بسم الله الرحمن الرحیم

این خرقه که من دارم در رهن شراب اولی

وین دفتر بی معنی غرف من ناب اولی

چون مصلحت اندیشی دور است ز درویشی

هم سینه پر آتش به هم دیده پر آب اولی

فصل سوم: معادلات بنیادی

Equations

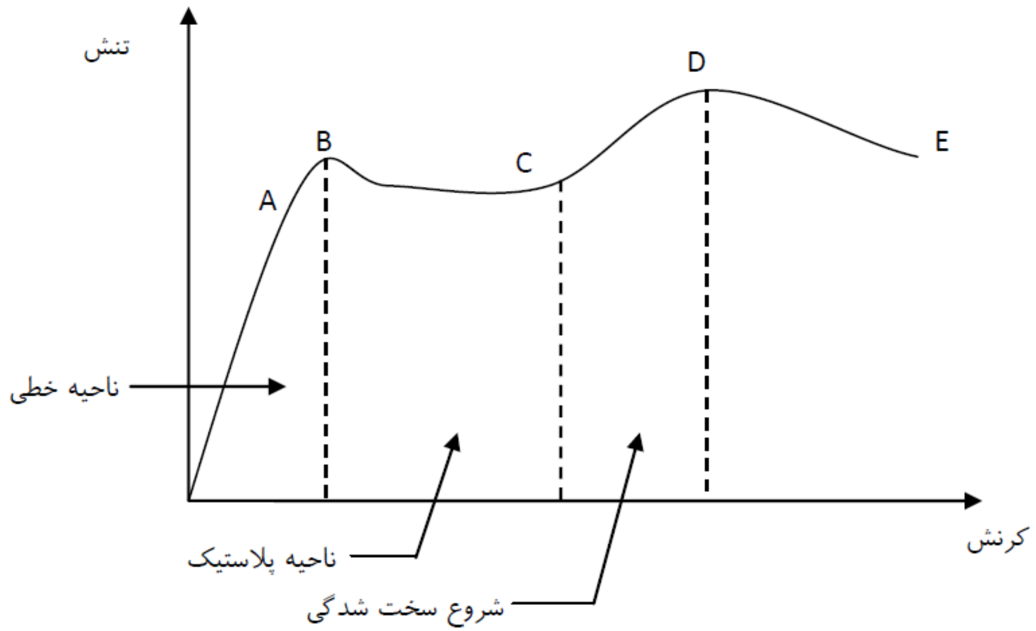
اکبر اقبالی

WWW.AEGHBALI.BLOG.IR
EGHBALI.D@GMAIL.COM

1393

معادلات بنیادی اجسام ارتجاعی

- نکته اساسی دیگر در بررسی تغییر شکل یک جسم بر اثر عوامل ایجاد کننده تنش، ایجاد ارتباط میان تنش و کرنش است.
- قانون هوک شکل ساده این ارتباط به شمار می رود که بیانگر معادلات بنیادین میان تنش و کرنش خواهد بود.
- برای ارتباط تنش و کرنش در هر نقطه از جسم، به خصوصیات جسم نیاز است که ضرایب مصالح *Material Coefficients* نامیده می شوند.



معادلات بنیادی اجسام ارتجاعی

- نیرو علاوه بر تغییر مکان (انجام کار) موجب تغییر شکل جسم نیز خواهد شد. این تغییر شکل بصورت انرژی ارتجاعی در شکل ذخیره خواهد شد.
- با حذف نیروی خارجی، اگر جسم در ناحیه الاستیک باشد، تغییر شکل ایجاد شده به حالت اولیه بازگشته و انرژی ارتجاعی آزاد خواهد شد.
- برای بررسی این پدیده، تغییرات کوچکی را در بردار جابجایی در نظر می گیریم.

$$\delta\varepsilon_{11} = \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial X_1}, \qquad \delta\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{(\delta u_1)}{\partial X_2} + \frac{(\delta u_2)}{\partial X_1}\right)$$

$$\delta\varepsilon_{22} = \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial X_2}, \qquad \delta\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{(\delta u_1)}{\partial X_3} + \frac{(\delta u_3)}{\partial X_1}\right)$$

$$\delta\varepsilon_{33} = \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial X_3}, \qquad \delta\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{(\delta u_2)}{\partial X_3} + \frac{(\delta u_3)}{\partial X_2}\right)$$

انرژی کرنشی (ارتجاعی) در اجسام الاستیک

- بردارهای تنش را در نقطه ای مانند P در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} \sigma_{P1} = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{P2} = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{P3} = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{cases}$$

