

انتگرال دوگانه

معکوس مثلثاتی

دکتر یوسف کوهمسکن

ریاضی ۲



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

حاصل انتگرال دوگانه زیر را تعیین کنید.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dx dy}{\sqrt{1-x^4-y^4+x^4y^4}} = ?$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: ابتدا مشتق معکوس مثلثاتی مرور می‌شود.



مشتق معکوس مثلثاتی برای سینوس به صورت زیر است:

$$\left(\sin^{-1} u \right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

انتگرال اخیر به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dx dy}{\sqrt{1-x^4-y^4+x^4y^4}} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dx dy}{\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)}} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} \frac{ydy}{\sqrt{1-y^4}} \\ &= \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{ydy}{\sqrt{1-y^4}} \end{aligned}$$

انتگرال فوق به صورت ضرب دو انتگرال تک‌متغیره قابل نمایش است. می‌توان از تغییر متغیر $u = x^2$ استفاده کرد.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} &= \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin^{-1} u \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

برای $\int_0^1 \frac{ydy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{\pi}{4}$ هم به سادگی بدست می‌آید.

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dx dy}{\sqrt{1-x^4-y^4+x^4y^4}} = \frac{\pi^2}{16}$$

۳ مسائل مشابه

حاصل انتگرال‌های دوگانه زیر را تعیین کنید.

الف- $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x dx dy}{\sqrt{4 - 4y^2 - x^4 + y^2 x^4}}$

ب- $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{xy - xy^2 - yx^2 + x^2 y^2}}$

الف-  پاسخ:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x dx dy}{\sqrt{4 - 4y^2 - x^4 + y^2 x^4}} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x dx dy}{\sqrt{(1 - y^2)(4 - x^4)}} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^4}} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \frac{\pi}{12} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \frac{\pi}{12} \left[\sin^{-1} y \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{24} \end{aligned}$$

ب- 😏 پاسخ:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{xy - xy^2 - yx^2 + x^2 y^2}} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{(x - x^2)(y - y^2)}} \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{y - y^2}} \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-y}} \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(2 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} dx}{\sqrt{1-x}}\right) \left(2 \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}} dy}{\sqrt{1-y}}\right) \\
 &= 2 \int_0^1 \left[\sin^{-1} \sqrt{x} \right]_0^1 \left(2 \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}} dy}{\sqrt{1-y}}\right) \\
 &= 2\pi \int_0^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}} dy}{\sqrt{1-y}} \\
 &= 2\pi \left[\sin^{-1} \sqrt{y} \right]_0^1 \\
 &= \pi^2
 \end{aligned}$$

گاه‌های به ظاهر ناچیز در گذر زمان
تفاوت‌های اساسی ایجاد می‌کنند.
دارن هاردی



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com