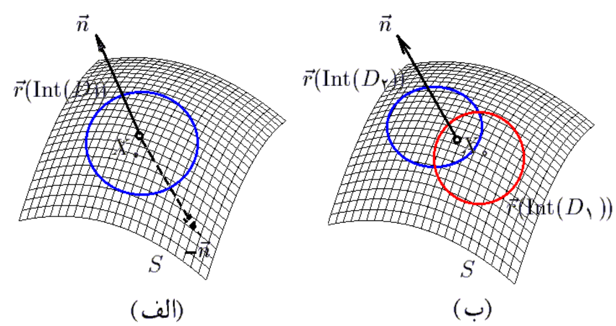
الف) اگر $S :, f(x,y,z) = a$، آنگاه

$$\mathbf{n} = \pm\frac{f'}{\|f'\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(f_x, f_y, f_z)}}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}}$$

ب) اگر $S : z = f(x,y)$، آنگاه $\mathbf{n} = \pm\dfrac{\overrightarrow{(f_x, f_y, -1)}}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}}$

ج) اگر $S : y = f(x,z)$، آنگاه $\mathbf{n} = \pm\dfrac{\overrightarrow{(f_x, -1, f_z)}}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_z)^2}}$

د) اگر $S : z = f(y,z)$، آنگاه $\mathbf{n} = \pm\dfrac{\overrightarrow{(-1, f_y, f_z)}}{\sqrt{1 + (f_y)^2 + (f_z)^2}}$



شکل ۱۲.۹: الف) جهت بر برد یک نقشه
ب) دو نقشهٔ جهتدارِ سازگار

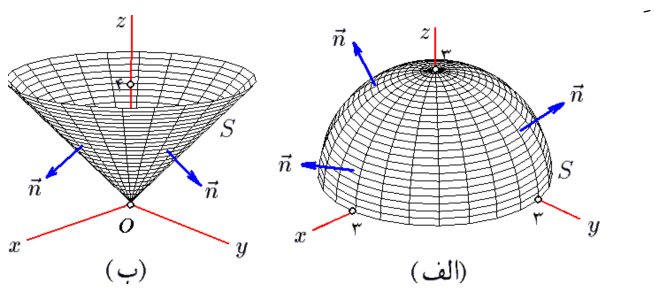
۶.۴.۹ تعریف. فرض کنیم S رویه بوده و $\mathbf{r}$ نقشه‌ای از S با دامنهٔ همبند (یعنی، یکپارچهٔ) D و $\pm\mathbf{n}$ بردارهای یکهٔ قائم بر S نظیر به $\mathbf{r}$ باشند (به ۴.۴.۹ توجه شود). منظور از **جهت بر قطعهٔ** $\mathbf{r}(D)$ **از رویهٔ** D انتخاب $\mathbf{n}$ و یا $-\mathbf{n}$ در همهٔ نقاط آن می‌باشد. توجه شود که به این ترتیب، تنها دو جهت بر $\mathbf{r}D$ قابل تعریف است (به شکل ۱۲.۹—الف توجه شود). دو نقشهٔ $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ برای S با دامنه‌های بترتیب D_1 و D_2 را در صورتی سازگار گوئیم که جهت آن دو بر مجموعهٔ $\mathbf{r}_1(D_1)\cap\mathbf{r}_2(D_2)$ یکی باشد (به شکل ۱۲.۹—ب توجه شود). رویهٔ S را در صورتی **جهتپذیر** گوئیم که آن را توسط تعدادی نقشهٔ سازگار بتوان پوشانید. **رویهٔ جهتدار** رویه‌ای جهتپذیر است که بر هر یک از قطعات آن جهتی انتخاب شده است و جهات انتخابی بر دامنه‌های مشترک برابرند.

اگر S رویه‌ای جهتدار باشد، منظور از $-S$ همان رویهٔ S به عنوان مجموعه منتهی با جهت وارون است. یعنی، اگر قبلاً بر S از $\mathbf{n}$ استفاده شده باشد، اکنون بر $-S$ از $-\mathbf{n}$ استفاده می‌کنیم. لازم به ذکر است که اگر رویهٔ S دارای k تکهٔ مجزا باشد، در این صورت 2^k جهت متفاوت بر قطعهٔ S می‌توان تعریف نمود.

۷.۴.۹ مثال. ۱) فرض کنید S قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=9$ باشد که در بالای xy—صفحه قرار دارد. این رویه را به شکل $S : x^2+y^2+z^2=9\,,\ 0\le z;\ (x,y)\in D$ بیان می‌کنیم، که $D : x^2+y^2\le 9$. بنابه قسمت الف از قضیهٔ ۵.۴.۹، بردارهای یکهٔ قائم بر S عبارتند از

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \pm\frac{f'}{\|f'\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(2x, 2y, 2z)}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}\\ &= \frac{\pm 1}{3}\overrightarrow{\left(x, y, \sqrt{9-x^2-y^2}\right)}\end{aligned}$$

که $f = x^2+y^2+z^2$ تابع معرف رویهٔ S می‌باشد. در شکل ۱۳.۹—الف رویهٔ S با جهت $\mathbf{n}$ نشان داده شده است.



شکل ۱۳.۹: قسمتهای ۱ و ۲ از ۷.۴.۹

مثال ۲) فرض کنید S قسمتی از مخروط $z^2 = x^2+y^2$ باشد که توسط صفحهٔ $z=4$ برش خورده است. این رویه را به شکل $S : z = \sqrt{x^2+y^2};\ (x,y)\in D$ می‌توان بیان نمود، که $D : x^2+y^2\le 16$. اکنون بنابه قسمت ب از ۵.۴.۹، بردارهای یکهٔ قائم بر S عبارتند از

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \pm\frac{\overrightarrow{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}}\\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)}\end{aligned}$$

چنانچه $+$ را انتخاب کنیم، $\mathbf{n}$ رو به پائین خواهد بود و اگر $-$ را انتخاب کنیم، $-\mathbf{n}$ رو به بالا خواهد بود. به شکل ۱۳.۹—ب توجه شود.

مثال ۳) فرض کنید S قسمتی از استوانهٔ سهموی $y = x^2$ باشد که توسط صفحات $y = 4$، $z = 0$ و $z = 2$ جدا شده است. در این صورت، S را به شکل $S \,:\, y = x^2\,;\, (x,z) \in D$ می‌توان بیان نمود، که $D \,:\, -2 \le x \le 2\,,\, 0 \le z \le 2$ و بنابه قسمت (ج) از ۵.۴.۹، بردارهای یکهٔ قائم بر S عبارتند از

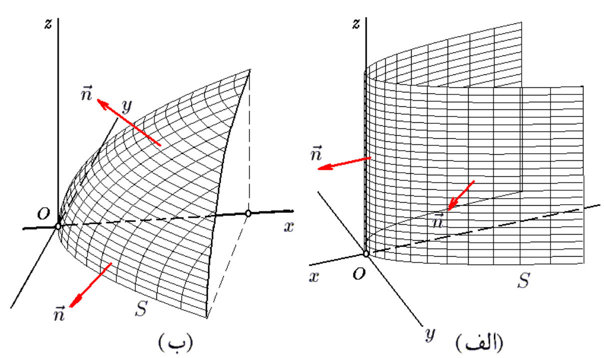
$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \pm\frac{\overrightarrow{(2x,-1,0)}}{\sqrt{(2x)^2+(-1)^2+(0)^2}}\\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1+4x^2}}\overrightarrow{(2x,-1,0)}\end{aligned}$$

چنانچه $+$ را انتخاب کنیم، $\mathbf{n}$ رو به قسمت منفی y—محور خواهد بود و اگر $-$ را انتخاب کنیم، $-\mathbf{n}$ رو به قسمت مثبت y—محور خواهد بود. به شکل ۱۴.۹—الف توجه شود.

مثال ۴) فرض کنید S قسمتی از سهموی‌گون بیضوی $x = 9 - y^2 - z^2$ باشد که در یک هشتم اول قرار دارد. در این صورت، S را به شکل $S \,:\, x = 9 - y^2 - z^2\,;\, (y,z) \in D$ می‌توان بیان نمود، که $D \,:\, y^2 + z^2 \le 9\,,\, 0 \le y\,,\, 0 \le z$ و بنابه قسمت د از ۵.۴.۹، بردارهای یکهٔ قائم بر S عبارتند از

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \pm\frac{\overrightarrow{(-1,-2y,-2z)}}{\sqrt{(-1)^2+(-2y)^2+(-2z)^2}}\\ &= \frac{\mp 1}{\sqrt{1+4y^2+4z^2}}\overrightarrow{(1,2y,2z)}\end{aligned}$$

چنانچه $+$ را انتخاب کنیم، $\mathbf{n}$ رو به قسمت منفی x—محور خواهد بود و اگر $-$ را انتخاب کنیم، $-\mathbf{n}$ رو به قسمت مثبت x—محور خواهد بود. به شکل ۱۴.۹—ب توجه شود.



شکل ۱۴.۹: قسمتهای ۳ و ۴ از ۷.۴.۹

مثال ۵) فرض کنید Ω مکعب واحد و S سطح خارجی آن باشد. جهت بر S را طوری می‌خواهیم انتخاب کنیم که همواره به سمت خارج از Ω باشد (در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت برونسوی است). برای این منظور ابتدا S را مانند قسمت ۲ از ۹.۱.۹ به شش تکه تقسیم نموده و سپس هر قطعه را جداگانه پارامتره می‌کنیم. به شکل ۵.۹—ب توجه شود. اکنون اگر $\mathbf{n}_i$ بردار جهت بر S_i باشد، آنگاه مطابق فرض داریم

$$\begin{aligned}&\mathbf{n}_1 = \mathbf{i}, && \mathbf{n}_2 = -\mathbf{i}, && \mathbf{n}_3 = \mathbf{j},\\ &\mathbf{n}_4 = -\mathbf{j}, && \mathbf{n}_5 = \mathbf{k}, && \mathbf{n}_6 = -\mathbf{k}.\end{aligned}$$

به شکل ۱۵.۹—الف توجه شود. شایان ذکر است که S را به $2^6 = 64$ صورت مختلف می‌توان جهتدار نمود! به عنوان تمرین چند نمونه از آنها را برای خود مجسم کنید.

مثال ٦) فرض کنید Ω قسمتی از یک هشتم اول است که به استوانهٔ $x^2 + y^2 = 9$ و صفحهٔ $z = 4$ محدود شده است و S سطح خارجی آن می‌باشد. S را طوری می‌خواهیم جهتدار کنیم که همواره بردار $\mathbf{n}$ رو به بیرون از Ω باشد.

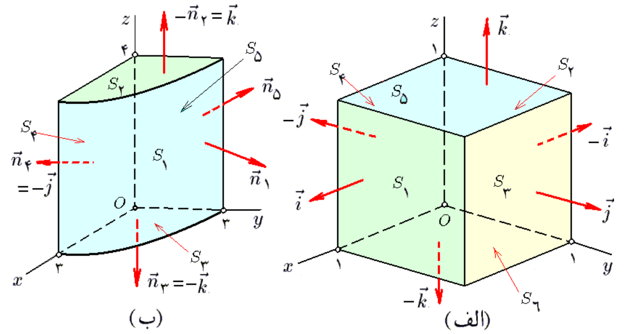
برای این منظور، ابتدا S را به شکل اجتماعی از پنج رویه به شرح زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}&S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5\\ &S_1 \,:\, x^2 + y^2 = 9,\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z \le 4\\ &S_2 \,:\, z = 4,\ x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le x,\ 0 \le y\\ &S_3 \,:\, z = 0,\ x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le x,\ 0 \le y\\ &S_4 \,:\, y = 0,\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le z \le 4\\ &S_5 \,:\, x = 0,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 4\end{aligned}$$

اکنون با توجه به قضیهٔ ۵.۴.۹ ملاحظه می‌گردد که اگر $\mathbf{n}_i$ بردار یکهٔ قائم بر S_i باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= \pm\frac{\overrightarrow{\left(\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}},-1,0\right)}}{\sqrt{\left(\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2+(-1)^2+(0)^2}}\\ &= \frac{\mp 1}{3}\overrightarrow{\left(x,\sqrt{9-x^2},0\right)}\\ \mathbf{n}_2 &= \pm\frac{\overrightarrow{(0,0,-1)}}{\sqrt{(0)^2+(0)^2+(-1)^2}} = \mp\mathbf{k}\\ \mathbf{n}_4 &= \pm\frac{\overrightarrow{(0,-1,0)}}{\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(0)^2}} = \mp\mathbf{j}\end{aligned}$$

$\mathbf{n}_3 = \mp\mathbf{k}$ و $\mathbf{n}_5 = \mp\mathbf{i}$. چون خواسته شده است که $\mathbf{n}$ در هر حال رو به بیرون باشد، با توجه به شکل ۱۵.۹ از علامتهای $+$، $-$، $+$، $+$ و $+$ بترتیب برای بردارهای $\mathbf{n}_1$، $\mathbf{n}_2$، $\mathbf{n}_3$، $\mathbf{n}_4$ و $\mathbf{n}_5$ استفاده می‌کنیم.



شکل ۱۵.۹: قسمتهای ۵ و ٦ از ۷.۴.۹

۸.۴.۹ تمرین. هر یک از رویه های معرفی شده را به دلخواه جهتدار کنید. در هر مورد مشخص کنید که چند جهت مختلف بر رویهٔ داده شده می‌توان تعریف نمود.

۱) قسمتی از کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۹x$ که $۰\le z$.

۲) قسمتی از کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ که $y\le ۰$.

۳) قسمتی از مخروط $x^۲+y^۲=۲z^۲$ که بین صفحات $z=۱$ و $z=-۱$ قرار دارد.

۴) سطح خارجی استوانهٔ توپر محدود به $۴x^۲+y^۲=۴$ و صفحات $z=۰$ و $x+z=۵$.

۵) سطح مکعب $\max\{|x|,|y|,|z|\}=a$.

٦) بلور هشت وجهی $|x|+|y|+|z|=a$.

۷) سطح خارجی جسم محدود به مخروط $x^۲+y^۲=۴z^۲$ و صفحات $z=۱$ و $z=۲$.

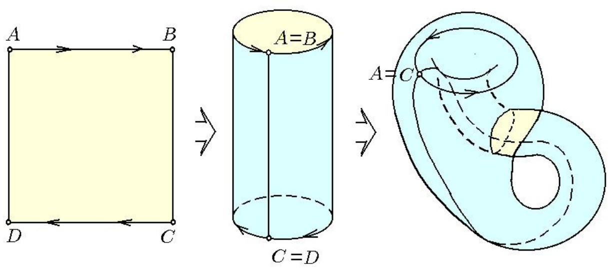
۸) سطح خارجی جسم محدود به صفحات مختصاتی و صفحات $x+y=۲$ و $x+z=۲$.

۹) مجموعهٔ محدود به استوانه‌های مستدیر $x^۲+y^۲=۴$ و $x^۲+z^۲=۴$.

۹.۴.۹ یادداشت. رویه ممکن است جهتپذیر نباشد، یعنی نتوان تعدادی متناهی نقشهٔ سازگار برای رویه طوری معرفی نمود که کاملاً سطح رویه را بپوشانند. معروف ترین رویه‌های جهت‌ناپذیر عبارتند از نوار موبیوس و بطری کلاین:

۱– **نوار موبیوس.** به شکل ٦.۹–ب توجه شود.

۲– **بطری کلاین.** فرض کنید U مستطیل بلندی باشد که از یک جنس لاستیکی ساخته شده است و رئوس آن را بترتیب A، B، C و D بنامیم. چنانچه ضلع AD را طوری بر ضلع BC قرار دهیم که A بر B و C بر D منطبق شود، به یک استوانه خواهیم رسید. به شکل ۱٦.۹ توجه شود. حال حلقهٔ AB را بر حلقهٔ CD طوری قرار می‌دهیم که علاوه بر انطباق A بر D، جهت بر حلقهٔ AB با جهت بر حلقهٔ DC نیز منطبق گردد. به این ترتیب، به رویه‌ای بنام **بطری کلاین** می‌رسیم. این رویه نیز جهتپذیر است، زیرا تنها یک رو دارد. چرا؟



شکل ۱٦.۹: بطری کلاین

۱۰.۴.۹ تعریف. فرض کنید S یک رویهٔ جهتدار با بردار جهت $\mathbf{n}$ است و تحت تأثیر میدان برداری $\mathbf{F}$ قرار دارد، در این صورت انتگرال سطح نوع دوم $\mathbf{F}$ بر S را بشکل $\iint_{(S)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$ تعریف می‌کنیم. توجه شود که $f=\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}$ یک میدان اسکالر (یعنی، تابعی سه متغیره) بر S می‌باشد.

۱۱.۴.۹ قضیه. فرض کنید $\mathbf{F}$، $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ میدان برداری، a و b اعداد حقیقی و S، $S_۱$ و $S_۲$ رویه‌های جهتپذیرند و مساحت $S_۱\cap S_۲$ صفر می‌باشد. در این صورت

$$۱)\quad \iint_{(S)}(a\mathbf{F}_۱+b\mathbf{F}_۲)\bullet\mathbf{n}\,d\sigma=$$

$$a\iint_{(S)}\mathbf{F}_۱\bullet\mathbf{n}\,d\sigma+b\iint_{(S)}\mathbf{F}_۲\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$$

$$۲)\quad \iint_{(S_۱\cup S_۲)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_{(S_۱)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma+\iint_{(S_۲)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$$

$$۳)\quad \iint_{(-S)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma=-\iint_{(S)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$$

۱۲.۴.۹ مثال. ۱) فرض کنید S قسمتی از سهمی‌گون بیضوی $z=۱+x^۲+y^۲$ است که توسط صفحهٔ $z=۲$ برش خورده است و $\mathbf{n}$ رو به پائین می‌باشد. انتگرال میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x^۲,y^۲,z^۲)}$ بر S را محاسبه کنید.

حل. رویهٔ S را به صورت $S\,:\,z=۱+x^۲+y^۲\,;\,(x,y)\in D$ می‌توان معرفی نمود، که $D\,:\,x^۲+y^۲\le ۱$. به شکل ۱۷.۹– الف توجه شود. در این صورت

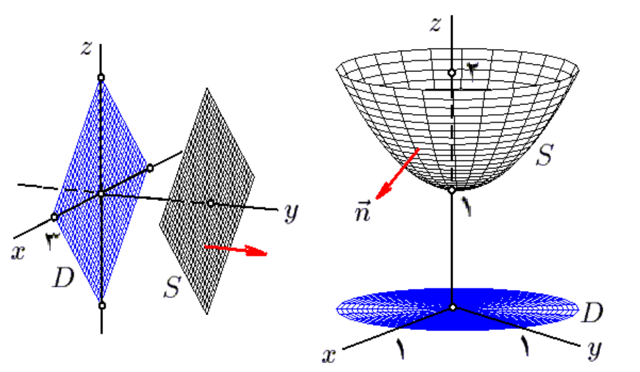
$$\mathbf{n}=\pm\frac{\overrightarrow{(۲x,۲y,-۱)}}{\sqrt{(۲x)^۲+(۲y)^۲+(-۱)^۲}}$$

که چون قرار است $\mathbf{n}$ رو به پائین باشد (یعنی، مختص z از $\mathbf{n}$ منفی باشد) حالت $+$ را انتخاب می‌کنیم. بعلاوه،

$d\sigma = \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2}\,dxdy$. در نتیجه، انتگرال $\iint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$ مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}
&\iint_D \overrightarrow{(x^2,y^2,(1+x^2+y^2)^2)} \\
&\qquad \bullet \frac{\overrightarrow{(2x,2y,-1)}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \\
&= \iint_D \left\{2x^3+2y^3-(1+x^2+y^2)^2\right\} dxdy \\
&\overset{(1)}{=} -\iint_D (1+x^2+y^2)^2\, dxdy \\
&\overset{(2)}{=} -\iint_{D'} (1+r^2)^2 r\, drd\theta \\
&= -\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 (1+r^2)^2 r\, dr\right) \\
&= -(2\pi)\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{-7\pi}{3}
\end{aligned}$$

توضیح این که در (۱) از فرد بودن توابع x^3 و y^3 و تقارن دامنهٔ D استفاده شده و بنابراین دو انتگرال اول صفرند. در (۲) از تغییر مختصات قطبی استفاده گردیده و D' تصویر قطبی D می‌باشد: $D' : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$.