- حال کار انجام شده توسط بردارهای تنش فوق (نیروهای سطحی) در جابجایی های کوچک خواهیم داشت:

$$\delta W_s = \int_s \begin{Bmatrix} (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\delta u_1 \\ +(\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3)\delta u_2 \\ +(\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3)\delta u_3 \end{Bmatrix} ds$$

- همچنین برای کار انجام شده توسط بردارهای نیروهای حجمی در جابجایی های کوچک خواهیم داشت:

$$\delta W_B = \int_s \{B_1\delta u_1 + B_2\delta u_2 + B_3\delta u_3\} dV$$

انرژی کرنشی (ارتجاعی) در اجسام الاستیک

- به کمک قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\iint\limits_{s} \psi_i n_i ds = \iiint\limits_{V} \frac{\partial \psi_i}{\partial X_i} dV$$

$$\delta W = \int\limits_{s} \left\{ \begin{aligned} &\left(\sigma_{11}\delta u_1 + \sigma_{12}\delta u_2 + \sigma_{13}\delta u_3\right) n_1 \\ &+\left(\sigma_{21}\delta u_1 + \sigma_{22}\delta u_2 + \sigma_{23}\delta u_3\right) n_2 \\ &+\left(\sigma_{31}\delta u_1 + \sigma_{32}\delta u_2 + \sigma_{33}\delta u_3\right) n_3 \end{aligned} \right\} ds$$

$$+\int\limits_{V} \left\{ B_1\delta u_1 + B_2\delta u_2 + B_3\delta u_3 \right\} dV$$

$$\delta W = \int\limits_{V} \left\{ \left(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13} + 2\sigma_{23}\delta\varepsilon_{23} \right) \right\} dV$$

$$\delta W = \int\limits_{V} \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\, dV$$

انرژی کرنشی (ارتجاعی) در اجسام الاستیک

- انرژی ارتجاعی ذخیره شده برابر است با کار انجام شده توسط نیروها

$$\delta U_0 = \delta W \qquad \rightarrow \qquad \delta U_0 = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}$$

$$\delta U_0 = \left(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13} + 2\sigma_{23}\delta\varepsilon_{23}\right)$$

- از طرف دیگر می توان انرژی ارتجاعی را از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\delta U_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{11}}\delta\varepsilon_{11} + \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{22}}\delta\varepsilon_{22} + \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{33}}\delta\varepsilon_{33} \\ + \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{12}}\delta\varepsilon_{12} + \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{13}}\delta\varepsilon_{13} + \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{23}}\delta\varepsilon_{23} \\ + \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{21}}\delta\varepsilon_{21} + \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{31}}\delta\varepsilon_{31} + \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{32}}\delta\varepsilon_{32} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}}$$

رابطه تنش - کرنش در اجسام ارتجاعی خطی

- تابع چگالی انرژی کرنشی ارتجاعی در یک جسم ارتجاعی را می توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$U_0 = C_0 + C_{11}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + C_{12}\varepsilon_{12} + C_{13}\varepsilon_{13} + C_{23}\varepsilon_{23} + C_{21}\varepsilon_{21} + C_{31}\varepsilon_{31} + C_{32}\varepsilon_{32}$$
$$+ C_{1111}\varepsilon_{11}\varepsilon_{11} + C_{1112}\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + C_{1113}\varepsilon_{11}\varepsilon_{13} + C_{1121}\varepsilon_{11}\varepsilon_{21} + C_{1122}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + C_{1123}\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + \dots$$

$$U_0 = C_0 + C_{ij}\varepsilon_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + C_{ijklmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + \dots$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij} = C_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + C_{ijklmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + \dots$$

- در یک جسم ارتجاعی به ازای کرنش های برابر با صفر، تنش ها نیز برابر با صفر خواهند بود.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \rightarrow \quad \mathrm{U}_0 = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

معادلات بنیادی
انرژی ارتجاعی
تنش - کرنش
مونوکلینیک
ارتو تروپیک
ایزوتروپیک
ضرایب ارتجاعی
روابط صفحه ای

رابطه تنش - کرنش در اجسام ارتجاعی خطی

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1121} & C_{1123} & C_{1132} & C_{1131} & C_{1113} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2221} & C_{2223} & C_{2232} & C_{2231} & C_{2213} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3321} & C_{3323} & C_{3332} & C_{3331} & C_{3313} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1221} & C_{1223} & C_{1232} & C_{1231} & C_{1213} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2112} & C_{2121} & C_{2123} & C_{2132} & C_{2131} & C_{2113} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2321} & C_{2323} & C_{2332} & C_{2331} & C_{2313} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3212} & C_{3221} & C_{3223} & C_{3232} & C_{3231} & C_{3213} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3121} & C_{3123} & C_{3132} & C_{3131} & C_{3113} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1321} & C_{1323} & C_{1332} & C_{1331} & C_{1313} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} \end{pmatrix}$$

$$[\sigma] = [C][\varepsilon]$$

رابطه تنش - کرنش در اجسام ارتجاعی خطی

- با توجه به متقارن بودن تانسور تنش می توان نوشت:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{jikl}$$

