



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

به نام خداوند بخشنده مهربان



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

استاد:

دکتر امیر حسین اصغری

اعضاء گروه

ملیحه حاجی
بابا

مهتاب نظر
آهاری

پریسا
الیاسی

مهسا
همایون نیا



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

مشتق
DERIVATIVE
DÉRIVÉE
ABGELEITET



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

مشتق

ایده اصلی بخش اول آنالیز

نرخ لحظه ای تغییرات تابع



از کجا اومده؟



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

تلاش برای رسم عباس بر یک منحنی

و

پیدا کردن ماکسیمم و مینیمم یک
کمیت



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



GILLES PERSONE DE ROBERVAL

1602-1675



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

روش روبروال برای تعیین تماس منحنی با استفاده از حرکت لحظه ای



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

● روبروال منحنی را ترسیم حرکت یک نقطه

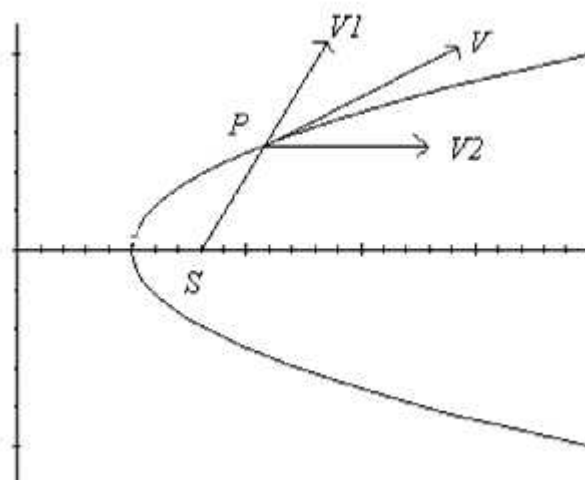
متحرک روی صفحه در نظر گرفت.

● اگر نقطه ای روی منحنی وجود داشته باشد و بتوانیم بردارهای حرکت را مشخص کنیم در این صورت مماس بر منحنی جمع بردارهای حرکت مییابد.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

مماس v =
جمع دو بردار



v_1 گذرا از کانون
و شامل p

عمود بر خط
 v_2 هادی سهمی



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



PIERRE DE FERMAT
1601-1665



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

● مفهوم مشتق تا قبل از آن که ریاضیدان فرانسوی فرما به تعیین اکستریم‌های چند تابع خاص دست بزنند تنظیم نشد بود ولی کیلر ملاحظه کرده بود که رشد یک تابع در همسایگی یک مقدار $\min$ و $\max$ معمولی به طور صرف نظر کردنی کوچک است.

● فرما این حقیقت را به روندی برای تعیین $\min$ و $\max$ برگردانید و دریافت که خطوط ممس در نقاطی که منحنی $\min$ یا $\max$ دارد باید افقی باشد.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

روش فرما: یافتن اکسترمم ها

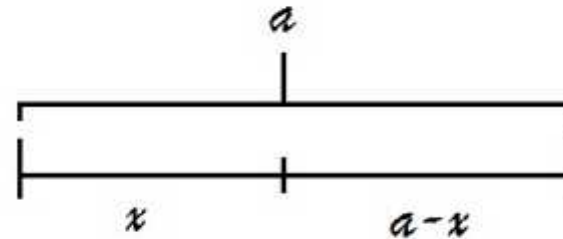
- ⊙ اگر $f(x)$ یک $\max$ یا $\min$ معمولی در x داشته باشد و e مقدار بسیار کوچکی باشد: $f(x-e) \approx f(x)$
- ⊙ فرض میکنیم $f(x-e)=f(x)$ و برابری را با گرفتن $e=0$ برقرار میکنیم.
- ⊙ در اینصورت ریشه های معادله ی حاصل آن مقادیری از x را که به ازای آنها $f(x)$ دارای یک $\max$ یا $\min$ است.