(ب) (الف)

شکل ۱۷.۹: قسمتهای ۱ و ۲ از ۱۲.۴.۹

مثال ۲) انتگرال میدان برداری

$$\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$$

را بر رویهٔ S حاصل از برخورد استوانهٔ $|x|+|z| = 3$ و صفحهٔ $y = 12$ در صورتی بیابید که بردار جهت $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت y–محور باشد.

حل. رویهٔ S را به صورت $S : y = 12 ; (x,z) \in D$ می‌توان معرفی نمود، که $D : |x|+|z| \le 3$. D لوزی به مرکز مبداء و با رئوس $\pm 3\mathbf{k}$ و $\pm 3\mathbf{j}$ می‌باشد. به شکل ۱۷.۹–ب توجه شود. در این صورت $\mathbf{n} = \pm\overrightarrow{(0,-1,0)}/\sqrt{0+1+0}$ و همچنین $d\sigma = \sqrt{0+1+0}\,dxdz$. با توجه به این که قرار است $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت y–محور باشد، در نتیجه حالت $-$ را انتخاب می‌کنیم؛ یعنی، $\mathbf{n} = \mathbf{j}$. پس در مجموع، داریم

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_D \overrightarrow{(x-12, 12-z, z-x)}\bullet\mathbf{j}\, dxdz \\
&= \iint_D (12-z)\, dxdz = 12\iint_D dxdz - \iint_D z\, dxdz \\
&\overset{(1)}{=} 12\,\text{Area}(D) = 12\times 6\times 6\times \frac{1}{2} - 0 = 216
\end{aligned}$$

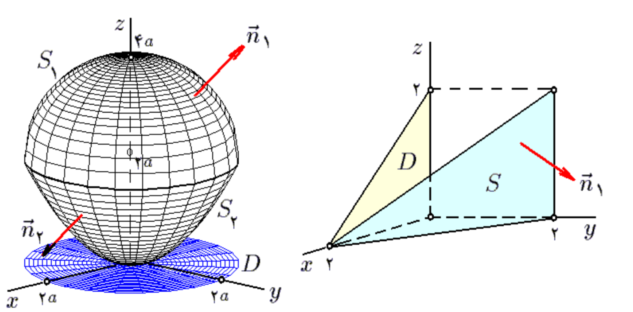
در (۱) از فرد بودن تابع z و تقارن D نسبت به z استفاده کرده و مشاهده نموده‌ایم که انتگرال z بر D صفر است.

مثال ۳) فرض کنید S قسمتی از صفحهٔ $x+y = 2$ است که در یک هشتم اول قرار دارد و توسط صفحهٔ $y+z = 2$ بریده شده است. همچنین فرض کنید که $\mathbf{n}$ رو به جهت منفی x–محور داشته باشد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x, x+y, x+y+z)}$. انتگرال $\mathbf{F}$ را بر S محاسبه کنید.

حل. S را به صورت $S : x = 2-y ; (y,z) \in D$ می‌توان معرفی نمود، که $D : 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2-y$. به شکل ۱۸.۹–الف توجه شود. در این صورت

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \pm\frac{\overrightarrow{(-1,-1,0)}}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{\mp\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{(1,1,0)} \\
d\sigma &= \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(0)^2}\, dzdy = \sqrt{2}\, dzdy
\end{aligned}$$

و با توجه به این که قرار است $\mathbf{n}$ رو به جهت منفی x–محور باشد (یعنی، مختص x از $\mathbf{n}$ منفی باشد) حالت $+$ یعنی اینکه $\mathbf{n} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{(1,1,0)}$ را انتخاب می‌کنیم. پس در مجموع، داریم



(ب) (الف)

شکل ۱۸.۹: قسمتهای ۳ و ۴ از ۱۲.۴.۹

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_D \overrightarrow{(2-y, 2-y+y, 2-y+y+z)} \\
&\qquad \bullet \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}\sqrt{2}\, dydz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \iint_D (y-۴)\,dydz = \int_۰^{۲} \left[\int_۰^{۲-y} (y-۴)\,dz\right] dy \\ &= -\int_۰^{۲} \left(y^۲ - ۶y + ۸\right) dy = \frac{-۲۰}{۳} \end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنید S سطح خارجی جسمی است که از پایین به سهمی‌گون $۲az = x^۲ + y^۲$ و از بالا به کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴az$ محدود است و در همه جا $\mathbf{n}$ رو به بیرون از آن جسم می‌باشد. انتگرال $\mathbf{F} = \overrightarrow{(۱-y, x, z)}$ را بر S محاسبه کنید.

حل. سهمی گون و کرهٔ داده شده یکدیگر را در $z^۲ + ۲az = ۴az$ یا $z^۲ = ۲az$ قطع می‌کنند. بنابراین، $z = ۰$ یا $z = ۲a$. در $z = ۰$ آنها بر هم مماسند و در $z = ۲a$ دایره‌ای را در اشتراک دارند. بنابراین، $S = S_۱ + S_۲$ از دو قطعه تشکیل می‌گردد:

$S_۱ \,:\, x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴az\,,\ z \geq ۲a$

$\mathbf{n}$ به سوی جهت مثبت z−محور

$S_۲ \,:\, x^۲ + y^۲ = ۲az\,,\ z \leq ۲a$

$\mathbf{n}$ به سوی جهت منفی z−محور

و تصویر هر دو بر xy−صفحه $D \,:\, x^۲ + y^۲ \leq ۴a^۲$ است. به شکل ۱۸.۹—ب توجه گردد. با توجه به این که توابع معرف $S_۱$ و $S_۲$ بترتیب عبارتند از $f = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۴az$ و $g = x^۲ + y^۲ - ۲az$، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_۱ &= \pm\frac{f'}{\|f'\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۲z-۴a)}}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴(z-۲a)^۲}} \\ &= \frac{\pm ۱}{۲a}\overrightarrow{(x, y, z-۲a)} \\ d\sigma_۱ &= \frac{\|f'\|}{|f_z|}\,dxdy \\ &= \frac{۱}{۲(z-۲a)}\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴(z-۲a)^۲}\,dxdy \\ &= \frac{۲a\,dxdy}{z-۲a} \\ \mathbf{n}_۲ &= \pm\frac{g'}{\|g'\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, -۲a)}}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴a^۲}} \\ &= \frac{\pm\overrightarrow{(x, y, -a)}}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + a^۲}} \\ d\sigma_۲ &= \frac{\|g'\|}{|g_z|}\,dxdy = \frac{۱}{۲a}\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴a^۲}\,dxdy \\ &= \frac{۱}{a}\sqrt{x^۲ + y^۲ + a^۲}\,dxdy \end{aligned}$$

که $d\sigma_i$ دیفرانسیل مساحت S_i و $\mathbf{n}_i$ بردار یکهٔ قائم بر S_i می‌باشد. با توجه به خواستهٔ ما مبنی بر این که همواره $\mathbf{n}$ به سمت خارج از S جهتدار باشد، پس باید $\mathbf{n}_۱$ رو به جهت مثبت z−محور و $\mathbf{n}_۲$ رو به جهت منفی z−محور باشد، یعنی

$$\mathbf{n}_۱ = \overrightarrow{\left(\frac{x}{۲a}, \frac{y}{۲a}, \frac{z}{۲a} - ۱\right)} \qquad \mathbf{n}_۲ = \frac{\overrightarrow{(x, y, -a)}}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + a^۲}}$$

بنابراین، در مجموع داریم

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_{(S_۱)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma + \iint_{(S_۲)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma \\ &= \iint_D \overrightarrow{\left(۱-y, x, ۲a + \sqrt{۴a^۲ - x^۲ - y^۲}\right)} \\ &\quad \bullet\overrightarrow{\left(\frac{x}{۲a}, \frac{y}{۲a}, \frac{۱}{۲a}\sqrt{۴a^۲ - x^۲ - y^۲}\right)}\,\frac{۲a\,dxdy}{\sqrt{۴a^۲ - x^۲ - y^۲}} \\ &\quad + \iint_D \overrightarrow{\left(۱-y, x, \frac{x^۲ + y^۲}{۲a}\right)} \\ &\quad \bullet\frac{\overrightarrow{(x, y, -a)}}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + a^۲}}\,\frac{۱}{a}\sqrt{x^۲ + y^۲ + a^۲}\,dxdy \\ &= \iint_D \left\{\frac{x}{\sqrt{۴a^۲ - x^۲ - y^۲}} + ۲a \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{۴a^۲ - x^۲ - y^۲}\right\} dxdy \\ &\quad - \frac{۱}{۲a}\iint_D \left(x^۲ + y^۲ - ۲x\right) dxdy \\ &= \iint_{D'} \left\{\frac{r\cos\theta}{\sqrt{۴a^۲ - r^۲}} + ۲a + \sqrt{۴a^۲ - r^۲} \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^۲}{۲a} + \frac{r\cos\theta}{a}\right\} r\,drd\theta \\ &= \int_۰^{۲a}\left[\int_۰^{۲\pi}\left\{\frac{r\cos\theta}{\sqrt{۴a^۲ - r^۲}} + ۲a + \sqrt{۴a^۲ - r^۲} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{r^۲}{۲a} + \frac{r\cos\theta}{a}\right\} r\,d\theta\right] dr \\ &= \int_۰^{۲a}\left\{۴a\pi r - \frac{\pi}{a}r^۳ + ۲\pi r\sqrt{۴a^۲ - r^۲}\right\} dr = -\frac{۵۶}{۳}\pi \end{aligned}$$

مثال ۵) فرض کنید S کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ است، $\mathbf{n}$ رو به بیرون S دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(z, ۲y, ۳x)}$. انتگرال $\mathbf{F}$ را بر S محاسبه کنید.

حل. این رویه را به کمک مختصات کروی پارامتره می‌کنیم:

$$\mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{(۳\sin u\cos v, ۳\sin u\sin v, ۳\cos u)}$$

که در آن $D \,:\, ۰ \leq u \leq \pi\,,\ ۰ \leq v \leq ۲\pi$. در نتیجه، در این حالت $d\sigma = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,dudv$ و

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \pm\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \\ &= \pm\overrightarrow{(۳\cos u\cos v, ۳\cos u\sin v, -۳\sin u)} \\ &\quad \times\overrightarrow{(-۳\sin u\sin v, ۳\sin u\cos v, ۰)} \div \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \\ &= \frac{\pm ۱}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}\overrightarrow{(۹\sin^۲ u\cos v, ۹\sin^۲ u\sin v, ۹\cos u\sin v)} \end{aligned}$$

با توجه به این که باید در همه جا $\mathbf{n}$ رو به بیرون از S باشد، نتیجه می‌گیریم که باید در $\mathbf{n}$ علامت $+$ را انتخاب کنیم. به این ترتیب، انتگرال خواسته شده $\iint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}$ عبارت است از

$$\begin{aligned}
&\iint_D \overrightarrow{(3\cos u, 6\sin u\sin v, 9\sin u\cos v)} \\
&\qquad \bullet \overrightarrow{(9\sin^2 u\cos v, 9\sin^2 u\sin v, 9\cos u\sin v)}\, dudv \\
&= 27\iint_D \{\sin^2 u\cos u\cos v + 2\sin^3 u\sin^2 v \\
&\qquad + 3\sin u\cos u\sin v\cos v\}\, dudv \\
&= 27\int_0^{\pi}\Big[\int_0^{2\pi}\{\sin^2 u\cos u\cos v + 2\sin^3 u\sin^2 v \\
&\qquad + 3\sin u\cos u\sin v\cos v\}\, dv\Big]\, du \\
&= 27\int_0^{\pi}\sin^2 u\{\pi\cos u + 2\pi\sin u\}\, du \\
&= \left[\frac{\sin^3 u}{3} + \frac{2\cos^3 u}{3} - 2\cos u\right]_0^{\pi} = 72\pi
\end{aligned}$$

۱۳.۴.۹ تمرین.
در هر مورد، انتگرال $\mathbf{F}$ را بر S محاسبه کنید:

۱) S قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2 = 9$ است که در یک هشتم اول قرار دارد و $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت $z-$محور است و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x^2, y^2, z^2)}$.

۲) S قسمتی از سهمی‌گون بیضوی $z = x^2 + y^2$ است که توسط صفحات $z = 1$ و $z = 2$ جدا شده است و $\mathbf{n}$ رو به جهت منفی $z-$محور دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(y+z, x+z, x+y)}$.

۳) S قسمتی از مخروط $y^2 = x^2+z^2$ است که توسط صفحهٔ $y = 3$ برش خورده و $z \leq 0$ است و $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت $y-$محور دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x, 2y, 3z)}$.

۴) S قسمتی از صفحهٔ $x + y = 2$ است که توسط استوانهٔ مستدیر $y^2 + z^2 = 1$ برش خورده است و $\mathbf{n}$ رو به جهت منفی $y-$محور دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x, y, z)}$.

۵) S قسمتی از صفحهٔ $x+y+z = 2$ است که توسط استوانهٔ لوزی $|y| + |z| = 1$ برش داده شده است و $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت $x-$محور دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(2x, x+y, x+z)}$.

۶) S سطح خارجی جسم محدود به صفحات $x = y$، $x = -y$، $z = 0$ و $z = 1$ است و $\mathbf{n}$ رو به بیرون از S دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x, z, y)}$.

۷) S سطح خارجی استوانهٔ توپور محدود به $x^2 + y^2 = 1$ و صفحات $y = z$ و $y = z + 1$ است و $\mathbf{n}$ رو به بیرون از S دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x-y, y-z, z-x)}$.

۸) S سطح خارجی مخروط ناقص محدود به $y^2 = x^2+z^2$ و صفحات $y = 1$ و $y = 2$ است و $\mathbf{n}$ رو به درون S جهتدار و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x^2, y^2, z^2)}$.

۵.۹ کاربرد انتگرال سطح نوع دوم

عمده‌ترین کاربرد انتگرال سطح نوع دوم به مسألهٔ زیر باز می‌گردد:

۱.۵.۹ مسأله. فرض کنید S یک رویهٔ جهتدار است و $\mathbf{F}$ میدانی برداری می باشد که بر سراسر S تعریف می‌گردد. مطلوب است محاسبهٔ مقدار شار عبوری از S توسط $\mathbf{F}$.

حل. فرض کنید S را توسط نقشهٔ $\mathbf{r}(u, v)$ با دامنهٔ D پارامتره نموده‌ایم و مستطیل کوچک حاصل از تصویر کردن مستطیل $U = [u; u + du] \times [v; v + dv]$ بر سطح S را در نظر می‌گیریم: $\Sigma = \mathbf{r}(U)$. این مستطیل منحنی‌الخط را با متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\mathbf{r}_u(u, v)\, du$ و $\mathbf{r}_v(u, v)\, dv$ در نقطهٔ $\mathbf{r}(u, v)$ استوار می‌شوند، می‌توان تقریب زد. بعلاوه، می‌توان فرض نمود که میدان برداری $\mathbf{F}$ بر این مستطیل ثابت و برابر $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v))$ می‌باشد. بنابراین، بجای مسألهٔ اصلی که در آن S منحنی‌الخط و $\mathbf{F}$ متغیر است، مسألهٔ ساده‌تری داریم که در آن S یک متوازی الاضلاع و $\mathbf{F}$ بر آن ثابت است. در چنین حالتی، شار عبوری برابر حاصلضرب مساحت رویه در تصویر میدان در امتداد قائم بر رویه می‌باشد. به بیان دیگر، اگر $\mathbf{r}(u, v)$ بردار جهت موجود در نقطهٔ $\mathbf{r}(u, v)$ باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}
d\mathcal{F} &= \|\mathbf{r}_u(u, v)\, du \times \mathbf{r}_v(u, v)\, dv\|\, \|\mathrm{proj}_{\mathbf{n}(u,v)}\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v))\| \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v))\bullet\mathbf{n}(u, v)\, \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dudv \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v))\bullet\mathbf{n}(u, v)\, d\sigma
\end{aligned}$$

و بنابراین، مقدار شار عبوری از S برابر است با

$$\mathcal{F} = \iint_D d\mathcal{F} = \iint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\, d\sigma$$

۲.۵.۹ مثال. ۱) فرض کنید سیالی در فضا با میدان برداری سرعت ذرات $\mathbf{F} = \overrightarrow{(z, 2y, 3x)}$ وجود دارد. مقدار شار عبوری از نیم کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ که $y \geq 0$ توسط $\mathbf{F}$ را در صورتی بیابید که همه جا بردار قائم $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت $y-$محور باشد.

حل. رویهٔ S را به شکل $S : y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}\ ;\ (x, z) \in D$

می‌توان پارامتره نمود، که $D: x^2+z^2 \le 9$. در نتیجه، چون تابع معرف S عبارت از $f = x^2+y^2+z^2$ است، داریم

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\|f'\|}{|f_z|} = \pm\frac{\overrightarrow{(2x,2y,2z)}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{\pm 1}{3}\overrightarrow{\left(x,\sqrt{9-x^2-y^2},z\right)}$$

در نتیجه، مقدار شار مورد نظر $\mathcal{F} = \iint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$ برابر است با

$$\begin{aligned}
&\iint_D \mathbf{F}\left(x,\sqrt{9-x^2-y^2},z\right)\\
&\qquad\bullet\overrightarrow{\left(\frac{x}{3},\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2-y^2},\frac{z}{3}\right)}\,\frac{3\,dxdz}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\\
&= \iint_D \frac{4xz+18-2x^2-2z^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,dxdz\\
&\overset{(1)}{=} \iint_{D'} \frac{4r^2\cos\theta\sin\theta+18-2r^2}{\sqrt{9-r^2}}\,r\,drd\theta\\
&= \int_0^3\left[\int_0^{2\pi}\frac{2r^3\cos\theta\sin\theta+18r-2r^3}{\sqrt{9-r^2}}\,d\theta\right]dr\\
&= 4\pi\int_0^3 r\sqrt{9-r^2}\,dr = 36\pi
\end{aligned}$$

توضیح این که در (۱) از مختصات قطبی استفاده شده است و D' تصویر D در $r\theta-$صفحه می‌باشد.