- با توجه به متقارن بودن تانسور کرنش می توان نوشت:

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \quad \rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix}$$

- لذا تعداد ضرایب از ۸۱ به ۳۶ کاهش می یابند.

رابطه تنش - کرنش در اجسام ارتجاعی خطی

- ماتریس C هم همچون ماتریس های تنش و کرنش متقارن است. لذا ۱۵ضریب دیگر نیز کاهش یافته و به ۲۱ ضریب خواهند رسید.

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \dfrac{\partial U_o}{\partial \varepsilon_{ij}} C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \to \quad \dfrac{\partial U_o}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} \\ \sigma_{kl} = \dfrac{\partial U_o}{\partial \varepsilon_{kl}} C_{klij}\varepsilon_{ij} \quad \to \quad \dfrac{\partial U_o}{\partial \varepsilon_{kl}\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij} \end{cases} \Rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{klij}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix}$$

رابطه تنش - کرنش در اجسام ارتجاعی خطی

- ماتریس C با ۲۱ ضریب مربوط به اجسام غیر ایزوتروپ است.
- تقارن جسم باعث کاهش ضرایب خواهد شد.
- در فضای سه بعدی سه نوع تقارن متصور است:

۱) تقارن نسبت به یک صفحه (مونو کلینیک Monoclinic)
۲) تقارن نسبت به دو صفحه (ارتو تروپیک Orthotropic)
۳) تقارن نسبت به دو محور متعامد (ایزوتروپیک Isotropic)

- تبدیلات تانسوری برای مراتب مختلف تانسور عبارتست از:

تانسور مرتبه اول $C'_m = n_{im} C_i$

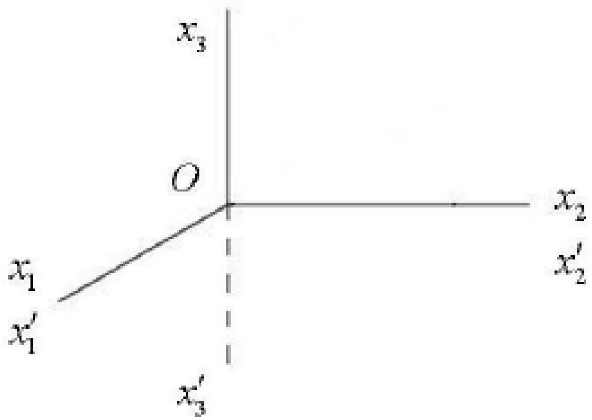
تانسور مرتبه دوم $C'_{mn} = n_{im} n_{jn} C_{ij}$

تانسور مرتبه سوم $C'_{mnp} = n_{im} n_{jn} n_{kp} C_{ijk}$

تانسور مرتبه چهارم $C'_{mnpq} = n_{im} n_{jn} n_{kp} n_{lq} C_{ijkl}$

مصالح مونوکلینیک – تقارن نسبت به یک صفحه

- فرض می کنیم رفتار ماده نسبت به صفحه Ox_1x_2 متقارن است. لذا با تغییر راستای x_3 به x'_3 تغییری در ضرایب ماتریس C ایجاد نمی شود.
- با توجه به کسینوس های هادی و تبدیلات تانسوری خواهیم داشت:



$$\begin{cases} C'_{mnpq} = n_{im} n_{jn} n_{kp} n_{lq} C_{ijkl} \\ n_{11} = n_{22} = 1, \qquad n_{33} = -1 \\ n_{12} = n_{23} = n_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'_{1123} = n_{i1} n_{j1} n_{k2} n_{l3} C_{ijkl} = n_{11} n_{11} n_{22} n_{33} C_{1123} = -C_{1123} = 0 \\ C_{1123} = C_{1113} = C_{2223} = C_{2213} = C_{3323} = C_{3313} = 0 \\ C_{1223} = C_{1213} = 0 \end{cases}$$

مصالح مونوکلینیک – تقارن نسبت به یک صفحه

- برای مونوکلینیک که نسبت به صفحه Ox_1x_2 متقارن است داریم:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & 0 & 0\\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0\\ & & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0\\ & & & C_{1212} & 0 & 0\\ & & & & C_{2323} & C_{2331}\\ & & & & & C_{3131}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{32}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{31}\end{pmatrix}$$

