$\Delta x \to 0$

سری فوریه

دو توابع f و g را متعامد (عمود برهم) نامیم هرگاه (در بازه a و b)

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

مثال

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \cos x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin 2x \quad (\sin 2x = 2\sin x \cos x)$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\int 2\sin 2x = \frac{1}{4}(-\cos 2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} \quad \text{بازه}$$

$$= \frac{1}{4}(\underbrace{-\cos 2\pi}_{1} + \underbrace{\cos(-2\pi)}_{1}) = \frac{1}{4}(-1+1) = 0 \rightarrow$$ تابع sin و cos برهم عمودند

$(\int \sin x = -\cos x \qquad \int u' \sin u = -\cos u)$

قضیه

هر تابع متناوب را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بی‌نهایت تابع متناوب و متعامد بسط داد

$f(x) = \sum$ توابع متناوب و متعامد

که این توابع متعامد همان توابع sin ها و cos ها باشند.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}\right)$$

که فرمول فوق، فرمول بسط سری فوریه می‌باشد

نکته

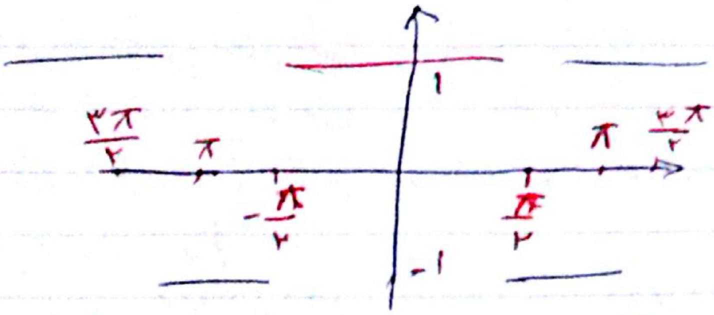
به $\frac{a_0}{2}$ و a_1 و b_1 و ... و a_n و b_n و ... ضرایب سری فوریه گویند که از روابط زیر به دست می‌آیند

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(x)\,dx \qquad \int_T = \int_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,dx$$

AVA



f متناوب می باشد و دامنه تناوب آن $T=2\pi$ می باشد

$$T=\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\right]$$
$$\underline{\qquad}$$
$$2\pi$$

می توانیم سری فوریه را برای نمودار بالا بنویسیم.

$$-\ a_0=\frac{2}{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-1)\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\left(-\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}(\pi+(-\pi))=0$$

$$-\ a_n=\frac{2}{T}\int_T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx \Rightarrow$$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos\frac{\cancel{2\pi} n}{\cancel{2\pi}}x\,dx \Rightarrow$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\cos nx\,dx\right)\Rightarrow=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$-\ b_n=\frac{2}{T}\int_T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,dx \Rightarrow b_n=0$$

حال مقادیر را در فرمول بالا می دهیم.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T}\right)\Rightarrow$$

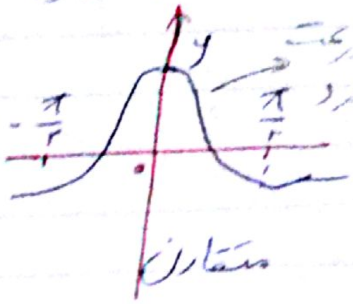
$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

حالت خاص سری فوریه

الف) f تابع زوج باشد یعنی $f(x)=f(-x)$ (تابع نسبت به محور y ها متقارن باشد) در این صورت b_n برابر صفر می باشد و داریم

$$b_n=0 \qquad a_0=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

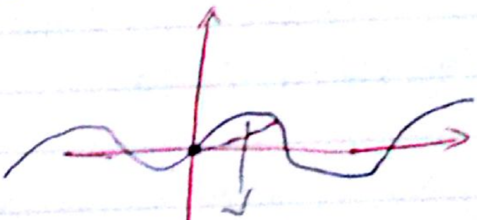


(تابع $\cos x$ یک تابع زوج است)