$$\odot x(a-x) = (x-e)(a-(x-e))$$

$$\odot = (x-e)(a-x+e)$$

$$\odot = 2x - a - e = 0$$

$$\odot 2x = a$$

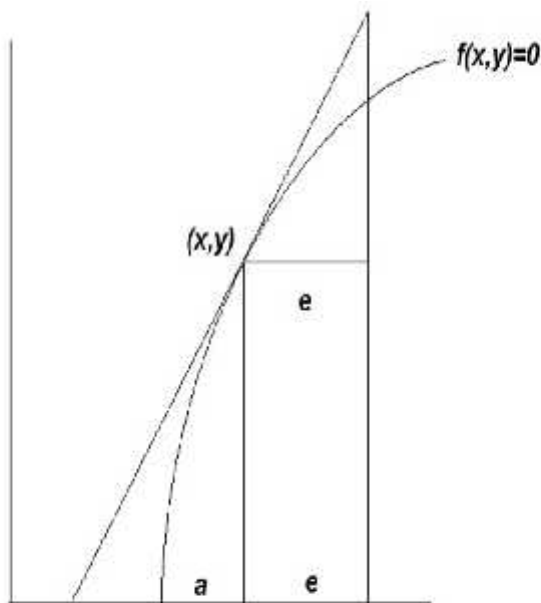




This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

روش فرما: یافتن مماس

ایده او یافتن مماس در نقطه ای از یک منحنی که مختصات آن معلوم باشد این است که قطعه ای بر روی محور X ها بین پای عمود رسم شده از نقطه تماس بر محور X ها و محل تلاقی خط مماس با محور X هاست.



فرض کنید معادله منحنی $f(x,y)=0$

داریم میخواهیم مماس a را
در (x,y) رسم کنیم. نقطه مجاور به
نقطه تماس را

$[x+e, y(1+e/a)]$ را پیدا میکنیم فرض
میکنیم $e=0$

حاصل $f[x+e, y(1+e/a)]=0$ معادله

را نسبت به a و بر حسب x و y
حل میکنیم که معادل است با قرار
دادن

$a = -y(\partial f / \partial y) / (\partial f / \partial x)$ انجام
میگیرد.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



ISAAC BARROW
1630-1677



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

روش بارو برای مشتق گیری بسیار نزدیک به
روش نوین است.

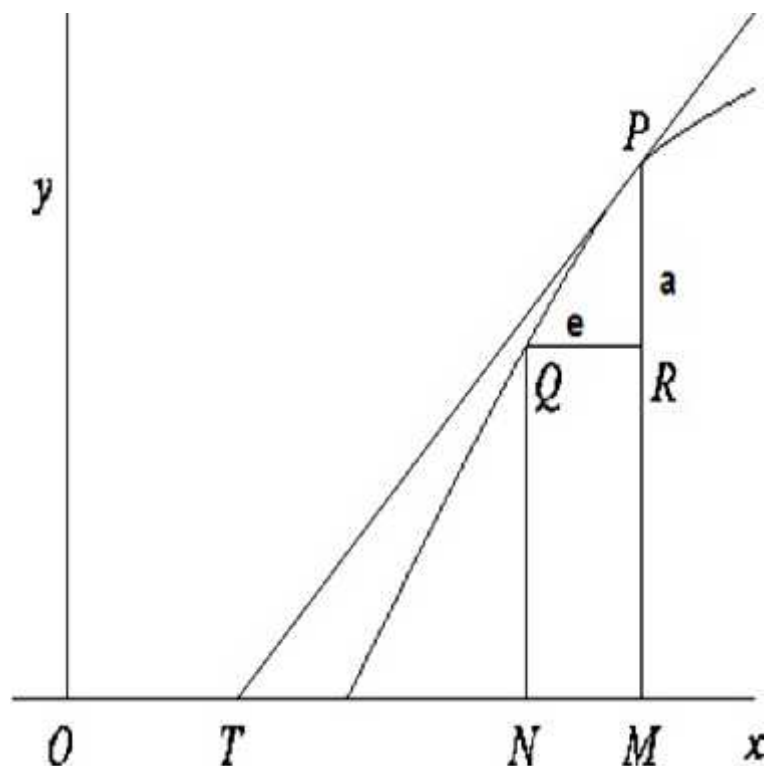
او مانند کتاب های درسی امروزی از مثلث
دیفراسیل استفاده می کند.

