یادآوری مطالبی از آنالیز ریاضی

قضیه تابع معکوس، قضیه رتبه و قضیه تابع ضمنی

به اختصار در این بخش به یادآوری چند قضیه اساسی از آنالیز که کاربرد فراوان در هندسه دارند به نامهای قضیه تابع معکوس، قضیه رتبه و قضیه تابع ضمنی می‌پردازیم. اثبات این قضایا در کتب کلاسیک آنالیز موجود است که از آوردن آن در اینجا خودداری می‌شود.

فرض کنیم U بازی از $\mathbb{R}^n$ و V بازی از $\mathbb{R}^p$ باشد می‌گوییم نگاشت f، $f : U \to V$ در نقطه $x_\circ \in U$ **مشتق‌پذیر** است اگر یک نگاشت خطی مانند

$$(Df)_{x_\circ} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

موجود باشد بطوریکه

$$\lim_{||\vec{h}|| \to \circ} \frac{f(x_\circ + \vec{h}) - f(x_\circ) - (Df)_{x_\circ}(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \circ$$

براحتی می‌توان نشان داد که اگر $(Df)_{x_\circ}$ موجود باشد مقدار آن بطور یکتا توسط ماتریس زیر معرفی می‌شود.

$$(Df)_{x_\circ} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x = x_\circ}$$

نگاشت $(Df)_{x_\circ}$ را **دیفرانسیل** f در $x_\circ$ می‌نامند، ماتریس آنرا **ماتریس ژاکوبین**[۱] f در $x_\circ$ و در حالت $x = p$ دترمینان ماتریس را **ژاکوبین**[۲] f در $x_\circ$ می‌گوییم.

---

[۱] *Jacobian*

[۲] *Jacobian matrice*

در مورد دیفرانسیل توابع مرکب رابطه زیر را داریم که آنرا قاعده زنجیره‌ای می‌نامند.

$$D(fog)_{x_\circ} = (Df)_{g(x_\circ)}(Dg)_{x_\circ}$$

می‌گوییم نگاشت $f : U \longrightarrow I\!\!R^p$ از کلاس C^k می‌باشد اگر در تمام نقاط U تمام مشتقات جزئی تا مرتبه kام آن موجود و پیوسته باشند.
بنابر قضیه شوارتز بدون توجه به ترتیب مشتق‌گیری مشتقات جزئی تا مرتبه kام تابع f از کلاس C^k با یکدیگر برابرند. یعنی

$$\frac{\partial^h f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\cdots\partial x^{i_h}} \qquad h \leq k$$

توابعی متقارن نسبت به اندیسهای $i_1, \cdots, i_h$ هستند.
ثابت می‌شود که اگر f از کلاس C^1 باشد آنگاه f دیفرانسیل‌پذیر نیز هست.
تعریف: *اگر U و V بازه‌هایی از $I\!\!R^n$ باشند نگاشت $f : U \longrightarrow V$ را یک* **دیفئومورفیسم**[1] *از کلاس C^k گوییم اگر f دو سویی بوده و f و f^{-1} از کلاس C^k باشند.*
اگر f دیفئومورفیسم باشد آنگاه $(Df)_{x_\circ}$ دوسویی است زیرا $(Df \circ Df^{-1})\Big|_{f(x_\circ)}$ و $(Df^{-1} \circ Df)\Big|_{x_\circ}$ نگاشت همانی هستند. قضیه تابع معکوس عکس این مطلب را بطور موضعی بیان می‌دارد به عبارت دیگر اگر f از کلاس C^k $(1 \leq k)$ و $(Df)_{x_\circ}$ دوسویی باشد آنگاه f در یک همسایگی $x_\circ$ دیفئومورفیسم کلاس C^k است.
قضیه تابع معکوس[2]
فرض کنیم U و V بازهایی از $I\!\!R^n$ بوده و نگاشت $f : U \longrightarrow V$ از کلاس C^k $(1 \leq k)$ باشد. فرض کنیم نقطه‌ای مانند $x_\circ \in U$ موجود باشد بطوریکه

$$\det(Df)_{x_\circ} \neq 0 \qquad \text{(یعنی } (Df)_{x_\circ} \text{ در } x_\circ \text{ دوسویی باشد)}$$

---

[1] *diffeomorphism*

[2] *Inverse function theorem (théorème de fonction inverse)*

آنگاه بازی مانند U' در U شامل $x_\circ$ وجود دارد بطوریکه تحدید $f\big|_{U'}$ یک دیفئومورفیسم از کلاس C^k روی تصویرش باشد.

به عبارت دیگر این قضیه بیان می‌کند که اگر Df در $x_\circ$ دوسویی باشد آنگاه f روی یک همسایگی از $x_\circ$ دوسویی است. این موضوع در قضیه رتبه به نحو دیگری بیان می‌گردد.