مثال ۲) فرض کنید S یک تور به شکل سطح خارجی جسم محدود به استوانهٔ $x^2+z^2=4$ و صفحات $y=-1$ و $y=1$ می باشد و در رودی قرار دارد که میدان بردارهای سرعت آن $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,x,y)}$ است. شار عبوری را محاسبه کنید.

حل. این رویه را به صورت اجتماعی از سه رویه می‌توان نوشت:

$$S=S_1\cup S_2\cup S_3 \quad S_1: x^2+z^2=4;\ -1\le y\le 1$$

$$S_2: y=-1;\ x^2+z^2\le 4 \quad S_3: y=1;\ x^2+z^2\le 4$$

به شکل ۱۹.۹—الف توجه شود. با توجه به شکل، ملاحظه می‌گردد که در مورد S_1 باید $\mathbf{n}_1$ رو به بیرون S باشد و لذا بر $y-$محور عمود است، در مورد S_2 باید $\mathbf{n}_2=-\mathbf{j}$ و در مورد S_3 باید $\mathbf{n}_3=\mathbf{j}$. این سه رویه را به شکل

$$S_1: \mathbf{r}(u,v)=\overrightarrow{(2\cos u, v, 2\sin u)};\ (u,v)\in D_1$$

$$S_2: y=-1;\ (x,z)\in D_2 \qquad S_3: y=-1;\ (x,z)\in D_2$$

$$D_1: 0\le u\le 2\pi,\ -1\le v\le 1 \quad D_2: x^2+z^2\le 4$$

پارامتره می‌کنیم. در نتیجه، داریم

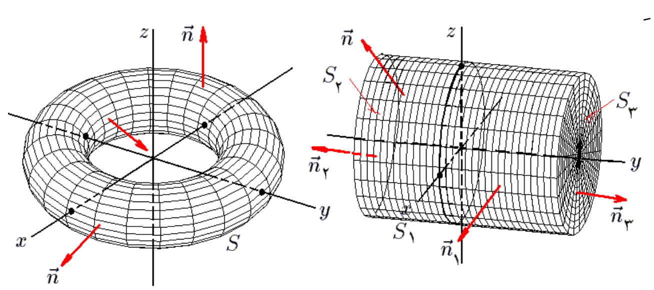
$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= \pm\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\\
&= \pm\frac{\overrightarrow{(-2\sin u, 0, 2\cos u)}\times\overrightarrow{(0,1,0)}}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\\
&= \pm\frac{\overrightarrow{(-2\cos u, 0, -2\sin u)}}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}
\end{aligned}$$

که حالت — مورد قبول است، $\mathbf{n}_2=-\mathbf{j}$ و $\mathbf{n}_3=\mathbf{j}$. بعلاوه

$$\begin{aligned}
d\sigma_1 &= \|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,dudv\\
d\sigma_2 &= d\sigma_3=\sqrt{1+0+0}\,dxdz=dxdz
\end{aligned}$$

در نتیجه، شار مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \iint_{(S)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma\\
&= \iint_{(S_1)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma+\iint_{(S_2)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma+\iint_{(S_3)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma\\
&= \iint_{D_1}\overrightarrow{(2\cos u, 2\cos u, 0)}\bullet\overrightarrow{(2\cos u, 0, 2\sin u)}\,dudv\\
&\quad+\iint_{D_2}\overrightarrow{(x,x,-1)}\bullet\overrightarrow{(0,-1,0)}\,dxdz\\
&\quad+\iint_{D_2}\overrightarrow{(x,x,1)}\bullet\overrightarrow{(0,1,0)}\,dxdz\\
&= 4\iint_{D_1}\cos^2 u\,dudv\\
&= 4\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 u\,du\right)\left(\int_{-1}^{1}dv\right)=8\pi
\end{aligned}$$



(ب) (الف)

شکل ۱۹.۹: قسمتهای ۲ و ۳ از ۲.۵.۹

مثال ۳) فرض کنید S تیوب به معادلهٔ

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2=1$$

است و $\mathbf{n}$ رو به بیرون از S دارد و بعلاوه $\mathbf{F}=\overrightarrow{(2x,2y,-z)}$ است. شار عبوری از S توسط $\mathbf{F}$ را محاسبه کنید.

حل. برای پارامتره نمودن رویهٔ S، ابتدا فرض می‌کنیم که

$\cos u = \sqrt{x^2+y^2} - 2$ و $z = \sin u$. بنابراین، داریم $x^2+y^2 = (\cos u + 2)^2$ و می‌توان فرض کرد:

$$x = (\cos u + 2)\cos v \quad , \quad y = (\cos u + 2)\sin v$$

پس در مجموع، نقشهٔ پوشانندهٔ کل S عبارت از

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{((\cos u + 2)\cos v, (\cos u + 2)\sin v, \sin u)}$$
$$D : 0 \leq u \leq 2\pi \, , \, 0 \leq v \leq 2\pi$$

است و بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \\ &= \pm \frac{(\cos u + 2)\overrightarrow{(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin v + \sin u)}}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \end{aligned}$$

که به جهت برونسو بودن، حالت $+$ را انتخاب می‌کنیم. پس در مجموع، شار خواسته شده $\iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} \, d\sigma$ برابر است با

$$\begin{aligned} &\iint_D \overrightarrow{(2(\cos u + 2)\cos v, 2(\cos u + 2)\sin v, -\sin u)} \\ &\qquad \bullet \overrightarrow{(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin v + \sin u)}\,(\cos u + 2)\, du dv \\ &= \iint_D (\cos u + 2)(4\cos u + 2\cos^2 u - \sin^2 u)\, du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[\int_0^{2\pi} (\cos u + 2)(4\cos u \\ &\qquad\qquad + 2\cos^2 u - \sin^2 u)\, du \Big] dv \\ &= 12\pi^2 \end{aligned}$$

۳.۵.۹ تمرین.

در هر مورد، شار عبوری از S توسط $\mathbf{F}$ را محاسبه کنید:

۱) S قسمتی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ باشد که در نیم فضای $x \leq y$ قرار دارد و توسط صفحهٔ $z = 2$ جدا شده است و $\mathbf{n}$ رو به جهت منفی z–محور باشد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(y, x, z)}$.

۲) S قسمتی از استوانهٔ $y = x^2$ باشد که توسط صفحات $y = 4$، $z = 0$ و $z = 1$ بریده شده است و $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت y–محور دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(yz^2, zx^2, xy^2)}$.

۳) S سطح جسم محدود به نیم کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ واقع در نیم فضای $y \geq 0$ است، $\mathbf{n}$ رو به بیرون S دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(z^2, y, x)}$.

۴) S سطح هرم محدود به صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصاتی است و $\mathbf{n}$ رو به درون S دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x^2, y^2, z^2)}$.

۵) S سطح نیم گوی محدود به $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ و صفحهٔ $y = 0$ است و $\mathbf{n}$ رو به بیرون از S دارد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x+y, y+z, z+x)}$.

۶.۹ قضیهٔ گاوس

قضیهٔ گاوس که در برخی از مراجع آن را بنام **قضیهٔ دیورژانس**، **قضیهٔ واگرایی** و یا **قضیهٔ استروگرادسکی** معرفی می‌کنند، حکمی است برای تبدیل انتگرال سطح نوع دوم بر یک سطح بسته به یک انتگرال سه گانه بر داخل آن رویه. برای تفهیم صورت این قضیه به دو مفهوم جدید نیاز داریم: رویهٔ بسته و دیورژانس یک میدان برداری که ذیلاً به بیان آنها می‌پردازیم.

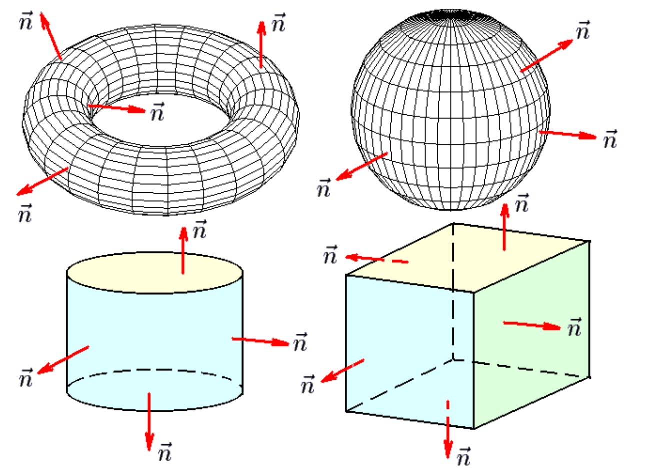
۱.۶.۹ تعریف. رویهٔ جهتپذیر S را در صورتی **بستهٔ ساده** گوئیم که بتوان حجمی در $\mathbb{R}^3$ مانند Ω طوری یافت نمود که S سطح خارجی آن باشد. در این صورت می‌نویسیم $S = \partial\Omega$. اجتماع چند رویهٔ ساده که هیچ دو تایی از آنها اشتراک نداشته باشند نیز **رویهٔ بسته** نامیده می‌شود.

۲.۶.۹ قضیه. فرض کنید S رویه‌ای بسته باشد، در این صورت نقاط $\mathbb{R}^3 - S$ به دو زیر مجموعهٔ به شرح زیر تقسیم می شوند: **الف)** نقاطی چون $X_0 \in \mathbb{R}^3 - S$ که هر شعاع غیر مماس بر S و صادره از X_0، رویهٔ S را در تعدادی فرد نقطه قطع می‌کند. **ب)** نقاطی چون $X_0 \in \mathbb{R}^3 - S$ که هر شعاع غیر مماس بر S و صادره از X_0، رویهٔ S را در تعدادی زوج نقطه قطع می‌کند.

مجموعهٔ اول کراندار است و آن را **درون** S نامیده و با نماد $\mathrm{Int}S$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ دوم بی‌کران است و آن را **بیرون** S نامیده و با نماد $\mathrm{Ext}S$ نشان می‌دهیم. روشن است که اگر $\Omega = \mathrm{Int}S \cup S$ کراندار باشد، آنگاه Ω مجموعه‌ای فشرده (یعنی، بسته و کراندار) است و S لبهٔ Ω می‌باشد و بنابراین می‌توان نوشت $S = \partial\Omega$.

۳.۶.۹ تعریف. منظور از **جهت استاندارد** بر رویهٔ بستهٔ S، جهتی است که در آن به ازای هر نقطهٔ منظم $X_0 \in S$، بردار یکهٔ قائم $\mathbf{n}$ انتخاب شده در X_0 به سوی بیرون از S هدف داشته باشد. در این حالت، اصطلاحاً $\mathbf{n}$ را **برونسوی** می‌نامند. اگر S یک رویهٔ بسته با جهت استاندارد باشد، آنگاه از نماد $\oiint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} \, d\sigma$ بجای $\iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} \, d\sigma$ استفاده می‌شود.

۴.۶.۹ مثال. ۱) مربع، نیم دایره، مخروط، قسمتی از صفحه که به یک منحنی بسته‌ای محدود شده است و استوانه، نمونه‌هایی از رویه‌های غیر بسته هستند.



شکل ۲۰.۹: قسمتهای ۱ از ۴.۶.۹

مثال ۲) کره، سطح مکعب، سطح یک قوطی و تیوب نمونه‌هایی از رویه‌های بسته‌اند. در شکل ۲۰.۹ جهت استاندارد هر یک از این سطوح را ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۳) فرض کنید S اجتماعی از دو کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ است. در این صورت S یک رویهٔ بسته است و $\mathrm{Int}S\ :\ ۱\le x^۲+y^۲+z^۲\le ۴$ ناحیهٔ بین دو کره می‌باشد. بردار جهت استاندارد $\mathbf{n}$ بر کرهٔ کوچکتر رو به سمت مبداء و بر کرهٔ بزرگتر رو به سمت بیرون از مبداء دارد. به شکل ۲۱.۹—الف توجه شود.

مثال ۴) فرض کنید $\Omega=\Omega_۱\cup\Omega_۲\cup\Omega_۳-\Omega_۴$ که در آن

$$\Omega_۱\ :\ ۱\le x^۲+y^۲\le ۴\,,\ -۱\le z\le ۱$$

$$\Omega_۲\ :\ ۱\le x^۲+y^۲\le ۴\,,\ ۲\le z\le ۳$$

$$\Omega_۳\ :\ ۱\le x^۲+y^۲\le ۴\,,\ -۳\le z\le -۲$$

$$\Omega_۴\ :\ ۱\le z^۲+y^۲\le ۴\,,\ -۲\le x\le ۲$$

به شکل ۲۰.۹—ب توجه شود. فرض کنید S سطح خارجی آن باشد. در شکل ۲۱.۹—ب جهت استاندارد بر S را مشاهده می‌کنید. اکنون به منظور تعریف دیورژانس، عملگر نابلا را معرفی می‌کنیم. پیش از آن به چند تعریف اولیه نیاز است.

۵.۶.۹ تعریف. فرض کنید $\mathbf{F}=\overrightarrow{(P,Q,R)}$ یک میدان برداری است. در صورتی می‌گوئیم $\mathbf{F}$ مشتقپذیر است که توابع سه متغیره P، Q و R مشتقپذیر باشند.

۶.۶.۹ تعریف. عملگر نابلا ∇ را به صورت

$$\nabla:=\overrightarrow{\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)}=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

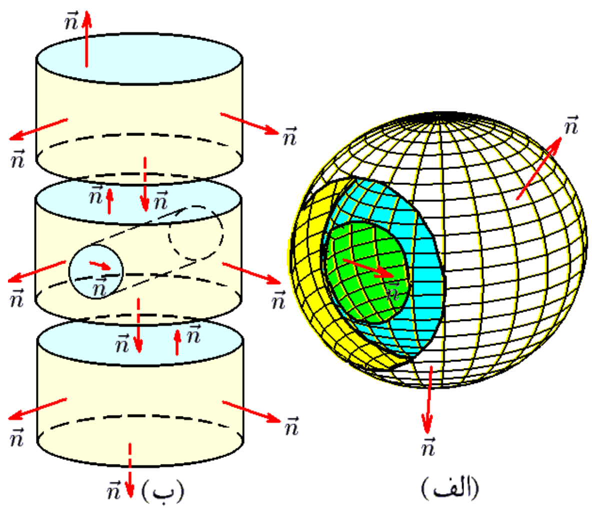
تعریف می‌کنیم. این عملگر بر توابع سه متغیره عمل می‌کند. به عنوان مثال اگر $f(x,y,z)$ تابعی سه متغیره و دیفرانسیلپذیر باشد، در این صورت حاصل عمل ∇ بر f عبارت از $\overrightarrow{\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$ خواهد بود. این تابع جدید را با نماد ∇f نشان می‌دهیم. روشن است که ∇f همان مشتق f می‌باشد. در برخی از مراجع ∇f را **گرادیان** f نامیده و با نماد $\mathrm{grad}(f)$ نشان می‌دهند.

به سادگی با استفاده از خواص مشتق، می‌توان اثبات نمود که:

۷.۶.۹ قضیه. اگر f و g توابع سه متغیرهٔ دیفرانسیلپذیر بوده و a عددی حقیقی باشد، در این صورت

$$۱)\ \nabla(f+ag)=\nabla f+a\nabla g\quad ۲)\ \nabla(fg)=g\nabla f+f\nabla g$$

$$۳)\ \nabla(f/g)=(۱/g^۲)\Big(g\nabla f-f\nabla g\Big)$$



شکل ۲۱.۹: قسمتهای ۲ و ۳ از ۴.۶.۹

۸.۶.۹ تعریف. فرض کنید $\mathbf{F}=\overrightarrow{(P,Q,R)}$ یک میدان مشتقپذیر باشد، در این صورت **دیورژانس** (یعنی، واگرایی) میدان برداری $\mathbf{F}$ را به صورت $\nabla\boldsymbol{\cdot}\mathbf{F}$ تعریف نموده و با نماد $\mathrm{div}(\mathbf{F})$ نشان می‌دهیم:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F})=\nabla\boldsymbol{\cdot}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

۹.۶.۹ قضیه. فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ میدانهای برداری مشتقپذیر و f تابع سه متغیرهٔ مشتقپذیر و a عددی حقیقی باشد، در این صورت

$$۱)\ \mathrm{div}(\mathbf{F}+a\mathbf{G})=\mathrm{div}(\mathbf{F})+a\,\mathrm{div}(\mathbf{G})$$

$$۲)\ \mathrm{div}(f\mathbf{F})=(\nabla f)\boldsymbol{\cdot}\mathbf{F}+f\,\mathrm{div}(\mathbf{F})$$

$$۳)\ \mathrm{div}(\mathbf{F}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{G})=\mathbf{G}\boldsymbol{\cdot}\mathrm{div}(\mathbf{F})+\mathbf{F}\boldsymbol{\cdot}\mathrm{div}(\mathbf{G})$$

۱۰.۶.۹ قضیهٔ گاوس. فرض کنید S رویه‌ای بسته با جهت استاندارد $\mathbf{n}$ است و سطح خارجی مجموعهٔ Ω می‌باشد $(S=\partial\Omega)$. فرض کنید میدان برداری $\mathbf{F}$ بر درون S مشتقپذیر و بر Ω پیوسته باشد، در این صورت

$$\oiint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dV$$

اثبات: فرض کنیم $\mathbf{F}=\overrightarrow{(P,Q,R)}$. در این صورت

$$\oiint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma = \oiint_{(S)} P.\mathbf{i}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma + \oiint_{(S)} P.\mathbf{j}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma + \oiint_{(S)} P.\mathbf{k}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$$

و

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dV = \iiint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial x}\,dV + \iiint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV + \iiint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

بنابراین، بجای اثبات قضیهٔ دیورژانس می‌توانیم تساویهای زیر را اثبات کنیم:

$$\begin{aligned}
\oiint_{(S)} P.\mathbf{i}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial x}\,dV,\\
\oiint_{(S)} Q.\mathbf{i}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV,\\
\oiint_{(S)} R.\mathbf{i}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV.
\end{aligned}$$

که شبیه هم هستند. در نتیجه، کافی است سومی را اثبات کنیم. برای این منظور، فرض کنیم رویهٔ S را به صورت $S_۱+S_۲$ بتوانیم بنویسیم که

$$\begin{aligned}
S_۱ &: \quad z=f(x,y)\,;\,(x,y)\in D,\ \ \mathbf{n}_۱ \text{رو به بالا},\\
S_۲ &: \quad z=g(x,y)\,;\,(x,y)\in D,\ \ \mathbf{n}_۲ \text{رو به پایین}.
\end{aligned}$$