ب) f تابع فرد باشد در این صورت داریم. $(f(-x)=-f(x))$

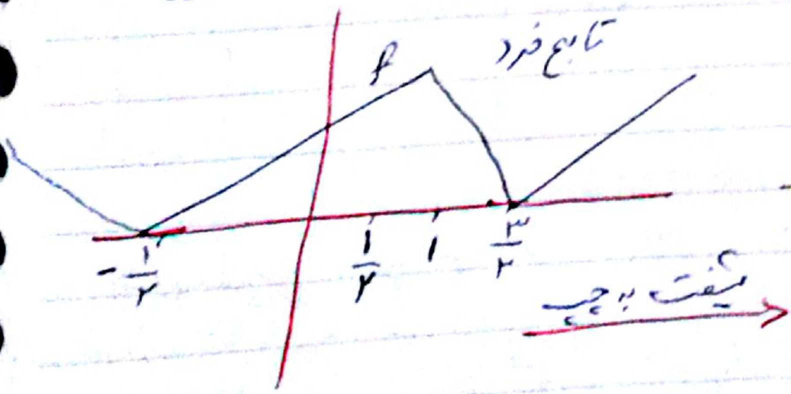
$$a_0=0 \qquad a_n=0$$

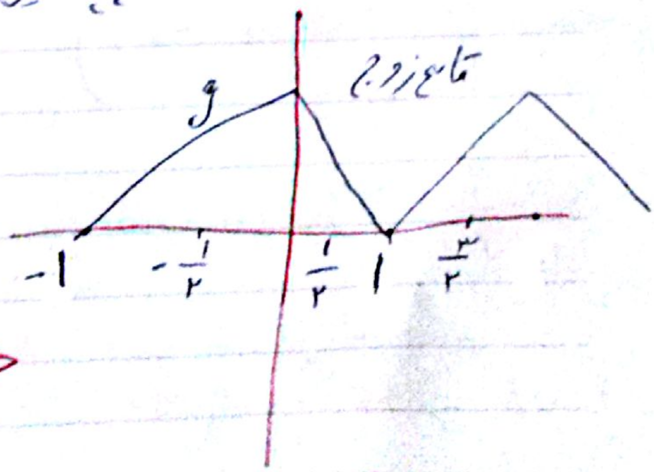
$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$



$\boxed{\text{تابع } \sin x \text{ یک تابع فرد می باشد}}$

نکته: در بعضی از مسائل که تابع نه زوج است نه فرد می توان با انتقال یا شیفت دادن به سمت راست یا چپ این تابع را به یک تابع زوج یا فرد تبدیل نمود





$$f(x)=g\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$g(0)=1$

$g(1)=0$

$g(x)=1-x$

$$\begin{cases} f(\frac{1}{2})=1 \\ g(0)=1 \end{cases} x=\frac{1}{2} \qquad \begin{cases} f(\frac{3}{2})=0 \\ g(1)=0 \end{cases} x-\frac{1}{2}$$

AVA

Subject Year Month Date

$T=2$

$- a_0 = \frac{2}{2}\int_0^1 g(x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^1 =$

$2\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)-0\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$- a_n = \frac{4}{2}\int_0^1 g(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{2}\right)dx = 2\int_0^1 (1-x)\cos(\pi n x)\,dx =$

$\frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)$

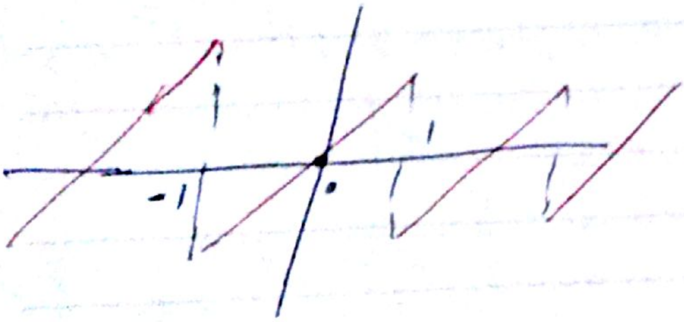
$- b_n = 0$

$g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)$

$x \to x-\frac{1}{2} \to f(x)$

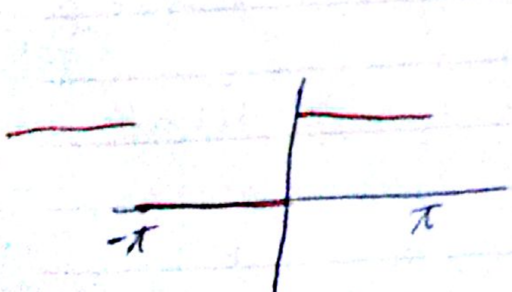
تمرین

سری فوریه زیر را بدست آورید.

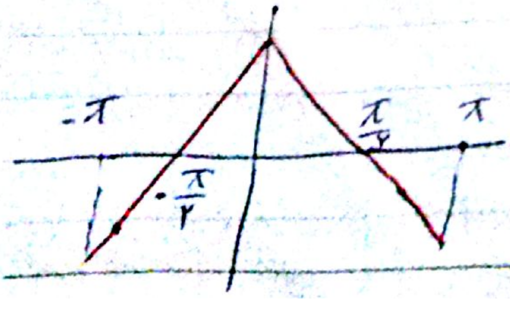


$f(x)=x \qquad T=2$

$-1\le x\le 1$ حل در صفحات بعد



$f=\begin{cases} 0 & -\pi\le x<0 \\ 1 & 0\le x\le \pi \end{cases}$



$f=\begin{cases} 1+\frac{2}{\pi}x & -\pi\le x<0 \\ 1-\frac{2}{\pi}x & 0\le x<\pi \end{cases}$

حل در صفحات بعد

AVA

Subject: Year: Month: Date:

تعیین سری فوریه برای توابع غیر متناوب

- روش اول

تابع را به شکل زوج متناوب می‌کنیم. (نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم) برای این توابع ضرایب b_n آن صفر است و بسط نیم دامنه کسینوسی نوشته می‌شود و ضرایب a_n آن بسط نیم دامنه سینوسی می‌باشد.