مصالح مونوکلینیک – تقارن نسبت به یک صفحه

- برای مونوکلینیک که نسبت به صفحه Ox_2x_3 متقارن است داریم:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2223} \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3323} \\ & & & C_{1212} & C_{1213} & 0 \\ & & & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix}$$

مصالح ارتو تروپیک – تقارن نسبت به دو صفحه

- برای ارتوتروپیک با دو صفحه تقارن داریم:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix}$$

مصالح ایزوتروپیک

- مصالحی که خصوصیات الاستیک آنها مستقل از سه جهت باشند.
- موادی که دارای دو محور تقارن هستند.
- در این مصالح، ضرایب الاستیسیته به دو عدد کاهش می یابند.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & A & 0 & 0 \\ & & & & A & 0 \\ & & & & & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix}$$

$$\text{A}=\frac{1}{2}\left(C_{1111}-C_{1122}\right)$$

معادلات بنیادی
انرژی ارتجاعی
تنش - کرنش
مونوکلینیک
ارتو تروپیک
ایزوتروپیک
ضرایب ارتجاعی
روابط صفحه ای

نفرت انگیزترین مخلوق خدا
بنده ای است که
مردم از شرّ زبان او
پرهیز می کنند.

امیر مؤمنان، امام علی علیه السلام

ضرایب ارتجاعی مصالح خطی ایزوتروپیک

- دو ضریب تعیین کننده مواد ایزتروپیک را می توان سه نوع بیان کرد:

۱) بر حسب ضرایب μ,λ

$$\mu=\frac{1}{2}\left(C_{1111}-C_{1122}\right) \qquad \lambda=C_{1122}$$

۲) بر حسب ضرایب E,υ

$$\begin{cases} E=\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \\ \upsilon=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=\dfrac{E}{2(1+\upsilon)} \\ \lambda=\dfrac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \end{cases}$$

۳) بر حسب ضرایب k,G

$$\begin{cases} G=\mu \\ k=\lambda+\dfrac{2}{3}\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=G \\ \lambda=k-\dfrac{2}{3}G \end{cases}$$

ضرایب ارتجاعی مصالح خطی ایزوتروپیک (۱)

$$\begin{cases}\mu=\dfrac{1}{2}\left(C_{1111}-C_{1122}\right)\\ \lambda=C_{1122}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}C_{1111}=2\mu+\lambda\\ C_{1122}=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0\\ & & & \mu & 0 & 0\\ & & & & \mu & 0\\ & & & & & \mu\end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\quad\Leftrightarrow\quad\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{-\lambda}{3\lambda+2\mu}\delta_{ij}\sigma_{kk}+\sigma_{ij}\right)$$

ضرایب ارتجاعی مصالح خطی ایزوتروپیک (۲)

- E ضریب ارتجاعی و υ مدول الاستیسیته است.

$$\begin{cases} E = \dfrac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \upsilon = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)} \\ \lambda = \dfrac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \dfrac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \dfrac{E}{(1+\upsilon)} \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{E} \left[(1+\upsilon) \sigma_{ij} - \upsilon \delta_{ij} \sigma_{kk} \right] \end{cases}$$

- عبارت $G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$ را مدول ارتجاعی و $\sigma = E\,\varepsilon$ قانون هوک است.

معادلات بنیادی

انرژی ارتجاعی

تنش - کرنش

مونوکلینیک

ارتو تروپیک

ایزوتروپیک

ضرایب ارتجاعی

روابط صفحه ای

ضرایب هوک

$$\begin{pmatrix} \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} & \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} & \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} & & & \\ & \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} & \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} & & 0 & \\ & & \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} & & & \\ & & & \frac{E}{(1+\upsilon)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{E}{(1+\upsilon)} & 0 \\ & & & & & \frac{E}{(1+\upsilon)} \end{pmatrix}$$

روابط تنش - کرنش

کرنش صفحه ای

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{E\left[\upsilon\varepsilon_{11} + (1-\upsilon)\varepsilon_{22}\right]}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \\ \sigma_{22} = \dfrac{E\left[(1-\upsilon)\varepsilon_{11} + \upsilon\varepsilon_{22}\right]}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \\ \sigma_{33} = \dfrac{E\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \\ \sigma_{12} = \dfrac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_{12}, \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \end{cases}$$

تنش صفحه ای

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_{11} + \upsilon\varepsilon_{22}\right) \\ \sigma_{22} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left(\upsilon\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) \\ \sigma_{12} = \dfrac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_{12} \end{cases}$$

WWW.AEGHBALI.BLOG.IR
EGHBALI.D@GMAIL.COM

مدول حجمی و مدول برشی

- به تغییر حجم واحد حجم، کرنش حجمی گویند.

$$\begin{cases} \varepsilon_V = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_V = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_i} = \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{cases}$$

- اگر تنش های نرمال وارده بر یک المان برابر باشند، تنش هیدرواستاتیکی خواهد بود.