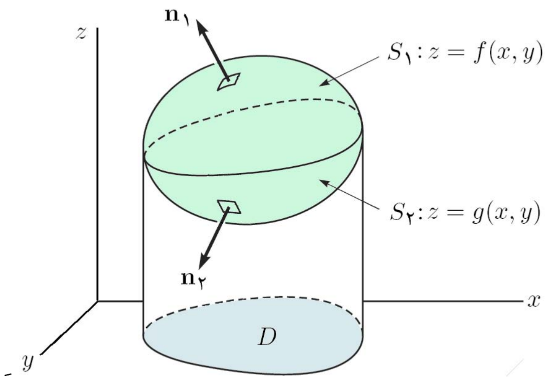
به شکل ۲۲.۹ توجه شود. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_۱\,d\sigma_۱ &= \frac{(z-f)'}{|(z-f)_z|}\,dxdy = \overrightarrow{\Big(-f_x,-f_y,۱\Big)}\,dxdy,\\
\mathbf{n}_۲\,d\sigma_۲ &= \frac{(g-z)'}{|(g-z)_z|}\,dxdy = -\overrightarrow{\Big(g_x,g_y,-۱\Big)}\,dxdy.
\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\oiint_{(S)} R.\mathbf{k}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_{(S_۱)} R.\mathbf{k}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma + \iint_{(S_۲)} R.\mathbf{k}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma\\
&= \iint_{D} R(x,y,f(x,y)).\mathbf{k}\bullet\overrightarrow{\Big(-f_x,-f_y,۱\Big)}\,dxdy\\
&\quad + \iint_{D} R(x,y,g(x,y)).\mathbf{k}\bullet\overrightarrow{\Big(g_x,g_y,-۱\Big)}\,dxdy\\
&= \iint_{D} \Big(R(x,y,f(x,y))-R(x,y,g(x,y))\Big)\,dxdy\\
&= \iint_{D} \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right] dxdy\\
&= \iiint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV
\end{aligned}$$

دو مورد دیگر به صورت مشابه اثبات می‌گردد. □



شکل ۲۲.۹

۱۱.۶.۹ مثال. ۱) حل مجدد قسمت ۴ از مثال ۱۲.۴.۹. در اینجا

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(۱-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = ۱$$

و S سطح خارجی مجموعهٔ

$$\Omega\ :\ \frac{۱}{۲a}(x^۲+y^۲) \le z \le ۲a+\sqrt{۴a^۲-x^۲-y^۲}\,;\,(x,y)\in D$$

است. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\oiint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dV\\
&= \iiint_{\Omega} dV = \iint_{D} \left[\int_{(x^۲+y^۲)/۲a}^{۲a+\sqrt{۴a^۲-x^۲-y^۲}} dz\right] dA\\
&= \iint_{D} \left\{۲a+\sqrt{۴a^۲-x^۲-y^۲}-\frac{x^۲+y^۲}{۲a}\right\} dA\\
&= \iint_{D'} \left\{۲a+\sqrt{۴a^۲-r^۲}-\frac{r^۲}{۲a}\right\} r\,dA'\\
&= \left(\int_{\circ}^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_{\circ}^{۲a} \left\{۲a+\sqrt{۴a^۲-r^۲}-\frac{r^۲}{۲a}\right\} r\,dr\right)\\
&= (۲\pi)\left(-\frac{۲۸}{۳}\right) = -\frac{۵۶}{۳}\pi
\end{aligned}$$

مثال ۲) حل مجدد قسمت ۵ از مثال ۱۲.۴.۹. در اینجا

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(۲y) + \frac{\partial}{\partial z}(۳x) = ۲$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\oiint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{F})\,dV = ۲\iiint_{\Omega} dV \\ &= ۲\mathrm{Vol}(\Omega) = ۲\times\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^{۳} = ۷۲\pi\end{aligned}$$

مثال ۳) حل مجدد قسمت ۲ از مثال ۲.۵.۹. در اینجا

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(y) = ۱$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\oiint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{F})\,dV = \iiint_{\Omega} dV \\ &= \mathrm{Vol}(\Omega) = \pi\times ۲^{۲}\times ۲ = ۸\pi\end{aligned}$$

زیرا، حجم استوانه برابر مساحت قاعده ضرب در ارتفاع آن می‌باشد.

مثال ۴) فرض کنید S سطح خارجی کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = ۴z$ است و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x^{۳},y^{۳},z^{۳})}$. انتگرال $\mathbf{F}$ را بر S محاسبه کنید.

حل. در اینجا S یک رویهٔ بسته است و اگر فرض شود $\Omega : x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \le ۴z$، آنگاه $S = \partial\Omega$. در نتیجه، بنابه قضیهٔ گاوس داریم

$$\begin{aligned}\oiint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{F})\,dV \\ &= \iiint_{\Omega} ۳(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})\,dV = ۳\iiint_{\Omega'} \rho^{۲}\rho^{۲}\sin\varphi\,dV' \\ &= ۳\left(\int_{۰}^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_{۰}^{\pi/۲}\left[\int_{۰}^{۴\cos\varphi} \rho^{۴}\sin\varphi\,d\rho\right]d\varphi\right) \\ &= ۶\pi\int_{۰}^{\pi/۲} \frac{۴۵}{۵}\cos^{۵}\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{۴۵}{۵}\pi\end{aligned}$$

که در اینجا

$$\Omega' : ۰\le\theta\le ۲\pi\,,\ ۰\le\varphi\le\pi/۲\,,\ ۰\le\rho\le ۴\cos\varphi$$

تصویر Ω در مختصات کروی است.

مثال ۵) در صورتی که S قسمتی از سهمی‌گون $z = x^{۲}+y^{۲}$ باشد که توسط صفحهٔ $z = ۹$ برش خورده است و $\mathbf{n}$ رو به جهت منفی $z-$محور باشد و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(z^{۳},y^{۳},x^{۳})}$. انتگرال $\mathbf{F}$ بر S را محاسبه کنید.

حل. این رویه را به کمک $S_{۱}$ قسمتی از صفحهٔ $z = ۹$ که توسط استوانهٔ $x^{۲}+y^{۲} = ۹$ جدا شده است، به یک رویهٔ بسته تبدیل می‌کنیم. به شکل ۲۳.۹ توجه شود. پس اگر فرض کنیم $D : x^{۲}+y^{۲}\le ۹$، آنگاه

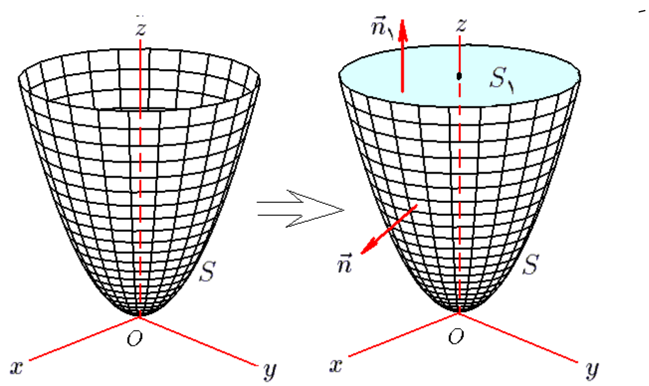
$$\begin{aligned} S &: z = x^{۲}+y^{۲}\,;\ (x,y)\in D \\ S_{۱} &: z = ۹\,;\ (x,y)\in D\end{aligned}$$

و بردار $\mathbf{n}_{۱}$ بر $S_{۱}$ را رو به جهت مثبت $z-$محور می‌گیریم. در واقع، $\mathbf{n}_{۱} = \mathbf{k}$. اکنون فرض کنیم درون S مجموعهٔ

$$\Omega : z = x^{۲}+y^{۲}\,;\ (x,y)\in D$$

باشد. یعنی، $S+S_{۱}$ لبهٔ Ω باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}\iint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \oiint_{(S+S_{۱})} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma - \iint_{(S_{۱})} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma \\ &= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{F})\,dV - \iint_{(S_{۱})} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma \\ &= ۳\iiint_{\Omega} y^{۲}\,dV - \iint_{D} \mathbf{F}\bullet\mathbf{k}\,dxdy \\ &= ۳\iint_{D}\left[\int_{x^{۲}+y^{۲}}^{۹} y^{۲}\,dz\right]dA - \iint_{D} x^{۳}\,dxdy \\ &= \iint_{D}\left\{۲۷y^{۲} - ۳y^{۲}(x^{۲}+y^{۲}) - x^{۳}\right\}dxdy \\ &= \iint_{D'}\left\{۲۷r^{۲}\cos^{۲}\theta - ۳r^{۴}\sin^{۲}\theta - r^{۳}\cos^{۳}\theta\right\}r\,drd\theta \\ &= \int_{۰}^{۳}\left[\int_{۰}^{۲\pi}\left\{۲۷r^{۳}\cos^{۲}\theta - ۳r^{۵}\sin^{۲}\theta - r^{۴}\cos^{۳}\theta\right\}d\theta\right]dr \\ &= ۳\pi\int_{۰}^{۳}\left\{۹ - r^{۵}\right\}dr = \frac{۳۶}{۴}\end{aligned}$$



شکل ۲۳.۹: قسمت ۵ از مثال ۱۱.۶.۹

۱۲.۶.۹ تمرین. در تمرینات ۱ تا ۸، قضیهٔ گاوس را برای میدان برداری $\mathbf{F}$ و رویهٔ داده شده تحقیق کنید.

۱) $\mathbf{F} = x\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+(x+y+z)\mathbf{k}$ و S سطح خارجی ناحیهٔ محدود به کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = ۹$ واقع در بالای صفحهٔ $z = ۰$ است.

۲) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x^{۳},x^{۲}y,x^{۲}z)}$ و S سطح خارجی ناحیهٔ محدود به استوانه $x^{۲}+y^{۲} = ۱$ و صفحات $z = ۰$ و $z = ۱$ است.

۳) Ω حجم محدود به نیمهٔ بالایی کرهٔ به مرکز در مبداء و شعاع ۲ و xy−صفحه است، S سطح خارجی Ω است و همچنین $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x-y,y,z-x)}$.

۴) Ω حجم محدود به دو سهمیگون $y=x^۲+z^۲$ و $y=۸-x^۲-z^۲$ است، S سطح خارجی Ω است و همچنین $\mathbf{F}=\overrightarrow{(xz^۲,yx^۲,-۲yz)}$.

۵) Ω حجم محدود به مخروط قائم $z^۲=x^۲+y^۲$ و صفحهٔ $z=۲$ است، S سطح خارجی Ω است و همچنین $\mathbf{F}=\overrightarrow{(۲x-y,z,z-x)}$.

۶) Ω حجم محدود به استوانهٔ $x^۲+y^۲=۴$ و صفحات $z=۰$ و $z=۲$ است که در یک هشتم دوم قرار دارد، S سطح خارجی Ω است و همچنین $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x^۲,y^۲,z^۲)}$.

۷) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,۲y,۳z)}$ و S سطح خارجی ناحیهٔ محدود به استوانه $x^۲+y^۲=۹$ و صفحات $z=۰$ و $z=۲$ است.

۸) $\mathbf{F}=(x^۲+y^۲+z^۲)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ و S سطح خارجی کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است.

در تمرینات ۹ تا ۱۵، انتگرال $\mathbf{F}$ بر S به کمک قضیهٔ گاوس محاسبه کنید.

۹) $\mathbf{F}=x^۳\mathbf{i}+y^۳\mathbf{j}+z^۳\mathbf{k}$ و S سطح خارجی کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است.

۱۰) Ω ناحیهٔ محدود به صفحات مختصاتی و نیز صفحهٔ $۲x+۲y+z=۶$ است، S سطح خارجی Ω است و همچنین $\mathbf{F}=\overrightarrow{(۲xy+z,y^۲,x-۳y)}$.

۱۱) $\mathbf{F}=\sqrt{\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}}\overrightarrow{(۱,۱,۱)}$ و S سطح خارجی بیضی‌گون $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ است.

۱۲) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(ax^۴,by^۴,cz^۴)}$ و S سطح خارجی ناحیهٔ محدود به صفحات $x=\pm a$، $y=\pm b$ و $z=\pm c$ است.

۱۳) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(yz+x^۳,xz+y^۳,xy+z^۳)}$ و S سطح خارجی ناحیهٔ محدود به دو مخروط $y=۴-۳\sqrt{x^۲+z^۲}$ و $y=\sqrt{x^۲+z^۲}$ است.

۱۴) S سطح خارجی $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=۱$ است و $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x-y+z,y-z+x,z-x+y)}$.

۱۵) فرض کنید Ω یک حجم سر بعدی است و $S=\partial\Omega$ و $(۰,۰,۰)\notin S$. همچنین فرض کنید $\mathbf{r}=(x,y,z)$ و $r=\|\mathbf{r}\|$. در این صودت نشان دهید که اگر $\mathbf{n}$ جهت استاندارد بر S باشد، آنگاه

$$\oiint_{(S)}\frac{\mathbf{r}}{r^۳}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma=\begin{cases}۴\pi & (۰,۰,۰)\in\Omega \text{ اگر}\\ ۰ & (۰,۰,۰)\notin\Omega \text{ اگر}\end{cases}$$

۱۳.۶.۹ تعبیر فیزیکی قضیهٔ گاوس. فرض کنید میدان برداری دیفرانسیلپذیر $\mathbf{F}$ بر سراسر ناحیهٔ Ω از فضا تعریف شده و $X_۰\in\Omega$. فرض کنید S یک رویهٔ بسته است و $X_۰$ نقطه‌ای درونی از آن می‌باشد و $\mathbf{n}$ رو به بیرون از Ω هدف دارد. در این صورت متوسط شار عبوری از S توسط $\mathbf{F}$ عبارت است از $\oiint_{(S)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma\div\iint_{(S)}d\sigma$. حالت حدی این مقدار را هنگامی که Ω به تک نقطه $X_۰$ میل می‌کند، دیورژانس یا واگرایی $\mathbf{F}$ در $X_۰$ می‌نامیم:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})=\lim_{\Omega\to\{X_۰\}}\left(\oiint_{(S)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma\right)\div\left(\iint_{(S)}d\sigma\right)$$

بر همین اساس، قضیهٔ گاوس را به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

۱۴.۶.۹ قضیهٔ گاوس. اگر S سطح خارجی حجم Ω باشد، آنگاه میزان شار عبوری از S توسط میدان برداری دیفرانسیلپذیر $\mathbf{F}$ با مقدار کل واگرایی میدان $\mathbf{F}$ بر حجم Ω برابر است.

۱۵.۶.۹ کاربرد قضیهٔ گاوس در محاسبهٔ حجم. فرض کنید Ω یک جسم سه بعدی است و S سطح خارجی آن می‌باشد، در این صورت حجم Ω را به شکل

$$\operatorname{Vol}(\Omega)=\frac{۱}{۳}\oiint_{(S)}\overrightarrow{(x,y,z)}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$$

می‌توان محاسبه نمود. چنانچه S توسط تنها یک نقشه $\mathbf{r}$ با دامنهٔ D توصیف گردد. در این صورت

$$\operatorname{Vol}(\Omega)=\frac{۱}{۳}\iint_{D}\left|[\mathbf{r},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]\right|\,dA$$

که کروشهٔ $[\mathbf{r},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]$ ضرب سه گانهٔ بردارها است: $[\mathbf{r},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]=\mathbf{r}\bullet(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)$. بعبارت دیگر، دترمینان ماتریسی است ک سطرهای آن سه بردار $\mathbf{r}$، $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$ هستند.

۱۶.۶.۹ مثال. ۱) مساحت سطح حاصل از دوران نمودار تابع مثبت $y=f(x)$ با $a\le x\le b$ حول x−محور را محاسبه کنید.

حل. فرض کنیم رویه مورد نظر را S بنامیم. چنانچه نقطهٔ دلخواه $X_۰=(x_۰,f(x_۰),۰)$ از نمودار تابع داده شده را باندازهٔ θ حول x−محور دوران داده و نقطهٔ $X=(x,y,z)\in S$ حاصل شود، آنگاه فاصلهٔ نقطه X تا x−محور برابر فاصلهٔ $X_۰$ تا این محور است، یعنی $\sqrt{x^۲+y^۲}=f(x_۰)$. بعلاوه، x−مختص این دو

نقطه باید یکی باشد، بنابراین $x = x$. همچنین، $z/y = \tan\theta$. در نتیجه

$$y = f(x)\cos\theta, \quad z = f(x)\sin\theta.$$

بنابراین، رویهٔ S را به صورت

$$\mathbf{r}(x,\theta) = \overrightarrow{\left(x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta\right)}$$

می‌توان پارامتره نمود، که در آن

$$D\,:\, a \le x \le b,\ \circ \le t \le ۲\pi.$$

به این ترتیب، المان مساحت چنین است:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta\right\| dx d\theta \\ &= \left\|\overrightarrow{\left(۱, f'(x)\cos\theta, f'(x)\sin\theta\right)} \right. \\ &\qquad \left. \times \overrightarrow{\left(\circ, -f(x)\sin\theta, f(x)\cos\theta\right)}\right\| dx d\theta \\ &= \left\|\overrightarrow{\left(f(x)f'(x), -f(x)\cos\theta, -f(x)\sin\theta\right)}\right\| dx d\theta \\ &= f(x)\sqrt{۱ + \left(f'(x)\right)^۲}\, dx d\theta \end{aligned}$$

درنتیجه، مساحت رویهٔ مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(S) &= \iint\limits_{(S)} d\sigma = \iint\limits_{D} f(x)\sqrt{۱ + \left(f'(x)\right)^۲}\, dx d\theta \\ &= \int_\circ^{۲\pi} \left[\int_a^b f(x)\sqrt{۱ + \left(f'(x)\right)^۲}\, dx\right] d\theta \\ &= ۲\pi \int_a^b f(x)\sqrt{۱ + \left(f'(x)\right)^۲}\, dx \end{aligned}$$

البته این فرمول در ریاضی عمومی یک، به کمک انتگرال معین نیز اثبات شده است.

۲) فرض کنید تیوب S از دوران دایرهٔ به شعاع a و مرکز در $(b.\circ.\circ)$ واقع در xz−صفحه حول z−محور حاصل شده است. حجم S را محاسبه کنید.

حل. معادلهٔ چنین رویه‌ای عبارت از

$$S\,:\,\left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - b\right)^۲ + z^۲ = a^۲$$

است که آن را به شکل

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{\left((a\cos u + b)\cos v, (a\cos u + b)\sin v, a\sin u\right)}$$

$$D\,:\,\circ \le u \le ۲\pi\,,\ \circ \le v \le ۲\pi$$

می‌توان پارامتره نمود. در نتیجه، حجم S عبارت است از

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{۱}{۳}\oiint\limits_{(S)} \overrightarrow{(x,y,z)} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{۱}{۳}\oiint\limits_{D} \left|\left[\mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right]\right| dudv$$

$$\begin{aligned} &= \frac{۱}{۳}\oiint\limits_{D} \left\| \begin{matrix} (a\cos u + b)\cos v & (a\cos u + b)\sin v & a\sin u \\ -a\sin u\cos v & -a\sin u\sin v & a\cos u \\ -(a\cos u + b)\sin v & (a\cos u + b)\cos v & \circ \end{matrix} \right\| dudv \\ &= \frac{a}{۳}\oiint\limits_{D} (a\cos u + b)(b\cos u + a)\, dudv \\ &= \frac{a}{۳}\Big(\int_\circ^{۲\pi} dv\Big)\Big(\int_\circ^{۲\pi} \big(ab\cos^۲ u + (a^۲ + b^۲)\cos u + ab\big)\, du\Big) \\ &= ۲\pi a^۲ b \end{aligned}$$

مثال ۳) حجم محدود به

$$(x/a)^{۲/n} + (y/b)^{۲/n} + (z/c)^{۲/n} = ۱$$

را محاسبه کنید، که n عددی فرد است.