- روش دوم

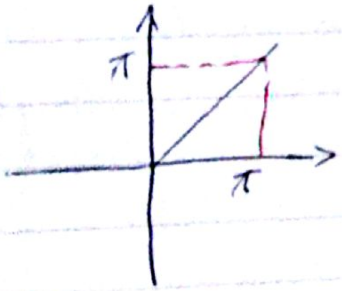
تابع را به شکل فرد متناوب می‌کنیم (نسبت به محور مختصات قرینه داشته) در صورت ضرایب a_n و a_0 صفر است و اصطلاحا گفته می‌شود برای این توابع بسط نیم دامنه سینوسی نوشته می‌شود.

- روش سوم

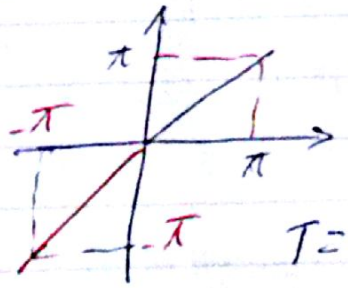
هر تابع غیر متناوب را می‌توان یک تابع متناوب با دوره تناوب بی نهایت در نظر گرفت. $T \to \infty$

بنابراین می‌توان در سری فوریه T را به سمت بی نهایت میل دهیم. در نتیجه سری فوریه به انتگرال فوریه تبدیل می‌شود.

مثال



تابع را به شکل فرد متناوب می‌کنیم ←



$T=2\pi$

$a_0=0$

$a_n=0$

$\left.\begin{array}{l} x=0 \to f(x)=0 \\ x=\pi \to f(x)=\pi \\ x=-\pi \to f(x)=-\pi \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)=x$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{x}\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx =$$

$$=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x\left(\sin\frac{2\pi}{2\pi}nx\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin nx\,dx}_{dv}=$$

(از روش انتگرال جزء به جزء حل می‌کنیم)

$$=\frac{2}{\pi}\left(uv-\int v\,du\right)=\frac{2}{\pi}\left(x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)-\int -\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin n\pi\right)\right)=\frac{2}{\pi}(-1)^n\times-\frac{\pi}{n}$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

۲۴

Subject: Year: Month: Date:

انتگرال جزء به جزء

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ مهم فرمول کلی

$v = \int dv$

حالت ۱

$\int \overset{u}{x} \, \overset{dv}{\sin x \, dx} = \quad (u = x \to du = 1 \quad dv = \sin x \to v = -\cos x)$

$x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \underbrace{\int \cos x\,dx}_{\sin x} = -x\cos x + \sin x$

مهمترین مسئله در حل انتگرال جزء به جزء تشخیص درست u و dv می باشد.

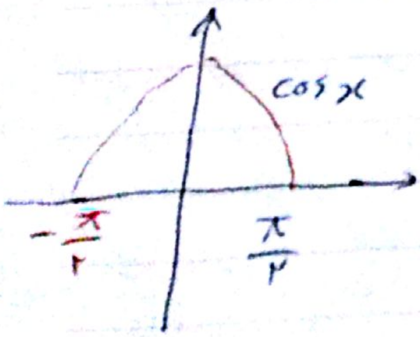
که در حالت اول تشخیص درست بوده و جواب ساده تری بدست آوردیم.

حالت ۲

$dv = x$
$u = \sin x$ $\to \int x \sin x \, dv = \sin x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cos x\,dx$

مسئله

بط نیم دامنه سینوسی تابع زیر را بدست آورید



$b_n = 0 \quad T = \pi$

حل کن

Subject:
Year: Month: Date:

$T \to \infty$

انتگرال فوریه

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left(A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right) dw$$

$A(w)$: تابع برحسب w

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\, dx$$

$$B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\, dx$$

اگر تابع فرد باشد

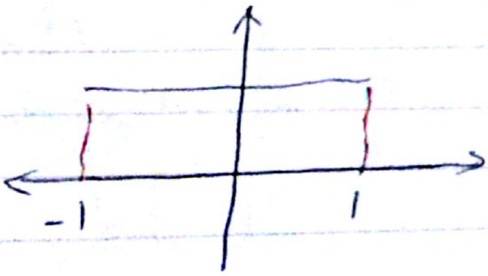
$$\begin{cases} A(w) = 0 \\ B(w) = 2\int_0^{\infty} f(x)\sin wx\, dx \end{cases}$$

اگر تابع زوج باشد

$$\begin{cases} B(w) = 0 \\ A(w) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\, dx \end{cases}$$

تمرین

انتگرال فوریه تابع زیر را به دست آورید.



