حل تمرین های سری پنجم سیستمهای کنترل خطی:

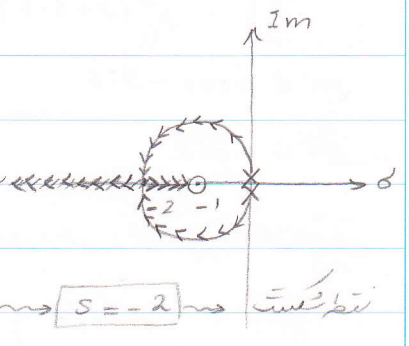
حل سؤال اول:

$GH(s) = \frac{K(s+1)}{s^2}$ = تابع تبدیل حلقه باز

$p_i = 0, 0$

$z_i = -1$

$\rightsquigarrow n - m = 2 - 1 = 1$



بین صفر واقع در -1 و صفر واقع در $-\infty$ انتظار نقطه شکست (هرسی) داریم

$\frac{s+1}{s^2} = \frac{A}{B} \rightsquigarrow A'B = B'A$

$\rightsquigarrow s^2 = 2s(s+1) \rightsquigarrow 2s^2 + 2s = s^2 \rightsquigarrow s + 2 = 0 \rightsquigarrow \boxed{s = -2}$ نقطه شکست

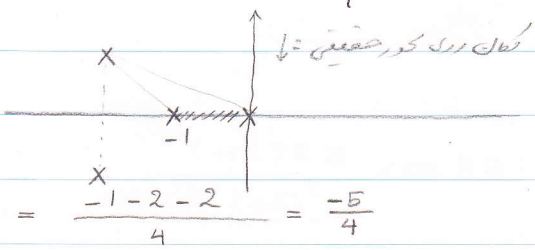
زاویه خروج از قطب واقع در مبدأ: $\frac{(2k+1)180 - [0 - 0]}{2} = 90^\circ$ حول 2 قطب در مبدأ داریم

حل سؤال دوم:

$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(s^2+4s+5)}$

$p_i = 0, -1, -2 \pm j \rightsquigarrow n - m = 4 - 0 = 4$

4 تا مجانب داریم



محل برخورد مجانب ها با محور حقیقی: $\frac{\sum Re(p_i) - \sum Re(z_i)}{n-m} = \frac{-1-2-2}{4} = \frac{-5}{4}$

زاویه مجانب ها $= \frac{(2l+1)180}{n-m} = \frac{(2l+1)180}{4} = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

or: $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$

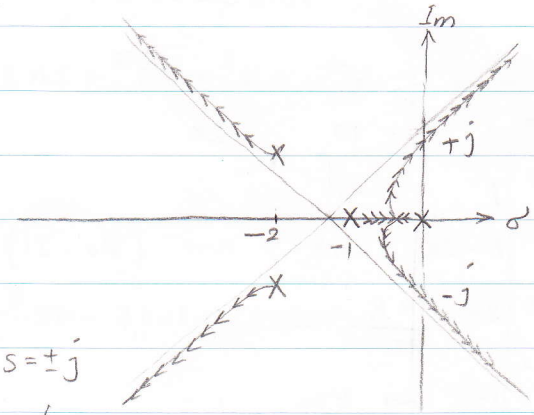
$\frac{1}{s(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{B}$ بین قطب واقع در 0 و -1 انتظار نقطه شکست داریم

$A'B = BA' \rightsquigarrow (s^4+4s^3+5s^2+s^3+4s^2+5s)' = 0 \rightsquigarrow 4s^3 + 15s^2 + 18s + 5 = 0$

با حل این معادله حل دقیق نقطه شکست که انتظار داریم بین 0 و -1 با شرط بدست می آید

زاویه خروج از قطب مختلط بالایی: $(2k+1)180 - (180 - \tan^{-1}1) - (180 - \tan^{-1}1/2) - 90 - 0$ ($k=1$, 45°)

$= 161.57$



محل برخورد با محور موهومی:

معادله مشخصه:

$s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 5s + k = 0$

s^4	1	9	k
s^3	5	5	
s^2	8	k	معادله کمکی: $8s^2 + k = 0 \rightsquigarrow s = \pm j$
s^1	$\frac{40-5k}{8}$ $\rightsquigarrow$	$\frac{40-5k}{8} = 0 \rightsquigarrow k = 8$	
s^0	k		

محل برخورد شکل رسم با محور موهومی با $k = 8$

حل سؤال سوم :

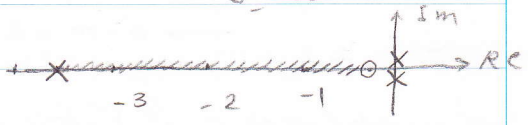
$$GH(s) = \frac{K(s+0.2)}{s^2(s+3.6)}$$

کمان روی محور حقیقی :