حل. حجم محدود به این رویه عبارت از

$$\Omega\,:\,(x/a)^{۲/n} + (y/b)^{۲/n} + (z/c)^{۲/n} \le ۱$$

است. رویهٔ $S = \partial\Omega$ را به کمک مختصات کروی تعمیم یافته پارامتره می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم $x = a(\sin u\cos v)^n$، $y = b(\sin u\sin v)^n$ و $z = c\cos^n u$. در نتیجه، نقشهٔ بیانگر کل S عبارت است از

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{\left(a\sin^n u\cos^n v, b\sin^n u\sin^n v, a\cos^n u\right)}$$

که دامنهٔ آن عبارت است از $D\,:\,\circ \le u \le \pi\,,\ \circ \le v \le ۲\pi$. بنابراین، $[\mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ برابر

$$\left\| \begin{matrix} \begin{matrix} a\sin^n u \\ \times\cos^n v \end{matrix} & \begin{matrix} b\sin^n u \\ \times\sin^n v \end{matrix} & a\cos^n u \\ \begin{matrix} na\cos u \\ \times\sin^{n-۱} u\cos^n v \end{matrix} & \begin{matrix} nb\cos u \\ \times\sin^{n-۱} u\sin^n v \end{matrix} & \begin{matrix} -na\sin u \\ \times\cos^{n-۱} u \end{matrix} \\ \begin{matrix} -na\sin^n u \\ \times\sin v\cos^{n-۱} v \end{matrix} & \begin{matrix} nb\sin^n u \\ \times\cos v\sin^{n-۱} v \end{matrix} & \circ \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{n^۲ abc}{۳}\big(\sin u\cos u\sin v\cos v\big)^{n-۱}\sin u$$

است و در نتیجه، حجم Ω برابر

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\Omega) &= \frac{۱}{۳}\oiint\limits_{D} \left|\left[\mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right]\right| dudv \\ &= \frac{n^۲ abc}{۳}\oiint\limits_{D} \left|\big(\sin u\cos u\sin v\cos v\big)^{n-۱}\sin u\right| dudv \\ &= \frac{n^۲ abc}{۳}\left(\int_\circ^\pi |\cos u|^{n-۱}(\sin u)^n\, du\right) \\ &\qquad \times\left(\int_\circ^{۲\pi} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} |\sin(۲v)|^{n-۱}\, dv\right) \\ &\overset{(۱)}{=} \frac{n^۲ abc}{۳\times ۲^{n+۲}}\left(\int_\circ^۱ t^{-۱+n/۲}(۱-t)^{(n-۱)/۲}\, dt\right) \\ &\qquad \times\left(\int_\circ^۱ s^{-۱/۲}(۱-s)^{n-۱}\, dv\right) \\ &\overset{(۲)}{=} \frac{n^۲ abc}{۳\times ۲^{n+۲}} B\left(\frac{n}{۲}, \frac{n+۱}{۲}\right) B\left(\frac{۱}{۲}, n\right) \end{aligned}$$

است. توضیح این که در (۱) فرض شده است $t = \cos^2 u$ و $s = \cos^2(2v)$ و در (۲) از تابع بتا استفاده گردیده است: $B(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$.

۱۷.۶.۹ تمرین. حجم محدود به هر یک از رویه‌های زیر را به کمک قضیهٔ گاوس محاسبه کنید:

۱) $x^2+y^2+z^2=R^2$

۲) $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2-z^2$

۳) $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2$

۴) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ 0<a\le z\le b\le R$

۵) $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-x_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2=1$

۶) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$

۷) $\left(\sum_{i=1}^{3}a_{i1}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{3}a_{i2}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{3}a_{i3}x_i\right)^2=1$

که $A=[a_{ij}]$ ماتریس 3×3 با دترمینان مخالف صفر است.

۸) منحنی بستهٔ $C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(x(t),y(t))}\ ;\ a\le t\le b$ را حول x–محور دوران داده و به رویهٔ S رسیده‌ایم.

۹) فرض کنید $0<a<b$. نشان دهید که مساحت سطح حاصل از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول x–محور، برابر $2\pi(\sqrt{1-e^2}+\frac{1}{e}\arcsin e)$ است، که در آن e برابر $\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}$ فرض شده است.

۱۰) نشان دهید که مساحت سطح جدا شده از سطح کرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=2ay$ توسط نیم مخروط $y=\sqrt{Ax^2+By^2}$ برابر $\frac{4a\pi}{\sqrt{(1+A)(1+B)}}$ است.

۱۱) نشان دهید که مساحت سطح جدا شده از سطح کرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=2ay$ توسط سهمی‌گون بیضوی $y=Ax^2+By^2$ برابر $\frac{2a\pi}{\sqrt{AB}}$ است.

۷.۹ میدانهای چرخشی

همانند میدانهای برداری ابقایی، که انتگرال خط نسبت به آنها به مسیر بستگی نداشت، میدانهای چرخشی را می‌توان تعریف نمود که انتگرال سطح در آنها تنها به لبهٔ سطح بستگی دارد نه به محتوی آن!

۱.۷.۹ تعریف. فرض کنید Ω زیر مجموعه‌ای از فضا و میدان برداری $\mathbf{F}$ بر آن تعریف گردد. در صورتی $\mathbf{F}$ بر Ω **چرخشی** است که بازاء هر دو سطح جهتدار S_1 و S_2 واقع در Ω که لبهٔ آنها (به عنوان یک منحنی جهتدار) یکی باشد، داشته باشیم $\iint_{(S_1)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_{(S_2)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$. به بیان ساده‌تر، انتگرال سطح در Ω تنها به لبهٔ سطح بستگی داشته باشد.

۲.۷.۹ قضیه. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ستاره شکل است (برای مشاهدهٔ تعریف مجموعهٔ ستاره شکل به ۱۴.۱۲.۵ مراجعه شود) و میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(P,Q,R)}$ بر سرتاسر Ω دیفرانسیلپذیر می‌باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:

الف) $\mathbf{F}$ بر Ω چرخشی است.

ب) به ازای هر رویهٔ بستهٔ S در Ω، انتگرال $\mathbf{F}$ بر S صفر است.

ج) $\operatorname{div}(\mathbf{F})=0$ بر Ω.

د) اگر $\omega=P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$، آنگاه ۲–فرم ω بر Ω دقیق است و بنابراین، کامل می‌باشد (برای تعریف فرم دقیق و کامل به ۲۱.۱۲.۵ توجه شود).

ه) میدان برداری دیفرانسیلپذیر $\mathbf{G}=\overrightarrow{(f,g,h)}$ چنان وجود دارد که $\mathbf{F}=\operatorname{Curl}(\mathbf{G})$. به این معنی که به ازای هر $(x,y,z)\in\Omega$ ای $P=\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}$، $Q=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x}$ و $R=\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}$.

۳.۷.۹ تعریف. چنانچه $\mathbf{F}$ بر Ω چرخشی باشد و داشته باشیم $\mathbf{F}=\operatorname{Curl}(\mathbf{G})$، آنگاه $\mathbf{G}$ را **مولد** $\mathbf{F}$ بر Ω می‌نامیم.

۴.۷.۹ قضیه. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ستاره شکل بوده و میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(P,Q,R)}$ بر Ω چرخشی باشد و $\mathbf{G}=\overrightarrow{(f,g,h)}$ مولد $\mathbf{F}$ باشد، یعنی $\mathbf{F}=\operatorname{Curl}(\mathbf{G})$. در این صورت

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^1 t\Big[z\,Q(tx,ty,tz) \\
&\qquad -y\,R(tx,ty,tz)\Big]\,dt+\varphi(x,y,z),\\
g(x,y,z) &= \int_0^1 t\Big[x\,R(tx,ty,tz) \\
&\qquad -z\,P(tx,ty,tz)\Big]\,dt+\psi(x,y,z),\\
h(x,y,z) &= \int_0^1 t\Big[y\,P(tx,ty,tz) \\
&\qquad -x\,Q(tx,ty,tz)\Big]\,dt+\eta(x,y,z).
\end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{H}=\overrightarrow{(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z),\eta(x,y,z))}$ یک میدان برداری دیفرانسیلپذیر کامل دلخواه است (به بیان دیگر، داریم $\operatorname{Curl}(\mathbf{H})=\mathbf{0}$).

۵.۷.۹ مثال. ۱) فرض کنید $\mathbf{F}=\overrightarrow{(xy,z^2,xy^2)}$. در این صورت $\operatorname{div}(\mathbf{F})=y\neq 0$ و بنابرین، میدان برداری $\mathbf{F}$ چرخشی نیست.

مثال ۲) فرض کنید $\mathbf{F}=\overrightarrow{(1/y,1/z,1/x)}$. در این صورت $D_{\mathbf{F}}=\mathbb{R}^3-U$ که U اجتماع صفحات مختصاتی است. این مجموعه ستاره شکل نیست. فرض کنیم $\Omega\subset D_{\mathbf{F}}$ زیر مجموعه‌ای ستاره شکل باشد که تماماً در $D_{\mathbf{F}}$ قرار می‌گیرد. در این صورت $\operatorname{div}(\mathbf{F})=0$ و بنابرین، $\mathbf{F}$ بر Ω چرخشی است. برای بدست آوردن مولد $\mathbf{G}=\overrightarrow{(f,g,h)}$، از ۴.۷.۹ استفاده می‌کنیم. در این صورت، داریم

$$f-\varphi(x,y,z)=\int_0^1 t\big[z\,Q(tx,ty,tz)-y\,R(tx,ty,tz)\big]\,dt$$
$$=\int_0^1 t\left[\frac{1}{t}-\frac{y}{tx}\right]dt=\left[t-\frac{y}{x}t\right]_0^1=1-\frac{y}{x}$$
$$g-\psi(x,y,z)=\int_0^1 t\big[x\,R(tx,ty,tz)-z\,P(tx,ty,tz)\big]\,dt$$
$$=\int_0^1 t\left[\frac{1}{t}-\frac{z}{ty}\right]dt=\left[t-\frac{z}{y}t\right]_0^1=1-\frac{z}{y}$$
$$h-\eta(x,y,z)=\int_0^1 t\big[y\,P(tx,ty,tz)-x\,Q(tx,ty,tz)\big]\,dt$$
$$=\int_0^1 t\left[\frac{1}{t}-\frac{x}{zt}\right]dt=\left[t-\frac{x}{z}t\right]_0^1=1-\frac{x}{z}$$

به این ترتیب $\mathbf{G}$ عبارت است از

$$\mathbf{G}=\overrightarrow{(1-y/x\,,\ 1-z/y\,,\ 1-x/z)}+\mathbf{H}$$

است که $\mathbf{H}=\overrightarrow{(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z),\eta(x,y,z))}$ یک میدان برداری دیفرانسیلپذیر کامل دلخواه است.

مثال ۳) فرض کنید $\mathbf{F}=\overrightarrow{(z^3+x^2,x^3+z,y^3-2xz)}$. در این صورت $\Omega=\mathbb{R}^3$ که مجموعه‌ای ستاره شکل است و $\operatorname{div}(\mathbf{F})=2x+0-2x=0$. بنابرین، $\mathbf{F}$ بر Ω چرخشی است. برای بدست آوردن مولد $\mathbf{G}=\overrightarrow{(f,g,h)}$، از ۴.۷.۹ استفاده می‌کنیم:

$$f-\varphi(x,y,z)=\int_0^1 t\big[z\,Q(tx,ty,tz)-y\,R(tx,ty,tz)\big]\,dt$$
$$=\int_0^1 t\big[z(x^3t^3+zt)-y(y^3t^3-2xzt^2)\big]\,dt$$
$$=\left[zx^3\frac{t^5}{5}+z^2\frac{t^3}{3}-y^4\frac{t^5}{5}+2xyz\frac{t^4}{4}\right]_0^1$$
$$=\frac{zx^3}{5}+\frac{z^2}{3}-\frac{y^4}{5}+\frac{xyz}{2}$$
$$g-\psi(x,y,z)=\int_0^1 t\big[x\,R(tx,ty,tz)-z\,P(tx,ty,tz)\big]\,dt$$
$$=\int_0^1 t\big[x(y^3t^3-2xzt^2)-z(z^3t^3+x^2t^2)\big]\,dt$$
$$=\left[xy^3\frac{t^5}{5}-2x^2z\frac{t^4}{4}-z^4\frac{t^5}{5}-zx^2\frac{t^4}{4}\right]_0^1$$
$$=\frac{xy^3}{5}-3\frac{x^2z}{4}-\frac{z^4}{5}$$
$$h-\eta(x,y,z)=\int_0^1 t\big[y\,P(tx,ty,tz)-x\,Q(tx,ty,tz)\big]\,dt$$
$$=\int_0^1 t\big[y(z^3t^3+x^2t^2)-x(x^3t^3+zt)\big]\,dt$$
$$=\left[yz^3\frac{t^5}{5}+yx^2\frac{t^4}{4}-x^4\frac{t^5}{5}-xz\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\frac{yz^3}{5}+\frac{yx^2}{4}-\frac{x^4}{5}-\frac{xz}{3}$$

به این ترتیب $\mathbf{G}$ عبارت است از

$$\Big(\frac{zx^3}{5}+\frac{z^2}{3}-\frac{y^4}{5}+\frac{xyz}{2}\Big)\mathbf{i}+\Big(\frac{xy^3}{5}-3\frac{x^2y}{4}-\frac{z^4}{5}\Big)\mathbf{j}$$
$$+\Big(\frac{yz^3}{5}+\frac{yx^2}{4}-\frac{x^4}{5}-\frac{xz}{3}\Big)\mathbf{k}+\mathbf{H}$$

که $\mathbf{H}=\overrightarrow{(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z),\eta(x,y,z))}$ یک میدان برداری دیفرانسیلپذیر کامل دلخواه است.

مثال ۴) فرض کنید S قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=10$ است که در بالای صفحهٔ $z=1$ قرار دارد و بردار جهت $\mathbf{n}$ بر S رو به بیرون از مبداء دارد. انتگرال میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(z,y,x)}$ را بر S محاسبه کنید.

حل. چون $\operatorname{div}(\mathbf{F})=0$، پس $\mathbf{F}$ بر $\Omega=\mathbb{R}^3$ چرخشی است، و بنابراین مقدار انتگرال $\mathbf{F}$ بر S با انتگرال $\mathbf{F}$ بر هر رویه S_1 ای که لبهٔ آن (به عنوان یک منحنی جهتدار) برابر لبهٔ S باشد، یکسان است. چون لبهٔ رویهٔ S منحنی $C\,:\,x^2+y^2=9\,,\,z=1$ است، بنابرین می‌توانیم رویهٔ S_1 را قسمتی از صفحهٔ $z=1$ بگیریم که توسط کرهٔ داده شده جدا گردیده است و بعلاوه جهت بر آن را $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ می‌توانیم اختیار کنیم. به این ترتیب، اگر $D\,:\,x^2+y^2\leq 9$ تصویر S_1 بر $xy-$صفحه باشد، آنگاه

$$\iint\limits_{(S)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma=\iint\limits_{(S_1)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma=\iint\limits_{D}\overrightarrow{(z,y,x)}\bullet\mathbf{k}\,dxdy$$
$$=\iint\limits_{D}x\,dxdy=0$$

۶.۷.۹ تمرین. در هر مورد، نشان دهید که میدان برداری $\mathbf{F}$ بر مجموعهٔ Ω چرخشی است و سپس مولد آن را مشخص کنید:

۱) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(y-x+z,x-y+z,x+y+2z)}$ و $\Omega\,:\,\max\{|x|,|y|,|z|\}\leq 2$.

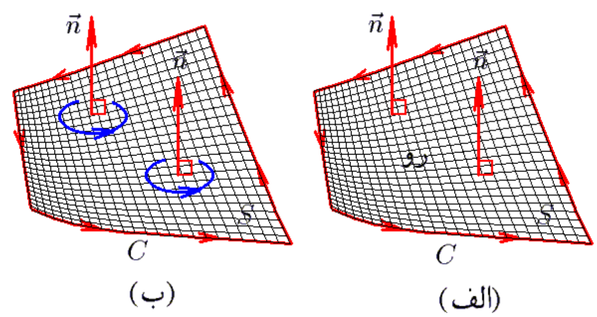
۲) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x^{۲} - xy - xz, y^{۲} - xy - yz, z^{۲} - xz - yz)}$ و $\Omega = \mathbb{R}^{۳}$.

۳) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x/y - x/z, y/z - y/x, z/x - z/y)}$ و $\Omega : ۱ \leq x, ۱ \leq y, ۱ \leq z$.

۴) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(۳y^{۲}z - ۳xz^{۲}, x^{۲}y, z^{۳} - x^{۲}z)}$ و $\Omega : x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \leq ۹$.

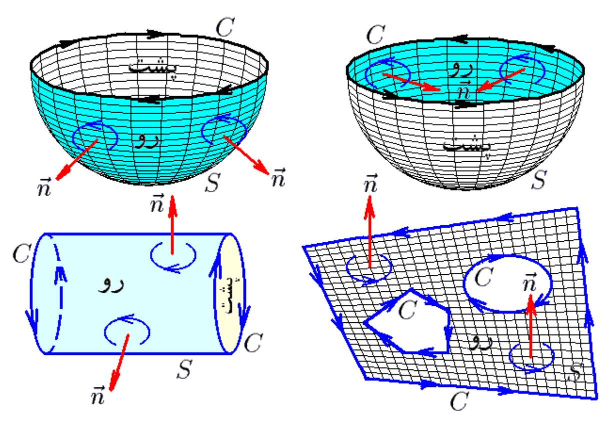
۸.۹ قضیهٔ استوکس

قضیهٔ استوکس تعمیم طبیعی قضیهٔ گرین به حالت منحنیهای فضایی است و به کمک آن انتگرال خط نوع دوم در فضا را به انتگرال سطح نوع دوم می‌توان تبدیل نمود. برای تفهیم صورت آن به دو تعریف جدید نیاز داریم که ذیلاً به بیان آنها خواهیم پرداخت.



شکل ۲۴.۹: جهت استاندارد بر لبهٔ یک رویه

۱.۸.۹ تعریف. فرض کنید S یک رویهٔ لبه‌دار و جهتدار با بردار جهت $\mathbf{n}$ و لبهٔ C است. منظور از جهت استاندارد در C، جهتی است که طی آن همواره روی S سمت چپ متحرک قرار دارد و یا به بیان معادل، جهت C با جهت تعریف شده توسط قاعدهٔ دست راست از روی بردارهای $\mathbf{n}$ سازگار است. به شکل ۲۴.۹ توجه شود.



شکل ۲۵.۹: مثال ۲.۸.۹

۲.۸.۹ مثال. در شکل ۲۵.۹ نمونه‌هایی از رویه‌های لبه‌دار و جهتدار به همراه جهت استاندارد بر لبهٔ آنها نشان داده شده است.