$B(w) = 0$ تابع مذکور زوج است پس باید $A(w)$ را به دست آوریم.

$$A(w) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\, dx = \frac{2}{w}\sin wx \Big]_0^1 = \left(\frac{2}{w}\sin w \times 1\right) -$$

$$\left(\cancel{\frac{2}{w}\sin w \times 0}\right) = \frac{2\sin w}{w}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left(A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right) dx$$ (جایگذاری در فرمول)

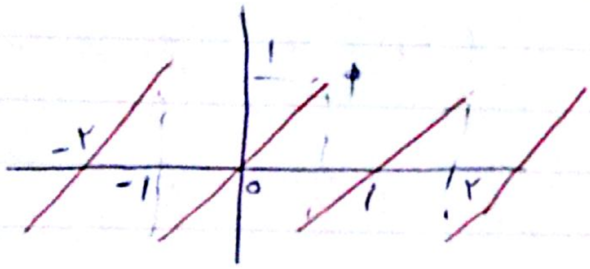
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left(\left(\frac{2\sin w}{w}\right)\cos wx\right) dw$$

AVA

Subject:
Year: Month: Date:

حل تمرین ها

سری فوریه زیر را به دست آورید



$f(x)=x \qquad T=2$

$-1\leq x\leq 1$

تابع فرد است

$-\, a_0=\frac{2}{T}\int_T f(x)\,dx \quad T=2 \rightarrow a_0=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ $\boxed{a_0=0}$

$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx \rightarrow a_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos\frac{2\pi x}{2}x\,dx}_{dv}$

$\left(du=dx \qquad v=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right)$

$\rightarrow a_n=uv-\int v\,du \rightarrow a_n=x\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)-\frac{1}{n\pi}\int\sin(n\pi x)\,dx$

$a_n=\frac{x}{n\pi}\sin(\pi n x)+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\Big]_{-1}^{1}=$

$\frac{1}{n\pi}\cancel{\sin(n\pi)}+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)-\left(-\frac{1}{n\pi}\cancel{\sin(-n\pi)}+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)\right)$

$=\frac{1}{n^2\pi^2}(-1)^n-\frac{1}{n^2\pi^2}(-1)^n=0 \quad \rightarrow \boxed{a_n=0}$

$-\, b_n=\frac{2}{T}\int f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,dx$

$b_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin\frac{2\pi n}{2}x\,dx}_{dv} \rightarrow b_n=\frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x-\int-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\,dx$

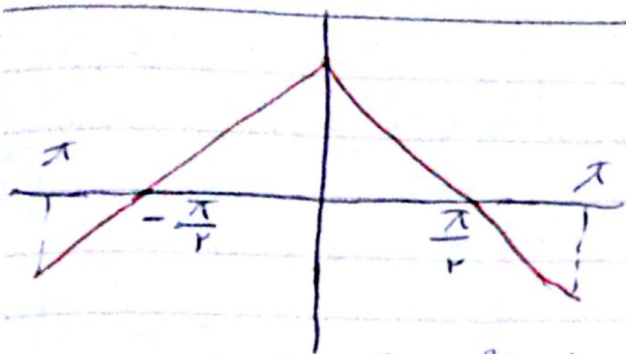
$b_n=\frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big]_{-1}^{1}= \qquad (\sin n\pi=0)$

$b_n=\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+\underbrace{\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi}_{0}\right]-\left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi-\underbrace{\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi}_{0}\right]$

$b_n=-\frac{1}{n\pi}(-1)^n-\frac{1}{n\pi}(-1)^n=2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$

AVA

Subject: Year: Month: Date:



$$f\begin{cases} 1+\frac{2}{\pi}x & -\pi \le x < 0 \\ 1-\frac{2}{\pi}x & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

تابع زوج می باشد. $a_0 = ?\ ,\ f(x)=f(-x)\ ,\ b_n = 0$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx \rightarrow a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)dx \rightarrow$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[x - \frac{2}{\pi}\times\frac{x^2}{2}\right]_0 \rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi^2}{4}\right) - 0\right]$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\pi - \frac{\pi}{2}\right] = 1 \rightarrow a_0 = 1$$

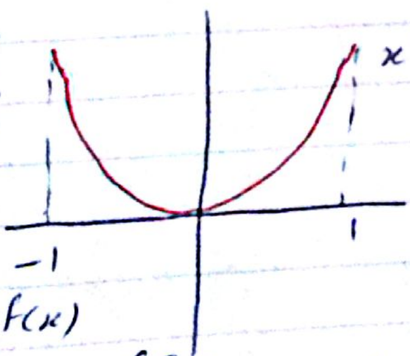
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2\pi}\right)dx \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int \cos x - \int \frac{2\pi}{\pi}\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\right]$$

انتگرال فوریه تابع زیر را بدست آورید.