$p_i = 0, 0, -3.6$

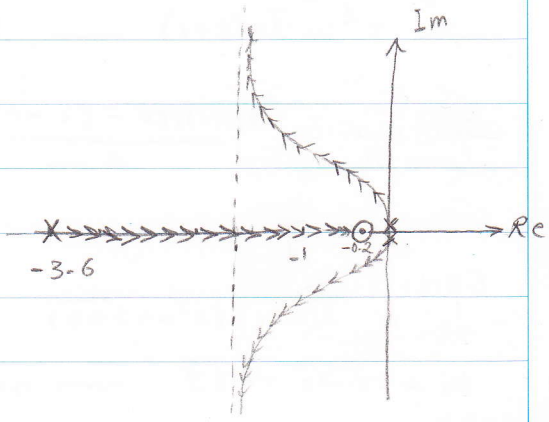
$z_i = -0.2$

$\rightsquigarrow n-m = 2 \rightsquigarrow$ دو مجانب داریم



محل برخورد مجانب ها با محور حقیقی $= \frac{-3.6+0.2}{2} = -1.7$

مجانب ها : $\frac{(2\ell+1)180}{2} = 90, 270$ (0 , 1)



زاویه خروج از قطب ها روی دایره : 90°

حل سؤال چهارم :

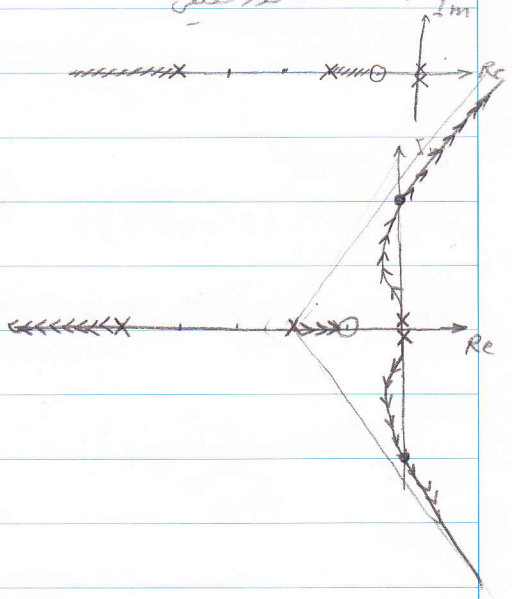
$$GH(s) = \frac{K\,2(s+1)}{s^2(s+5)(s+2)}$$

کل کمان روی محور حقیقی

$p_i = 0, 0, -5, -2$

$z_i = -1$

$\rightsquigarrow n-m = 4-1 = 3 \rightsquigarrow$ سه مجانب داریم



محل برخورد مجانب ها با محور حقیقی : $\frac{-5-2+1}{3} = \frac{-6}{3} = -2$

مجانب ها $= \frac{(2\ell+1)180}{n-m} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ (0 , 1 , 2)

زاویه خروج از قطب های روی دایره $= \frac{180-(0-0)}{2} = 90^\circ$ ← 2 چون دو تا قطب روی دایره

معادله مشخصه : $s^4 + 7s^3 + 10s^2 + 2Ks + 2k = 0$

s^4	1	10	2K
s^3	7	2K	
s^2	70-2K	14K	$\rightsquigarrow (70-21)s^2 + 147 = 0 \rightsquigarrow s = \pm j\sqrt{\frac{147}{49}}$ → این را اینجا بگو برو هری را قطبی کند
s^1	$2K - \frac{98K}{70-2K}$	$\rightsquigarrow 140K - 4K^2 - 98K = 0 \rightsquigarrow 42 - 4k = 0 \rightsquigarrow k = 10.5$	
s^0	14K	$\rightsquigarrow K > 0$	$0 < K < 10.5$ بنابراین حد پایداری

$K = 10.5$ محل برخورد با محور موهومی، بعد از این K ، سیستم ناپایدار می شود ← ریشه ها به سمت راست می روند

حل سوال پنجم:

$$GH = \frac{K}{S(S^2+4S+8)}$$

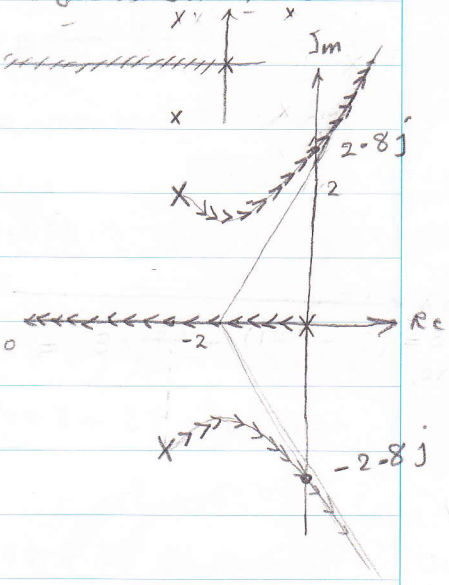
$P_i = 0, -2 \pm 2j \rightsquigarrow n-m = 3-0 = 3 \rightsquigarrow$ 3 مجانب دارد