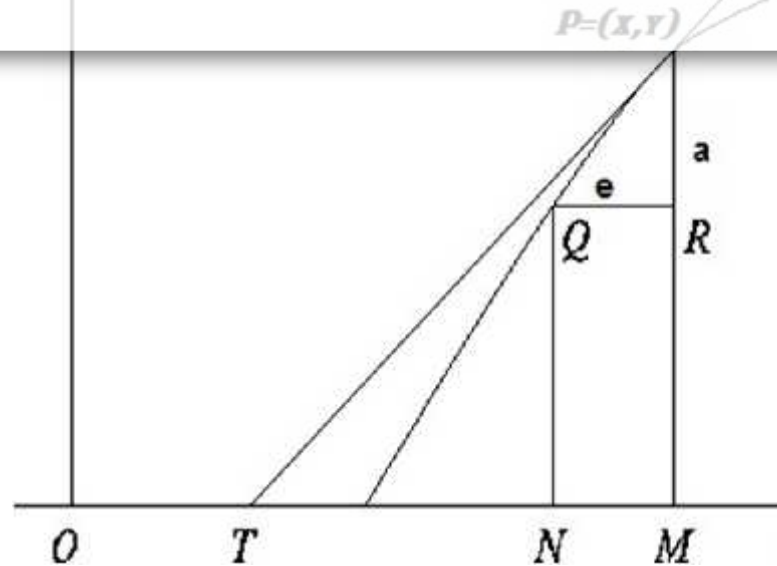
مثالت های PQR و PTM

با تقریب خیلی نزدیکی
متشابه اند

وقتی PQR بی نهایت
کوچک شود

$$\frac{PR}{QR} = \frac{PM}{TM}$$





$$OT = OM - TM = OM - MP(QR/RP) = x - y(e/a)$$

با قرار دادن مختصات $Q = (x - e, y - a)$ در معادله و صرف نظر از توانهای 2 و بالاتر a و e نسبت e/a مشخص می شود



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

با داشتن اندازه OT مختصات دو نقطه از خط مماس
را خواهیم داشت پس معادله خط مماس بر منحنی در
نقطه P قابل محاسبه است.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



ISAAC NEWTON
1642-1727



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

نیوتن یک منحنی را مولود حرکت پیوسته یک نقطه در
نظر می گیرد.

کمیت متغیر $\leftrightarrow$ فلوننت X

نرخ تغییر $\leftrightarrow$ فلوکسیون $\dot{X}$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

طبق نماد گذاری امروزی

$$\dot{x} = dx/dt$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

- ⊙ نیوتن مفهوم دیگری را معرفی می کند به نام گشتاور فلوئنت.
- ⊙ گشتاور فلوئنت کمیت بسیار کوچکی است که در فاصله بی نهایت کوچک O افزایش می یابد.
- ⊙ بنابراین گشتاور فلوئنت X برابر است با $\dot{X}O$.
- ⊙ می توان از توان های دوم و بالاتر O صرف نظر کرد.
- ⊙ پس اگر رابطه ی بین دو فلوئنت X و y داده شده باشد با جایگذاری $X + \dot{X}O$ به جای X و $y + \dot{y}O$ رابطه ی بین فلوئنت ها و فلوکسیون ها را به دست آورد.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

⊙ به عنوان مثال رابطه ی بین فلوئنت های X و y داده شده است

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

⊙ با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2(\dot{x}_0) + 3x(\dot{x}_0)^2 + (\dot{x}_0)^3 - ax^2 \\ & - 2ax(\dot{x}_0) - a(\dot{x}_0)^2 + axy + ay(\dot{x}_0) \\ & + a(\dot{x}_0)(\dot{y}_0) + ax(\dot{y}_0) - y^3 \\ & - 3y^2(\dot{y}_0) - 3y(\dot{y}_0)^2 - (\dot{y}_0)^3 = 0 \end{aligned}$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

با استفاده از این حقیقت که

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

و تقسیم جملات باقیمانده بر 0 و صرف نظر کردن از کلیه ی
جملاتی که شامل توانهای دوم و بالاتر 0 هستند



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

خواهیم داشت:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

طبیعت و قوانین طبیعت در ظلمت نهفته بودند؛
ذات باری فرمود: "نیوتن به وجود آید" و همه چیز
روشن شد



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message



GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ
1646-1716



○ لایبنیتز رقیب نیوتن در ابداع حسابان بود.