تابع زوج

$f(-x)=f(x)$



$B(w)=0 \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$

جزء به جزء

1

$u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = \cos wx \rightarrow dv = \frac{1}{w}\sin(wx) = v$

$$A(w) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(wx)\,dx \Rightarrow$$

۲ بار از روش جزء به جزء استفاده کنیم

$$A(w) = 2\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\cos(wx)\,dx}_{dv} \Rightarrow$$

$$A(w) = 2\left(x^2\frac{1}{w}\sin wx - \int \frac{1}{w}\sin wx \times \underbrace{2x\,dx}_{u}\right) = \boxed{\frac{x^2}{w}\sin wx}$$

du

2

$u = 2x \rightarrow du = 2$

$dv = \int \frac{1}{w}\sin wx \rightarrow v = -\frac{1}{w^2}\cos wx$

جزء به جزء

AVA

$$A(w)=2\left[\frac{\sin x}{w}+\frac{2\cos w}{w^2}-\frac{2\sin w}{w^3}\right]$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(\frac{\sin w}{w}+\frac{2\cos w}{w^2}-\frac{2\sin w}{w^3}\right)\cos wx\,dw\right]$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و همگن روی میدان کراندار

معادلاتی هستند که به متغیرهای زمان و مکان وابسته اند و معروف ترین آنها معادله موج و معادله انتقال گرما هستند.

اگر تابع u تابعی از متغیرهای x و y و z و T باشد مشتق نسبی یا پاره‌ای یا جزیی u نسبت به x در نقطه x و y و z و T برابر است با

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y,z,T)-u(x,y,z,t)}{h}$$ این حد باید موجود باشد

و به این شکل نشان داده می‌شود $\frac{du}{dx}$ یا x_u یا $D_x u$

متغیر زمان t متغیرهای مکان x و y و z

$(u_x)_x = u_{xx} = \frac{d^2u}{dx^2}$ یعنی ۲ بار نسبت به x مشتق می‌گیریم

$(u_x)_y = u_{xy} = \frac{d^2u}{dx\,dy}$

$\frac{d^3u}{dx^3} = u_{xxx}$ یعنی ۳ بار نسبت به x مشتق می‌گیریم

نکته: معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه m عبارت است از معادله‌ای که یکی از مشتقات از مرتبه m باشد و مشتق بالاتر از m در آن ظاهر نشده باشد.

$u_{xy} + u_x u_{yy} + u_x^4 + 4u^2 = \sin xy$ مشتق از مرتبه ۲ نسبت به y

فرم کلی معادله $f(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0$

معادله دیفرانسیل جزئی را خطی گوییم اگر تابع f نسبت به هر یک از متغیرهای u و u_x و u_y و غیره خطی باشد به عبارت دیگر این معادله را به صورتی بتوان نوشت که

طرف تساوی از ترکیب خطی خود تابع مجهول و مشتقات آن با ضرایبی از توابع متغیرهای مستقل تشکیل شده باشد. و طرف دوم فقط تابعی از متغیرهای مستقل باشد.

$$A(x,y,z)u + A_2(x,y,z)u_x, \dots = A_n(x,y,z)$$

$$A_1(t,x)u_{tt} + A_2(t,x)u_{tx} + A_3(t,x)u_{xx} + A_4(t,x)u_t + A_5(t,x)u_x + A_6(t,x)u = f(x,y)$$

مرتبه دوم خطی

اگر $f(x,y)=0$ باشد معادله همگن می باشد و در غیر این صورت ناهمگن است.

معادله دو بعدی گرما $u_t = c^2(u_{xx}+u_{yy})$ معادله یک بعدی گرما $u_t = c^2 u_{xx}$

معادله دو بعدی موج $u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy})$ معادله یک بعدی موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

☆ در یک معادله جزیی این متغیرها در یک مجموعه Ω (احتمالا با مرزی) تعریف می شوند.