در قضیه رتبه ثابت می‌شود که اگر Df در $x_\circ$ پوششی (یا بطور مشابه یک به یک) باشد آنگاه f روی یک همسایگی $x_\circ$ پوششی (یا بطور مشابه یک به یک) است.

تعریف: *یک دستگاه مختصات موضعی[1] از کلاس C^k در همسایگی یک نقطه $x_\circ \in I\!R^n$، عبارت است از زوج (ψ, U) که در آن U بازی از $I\!R^n$ شامل $x_\circ$ و ψ یک دیفئومورفیسم C^k از U روی بازی از $I\!R^n$ است.*

بنابراین برای آنکه یک نگاشت دوسویی از کلاس C^k، $\psi : U \longrightarrow V$ یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی نقطه $x_\circ$ تعریف نماید لازم و کافی است که $\det\,(D\psi)_{x_\circ} \neq \circ$.

گاهی اوقات دستگاه **مختصات موضعی** را دستگاه **مختصات منحنی‌الخط**[2] نیز می‌گویند. (این نامگذاری بدین دلیل است که ψ خطوط $I\!R^n$ را به منحنی‌ها مرتبط می‌سازد).

تعریف: *نگاشت $C^k(k \geq 1)$ $f : U \subset I\!R^n \longrightarrow V \subset I\!R^{n+p}$ در $x_\circ \in U$ (در اینجا U و V باز هستند) را یک **جادهنده** یا **ایمرسیون**[3] از کلاس C^k گوییم اگر $(Df)_{x_\circ}$ یک به یک باشد. (یا بطور معادل اگر رتبه f برابر بعد حوزه تعریف باشد) نگاشت $f : U \subset I\!R^{n+p} \longrightarrow V \subset I\!R^p$ در $x_\circ \in U$ را یک **پوشاننده** یا **سوبمرسیون**[4] گوییم اگر $(Df)_{x_\circ}$ پوششی باشد. (یا بطور معادل اگر رتبه f برابر بعد حوزه مقادیر باشد)*

تذکر: *می‌توان نشان داد اگر $f : U \subset I\!R^n \longrightarrow V \subset I\!R^p$ یک جادهنده (یا بطور مشابه*

---

[1] *local coordinate system (System de Coordonne′ local)*

[2] *Curveline coordinate system*

[3] *Immersion*

[4] *submersion*

پوشاننده) در نقطه $x_{\circ}$ باشد آنگاه در یک همسایگی به‌اندازه کافی کوچک $x_{\circ}$ نیز جادهنده (یا بطور مشابه پوشاننده) است.

قضیه رتبه در $\mathbb{R}^n$[1]

الف ـ فرض کنیم $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ یک جادهنده یا ایمرسیون از کلاس C^k در نقطه $x_{\circ} \in U$ باشد. آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی $f(x_{\circ})$ [یعنی یک زوج (V', y) که V' یک همسایگی $f(x_{\circ})$ در V و y یک C^k- دیفئومورفیسم از V' روی بازی از $\mathbb{R}^{n+p}$] و یک همسایگی U' از $x_{\circ}$ وجود دارد بطوریکه $f(U') \subset V'$ و داشته باشیم

$$yof : U' \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$$

$$(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_n, \cdots, \circ, \cdots, \circ)$$

نتیجه: اگر f در نقطه p جادهنده یا ایمرسیون باشد آنگاه f بطور موضعی یک به یک است (یعنی برای نقطه p یک همسایگی موجود است که f روی آن یک به یک است) (مراجعه شود به شکل ۱.۲۰)

ب ـ فرض کنیم $f : U \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ یک پوشاننده یا سوبمرسیون از کلاس C^k در $x_{\circ}$ باشد. آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی $x_{\circ}$ [یعنی یک زوج (U', x) که U' یک همسایگی $x_{\circ}$ در U و x یک دیفئومورفیسم C^k از U' در بازی از $\mathbb{R}^{n+p}$ باشد] وجود دارد بطوریکه

$$fox^{-1} : x(U') \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x_1, \cdots, x_{n+p}) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_p)$$

نتیجه: اگر f در نقطه p پوشاننده یا سوبمرسیون باشد آنگاه f بطور موضعی پوششی است (یعنی برای نقطه p یک همسایگی U موجود است که $f(U)$ یک همسایگی $f(p)$ را می‌پوشاند) (مراجعه شود به شکل ۱.۲۱)