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p, \qquad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{-\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \sigma_{ij}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_{ii} = \dfrac{p}{3\lambda + 2\mu} \\ \varepsilon_{ij} = 0, \quad \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{iv} = \frac{3p}{3\lambda + 2\mu} = \frac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = \frac{p}{k} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{k} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

- k : ضریب انبساط حجمی (مدول حجمی).

معادلات بنیادی

انرژی ارتجاعی

تنش - کرنش

مونوکلینیک

ارتو تروپیک

ایزوتروپیک

ضرایب ارتجاعی

روابط صفحه ای

مدول حجمی و مدول برشی

- با تعریف عبارات زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} G = \mu \\ \lambda = \mathrm{k} - \dfrac{2}{3}G \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{ij} = 2G\,.\varepsilon_{ij} + \left(\mathrm{k} - \dfrac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\varepsilon_{kk} = G\left(2\varepsilon_{ij} - \dfrac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) + k\,\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \dfrac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) + \dfrac{1}{9k}\delta_{ij}\sigma_{kk} \end{cases}$$

تعیین ضرایب ارتجاعی E, ν, G, k

- تنش مثبت (کشش) در یک میله باعث کرنش مثبت (افزایش طول) خواهد شد و بالعکس، لذا ضریب ارتجاعی (E) مثبت خواهد بود.
- تنش هیدرواستاتیکی مثبت (کشش) در یک میله باعث کرنش حجمی مثبت (انبساط حجم) خواهد شد و بالعکس، لذا مدول حجمی (k) همواره مثبت خواهد بود.
- از آنجا که تنش برشی مثبت در یک میله باعث کرنش برشی مثبت خواهد شد و بالعکس، لذا مدول (G) همواره مثبت خواهد بود.

$$\begin{cases} k = \dfrac{E}{3(1-2\upsilon)} \\ G, k, E > 0 \\ G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2\upsilon > 0 \\ 1+\upsilon > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < \upsilon < \dfrac{1}{2} \\ 0 < \upsilon < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- برای اجسامی که تراکم ناپذیرند، تغییر حجم صفر خواهد بود و در نتیجه مدول انبساط بی نهایت خواهد بود.

معادلات بنیادی
انرژی ارتجاعی
تنش - کرنش
مونوکلینیک
ارتو تروپیک
ایزوتروپیک
ضرایب ارتجاعی
روابط صفحه ای

روابط تنش - کرنش در مختصات استوانه ای

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{rr} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{rr} - \nu\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}\right)\right] \\
\varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{\theta\theta} - \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}\right)\right] \\
\varepsilon_{zz} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right)\right] \\
\varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} \\
\varepsilon_{\theta z} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{\theta z} \\
\varepsilon_{zr} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{zr}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{rr} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{rr} - \nu\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}\right)\right] \\
\varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{\theta\theta} - \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\right)\right] \\
\varepsilon_{\varphi\varphi} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right)\right] \\
\varepsilon_{\theta\varphi} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{r.\sin\theta}.\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} - u_\varphi\cot\theta\right)\right\} \\
\varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} \\
\varepsilon_{\theta\varphi} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{\theta\varphi} \\
\varepsilon_{\varphi r} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{\varphi r}
\end{cases}
$$

چگالی انرژی کرنشی اجسام ارتجاعی ایزوتروپیک

- چگالی انرژی بر حسب $E;,\upsilon$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[\left(1+\nu\right)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right]$$

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2E}\left[\left(1+\nu\right)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\left(\sigma_{kk}\right)^2\right]$$

- چگالی انرژی بر حسب $k;G$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left[\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right] + \frac{1}{9k}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{4G}\left[\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\left(\sigma_{kk}\right)^2\right] + \frac{1}{18k}\left(\sigma_{kk}\right)^2$$

- چگالی انرژی بر حسب $\mu;\lambda$

$$\sigma_{ij} = \mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon_{kk}\right)^2$$

آنکه بدون آزمایش دوستی را برگزیند،
به ناچار،
به همنشینی با بدان گرفتار گردد.

امیر مؤمنان، امام علی علیه السلام