برای حل معادلات دیفرانسیل عادی معمولاً به دنبال جواب عمومی آن هستیم اما در مورد معادلات دیفرانسیل جزیی تعیین جواب عمومی همیشه امکان پذیر نیست. در حقیقت تعیین جواب عمومی معادلات دیفرانسیل جزئی در صورتی مقدور است که بتوان با تغییر تابع مجهول آن را به یک معادله دیفرانسیل عادی تبدیل کرد و آن را حل نمود.

$$u_{xy} + u_x = e^x \sin y$$

$$u_x = v \Rightarrow v_y + v = e^x \sin y \Rightarrow v = c(x)e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y$$

$$\int u_x \, dx = \int c(x)e^{-y} + \left(\frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y\right) dx$$

$$u(x,y) = c_1(x)e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y + c_2(y)$$

متغیرهای مستقل تابع مجهول در یک معادله دیفرانسیل جزئی متغیرهایی می باشند که مشتق نسبی تابع مجهول نسبت به آنها در معادله ظاهر شده باشد. بقیه متغیرهای ظاهر شده در معادله را به عنوان پارامتر منظور می کنیم.

$$u_{xx}+u_{xy}+tu_x-zz_u=e^{x^t}\sin yz$$

x , y متغیرها

t , z پارامترها

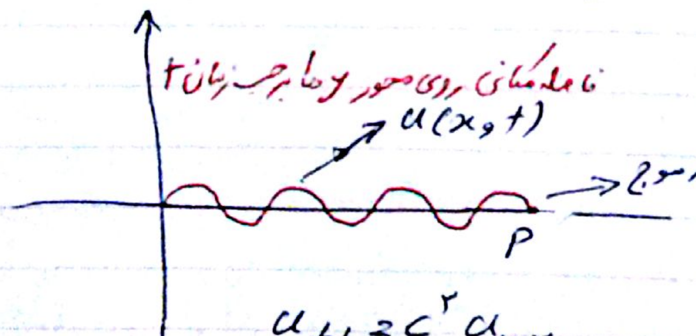
یک معادله دیفرانسیل جزئی که یک مدل فیزیکی را بیان می کند بی نهایت جواب دارد برای انتخاب جوابی که نمایش دهنده جواب فیزیکی مساله باشد باید شرایط دیگر جواب را از مساله فیزیکی استخراج و به همراه معادله منظور کنیم، این نوع شرایط را شرایط تکمیلی گوییم که بر دو نوع است.

نوع اول

تابع مجهول باید برای $t\geq 0$ تعریف شود در این صورت از روی شرایط فیزیکی تابع مجهول و مشتقات آن تا مرتبه $n-1$ در $t=0$ داده شده است. اینگونه شرایط را شرایط اولیه گویند.

نوع دوم

تابع مجهول باید روی میدانی از فضا تعریف شود در این صورت مقدار این تابع یا مشتق جهت دار آن و یا ترکیب خطی از این دو، در روی مرز آن قابل تعیین است و همراه با معادله داده می شود این شرایط را شرایط مرزی گویند



$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$

اگر فاصله مکانی در نقطه اول و آخر ثابت باشد

مکان اول

$u(x,t)=u(0,t)=0$ → شرایط مرزی

مکان دوم → $u(p,t)=0$

$\Omega(0,p)$

AVA

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$\Rightarrow$ شرایط اولیه

$$u_t(x,0) = g(x)$$

اگر بر حسب زمان مشتق بگیریم به دست می آید.

شرایط مرزی

نکته:
یک معادله دیفرانسیل جزئی را خوش تعریف گوییم اگر شرایط زیر برای مساله برقرار باشد.
الف) مساله حداقل یک جواب داشته باشد.
ب) مساله تنها یک جواب داشته باشد.

نکته:
اگر $u_1, \dots, u_n$ جواب یک معادلات دیفرانسیل خطی همگن و $c_1, \dots, c_n$ مقادیر ثابت باشند در این صورت $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k$ یک جواب معادله است.

اگر u_p یک جواب معادله خطی غیرهمگن و u_h یک جواب معادله همگن وابسته به آن باشد در این صورت $u_h + u_p$ هم یک جواب دیگر معادله است.

Subject:
Year: Month: Date:

تمرین
اگر f تابع مشتق پذیر باشد نشان دهید $u=f(xy)$ جواب معادله $xu_x - yu_y = 0$ است.

تمرین
فرض کنید f, g دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد نشان دهید تابع $u=f(x)g(y)$ جواب معادله $uu_{xy}-u_xu_y=0$ است.

$u=f(x)g(y) \rightarrow u_x = g(y)f'(x) \rightarrow u_{xy} = g'(y)f'(x)$

$uu_{xy}-u_xu_y=0 \rightarrow u_y = f(x)g'(y)$

$f(x)g(y)g'(y)f'(x) - g(y)f'(x)f(x)g'(y) = 0$

تمرین
تعیین کنید کدام معادله خطی و کدام غیر خطی است.