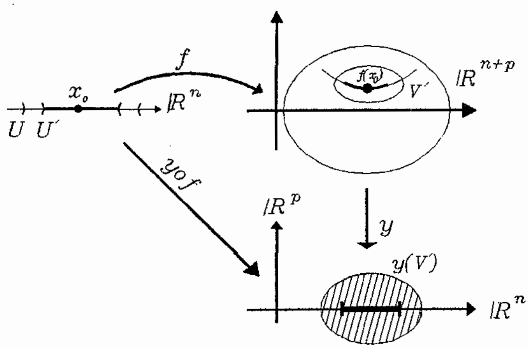
---

[1] *Rank theorem (Théorème de Rang)*

بنابراین قضیه رتبه بیان می‌دارد که پس از یک تغییر مختصات (برای جادهنده در حوزه مقادیر و برای پوشاننده در حوزه تعریف):

الف ـ یک جادهنده یا ایمرسیون بطور موضعی یک به یک است. $U' \subset I\!R^n \longrightarrow I\!R^{n+p}$
$(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)$

ب ـ یک پوشاننده یا سوبمرسیون بطور موضعی پوششی است. $x(U') \subset I\!R^{n+p} \longrightarrow I\!R^p$
$(x_1, \cdots, x_{n+p}) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_p)$

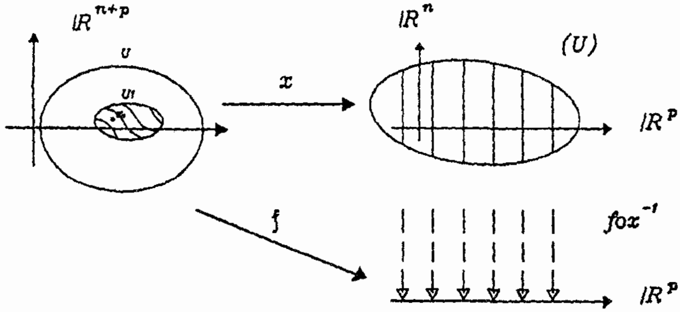


شکل الف ـ f در x_0 جادهنده یا ایمرسیون است

yof یک نگاشت یک به یک کانونی است که بیان کننده جادهنده یا ایمرسیون f در دستگاه مختصات جدید است.

شکل ۱.۲۰:

اثبات قضیه رتبه با استفاده از قضیه تابع معکوس انجام می‌شود که در درس آنالیز III آورده شده است. قضیه تابع معکوس در اثبات قضیه مهم دیگری بنام قضیه توابع ضمنی بکار می‌رود.



شکل ب ـ f در $x_\circ$ سوبمرسیون است

fox^{-1} یک نگاشت پوششی کانونی است که بیان کننده سوبمرسیون f در دستگاه مختصات جدید است.

قضیه تابع ضمنی[۱]

فرض کنیم $F : W \subset I\!R^p \times I\!R^q \to I\!R^q$ نگاشتی از کلاس C^k $(k \geq ۱)$ بوده بطوریکه به ازاء $W \ni (x_\circ, y_\circ)$ داشته باشیم

$$\begin{cases} F(x_\circ, y_\circ) = \circ \\ det(D_yF)(x_\circ, y_\circ) \neq \circ \end{cases}$$

(در اینجا D_yF ماتریس ژاکوبین مشتقات جزیی F نسبت به متغیرهای y از $I\!R^q$ است) آنگاه یک همسایگی $x_\circ$ در $I\!R^p$ مانند U' و یک همسایگی $y_\circ$ در $I\!R^q$ مانند V' و یک نگاشت رده C^k، f

$$f : U' \subset I\!R^p \longrightarrow V' \subset I\!R^q$$

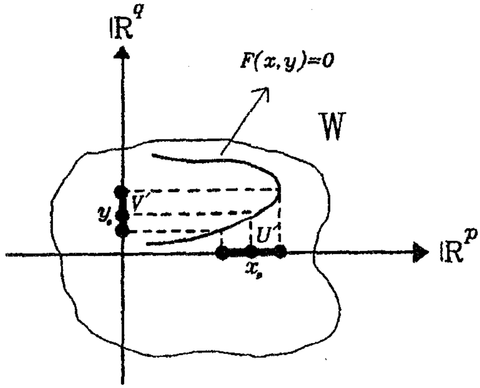
$$x \mapsto y = f(x)$$

وجود دارد بطوریکه

$$\forall (x, y) \in U' \times V' \quad , \quad F(x, y) = \circ \Leftrightarrow y = f(x)$$

---

[۱] *Implicit function theorem (Théorème des fonctions implicites)*



شکل ۱.۲۱ :

همانطوریکه در شکل مشاهده می‌شود نمودار $F(x,y) = \circ$ در حالت کلی تابع نیست اما در همسایگی $U' \times V'$ تابع است.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