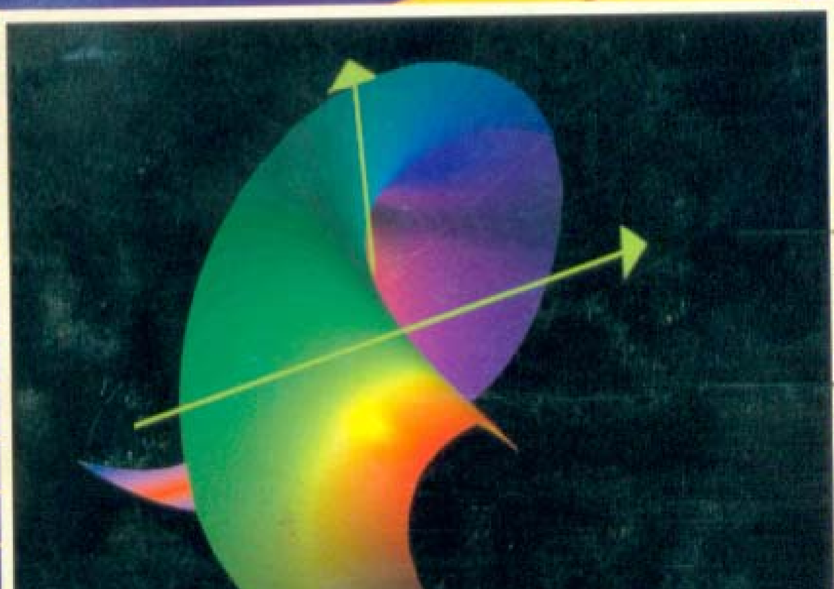
حساب دیفرانسیل و انتگرال
با هندسهٔ تحلیلی

۱

«کتاب عام»

نوشتهٔ ریچارد ا. سیلورمن

ترجمهٔ دکتر علی اکبر عالم زاده



جلد اول

پیش حساب ۰

در این فصل به چند مبحث از جبر و هندسه می‌پردازیم که پیشنیاز حساب دیفرانسیل و انتگرال‌اند؛ و لذا، تحت نام "پیش حساب" گرد آمده‌اند. این امر که با بعضی از این مباحث قبلاً" در درسهای گذشته، به‌شکلی، آشنا شده‌اید نباید به‌شما امنیت کاذب بدهد. در عوض، از آشنایی به مهارت در آنها بروید، هرکجا لازم بود به معلوماتتان بیفزایید، آنقدر که درمطالعهٔ خود حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌خاطر عدم آمادگی سرگردان نشوید.

۰.۱ مجموعه‌ها و اعداد

زبان مجموعه‌ها اغلب در ساده‌کردن بحثهای ریاضی مفید است. لیکن، مواظب افراط در استعمالش باشید؛ آن را ممسکانه و فقط وقتی به کار برید که واقعاً" مورد نیاز است.

هر گردایه از اشیاء از هر نوع یک **مجموعه** نام دارد، و خود اشیاء **عنصرها** یا **عضوهای** مجموعه نامیده می‌شوند. مجموعه‌ها اغلب با حروف بزرگ و عنصرهایشان با حروف کوچک نموده می‌شوند. اگر x عنصری از مجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $x \in A$، که درآن علامت $\in$ خوانده می‌شود: "یک عنصر ... است". طرق دیگر خواندن $x \in A$ عبارتنداز "x یک عضو A است"، "x متعلق به A است"، و "A شامل x است".

مثال ۱. الفبای انگلیسی مجموعه‌ای‌شامل 26 عنصر است؛ یعنی، کلیهٔ حروف از a تا z.

اگر هر عنصر مجموعهٔ A یک عنصر مجموعهٔ B نیز باشد، می‌نویسیم $A \subset B$، که خوانده‌می‌شود: "A یک زیرمجموعهٔ B است". اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، ولی B زیرمجموعهٔ A نباشد، گوییم A یک **زیرمجموعهٔ حقیقی** B است. این یعنی B نه تنها شامل همهٔ عناصر A است، بلکه یک یا چند عنصر دیگر را نیز شامل است.

مثال ۲ . دو زیرمجموعهٔ حقیقی الفبای انگلیسی مجموعهٔ حروف صدادار و مجموعهٔ حروف بی‌صدا می‌باشند .

یک راه توصیف مجموعه نوشتن عناصر آن بین دو ابروست . مثلاً ، مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ از عنصرهای a ، b ، و c ساخته‌شده‌است . مجموعه با تغییر ترتیب عناصر تغییر نمی‌کند. مثلاً ، مجموعهٔ $\{b, c, a\}$ همان مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ است . تکرار یک عنصر نیز مجموعه را تغییر نمی‌دهد . مثلاً ، مجموعهٔ $\{a, a, b, c, c\}$ همان مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ می‌باشد .

مثال ۳ . مجموعهٔ تمام روزهای ماه که بر 7 بخشپذیرند عبارت است از $\{7, 14, 21, 28\}$.

یک مجموعه را می‌توان با خواصی‌که عناصرش را به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌کنند نیز توصیف کرد . مثلاً ،

$$\{1, -1\} = \{\text{تمام } x \text{ ها به‌طوری که } x^2 = 1\} = \{x: x^2 = 1\}$$

که در عبارت‌آخر ، دونقطه یعنی " به‌طوری‌که " و ما کلمهٔ زاید " تمام " را حذف می‌کنیم .

مثال ۴ . مجموعهٔ $\{x: x = x^2\}$ مجموعهٔ تمام اعدادی‌است‌که مساوی مجذور خود می‌باشند . به‌آسانی تحقیق می‌شود که این مجموعه فقط شامل دو عنصر 0 و 1 است .