$uu_x - 2xyxy = 0$ غیر خطی همگن

$ux_x + xu_y = y$ خطی غیر همگن

$u_x^2 + uu_y = 1$ غیر خطی غیر همگن

$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$ خطی همگن

AVA

حل معادلات مشتق جزئی به روش سری فوریه:

حل معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با ضرایب ثابت را ابتدا توضیح می دهیم چون در حل مسائل فوق نیاز داریم.

معادله زیر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است

$$\underline{a y''(x) \pm b y'(x) \pm c y(x) = h(x)}$$

چون + است خطی است مرتبه دوم

برای حل آن

$$\left.\begin{array}{l} y'' = \lambda^2 \\ y' = \lambda \\ y = 1 \end{array}\right\} \to a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$ (معادله مشخصه است)

حال آن را حل می کنیم.

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac \quad \begin{cases} \text{if } \Delta > 0 \to \lambda_1 = ?,\ \lambda_2 = ? \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \\ \text{if } \Delta = 0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,\ y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} \\ \text{if } \Delta < 0 \to \lambda_1 = p + iq,\ \lambda_2 = p - iq \quad \text{اعداد مختلط} \\ y = c_1 e^{px}\cos(qx) + c_2 e^{px}\sin(qx) \end{cases}$$

حالت خاص:

1. $y''(x) + \mu^2 y(x) = 0$

$$y(x) = c_1 \sin(\mu x) + c_2 \cos(\mu x)$$

2. $y'' - \mu^2 y(x) = 0 \to y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$

مسأله: تار مرتعشی را در نظر بگیرید که در امتداد محور xها از صفر تا P کشیده شده باشد.

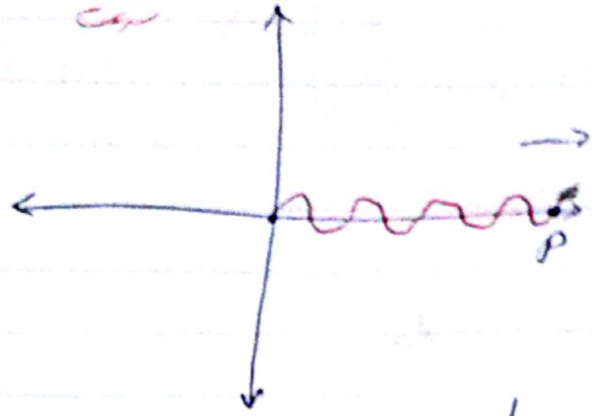
$u(x,t)$

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < P,\ 0 < t$

$u(0,t) = 0,\ u(P,t) = 0 \quad 0 < t \longrightarrow$ شرط مرزی

$u(x,0)=f(x)$ $\quad u_t(x,0)=g(x)$ $\quad 0\le x\le p$ → شرط اولیه

سرعت



→ شکل مورد نظر یک تابع سینوسی

نتیجه می‌گیریم حل تابع ما یک بسط سینوسی دارد

$$\left\{\sin\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\sin\frac{\pi x}{p},\sin\frac{2\pi x}{p},\dots\right\}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\frac{n\pi x}{p}\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{\text{در معادله}}(u_{tt}-c^2u_{xx}=0)$$

ابتدا نسبت به x دو بار u_{xx} مشتق می‌گیریم

$$u_x=\sum A_n(t)\frac{n\pi}{p}\cos\frac{n\pi}{p}x$$

$$u_{xx}=\sum A_n(t)\frac{n^2\pi^2}{p^2}\left(-\sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

مشتق مرتبه دوم

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0\to\sum A_n^{(2)}(t)\sin\frac{n\pi x}{p}+c^2\sum A_n(t)\frac{n^2\pi^2}{p}\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$

$$=\sum\left(A_n^{(2)}(t)+c^2\frac{n^2\pi^2}{p^2}A_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{p}x=0$$

$$A_n^{(2)}(t)+\overbrace{\frac{c^2n^2\pi^2}{p^2}}^{M^2}A_n(t)=0$$

جایگذاری

$$A_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi c}{p}t+b_n\sin\frac{n\pi c}{p}t$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{p}t+b_n\sin\frac{n\pi c}{p}t\right)\sin\frac{n\pi x}{p}\ \to$$

AVA

Subject:
Year: Month: Date:

$$u(x,0)=f(x)=\sum a_n \sin\frac{n\pi x}{p}$$

$$u_t(x,0)=g(x)=\sum \frac{n\pi c}{p} b_n \sin\frac{n\pi x}{p} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx \\ \frac{n\pi c}{p}b_n=\frac{2}{p}\int_0^p g(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx \end{cases}$$