This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

○ لایبنیتز طی یک ماموریت سیاسی در پاریس، با هویگنس ملاقات کرد و به فراگیری ریاضیات نزد وی پرداخت.

○ مهم ترین قضیه کشف شده توسط لایبنیتز قضیه اساسی حسابان است که قسمت اعظم نمادهای خود را در حسابان به وجود آورد و تعدادی از فرمولهای قدماتی مشتق گیری را استخراج کرد.

○ در 1682 مجله ای به نام آکتا ارودیتوروم را تاسیس کرد و بیشتر مقاله هایش در مورد مکانیک را در این مجله منتشر کرد.



لایبنیتز حسابان خود را بین سالهای 1673 و 1676 اختراع کرد.

This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

او دیفرانسیلها و انتگرالهایی نظیر $\int y dx$ و $\int y dy$ به صورتی

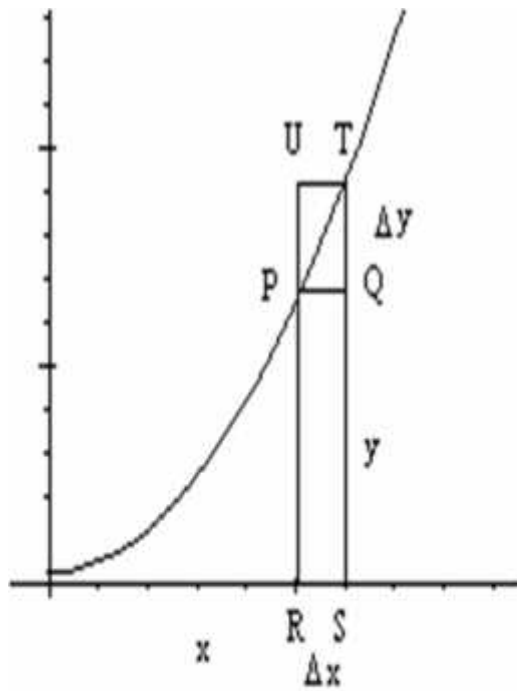
نوشت که ما امروز مینویسیم.

اولین مقاله چاپ شده او در حساب دیفرانسیل تا سال 1684 ظاهر نشد. او در این مقاله dx را به عنوان بازه متناهی دلخواهی معرفی میکند و سپس dy را با تناسب زیر تعریف کرد:

تحت مماس: $dy : dx = y$

قاعده یافتن مشتق n ام حاصلضرب دو تابع هنوز هم قاعده لایبنیتز نامیده میشود.

تعمیم قضیه دو جمله ای به قضیه چند جمله ای که به بسط $(a + b + \dots + n)^r$ مربوط میشود، به لایبنیتز منسوب است.



○ شکل روبرو را که معرف منحنی $y = x^2 + 1$ است را در نظر میگیریم.

○ $\Delta(\text{area})$ را برابر با مقدار مجموع مساحت PQSR و PQT میگیریم.

○ سپس لایبنیتز فهمید که تناسب بین y و $y + \Delta y$ هست.

○ از نمودار به وضوح میتوان دید که Δx و Δy به هم وابسته اند که این یعنی چنانکه Δx به 0 میل کند، Δy هم به 0 میل میکند. این موضوع نتیجه میدهد که نسبت $\Delta(\text{area}) / \Delta x$ بین y و مقداری که به y میل میکند قرار دارد. (مقداری که به y میل میکند، همان $y + \Delta y$ است چون Δy به صفر میل میکند)

○ نوشتن مشتق به روش لایبنیتز:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \text{area}}{\Delta x} = y = x^2 + 1$$



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

⊙ لایبنیتز رابطه عکس بین دیفرانسیل و مساحت نمودار را نشان داد ؛ یعنی گفت که دیفرانسیل سطح زیر نمودار تابع، برابر با خود تابع است.