۳.۸.۹ تعریف. فرض کنید $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P, Q, R)}$ یک میدان برداری دیفرانسیلپذیر است. در این صورت **کِرل** یا **پیچش** $\mathbf{F}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) &:= \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)} \end{aligned}$$

۴.۸.۹ قضیه. فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ میدانهای برداری، f تابعی سه متغیره و a و b اعداد حقیقی‌اند. در این صورت

۱) $\operatorname{Curl}(a\,\mathbf{F} + b\,\mathbf{G}) = a\operatorname{Curl}(\mathbf{F}) + b\operatorname{Curl}(\mathbf{G})$

۲) $\operatorname{Curl}(f\,\mathbf{F}) = f\operatorname{Curl}(\mathbf{F}) + \nabla f \times \mathbf{F}$

۳) $\operatorname{div}(\operatorname{Curl}(\mathbf{F})) = ۰$

۴) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet \operatorname{Curl}(\mathbf{G})$

۵.۸.۹ قضیهٔ استوکس. فرض کنید S یک رویهٔ جهتدار و لبه‌دار با لبهٔ C است و جهت بر C نیز استاندارد می‌باشد. همچنین فرض کنید میدان برداری $\mathbf{F}$ بر سطح S مشتقپذیر و بر منحنی C پیوسته باشد، در این صورت

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$$

اثبات: فرض کنیم $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P, Q, R)}$. در این صورت

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + \oint_C Q\,dy + \oint_C R\,dz,$$

و

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(P.\mathbf{i}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma \\ &+ \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(Q.\mathbf{j}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(R.\mathbf{k}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma. \end{aligned}$$

بنابراین، بجای اثبات قضیهٔ استوکس می‌توانیم تساویهای زیر را اثبات کنیم:

$$\oint_C P\,dx = \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(P.\mathbf{i}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma,$$

$$\oint_C Q\,dy = \iint_{(S)} \mathrm{Curl}(Q.\mathbf{j}) \bullet \mathbf{n}\,d\sigma,$$
$$\oint_C R\,dz = \iint_{(S)} \mathrm{Curl}(R.\mathbf{k}) \bullet \mathbf{n}\,d\sigma.$$

که شبیه هم هستند. در نتیجه، کافی است اولی را اثبات کنیم. برای این منظور فرض کنیم رویهٔ S را به صورت $\mathbf{r}: D \to S$ پارامتره کنیم که $\mathbf{r}(u,v)=(x,y,z)$ و تصویر مرز D توسط $\mathbf{r}$ برابر C باشد: $C=\mathbf{r}(\partial D)$. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned}
\oint_C P\,dx &= \oint_{\partial D} P(\mathbf{r}(u,v))\,dx(u,v)\\
&= \oint_{\partial D} P.\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\,du+\frac{\partial x}{\partial v}\,dv\Big)\\
&\overset{(1)}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u}\Big(P.\frac{\partial x}{\partial v}\Big)-\frac{\partial}{\partial v}\Big(P.\frac{\partial x}{\partial u}\Big)\right)dudv\\
&= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}+P.\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}-\frac{\partial P}{\partial v}.\frac{\partial x}{\partial u}-P.\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\right)dudv\\
&= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial P}{\partial v}.\frac{\partial x}{\partial u}\right)dudv\\
&= \iint_D \left(\Big(\frac{\partial P}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial u}\Big).\frac{\partial x}{\partial v}\right.\\
&\qquad \left.-\Big(\frac{\partial P}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial v}\Big).\frac{\partial x}{\partial u}\right)dudv\\
&\overset{(1)}{=} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}.\Big(\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial x}{\partial u}\Big)\right.\\
&\qquad \left.-\frac{\partial P}{\partial y}.\Big(\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u}\Big)\right)dudv\\
&= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv\\
&= \iint_D \overrightarrow{\Big(0,\frac{\partial P}{\partial z},-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)} \bullet \overrightarrow{\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big)}\,dudv\\
&= \iint_{(S)} \mathrm{Curl}(P.\mathbf{i}) \bullet \mathbf{n}\,d\sigma
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از قاعده زنجیره‌ای مشتق استفاده کرده‌ایم و در (۲) از قضیهٔ گرین. □

۶.۸.۹ مثال. ۱) فرض کنید S قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=9$ است که در بالای xy−صفحه قرار دارد و بردار جهت $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت z−محور است و $\mathbf{F}=\overrightarrow{(z,x,y)}$. قضیهٔ استوکس را تحقیق کنید.

حل. ابتدا سمت چپ فرمول استوکس را محاسبه می‌کنیم. با توجه به جهت بر S، جهت C را به صورت مثلثاتی انتخاب می‌کنیم. به شکل ۲۶.۹—الف توجه شود. بنابراین

$$C \;:\; \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9\\ z=0\\ \text{با جهت مثلثاتی}\end{cases} \;:\; \begin{cases} x^2+y^2=9\\ z=0\\ \text{با جهت مثلثاتی}\end{cases}$$
$$:\;\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(3\cos t,3\sin t,0)}\;,\quad 0\le t\le 2\pi$$

و به این ترتیب، سمت چپ فرمول استوکس برابر است با

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &=\\
&= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{(0,3\cos t,3\sin t)} \bullet \overrightarrow{(-3\sin t,3\cos t,0)}\,dt\\
&= \int_0^{2\pi} 9\cos^2 t\,dt = 9\pi
\end{aligned}$$

حال سمت راست فرمول استوکس را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور ابتدا S را پارامتره می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
S &: \; z=\sqrt{9-x^2-y^2}\,;\;(x,y)\in D\\
D &: \; x^2+y^2\le 9
\end{aligned}$$

بنابراین، اگر $f=x^2+y^2+z^2$ را تابع معرف S بگیریم، آنگاه

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{\pm f'}{\|f'\|}=\pm\frac{\overrightarrow{(2x,2y,2z)}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\\
&= \pm\overrightarrow{\Big(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2-y^2}\Big)}
\end{aligned}$$

که چون قرار است $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت z−محور باشد، حالت $+$ را می‌پذیریم. بعلاوه

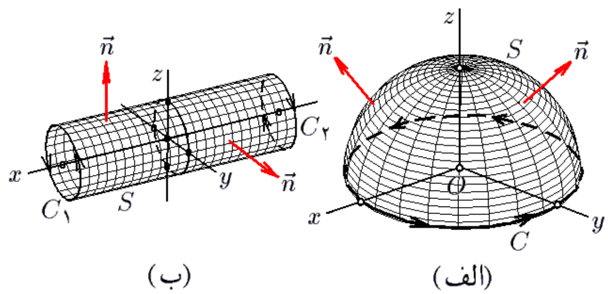
$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{\|f'\|}{|f_z|}\,dxdy=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{|2z|}\,dxdy\\
&= \frac{3\,dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Curl}(\mathbf{F})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ z&x&y\end{vmatrix}=\overrightarrow{(1,1,1)}$$

و در نتیجه، سمت راست فرمول استوکس عبارت است از

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &=\\
&= \iint_D \overrightarrow{(1,1,1)}\bullet\overrightarrow{\Big(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2-y^2}\Big)}\\
&\qquad \frac{3\,dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\\
&= \iint_D \frac{x+y+\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,dxdy\\
&= \iint_D \frac{(x+y)\,dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\iint_D dxdy\\
&\overset{(1)}{=} 0+\mathrm{Area}(D)=\pi\times 3^2=9\pi
\end{aligned}$$

توضیح این که در (۱) از فرد بودن تابع و تقارن دامنه استفاده نموده‌ایم و نتیجه گرفته‌ایم که انتگرال اول صفر است.



شکل ۲۶.۹: قسمتهای ۱ و ۲ از مثال ۶.۸.۹

مثال ۲) فرض کنید S قسمتی از استوانهٔ $y^۲+z^۲=۴$ باشد که توسط صفحات $x=-۲$ و $x=۲$ بریده شده است و $\mathbf{n}$ رو به بیرون استوانه است. قضیهٔ استوکس را برای S و میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(z^۲,y^۲,x^۲)}$ تحقیق کنید.

حل. ابتدا سمت چپ فرمول استوکس را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که $C=\partial S$ مرز S از دو دایره تشکیل می گردد (به شکل ۲۶.۹—ب توجه شود):

$$C_۱ \;:\; y^۲+z^۲=۴\,,\; x=-۲$$
$$C_۲ \;:\; y^۲+z^۲=۴\,,\; x=۲$$

که باید جهت $C_۱$ با بردار $\mathbf{i}$ سازگار باشد و جهت $C_۲$ با بردار $-\mathbf{i}$. یعنی، نسبت به yz—صفحه منحنی $C_۱$ دارای جهت مثلثاتی و $C_۲$ دارای جهت خلاف مثلثاتی می‌باشد. بنابراین

$$C_۱ \;:\; \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(-۲,۲\cos t,۲\sin t)}\;;\; ۰\le t\le ۲\pi$$
$$C_۲ \;:\; \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۲,۲\sin t,۲\cos t)}\;;\; ۰\le t\le ۲\pi$$

و سمت چپ فرمول استوکس عبارت است از

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_{C_۱}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}+\int_{C_۲}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\\ &= \int_۰^{۲\pi}\overrightarrow{(۴\sin^۲ t,۴\cos^۲ t,۴)}\bullet\overrightarrow{(۰,۲\sin t,-۲\cos t)}\,dt\\ &\quad+\int_۰^{۲\pi}\overrightarrow{(۴\cos^۲ t,۴\sin^۲ t,۴)}\bullet\overrightarrow{(۰,-۲\cos t,۲\sin t)}\,dt\\ &= ۸\int_۰^{۲\pi}\left(-\sin^۲ t\cos t+\cos^۲ t\sin t-\cos t+\sin t\right)dt\\ &= ۰\end{aligned}$$

از طرفی رویهٔ S را به شکل $\mathbf{r}(u,v)=\overrightarrow{(u,۲\cos v,۲\sin v)}$ می‌توان پارامتره نمود، که در آن

$$D\,:\,-۲\le u\le ۲\,,\; ۰\le v\le ۲\pi$$

در نتیجه، قائم بر S عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\\ &= \frac{\pm ۱}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\overrightarrow{(۱,۰,۰)}\times\overrightarrow{(۰,-۲\sin v,۲\cos v)}\\ &= \frac{\pm ۲}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\overrightarrow{(۰,-\cos v,\sin v)}\end{aligned}$$

که با توجه به صورت مسأله، حالت مثبت را می‌پذیریم. بعلاوه

$$\mathrm{Curl}(\mathbf{F})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ z^۲ & y^۲ & x^۲\end{vmatrix}=\overrightarrow{(۰,۲z-۲x,۰)}$$

و بنابراین، سمت راست فرمول استوکس $\iint_{(S)}\mathrm{Curl}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$ عبارت است از

$$\begin{aligned}&\iint_D \overrightarrow{(۰,۴\sin v-۲u,۰)}\\ &\qquad\bullet\frac{۲}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\overrightarrow{(۰,-\cos v,-\sin v)}\,\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,dudv=\\ &= ۴\iint_D\left(u\cos v-۲\sin v\cos v\right)dudv\\ &= ۴\int_{-۲}^{۲}\left[\int_۰^{۲\pi}\left(u\cos v-۲\sin v\cos v\right)dv\right]du\\ &= ۴\int_{-۲}^{۲}\Big[u\sin v-\sin^۲ v\Big]_۰^{۲\pi}du=۰\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید C قطعه‌ای از منحنی $x=a\sin^۲ t$، $y=۲a\sin t\cos t$ و $z=a\cos^۲ t$ است که در آن $۰\le t\le\pi$. انتگرال $\oint_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$ را محاسبه کنید.

حل. ملاحظه می‌گردد که بر منحنی C، داریم

$$\begin{aligned}x+z &= a\sin^۲ t+a\cos^۲ t=a\\ y^۲ &= ۴a^۲\sin^۲ t\cos^۲ t=۴a^۲\sin^۲ t(۱-\sin^۲ t)\\ &= ۴ax\,(۱-x/a)\end{aligned}$$

بنابراین، C فصل مشترک صفحهٔ $x+z=a$ و استوانهٔ $۴x^۲+y^۲=۴ax$ می‌باشد. بنابراین، می‌توان فرض نمود که C لبهٔ رویهٔ S است و S قسمتی از صفحهٔ $x+z=a$ می‌باشد که توسط استوانهٔ $۴x^۲+y^۲=۴ax$ بریده شده است. بعلاوه، جهت حرکت بر C را می‌توانیم مثلثاتی انتخاب کنیم و بنابراین، بردار جهت $\mathbf{n}$ بر S می‌باید در جهت مثبت z—محور باشد. در نتیجه $S\,:\,z=a-x\,;\,(x,y)\in D$، که $D\,:\,\frac{(x-a/۲)^۲}{(a/۲)^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}\le ۱$ بعلاوه

$$\mathbf{n}=\frac{\pm\overrightarrow{(۱,۰,۱)}}{\sqrt{۱+۰+۱}}=\frac{\pm}{\sqrt{۲}}\overrightarrow{(۱,۰,۱)}$$

$$d\sigma=\frac{\sqrt{۱+۰+۱}}{|۱|}\,dxdy=\sqrt{۲}\,dxdy$$

$$\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-2,-2,-2)}$$

پس به کمک قضیهٔ استوکس، داریم

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F})\bullet \mathbf{n}\, d\sigma \\
&= \iint_D \overrightarrow{(-2,-2,-2)}\bullet \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\sqrt{2}\, dxdy \\
&= -4\iint_D dxdy = -4\,\mathrm{Area}(D) \\
&= -4\times\pi\times\frac{a}{2}\times a = 2\pi a^2
\end{aligned}$$

زیرا، مساحت بیضی برابر π ضرب در حاصلضرب دو نیم قطرش می‌باشد.

مثال ۴) در صورتی که C محل برخورد کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ و صفحهٔ به معادلهٔ $x+y+z=0$ باشد که جهت آن با $\overrightarrow{(1,1,1)}$ سازگار است، مقدار انتگرال

$$\oint_C (y^2+z)\,dx + (z^2+x)\,dy + (x^2+y)\,dz$$

را محاسبه کنید.

حل. C را قسمتی از صفحهٔ $x+y+z=0$ می‌توان در نظر گرفت که توسط کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ برش خورده است و $\mathbf{n}$ را رو به جهت مثبت $z-$محور بگیریم. بنابراین، رویهٔ S جدا شده از صفحه عبارت از $S\,:\,x+y+z=0\,;\,(x,y)\in D$ است، که D تصویر آن بر $xy-$صفحه می‌باشد:

$$\begin{aligned}
D\,:\,x^2+y^2+(-x-y)^2 \le a^2 &: x^2+y^2+xy \le a^2/2 \\
&: (x-y/2)^2 + 3y^2/4 \le a^2/2
\end{aligned}$$

که یک بیضی است. اما، در این صورت اگر فرض شود $f=x+y+z$، آنگاه

$$\mathbf{n} = \pm\frac{f'}{\|f'\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(1,1,1)}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{(1,1,1)}$$

که با توجه به صورت مسأله، حالت + مورد قبول است. بعلاوه

$$d\sigma = \frac{\|f'\|}{|f_z|}\,dxdy = \frac{\sqrt{1+1+1}}{|1|}\,dxdy = \sqrt{3}\,dxdy$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2+z & x^2+y & y^2+x \end{vmatrix} \\
&= \overrightarrow{(1-2z, 1-2x, 1-2y)}
\end{aligned}$$

درنتیجه، بنابه قضیهٔ استوکس داریم

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F})\bullet \mathbf{n}\, d\sigma \\
&= \iint_D \overrightarrow{(1-2z, 1-2y, 1-2x)}\bullet\overrightarrow{(1,1,1)}\,dxdy \\
&= \iint_D (3-2(x+y+z))\,dxdy = 3\iint_D dxdy \\
&= 3\mathrm{Area}(D) = 3\times\pi\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \pi a^2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

۷.۸.۹ تمرین. در تمرینات ۱ تا ۸، قضیهٔ استوکس را تحقیق کنید:

۱) S قسمتی از مخروط $z^2=x^2+y^2$ است که توسط صفحهٔ $z=1$ بریده شده، $\mathbf{n}$ رو به بالا است و $\mathbf{F}=\overrightarrow{(1,x,x^2)}$.

۲) S قسمتی از صفحهٔ $x+y+z=2$ است که توسط صفحات مختصاتی جدا شده و $\mathbf{n}$ رو به بالا می‌باشد و $\mathbf{F}=\overrightarrow{(y^2+z, x^2+z, x^2+y)}$.

۳) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(y+2z, z+2x, x+2y)}$ و

$$C\,:\,\begin{cases} \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(2\cos t, \sin t, \cos t+\sin t)} \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$$

۴) $\mathbf{F}=6x\mathbf{i}+z\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ و C محل برخورد رویهٔ $z=x^2+y^2$ با صفحهٔ $z=4$ است.

۵) $\mathbf{F}=-2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+4y\mathbf{k}$ و C لبهٔ رویهٔ جدا شده از لستوانهٔ $x^2+y^2=1$ توسط صفحات $z=-1$ و $z=1$ است.

۶) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(2x-y, -yz^2, -y^2z)}$ و C لبهٔ نیم کرهٔ به مرکز مبداء و شعاع ۱ واقع در نیم فضای $y\le 0$ است.

۷) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x, x+y, x+y+z)}$ و C لبهٔ نیمهٔ بالایی بیضی‌گون $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$ است.

۸) $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+(x^3+yz)\mathbf{j}-3xy^2\mathbf{k}$ و C لبهٔ رویهٔ $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ با $z\ge 0$ است.

در تمرینات ۹ تا ۱۵، از میدان برداری $\mathbf{F}$ بر منحنی C انتگرال بگیرید.

۹) S قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2Rx$ است که توسط استوانهٔ $x^2+y^2=2rx$ بریده شده است و بردار جهت $\mathbf{n}$ رو به جهت مثبت $x-$محور است، $0<r<R$ و $\mathbf{F}=\overrightarrow{(y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2)}$

۱۰) $\mathbf{F}=\overrightarrow{(xz^2, x^2y-z^3, 2xy+y^2z)}$ و C لبهٔ نیمهٔ بالایی کرهٔ $x^2+y^2+z^2=16$ است.

۱۱) $\mathbf{F} = (y+\sin x)\mathbf{i} + (z^۲+\cos y)\mathbf{j} + x^۳\mathbf{k}$ و C منحنی $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\sin t, \cos t, \sin ۲t)}\,;\ ۰ \le t \le ۲\pi$ است.

۱۲) $\mathbf{F} = (x^۲ - yz)\mathbf{i} + (y^۲ - xz)\mathbf{j} + (z^۲ - xy)\mathbf{k}$ و C اجتماع پاره خط راست از $(a,۰,۰)$ تا $(a,۰,۲\pi b)$ و مارپیچ $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(a\cos t, a\sin t, bt)}\,;\ ۰ \le t \le ۲\pi$ است.

۱۳) $\mathbf{F} = y^۲\mathbf{i} + z^۲\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ و C لبهٔ قسمت واقع در بین صفحات $z = a$ و $z = b$ از کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = R$ است که $۰ \le a \le b \le R$.

۱۴) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x, x+y, x+y+z)}$ و

$$C\ :\ \begin{cases} \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(a\sin t, a\cos t, a(\sin t + \cos t))} \\ ۰ \le t \le ۲\pi \end{cases}$$

۱۵) $\mathbf{F} = \overrightarrow{(y^۲ - z^۲, z^۲ - x^۲, x^۲ - y^۲)}$ و C محل برخورد سطح مکعب توپر واحد $\Omega\ :\ \max\{|x|,|y|,|z|\} \le ۱$ با صفحهٔ $x + y + z = ۳/۲$ است که جهت آن با بردار $\overrightarrow{(۱,۱,۱)}$ سازگار است.