انتشار گرما

میله به طول p که در هر لحظه t یک درجه حرارت داشته باشد

$0 \longrightarrow p$ $\quad u(x,t)$

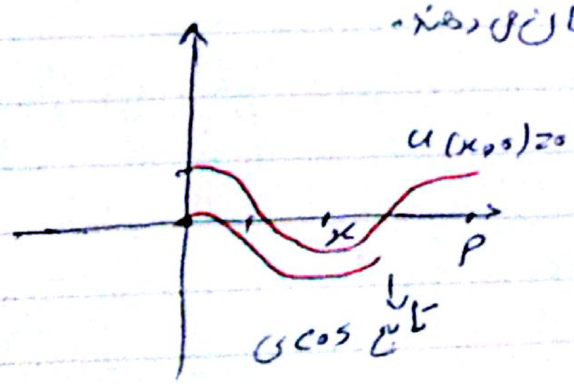
یک میله فلزی همگن به طول p را در نظر بگیرید که در هر لحظه t درجه آن در هر مقطع میله ثابت است. این میله از اطراف آن عایق کاری شده است به طوری که از سطح جانبی آن هیچ تبادل حرارتی انجام نمی‌گیرد. در لحظه $t=0$ درجه حرارت در هر مقطع داده شده است. اگر میله در امتداد محور xها از $x=0$ تا $x=p$ واقع باشد و $u(x,t)$ درجه حرارت را در مقطع x در لحظه t نشان دهد معادله به صورت زیر می‌باشد.

$u_t=c^2u_{xx} \quad 0<x<p$ و $t>0$ شرایط اولیه

$u(x,0)=f(x)$ $\quad \begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(p,t)=0 \end{cases}$ در مکان صفر مشتق صفر است / شرایط مرزی

t ... اولیه

انتقال حرارت با محیط بیرون را با u_x نشان می‌دهند.



پایه $\left\{\cos\frac{n\pi x}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$

$$u(x,t)=\frac{A_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{p}$$ نیم دامنه cos

جایگذاری می‌کنیم! $u_t=c^2u_{xx}$ (نسبت به مشتق t) $\frac{A_0'(t)}{2}+\sum A_n'(t)\cos\frac{n\pi x}{p}$ AVA

$$=c^2\left(-\sum A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{p}\right) \longrightarrow$$

Subject
Year Month Date

همه عبارات را یک طرف تساوی می‌بریم

$$\frac{A_0'(t)}{2}+\sum A_n'(t)\cos\frac{n\pi x}{P}+c^2\sum \underset{\frac{n^2\pi^2}{P^2}}{A_n(t)}\cos\frac{n\pi x}{P}=0$$

نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$u_x=-\sum \underset{\frac{n\pi}{P}}{A_n(t)}\sin\frac{n\pi x}{P}$$

نسبت به x دوبار مشتق می‌گیریم

$$u_{xx}=-\sum \underset{\frac{n^2\pi^2}{P^2}}{A_n(t)}\cos\frac{n\pi x}{P}$$

کل عبارت را می‌نویسیم و فاکتور می‌گیریم.

$$\frac{A_0'(t)}{2}+\sum\left(A_n'(t)+c^2\underset{\frac{n^2\pi^2}{P^2}}{A_n(t)}\right)\cos\frac{n\pi x}{P}=0$$

$$\begin{cases} \text{I} \quad \dfrac{A_0'(t)}{2}=0 \to A_0(t)=a_0 \\ \text{II} \quad \underset{y'}{A_n'(t)}+c^2\underset{\frac{n^2\pi^2}{P^2}}{\underbrace{}}\underset{y}{A_n(t)}=0 \end{cases}$$

یعنی ثابت

تابع یک عدد ثابت می‌شود

$$y'+cy=0 \to y'=-cy \to \int\frac{y'}{y}=\int -c\,dx \Rightarrow \ln y=-cx+c_2$$

فرمول

$$y=-cx \to y=e^{-cx+c_2} \to y=e^{-cx}\times e^{c_2} \to y=a_n e^{-cx}$$

حال برای جواب ۲ جایگذاری می‌کنیم

$x=t$

$$A_n(t)=\underset{a_n\times}{e}^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{P^2}t}$$

حال جواب‌ها را در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم

$$u(x,t)=\frac{A_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{P}$$

از طریق سری فوریه حل می‌کنیم

$$u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{P^2}t}\cos\frac{n\pi x}{P}$$

$$u(x,0)=f(x)$$

$$u(x,0)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos\frac{n\pi x}{P}=f(x)\Longrightarrow$$

AVA

Subject:
Year: Month: Date:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{۴}{p}\displaystyle\int_0^{\frac{p}{۲}} f(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{۲}{p}\displaystyle\int_0^{p} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{p}\,dx \end{cases}$$

تمرین

معادله را به روش فوریه حل کنید

$u_t - ۴u_{xx} = ۰ \quad ۰<x<۱ \;,\; ۰<t$

$u(۰,t) = ۰$

$u(۱,t) = ۰$