⊙ تاریخ حسابان با این رابطه پیشگامانه دگرگون شد.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

S



∫

لایبنتز
نماد



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

- در واقع آنچه که لایبنیتز به دنبال گفتن آن بود این بود که همه مساحت های $y \times dx$ (که dx به 0 میل میکند) را جمع کند تا مساحت نمودار به دست بیاید.
- انتگرال نامتناهی همان پاد مشتق یا انتگرال نامعین است که ناشی از رابطه معکوسی بود که لایبنیتز پیدا کرده بود.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

لایبنتز نمادی هم برای انتگرال معین در نظر گرفت که بیانگر

مساحت نمودار در دامنه محدود.

$$\int_a^b f(x)dx = A(b) - A(a)$$

جاییکه A حاصل مساحت نمودار به وسیله یاد مشتق هاست.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

دعوا سر این بود که چه کسی، نیوتون یا لایبنیتز حساب را اختراع کرد؟...

این جدال در سال 1699 آهسته جوشید و در سال 1711 شدت یافت.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

شدن دعوا...





This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

نیوتن ادعا کرد که در سال 1666 (در سن 23 سالگی) روی شکل خاصی از حساب که همان متود حساب تفضیلی جمعی بود شروع به کار کرد.

اما فقط به طور حاشیه ای در یکی از نشریه هایش در ده سال بعد نشرش داد.

گاتفرید لایبنیتز در سال 1674 شروع به کار کرد و در 1684 اولین مقاله اش در این مورد نشر داد.

لوهوپیتال یک متن در سال 1694 درباره حساب لایبنیتز نوشت و در آن اشاره به این موضوع کرد که در کتاب "اصول" نیوتن (1687) هم تقریباً در مورد همین حساب لایبنیتز صحبت شده است.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

THE QUARREL

آخرین سالهای زندگی لایبنیتز (1709-1716) برایش ناگوار
شده بود، به خاطر جدلهایی که با "جان کیل" و نیوتن و
دیگران داشت؛ در این رابطه که آیا او (لایبنیتز) calculus
را مستقل از نیوتن کشف و اختراع کرده بود یا فقط یک
علامت دیگر برای ایده‌های نیوتن اختراع کرده بود؟...



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

در حساب تقضیلی وقتی لایبنتز روی دیفرانسیل
شروع به کار کرد هنوز به طور ظاهری هیچ
اثباتی میان سخنان نیوتن نبود.

او محاسباتی را از خط مماس منحنی منتشر کرد
با این جملات که: "این فقط یک پوسته و قالب
مخصوص از یک متود کلی است که به وسیله
آن من می توانم خم ها، $\max, \min$ و مرکز
گرانش را تعیین کنم."



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

حساب بی نهایت کوچک می تواند هم با علامت
فلوکسیون ها و هم با دیفرانسیل ها یا حتی با
فرم هندسی ای که در کتاب اصول نیوتن آمده
بیان شود.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

نیوتن فلوکسیون ها را قبل از 1666 به کار
گرفت ولی هیچ نمادگذاری مشخصی
برایش در نظر نگرفت اما در نوشته های
لایبنیتز، از نماد دیفرانسیل ها در سالهای
1675 و 1677 استفاده شده است.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

دلایلی

روی

لایبیتز:

1. چند سال قبل از این که نیوتن مطلبی راجع به فلوکسیون ها چاپ کند از متودش توضیحی نشر داد.
2. همیشه بر این موضوع اشاره می کرد که کشفش متعلق به خودش بوده ، به علاوه این اظهارات لایبیتز برای چند سالی به چالش کشیده نشد.
3. اثباتهایی که در مقاله هایش بود و رشد calculus را نشان می داد مستقل از راهی بود که نیوتن در اثباتش به کار گرفته بود.
4. لایبیتز ابتدا انتگرال را کشف کرد و به سری های نامحدود و بی کران عمومیت داد در حالی که نیوتن از مشتق شروع کرد.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

لایبنیتز در یکی از نامه هایش به آنتونیو کنتی اقرار

کرد که در سال 1676 کالینز به او چند کپی از مقالات نیوتن را نشان داده است. اما لایبنیتز اذعان داشت که آنها ارزش چندانی نداشتند .