۸.۸.۹ نتیجه. اگر مجموعهٔ Ω دارای این خاصیت باشد که به ازای هر منحنی بستهٔ بدون خود قطعی C در Ω، رویه‌ای جهتدار در Ω یافت شود که لبهٔ آن C باشد، و نیز اگر میدان برداری $\mathbf{F}$ بر Ω دیفرانسیلپذیر باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای ابقائی بودن میدان $\mathbf{F}$ بر Ω آن است که $\mathrm{Curl}(\mathbf{F})$ صفر باشد. یعنی، اگر $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P,Q,R)}$، آنگاه $P_y = Q_x$، $P_z = R_x$ و $Q_z = R_y$.

۹.۸.۹ تعبیر فیزیکی قضیهٔ استوکس. فرض کنید میدان برداری $\mathbf{F}$ بر ناحیهٔ Ω از فضا دیفرانسیلپذیر است و $X_۰ \in \Omega$. فرض کنید S رویه‌ای در Ω باشد که $X_۰$ را به عنوان نقطه‌ای منظم در بر دارد و C لبهٔ S و دارای جهت استاندارد است. در این صورت، متوسط چرخش میدان برداری $\mathbf{F}$ در راستای C برابر خارج قسمت $\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ بر مساحت S می‌باشد. حالت حدی این مقدار را هنگامی که S به تک نقطهٔ $X_۰$ می‌گراید، چرخش $\mathbf{F}$ در $X_۰$ نامیده و با نماد $\mathrm{Curl}(\mathbf{F})\Big|_{X_۰}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathrm{Curl}(\mathbf{F})\Big|_{X_۰} = \lim_{S\to\{X_۰\}} \left(\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}\right) \div \left(\iint_{(S)} d\sigma\right)$$

بنابراین، قضیهٔ استوکس را به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

۱۰.۸.۹ قضیهٔ استوکس. اگر S رویه ای جهتدار و لبه‌دار با لبهٔ C بوده و اگر C با جهت استاندارد باشد و نیز اگر میدان برداری $\mathbf{F}$ بر S مشتقپذیر و بر C پیوسته باشد، آنگاه کار انجام شده توسط متحرک استوار بر C تحت تأثیر میدان $\mathbf{F}$ برابر میزان چرخش $\mathbf{F}$ بر سراسر رویهٔ S است.

۹.۹ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل doc.pdf مراجعه شود.

۱.۹.۹ محاسبهٔ انتگرال سطح نوع اول. فرض کنید رویهٔ S را با نقشهٔ $\mathbf{r}(u,v) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ بر دامنهٔ uv–منظم $D\ :\ a \le u \le b, h(u) \le v \le l(u)$ پارامتره کرده‌ایم و $f(x,y,z)$ یک تابع سه متغیره (میدان اسکالر) بر S باشد، در این صورت، برای جلوگیری از تکرار مطالب تعریف می‌کنیم:

```
SurIntFirTyp:=proc(f,r,a,b,h(u),l(u))
                                    local INT, NOR ;
INT:=subs({x=r[1],y=r[2],z=r[3]},f) ;
NOR:=linalg[norm](linalg[crossprod]
               (map(diff,r,u), map(diff,r,v))) ;
return(int(NOR*INT,u=a..b,v=h(u)..l(u))) ;
end :
```

اکنون برای محاسبهٔ انتگرال f بر S کافی است از دستور

```
SurIntFirTyp(f,r,a,b,h(u),l(u))
```

استفاده کنیم.

۲.۹.۹ محاسبهٔ انتگرال سطح نوع دوم. فرض کنید رویهٔ S را با نقشهٔ $r(u,v) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ بر دامنهٔ uv–منظم $D\ :\ a \le u \le b, h(u) \le v \le l(u)$ پارامتره کرده‌ایم و $F(x,y,z) := (P,Q,R)$ یک میدان برداری بر S باشد، در این صورت، برای جلوگیری از تکرار مطالب تعریف می‌کنیم:

```
SurIntSeeTyp:=proc(F,r,a,b,h(u),l(u))
                                        local INT, NOR;
INT:=subs({x=r[1],y=r[2],z=r[3]},F);
NOR:=(linalg[crossprod](map(diff,r,u));
                                  ,map(diff,r,v));
NOR:=linalg[scalarmul](NOR,1/linalg[norm](NOR));
return(int(linalg[dotprod](INT,NOR),u=a..b
                                  ,v=h(u)..l(u)));
end:
```

اکنون برای محاسبهٔ انتگرال F بر S کافی است از دستور

```
SurIntSeeTyp(F,r,a,b,h(u),l(u))
```

استفاده کنیم.

۳.۹.۹ یادداشت. در آدرس اینترنتی

http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm

مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.

آشنایی اولیه با میپل

هدف از این قسمت معرفی نرم افزار میپل و توانایی قابل توجه آن می‌باشد. قسمتهایی از متن کتاب ریاضی عمومی یک، که در خصوص استفاده از نرم افزار میپل می‌باشد را در سایت
`http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm`
می‌توانید مشاهده کنید. کافی است نرم افزار Adobe Acrobat برای خواندن فایلهای با پسوند pdf را نصب نموده و سپس فایل doc.pdf را مشاهده کنید.

میپل (Maple) نام یک نرم افزار کامپیوتری بسیار قوی است. از این نرم افزار به شکل گسترده‌ای در آموزش، تحقیق و کاربرد ریاضی استفاده می‌شود. میپل دارای مزایای بیشماری است که آن را از سایر نرم افزارهای مشابه (نظیر، متمتیکا، متلب، متکد، درایو و . . .) متمایز می‌سازد. برخی از این ویژگیها به شرح زیرند:

- محاسبات با اعداد صحیح را در آن می‌توان انجام داد.
- محاسبات عددی را با هر تعداد رقم می‌توان انجام داد.
- محاسبات نمادین را به کمک آن می‌توان انجام داد.
- توابع ساخته شده و بسته‌های نرم افزاری بیشماری به زبان میپل وجود دارد که هر کدام می‌تواند در موضوعی بخصوص بکار آید.
- هر گونه محاسبه‌ای را می‌توان ضبط کرده و در دفعات بعدی استفاده نمود.
- از محیط آن به عنوان یک ادیتور مناسب کامپیوتری می‌توان استفاده نمود.
- میپل یک زبان برنامه نویسی بسیار قوی و در عین حال ساده است.
- تعداد بیشماری از کاربران با آن کار می‌کنند و به همین دلیل دارای مشکلات پنهانی احتمالی کمتری است.

میپل در اساس نرم افزاری است که در دانشگاه واترلو کانادا به وجود آمد و رفته رفته سیر تکاملی خود را طی نمود.

برای ملاحظهٔ تاریخچه و ویژگیهای در حال گسترش آن می‌توانید به آدرس
`http://www.maplesoft.com`
بر شبکهٔ اینترنت مراجعه کنید.

چرا

شاید بتوان دلایل زیر را در این مورد مطرح نمود که هر کدام به تنهایی می‌توان دلیل کافی برای استفاده از میپل در آموزش باشد، در حالی که اینها تنها دلایلی هستند که تا کنون به نظر می‌رسند:

- مدرس، متعلم و خواننده از درگیر شدن با مباحث تکراری معاف می‌شود.
- مدرس به کمک آن می‌تواند چیزهایی که در تخیل می‌گنجد را به عیان نشان داده و چگونگی تفهیم مطلب را تسریع کند.
- مدرس می‌توان از فرصت بدست آمده حاصل از بکارگیری میپل، به عمق مطالب بپردازد و یا تمرینات بیشتری را در کلاس حل کند.
- خواننده می‌تواند ایده‌های احتمالی خود را سریعتر اجرا نموده و چگونگی درستی آن مطلع شود.

چگونه

در میان متخصصین علوم تربیتی در مورد نحوه و میزان بکارگیری ابزارهای کمک آموزشی مباحث فراوانی وجود دارد که همگی در اصل وجود آن متفق القولند ولی در میزان و چگونگی استفاده از آن دارای نظرات متفاوتی هستند. نکته‌ای که منتقدین استفادهٔ نامحدود از نرم افزاها مطرح می‌کنند، این است که با بکار گیری گسترده از نرم افزارها، احتمال دور شدن متعلم از عمق مطلب و پناه بردن او به ظاهر می‌رود. این مشکل که بنظر به حق می‌رسد را می‌توان با شیوهٔ تدریس و ارزشیابی مرتفع نمود. بر

همین اساس نویسنده بر خود دانسته است تا به شکل مبسوط در این خصوص تحقیق نموده و راهکارهای عملی برای انجام این مهم را ارائه نماید.

بر همین اساس توصیه می‌شود که خوانندهٔ محترم به نکات زیر توجه کافی داشته باشد:

- در ابتدای آشنایی با نرم افزار میپل تا اندازه‌ای با محیط آن آشنا شده و چند مثال ساده را نیز به کمک آن حل کنید ولی از صرف وقت بیشتر خودداری کنید و فرصت دهید تا با کتاب جلو بروید.
- در هر موضوع خاص ابتدا ((بحث نظری)) را بطور کامل مورد توجه قرار دهید و سپس به بخش ((استفاده از میپل)) که در پایان هر فصل آورده شده است، مراجعه کنید.
- سعی کنید مثالهای اولیه را ابتدا با دست و سپس آنها را به کمک میپل حل نمایید.
- توصیه می‌شود تا بعد از هفتهٔ دوم درس، هر هفته ۴۵ دقیقه به عنوان (آزمایشگاه ریاضی) در نظر گرفته شود و در آن استاد مسلط به میپل به آموزش چگونگی استفاده و نیز سود بخشی آن بپردازد.
- توصیه می‌شود که مدرس مربوطه مسایلی را همراه با حل دستی و حل با استفاده از میپل به طور منظم از شاگردان طلب کند.

پیشنیاز

برای استفاده از میپل لازم است تا خوانندهٔ محترم با مراجعه به یکی از کتب آموزشی مربوطه، ضمن آشنایی با محیط میپل، مطالبی چون استفاده از کمک و چگونگی تایپ مطالب در آن را فرا بگیرد.

دستور و اجرای آن

هر دستور در محیط میپل دنباله‌ای از حروف و نمادها است که توسط صفحهٔ کلید قابل وارد کردن می‌باشد. در انتهای هر دستور باید از نمادهای : و یا ; استفاده شود. اگر از نماد ; استفاده شود، دستور اجرا شده و نتیجهٔ آن در خط بعدی ظاهر می‌گردد، ولی اگر از نماد : در آخر یک دستور استفاده شود، آن دستور تنها در حافظه اجرا می‌شود و نمایش داده نخواهد شد.

طرز نسب برنامه میپل

آن را در درایو مخصوص سی دی قرار داده و به دایرکتوری Utillities و سپس Maple بروید، فایل setup را اجرا کنید. دستگاه شما به طور خودکار نرم افزار میپل را نصب خواهد نمود.

پس از نصب، یک آیکن که بر آن شکل میپل (یعنی، برگ درخت کاج) نقش بسته است، ظاهر می‌گردد. برای شروع به کار کافی است بر آن آیکن دو بار کلیک کنید. پس از این کار یک صفحهٔ سفید ظاهر می‌گردد که در گوشهٔ سمت چپ و بالای آن یک کرسر چشمک زن قراردارد؛ برای وارد نمودن دستورات کافی است بر صفحهٔ مذکور کلیلک کرده و شروع به تایپ کنید. در آخر هر دستور با انتر Enter زدن، دستور اجرا شده و نتیجه اعلام می‌گردد. چنانچه در حالی که کلید شیفت Shift را فشرده‌اید، کلید انتر را بزنید، بدون اینکه دستور اجرا شود، یک خط جدید برای وارد کردن ادامهٔ دستورات قبلی باز می شود.

چنانچه تغییراتی در محتوی مثالها انجام دادید، می‌توانید نتیجهٔ کار را در دایرکتوری دیگری (که در دستگاه شما قرار دارد) ذخیره کنید.

چند امتحان

در ادامه چند نمونه مسایل امتحانی مطرح می شود. توصیه می شود که پس از تسلط کافی بر موضوع، به حل آنها مبادرت کنید. زمان هر امتحان ۲ ساعت است.

جهت مشاهدهٔ حل این مسایل می‌توانید به کتاب «آمادگی برای امتحان ریاضی عمومی دو، تالیف مهدی نجفی‌خواه، ناشر ساحل اندیشه تهران، ویرایش دوم، تهران ۱۳۸۳.» مراجعه کنید.

مسایل اضافه تر در سایت
http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm
آورده شده است.

امتحان اول

۱) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

در مبداء مختصات بحث کنید.

۲) معادله خط مماس و صفحه قائم بر منحنی C به معادله:

$$C\,:\,x^2-3xy+z^2=1,\ \ 2x\,\tan(xz)+2y^2-z=1$$

را در نقطه $M\,(0,1,1)$ بیابید.

۳) مشتق تابع $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ را در امتداد خط مماس بر منحنی C با معادلهٔ:

$$C\,:\,x=t,\ y=2t^2,\ z=2t^4$$

در نقطه $(1,2,-2)$ واقع بر منحنی بدست آورید.

۴) حاصل انتگرال دوگانه $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{e^x}^{e}\frac{1}{\ln y}\,dy\right]dx$ را بعد از تغییر مرتبه محاسبه کنید.

۵) به کمک تغییر متغیر در مختصات کروی حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)\,dzdxdy$$

۶) درستی قضیه دیورژانس (استروگرادسکی) را برای میدان برداری $\mathbf{F}=5z\mathbf{k}$ روی کره‌ای به مرکز مبداء مختصات و شعاع ۳ بررسی کنید.

۷) صحت قضیه استوکس را با فرض

$$\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}+4x\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$$

روی سطح S، که در آن S قسمتی از سطح $x^2+z^2=1$ در یک هشتم اول و محدود به صفحه $y=2$ است، بررسی کنید.

۸) اگر $\omega=x^2f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$، آنگاه حاصل عبارت $x\omega_x+y\omega_y+z\omega_z$ را بیابید.

۹) وضعیت خطوط $L_1\,:\,\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{1-z}{5}$ و $L_2\,:\,\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ نسبت به یکدیگر را مشخص کنید.

۱۰) معادله صفحه مماس بر بیضی‌گون $x^2+2y^2+z^2=1$ و موازی با صفحه $2x-4y+2z=0$ را بدست آورید.

امتحان دوم

۱) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

در نقطهٔ $(0,0)$ بحث کنید.

۲) معادله خط مماس بر فصل مشترک دو رویهٔ $x^2+y^2+z=1$ و $3x^2+y^2-z^2=3$ را در نقطهٔ $P\,(1,-1,-1)$ بدست آورید. سپس معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $M\,(2,3,4)$ گذشته و عمود بر این خط مماس باشد.

۳) هرگاه $u=yf\,(x+y)+xg\,(x+y)$ باشد، آنگاه نشان دهید که $u_{xx}-2u_{yx}+u_{yy}=0$.

۴) مطلوب است محاسبه $\displaystyle\iint_D xdxdy$ که در آن D ناحیه واقع در ربع اول و بین دوایر $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=2x$ است.

۵) حجم قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=2$ که به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود شده است را به دست آورید.

۶) تابع برداری $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+\frac{1}{4}y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ مفروض است. انتگرال سطح این تابع را بر روی سطح بیضی گون خارجی $x^2+\frac{1}{4}y^2+z^2=1$ به کمک قضیه دیورژانس (واگرایی) محاسبه کنید.

۷) فرض کنید S آن قسمت از سطح سهمی گون $z=1-x^2-y^2$ باشد که بالای صفحه $z=0$ واقع است و منحنی C مرز آن است. با توجه به این مفروضات، درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ تحقیق کنید.

امتحان سوم

۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که از دو نقطهٔ $(1,1,0)$ و $(0,1,1)$ به یک فاصله است و از بین آن دو نیز می‌گذرد.

۲) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در نقطهٔ $(0,0)$ بحث کنید.

۳) فرض کنیم منحنی C به صورت فصل مشترک دو رویهٔ

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}z^2+1\ ,\quad z=x^2+y^2$$

تعریف شود. بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$، و مقادیر انحنا و تاب را در یک نقطهٔ دلخواه (x,y,z) بیابید.

۴) با فرض $F(x,y,z)=0$، مقدار عبارت $\frac{\partial x}{\partial y}\times\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{\partial y}{\partial z}$ را بیابید.

۵) مطلوب است محاسبهٔ مساحت قسمتی از سطح $z=x^2-y^2$ که داخل استوانهٔ $x^2+y^2=4$ قرار دارد.

۶) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iiint_R\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right]dxdydz$.

۷) هرگاه $\mathbf{F}(x,y,z)=z^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$، درستی قضیه دیورژانس را برای سطحی که از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=2$ و از پایین به سهمیگون $z=x^2+y^2$ محصور است تحقیق کنید.

۸) هرگاه منحنی C به معادلات

$$C\ :\ x^2+y^2=a^2\ ,\ z=x+y$$

داده شده باشد، به کمک قضیه استوکس انتگرال خط زیر را محاسبه کنید:

$$\oint_C xdx+(x+y)\ dy+(x+y+z)\ dz$$

امتحان چهارم

۱)] معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که با خط $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-2}$ موازی و از فصل مشترک صفحات $x+y-z=0$ و $x-y+z+1=0$ بگذرد.

۲) در وجود و یا در عدم وجود اکسترموم‌های تابع $z=4x^3-3xy^2+y^2+y$ بحث کنید.

۳) در مشتق‌پذیری یا عدم مشتق‌پذیری تابع زیر بحث کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

۴) هرگاه D ناحیهٔ محصور بین خطوط $y=x$، $y=x-1$، $x+2y=0$ و $x+2y=1$ باشد، آنگاه $\iint_D\frac{x+2y}{\cos(x-y)}\,dxdy$ را محاسبه کنید.

۵) حجم جسم صلبی که از پائین به صفحهٔ xOy و از بالا به سهمیگون $z=x^2+y^2$ و از اطراف به هذلولیگون یکپارچه $x^2+y^2=z^2/4+1$ محصور شده است را بیابید.

۶) انتگرال خط تابع برداری

$$\mathbf{F}=(x+y)\,\mathbf{i}+(y-z)\,\mathbf{j}+(x-z)\,\mathbf{k}$$

را بر روی مرزناحیه $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z=4\end{cases}$ به کمک قضیهٔ استوکس محاسبه کنید.

۷) هرگاه $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+y\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ و S سطح خارجی کره‌ای به شعاع یک باشد، آنگاه انتگرال سطح $\iint_{(S)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$ را به کمک قضیهٔ دیورژانس محاسبه کنید.

امتحان پنجم

۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که دو خط زیر را شامل شود:

$$\ell_1:\begin{cases}x=1+6t\\ y=3-5t\\ z=2-4t\end{cases}\qquad \ell_2\begin{cases}x+2y-z=-2\\ 3x+2y+2z=7\end{cases}$$

۲) خمی به معادلهٔ $\mathbf{r}(t)=3\sin t\mathbf{i}+3\cos t\mathbf{j}+4t\mathbf{k}$ مفروض است، بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ و مقدار انحناء را در هر نقطهٔ دلخواه از آن بیابید.