محل برخورد مجانب‌ها با محور حقیقی $= \frac{0-2-2-0}{3} = \frac{-4}{3}$

زوایه مجانب‌ها $= \frac{(2l+1)180}{3} = 60, 180, 300$ ($l = 0, 1, 2$)

زاویه خروج از قطب پایینی: $(2K+1)180 - \left(\left(180 - \tan^{-1}\frac{1}{45}\right) + 90\right) - 0$ ($K=1$, $\tan^{-1}\frac{1}{45} \approx 1$, 145)

$= 3\times180 - (145+90) = 315^\circ$ or -45°



معادله مشخصه

$1 + GH = 0 \rightsquigarrow S^3 + 4S^2 + 8S + K = 0$

S^3	1	8
S^2	4	K
S^1	$8 - \frac{K}{4} = 0 \rightsquigarrow K = 32$	
S^0	K	

$4S^2 + K = 0 \rightsquigarrow S = \pm j\sqrt{8} = \pm j2\sqrt{2} = \pm j2.8$ (1.4)

$K = 32 \rightsquigarrow$ معادله مشخصه: $S^3 + 4S^2 + 8S + 32 = 0$

با حل این معادله محل قطب‌های حلقه بسته سیستم‌های این معادله مشخص می‌شود

$$\begin{cases} -1.85 + j1.87 \\ -1.85 - j1.87 \\ -0.29 \end{cases}$$

حل معادله درجه 3 در حالت کلی ساده نیست با استفاده از دستور roots قطب‌ها را می‌توان رشته‌ای را به صورت مستقیم بدست آورد

MATLAB

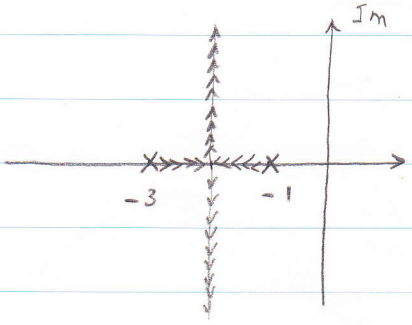
حل سوال ششم:

$$GH = \frac{1}{(S+1)(S+3)}$$

$P_i = -1, -3 \rightsquigarrow n-m = 2 \rightsquigarrow$ 2 مجانب

محل برخورد مجانب‌ها با محور حقیقی $= \frac{-1-3}{2} = -2$

زوایه مجانب‌ها $= \frac{(2l+1)}{2}\times180 = 90^\circ, 270^\circ$



$\frac{1}{(S+1)(S+3)} = \frac{A}{B} \rightsquigarrow A'B = B'A \rightsquigarrow 2S+4 = 0 \rightsquigarrow \boxed{S=-2}$

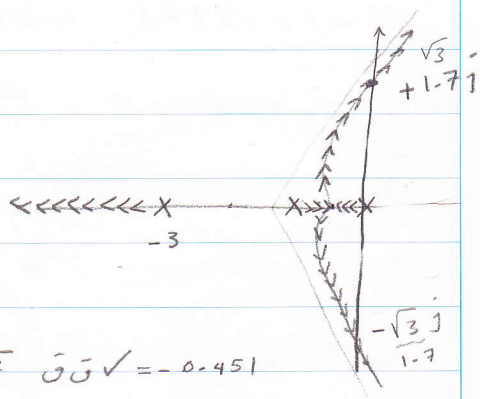
نقطه شکست

حل سؤال هفتم :

$$GH = \frac{1}{S(S+1)(S+3)}$$

$Pi = 0, -1, -3 \rightsquigarrow n - m = 3 \rightsquigarrow$ 3 مجانب دارد

مرکز ثقل مجانب ها با محور حقیقی $= \frac{-1-3}{3} = -\frac{4}{3}$



زاویه مجانب ها $= \frac{(2k+1)180}{3} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ (k = 0, 1, 2)

$A'B = B'A \rightsquigarrow (S^3 + 4S^2 + 3S)' \times 1 = 0$

$\rightsquigarrow 3S^2 + 8S + 3 = 0 \rightsquigarrow \frac{-4 \pm \sqrt{16-9}}{3} =$ ✓ قابل قبول $\frac{-4+\sqrt{7}}{} = -0.451$ ، غیر قابل قبول $\frac{-4-\sqrt{7}}{} = -6.64$

برای بدست آوردن محل برخورد با محور موهومی : معادله مشخصه : $1 + KGH = 0$

$S^3 + 4S^2 + 3S + K = 0$

S^3	1	3
S^2	4	K
S^1	$3 - \frac{K}{4} = 0$	
S^0	K	

S^2 : $\rightsquigarrow 4S^2 + 12 = 0 \rightsquigarrow S = \pm\sqrt{3}\,j \rightsquigarrow$ محل برخورد با محور موهومی

S^1 : $\rightsquigarrow 12 - K = 0 \rightsquigarrow K = 12$