اینکه لایبنیتز دست نوشته های نیوتن را به کار گرفته و از آنها اقتباس گرفته و یا قبل از آن calculus را اختراع کرده بوده یا نه یک سوال است که هیچ شواهد مستقیمی در دسترس نیست.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

نیکولاس فاشو دولیر، لایبنیتز را به سرقت کشف نیوتن
متهم کرد. اما فاشو دلیل این درگیری ها نبود تا در
سال 1704 گزارش نامعلوم در مورد رساله نیوتن در
باب مربع سازی (تربیع) انتشار یافت.

این گزارش بیان می کرد که نیوتن ایده حساب
فلاکسیون ها را از لایبنیتز به امانت گرفته است، اما
هیچ سند موجهی در این رابطه وجود نداشت.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

این ادعاها - که لایبنیتز آدمی اساسی را از نیوتن وام گرفته - ، توسط دوستان نیوتن ساخته شد و به وسیله نیوتن نوشته شد.

اما یوهان برنولی از جمله کسانی بود که سعی کرد این ادعاها را ضعیف نشان دهد و با حمله به شخصیت نیوتن در سال 1713 اعتراضش را نشان داد. اما وقتی برای توضیح تحت فشار قرار گرفت، مخالفتش را با این ادعاها تکذیب کرد. نیوتن در جواب به اظهارات برنولی گفت: "من هیچ وقت دنبال شهرت نبودم ولی مشتاقم که شخصیت من به صداقت شناخته شود."



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

لایبنیتز در نامه ای که به کنتی در جواب

دوستان نیوتن (1716) نوشت، اعلام کرد: “ به
خاطر ادعاهایی که در مورد من انجام داده اند
،من مجبورم بروم تمام محاسبات 30 تا 40
سال پیشم را پیدا کنم که زیر خروار ها نامه و
کاغذ مدفون شده ...”



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

○ برای رسیدگی به این نزاع جامعه اشرافی کمیته ای تشکیل دادند اما آنها از لایبنیتز نخواستند که مدارک خودش را ارائه کند. گزارش کمیته در واقع بر اساس علاقه به کشفیات نیوتن نوشته شد و خود نیوتن هم این گزارش را نوشت.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

در آخر، با استفاده از نیوتن به صورت مستقل calculus را ابداع کرده اند.

به طور قطع نیوتن اولین کسی بود که calculus نامتناهی را ابداع کرده و بسط داده، لایبنتز هم دیفرانسیل و انتگرال را ایجاد کرد.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7

Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

یک ناشر مشتق کرده که نزاع ها در این زمینه
اساس اختلاف روش هاست. با اینکه در یک سری

از نقاط این دو روش شبیهند ولی روشها از ریشه
متفاوتند و بنابر این اولویت دادن به این که چه کسی
زودتر پایه گذاری کرده یاوه ای بیش نیست.

بقیه ناشرها تاکید دارند که روشهای نیوتن و لایبنیتز
قابلیت تبدیل به یکدیگر را داشته که به نظر میرسد
در راستای تایید عقیده هوپیتال است.



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

● به لحاظ ریاضی دو روش لایبنیتز و نیوتن قابل تبدیل
به یکدیگر هستند فقط اثبات هایشان در پایه
تئوریشان قابل بحث است.

پایان



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

با تشکر از استاد عزیز و گرامی
دکتر امیر حسین اصغری
و همکاری
نادر گمنام



This file was edited using the trial version of Nitro Pro 7
Buy now at www.nitropdf.com to remove this message

منابع:

1. آشنایی با تاریخ ریاضیات؛ هاروارد و.ایوز
2. ریاضی دانان نامی؛ اریک تمپل بل
3. The calculus wars: Newton Leibniz and the Greatest Mathematical Clash of All time; Jason Socrates Bardi
4. WWW.math.wpi.edu