۳) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در کل فضای $\mathbb{R}^2$ بحث کنید.

۴) اگر x و y متغیرهای مستقل باشند و $\begin{cases} u^3+v^3+x^5+4y^5=10 \\ u^2+v^2+x^9+y^8=11\end{cases}$، آنگاه مطلوب است محاسبه u_x و v_y.

۵) مطلوب است $\iint_R e^{-(x^2/a^2+y^2/b^2)}\,dxdy$ که در آن R ناحیهٔ داخل بیضی به معادلهٔ $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ است.

۶) حجم جسم صلب محصور بین سطوح $x^2+y^2+z^2=a^2$، $x^2+y^2+z^2=b^2$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$ را بیابید $(a<b)$.

۷) مساحت سطح جدا شده از مخروط $z^2=x^2+y^2$ بوسیلهٔ صفحات $z=1$ و $z=2$ را به دست آورید.

۸) انتگرال خط $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+xzdy+xydz$ را محاسبه کنید.

۹) درستی قضیهٔ دیورژانس را برای سطح S خارج جسم محدود به صفحات $x+y+z=1$، $x=0$، $y=0$ و $z=0$ و میدان برداری $\mathbf{F}=(x+y)\,\mathbf{i}+(y+z)\,\mathbf{j}+(z+x)\,\mathbf{k}$ تحقیق کنید.

امتحان ششم

۱-a) معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $(1,-1,0)$ و محل تقاطع دو صفحه به معادلات $x+y-z=-1$ و $2x-3y+z=2$ بگذرد.

۱-b) نوع سطح $xyz=0$ را مشخص کنید.

۲) تابع پتانسیل تابع نیروی زیر را بیابید:

$$\left(2ye^{2x}+e^z\right)i+\left(3ze^{3y}+e^{2x}\right)\mathbf{j}+\left(xe^z+e^{3y}\right)\mathbf{k}$$

۳) هرگاه $h(x,y)=f(x+2y)+f(x-2y)$، مقدار عبارت $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}-4\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ را بیابید.

۴) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطهٔ $(0,0)$ بحث کنید.

۵) گشتاور ماند نسبت به محور x یک ناحیه جرم‌دار محصور به بیضی به معادلهٔ $9y^2+z^2=9$ را با فرض ثابت بودن تابع چگالی $(\delta=1)$ بیابید.

۶) انتگرال سه‌گانه تابع $f(x,y,z)=xyz$ را بر ناحیه R محصور بین استوانه‌های $x^2+y^2=4$ و $x^2+z^2=4$ را محاسبه کنید.

۷) انتگرال خط تابع $\mathbf{F}=\frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ را در طول دایرهٔ مثلثاتی محاسبه کنید. آیا انتگرال فوق را می‌توان به کمک قضیه گرین محاسبه نمود؟ چرا؟

۸) انتگرال خط $\int_C x\,(z-y)\,dx+y\,(x-z)\,dy+z\,(y-x)\,dz$ که در آن C مثلثی با رئوس $(9,0,0)$، $(0,9,0)$، $(0,0,9)$ واقع بر صفحه‌ای به معادلهٔ $x+y+z=9$ است را به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید.

۹) تابع برداری $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ را در نظر می‌گیریم، انتگرال سطح این تابع را بر روی سطح بیضوی خارجی $x^2+y^2/4+z^2=1$ به کمک قضیه گاوس (دیورژانس یا استروگرادسکی) محاسبه کنید.

امتحان هفتم

۱) منحنی C از تلاقی سطوح $x^2+2yz=13$ و $x^2+2y^2+z^2=18$ حاصل شده است. نشان دهید خط مماس بر منحنی C در نقطه $A=(1,2,3)$ از نقطه $B=(-1,4,1)$ می‌گذرد.

۲) پیوستگی تابع

$$f\,(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

را در نقطه $(0,0)$ بررسی کنید.

۳) متحرکی بر روی یک مسیر داده شده با قانون زیر حرکت می‌کند:

$$x=3\int_0^t \sin(u^2)\,du \qquad y=5\int_0^t\cos(u^2)\,du$$

$$z=4\int_0^t\sin(u^2)\,du \qquad t\geq 0$$

الف) مطلوب است مسافت طی شده از لحظه $t=0$ تا لحظه $t=1$.

ب) شعاع انحناء مسیر فوق را در نقطه $t=1$ بیابید.

۴) z تابعی از متغیرهای x و y است که توسط معادلات $y=u+v$ و $x=u^2+v^2$ و $z=u^3+v^3$ تعریف شده است (u و v را توابعی از x و y در نظر بگیرید). مطلوب است محاسبهٔ $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

۵) مطلوب است محاسبه انتگرال $\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ که در آن D به وسیله استوانه $x^2+y^2=2x$ و صفحات $y=0$، $z=0$ و $z=a>0$ واقع در یک هشتم اول محصور شده است.

۶) مطلوب است تعیین مساحت قسمتی از سطح مخروط $z^2=x^2+y^2$ که توسط استوانه $x^2+y^2=2ax$ جدا می‌شود (فرض شود که $a>0$).

۷) فرض کنید S سطح $z=1-x^2-y^2$ $(0<z)$ است. درستی قضیهٔ استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F}=-2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+4y\mathbf{k}$ و این سطح تحقیق کنید.

۸) با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال سطح $\iint_{(S)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ را برای میدان برداری $\mathbf{F} = ۳x\mathbf{i} + y^۲\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ و سطح S خارجی مکعب $|x|,|y|,|z| \le ۱$ پیدا کنید.

۹) فرض کنید C لبهٔ ناحیه‌ای بسته، هموار و ساده به معادلهٔ $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ باشد. مطلوب است محاسبه مقدار انتگرال خط $\oint_C \frac{-y\,dx+x\,dy}{۴x^۲+۹y^۲}$.

امتحان هشتم

۱) پیوستگی تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

را بر کل $\mathbb{R}^۲$ بررسی کنید.

۲) اگر $x=te^t$، $y=e^t\sin t$ و $z=e^t\cos t$، معادلات پارامتری مسیر حرکت ذرهٔ متحرکی باشند، آنگاه بردارهای $\mathbf{v}$، $\mathbf{T}$ و انحناء κ مسیر و معادلهٔ صفحهٔ قائم به آن را در لحظهٔ $t=۰$ بیابید.

۳) حجم جسم محصور شده به رویه‌های $z=۱۸-x^۲-۹y^۲$ و $z=x^۲+۹y^۲$ را بیابید.

۴) نقطه‌ای بر سطح $z=xy+۱$ چنان بیابید که نسبت به مبداء مختصات دارای کوتاهترین فاصله باشد.

۵) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iint_U \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$ که در آن U ذوزنقه‌ای با رئوس $(۱,۰)$، $(۲,۰)$، $(۰,۱)$ و $(۰,۲)$ واقع در صفحه xOy است.

٦) مشتق سویی (جهتدار) تابع $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ را در نقطهٔ دلخواهی از سطح $xy+yz+zx=۰$ و در امتداد $\operatorname{grad}(f)$ بیابید.

۷) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال سطح $\iint_{(S)}\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)d\sigma$ که S سطح جسم حاصل از تلاقی استوانهٔ $x^۲+y^۲=۱$ و صفحات $z=۰$ و $z=a$ است.

۸) درستی قضیهٔ استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$ در صورتی تحقیق کنید که C مرز قسمت جدا شده از صفحهٔ $x+y+z=۱$ توسط صفحات $x=۰$، $y=۰$ و $z=۰$ باشد.

امتحان نهم

میان ترم

۱) فرض کنید $\mathbf{r}(t)=\left(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\right)$. مطلوب است انحناء، تاب و دایرهٔ انحناء (بوسان) در نقطهٔ $X_۰=\mathbf{r}(۰)$.

۲) فرض کنید $S_۱: x^۲+y^۲=۱$، $S_۲: z=x$ و $C=S_۱\cap S_۲$. نوع هر یک از این اشکال را در $\mathbb{R}^۳$ مشخص نموده و آنها را در یک دستگاه مختصات ترسیم کنید.

۳) مقادیر و بردارهای ویژهٔ ماتریس زیر را بدست آورید:

$$\begin{pmatrix} -٦ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۰ & ۰ & -۳\end{pmatrix}$$

۴) در پیوستگی تابع زیر بر $\mathbb{R}^۲$ بحث کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ \frac{۱}{۲} & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

۵) رابطهٔ $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ را بر حسب متغیرهای جدید $u=x$ و $v=\frac{y}{x}$ بازنویسی کنید. ٦) مقادیر ماکزیموم و مینیموم تابع $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$ را روی بیضی فصل مشترک مخروط $z^۲=x^۲+y^۲$ و صفحهٔ $x-۲z=۳$ بیابید.

پایان ترم

۱) مطلوب است محاسبه مساحت سطح محدود به منحنی $\sqrt[۴]{\frac{x}{a}}+\sqrt[۴]{\frac{y}{b}}=۱$ و واقع در ربع اول.

۲) مقدار انتگرال $\iiint_V z\,dV$ که در آن V حجم واقع در یک هشتم اول مختصات، و بالای صفحهٔ $z=۱+y+x$ و زیر صفحهٔ $z=۱$ است، را محاسبه کنید.

۳) انتگرال تابع $|xyz|$ را بر ناحیه محدود به بیضی‌گون $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ محاسبه کنید.

۴) مطلوب است محاسبهٔ جرم قسمتی از کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ که توسط استوانه $x^۲+y^۲=۲x$ جدا شده است و چگالی در هر نقطهٔ (x,y,z) برابر $\delta=x^۲+y^۲+z^۲$ است.

۵) قضیه گرین را برای میدان برداری $\mathbf{F}=(x^۲-xy)\mathbf{i}+(xy-y^۲)\mathbf{j}$ و C مثلثی با رئوس $(۰,۰)$، $(۱,۱)$ و $(۲,۰)$، بررسی کنید.

٦) قضیه استوکس را برای میدان نیروی $\mathbf{F}=(y+۲z)\mathbf{i}+(z+۲x)\mathbf{j}+(x+۲y)\mathbf{k}$ و منحنی C تحقیق کنید:

$$C:\ \mathbf{r}(t)=\left(۲\cos t,\sin t,\cos t+\sin t\right);\ ۰\le t\le ۲\pi$$

۷) در صورتی که $\mathbf{F}=-\frac{۱}{r^۳}\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\right)$ باشد، که در آن $r=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$، قضیه دیورژانس را برای ناحیه محدود به دو کره $۱\le x^۲+y^۲+z^۲\le ۴$ بررسی کنید.

کتاب‌نامه

[1] Adams, R. A., *Calculus of Several Variables*, Addison Wesley, Canada, 2000.

[2] Adler, M., *Lectures on integration of Several Variables (Using Differential Forms)*, Internet Version, URL: http://www.physics.nus.edu.sg/~ phyteoe/teaching/mm4

[3] Agarwal, D. C., *Advanced Integral Calculus*, Krishna Prakashan Media Ltd., India, 1997.

[4] Apostel, T. M., *Calculus*, 2 vols., Blaisdell Pub., 1969.

[5] Buck, R. C., *Advanced Calculus*, McGraw-Hill, New York, 1978.

[6] Udriste, C. and Balan, V., *Analytic and Differential Geometry*, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2000.

[7] Budak, B. M. and Fomin, S. V., *Multiple Integrals, Field Theory and Seies*, Mir Pub., Moscow, 1978.

[8] Cain, G. and Herod, J., *Multivariable Calculus*, Internet Version, URL: http: //www.math.gatech.edu /~ cain /notes /calculus.html, 1997.

[9] Chen, W. , Linear Algebra, URL: http://www.maths.mq.edu.au/~ wchen/In.html

[10] Chen, W. , Multivariable and Vector Analysis, URL: http://www.maths.mq.edu.au/~ wchen/In.html

[11] Davis, H. F. and Snider, A. D., *Introduction to Vector Analysis*, Wm. C. Brown, New Delhi, 1988.

[12] Dieudonne, J., *Linear Algebra and Geometry*, Hermann, Paris, 1969.

[13] Douglass, S. A., *Introduction to Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Massachusetts, 1996.

[14] Gelbaum, B. R., and Olmsted, J. M. H., *Theorem and Conterexamples in Mathematics*, Springer Verlag, New York, 1990.

[15] Garvan, F., *The Maple Book*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2002.

[16] Heal, K. M, Hansen, M. L. and Rickard, K. M., *Maple V Learning Guide*, Waterloo Maple Ins., 1988.

[17] Hardy, G. H., *A Course Pure Mathematics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1948.

[18] Ilyn, V. A. and Pozniak, E. G., *Linear Algebra*, Mir Pub., Moscow, 1986.

[19] Ilyn, V. A. and Pozniak, E. G., *Foundamental of Mathematical Analisis*, 2 vols., Mir Pub., Moscow, 1982.

[20] Israel, R. B. , *The Maple Calculus*, Addison Wesley, New York, 1996.

[21] Kay, D. C., *Tensor Calculus*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1988.

[22] Klambauer, G., *Aspects of Calculus*, U.T.M., Springer Verlag, New York, 1986.

[23] Knopp, K., *Infinite Sequences and Series*, Dover Pub., New York, 1956.

[24] Kurosh, A., *Higher Algebra*, Mir Pub., Moscow,

[25] Lang, S., *A First Course in Calculus*, U.T.M., Springer Verlag, New York, 1986.

[26] Lang, S., *Calculus of Several Variables*, U.T.M., Springer Verlag, New York, 1987.

[27] Landesman, E. M. and Hestenes, M. R., *Linear Algebra for Mathematics, Science, and Engineering*, Prentice-Hall, New Iersey, 1992.

[28] Livesley, R. K., *Mathematical Methods for Engineers*, John Wiley & Sons, Canada, 1989.

[29] Loomis, L. H. and Sternberg, S., *Advanced Calculus*, Jnes and Bartlett Pub., Boston, 1990.

[30] Maron, I. A., *Problems in Calculus of One Variable* , Mir Pub., Moscow, 1988.

[31] Myskis, A. D., *Introductory Mathematics for Engineers*, Mir Pub., Moscow, 1978.

[32] Nikolski, S. M., *A Course of Mathematical Analisis*, 2 vols., Mir Pub., Moscow, 1987.

[33] Piskunov, N., *Differential Calculus and Integral Calculus*, 2 vols., Mir Pub., Moscow, 1981.

[34] Pogorelov, A., *Geometry*, Mir Pub., Moscow, 1987.

[35] Olver, P. and Shakiban, C. *Applied Mathematics*, Lecture Notes, Preprint, 2000.

[36] Shakarchi, R., *Problem and Solutions for Undergraduate Analysis*, Springer Verlag, New York, 1998.

[37] Spigle, M. R., *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1959.

[38] Yaglom, A. M. and Yaglom, I. M., *Challenging Mathematical Problems*, 2 vols., San Fransisco, 1964.

[۳۹] شهشهانی، س.، ریاضی ۱، دانشگاه صنعتی شریف، قبل از چاپ، تهران، ۱۳۸۰.

[۴۰] شهشهانی، س.، ریاضی ۲، دانشگاه صنعتی شریف، قبل از چاپ، تهران، ۱۳۸۰.

[۴۱] نجفی‌خواه، م.، آمادگی برای امتحان ریاضی عمومی ۱، بهمن برنا، تهران ، ۱۳۸۰.

[۴۲] نجفی‌خواه، م.، آمادگی برای امتحان ریاضی عمومی ۲، بهمن برنا، تهران ، ۱۳۷۹.

[۴۳] دمیدویچ، ب. پ.، مجموعهٔ مسایل و تمرینات آنالیز ریاضی، میر، مسکو، ۱۹۷۹.

[۴۴] دمیدویچ، ب. پ.، تمرینات و مسایل آنالیز ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری، امیر کبیر، تهران، ۱۳۶۳.

فهرست الفبایی

چند فرمول مفید

$$\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{۱}{\cos x},$$

$$\csc x = \frac{۱}{\sin x},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{۱ \mp \tan x \tan y},$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp ۱}{\cot y \pm \cot x},$$

$$\cos ۲x = \cos^{۲} x - \sin^{۲} x$$

$$= ۱ - ۲\sin^{۲} x = ۲\cos^{۲} x - ۱,$$

$$\sin ۲x = ۲ \sin x \cos x,$$

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^{۲} x},$$

$$\sin^{۲} x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲},$$

$$\cos^{۲} x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲},$$

$$c' = ۰,$$

$$(cu)' = cu',$$

$$(u+v)' = u' + v',$$

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^{۲}},$$

$$(n^n)' = nu'n^{n-۱},$$

$$(\sin u)' = u' \cos u,$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u,$$

$$(\tan u)' = u'\left(۱ + \tan^{۲} u\right),$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u},$$

$$(a^u)' = (\ln a)\, u' a^u,$$

$$(e^u)' = u' e^u,$$

$$\left(\sin^{-۱} u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{۱ - u^{۲}}} = -\left(\cos^{-۱} u\right)',$$

$$\left(\tan^{-۱} u\right)' = \frac{u'}{۱ + u^{۲}} = -\left(\cot^{-۱} u\right)',$$

$$\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx + C,$$

$$\int (u \pm v)\, dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx + C,$$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du + C,$$

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+۱}}{n+۱} + C, \ (n \neq -۱)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,$$

$$\int e^u\, du = e^u + C,$$

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin u\, du = -\cos u + C,$$

$$\int \cos u\, du = \sin u + C,$$

$$\int \tan u\, du = \ln \sec u + C,$$

$$\int \cot u\, du = \ln \sin u + C,$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln|\sec u + \tan u| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln|\csc u - \cot u| + C,$$

$$\int \frac{du}{u^{۲} + a^{۲}} = \frac{۱}{a} \arctan \frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{u^{۲} - a^{۲}} = \frac{۱}{۲a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^{۲} - u^{۲}}} = \arcsin \frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^{۲} \mp a^{۲}}} = \ln\left|u + \sqrt{u^{۲} \mp a^{۲}}\right| + C,$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^{۲} \mp a^{۲}}} = -\frac{۱}{a} \ln\left|\frac{u + \sqrt{u^{۲} \mp a^{۲}}}{u}\right|,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{۲\sqrt{ax+b}}{a} + C,$$

$$\int \sqrt{ax+b} = \frac{۲\sqrt{(ax+b)^{۳}}}{۳a} + C,$$

$$f(-x) = f(x) \ \Rightarrow$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = ۲\int_{۰}^{a} f(x)\, dx,$$

$$f(-x) = -f(x) \ \Rightarrow$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = ۰,$$

$$\int_{۰}^{a} \cos^{۲} x\, dx = \int_{۰}^{a} \sin^{۲} x\, dx = \frac{a}{۲},$$

$$\int_{۰}^{\pi/۲} \cos^{۲n} x\, dx = \int_{۰}^{\pi/۲} \sin^{۲n} x\, dx$$

$$= \frac{۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲n-۱)}{۲ \times ۴ \times \cdots \times (۲n)} . \frac{\pi}{۲},$$

$$\int_{۰}^{\pi/۲} \cos^{۲n+۱} x\, dx = \int_{۰}^{\pi/۲} \sin^{۲n+۱} x\, dx$$

$$= \frac{۲ \times ۴ \times \cdots \times (۲n)}{۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲n+۱)},$$