اگر مجموعه هیچ عنصری نداشته‌باشد ، گویند تهی است و با علامت $\varnothing$ نموده می‌شود . مثلاً ، مجموعهٔ فیلهای صورتی در باغ وحش تهران تهی است ؛ و همچنین است مجموعهٔ ماههایی که بیش از پنج جمعه دارند . طبق قرارداد ، یک مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه گرفته می‌شود .

می‌گوییم دو مجموعهٔ A و B مساوی‌اند ، و می‌نویسیم $A = B$ ، اگر A و B عناصر یکسان داشته باشند . مثلاً ، همانطور که در مثال ۴ دیدیم ، $\{x: x = x^2\} = \{0, 1\}$. اگر A تهی باشد ، می‌نویسیم $A = \varnothing$.

مثال ۵ . هر عدد x مساوی خودش است ؛ و درنتیجه ، $\{x: x \neq x\} = \varnothing$.

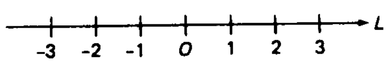
توجه کنید که هرگاه $A \subset B$ و $B \subset A$ باهم برقرار باشند ، آنگاه هر عنصر A عنصر B و هر عنصر B عنصر A است ؛ درنتیجه ، $A = B$. در حالت خاص ، همهٔ مجموعه‌های

تهی مساوی‌اند ، زیرا هرگاه $\varnothing$ و $\varnothing'$ هر دو تهی باشند ، آنگاه $\varnothing \subset \varnothing'$ و $\varnothing' \subset \varnothing$ (چرا؟) ؛ درنتیجه ، $\varnothing = \varnothing'$. لذا ، ما از " مجموعهٔ تهی " سخن خواهیم گفت .

دو مجموعهٔ A و B بدون عنصر مشترک را *از هم جدا* می‌نامند . این را نباید با مفهوم مجموعه‌های **متمایز**، که در آن " متمایز " واژهٔ دیگری برای " نامساوی " است ، خلط کرد . مثلاً ، مجموعه‌های $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3\}$ متمایزند ، اما چون در عنصر 2 سهیم‌اند ، از هم جدا نیستند .

اعداد و نمایشهای آنها . حال به بحث انواع متعدد اعداد می‌پردازیم ؛ با اعداد صحیح و اعداد گویا شروع کرده ، سپس به اعداد گنگ و اعداد حقیقی می‌رویم . مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی دستگاه اعدادی است که در بررسی حساب دیفرانسیل و انتگرال لازم است .

فرض کنید خط مستقیم و افقی L مار بر نقطهٔ O راساخته‌باشیم ، و تصور کنید که L در طرفین تا بی‌نهایت رفته باشد . با انتخاب واحد سنجش، روی L در سمت راست و چپ O و در فواصل 1 واحد ، 2 واحد ، 3 واحد ، و غیره علامت می‌گذاریم . همانند شکل ۱ ، علامت سمت راست O نمایش *اعداد* **صحیح مثبت** $1, 2, 3, \ldots$ و علایم سمت



شکل ۱

چپ O نمایش *اعداد* **صحیح منفی** $\ldots, -3, -2, -1$ می‌باشند . (در اینجا نقاط ... یعنی " و غیره " .) خط L یک *خط اعداد* نام دارد ؛ نقطهٔ O *مبدأ* (L) نامیده شده ، و نظیر 0 (عدد صفر) است ، که عددی است صحیح نه مثبت و نه منفی . جهت از اعداد منفی به مثبت در امتداد L **جهت مثبت** نام دارد و ، همانند شکل فوق ، با سر سهم نموده می‌شود .

هرگاه دو عدد صحیح مثبت جمع یا ضرب شوند ، عدد صحیح مثبت دیگری به دست می‌آید . این امر با ذکر اینکه مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت تحت اعمال جمع و ضرب **بسته** است خلاصه می‌شود . مثلاً ، $2 + 3 = 5$ و $2 \cdot 3 = 6$ ، که در آنها 5 و 6 اعداد صحیح مثبتی هستند . اما ، مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت تحت تفریق بسته نیست . مثلاً ، $2 - 3 = -1$ ، که در آن -1 عدد صحیح مثبتی نیست ، بلکه عدد صحیح منفی است .

ما به پیروی از قراردادهای ریاضی ، حرف Z را برای نمایش مجموعهٔ تمام اعداد صحیح ، مثبت ، منفی ، یا صفر ، به کار می‌بریم . مجموعهٔ Z ، به خلاف مجموعهٔ اعداد

صحیح مثبت (که با Z^+ نموده می‌شود) ، علاوه بر بسته بودن تحت جمع و ضرب ، تحت تفریق نیز بسته است . مثلاً" ، $4-2=2$ ، $3-3=0$ ،و $6-11=-5$ ، که درآنها اعداد 2 ، 0 ،و 5− همه اعدادی صحیح‌اند .

عدد صحیح n را یک‌**عدد زوج** گویند اگر $n=2k$ ، که در آن k خود عددی صحیح است ؛ یعنی ، اگر n بر 2 بخشپذیر باشد . از آن سو ، عدد صحیح n را یک **عدد فرد** نامند اگر $n=2k+1$ ، که در آن k عددی صحیح است . واضح است که هر عدد صحیح زوج یا فرد است . مثلاً" ، $-22=2(-11)$ زوج است ، حال آنکه $7=3(2)+1$ فرد می‌باشد . همچنین ، $0=2(0)$ زوج است ، درحالی که $-1=2(-1)+1$ فرد می‌باشد (در این دو حالت ، اعداد صحیح n و k تصادفاً" یکی هستند) .

مثال ۶ . نشان دهید که مربع هر عدد زوج زوج است ، حال آنکه مربع هر عدد فرد فرد می‌باشد .

حل . هرگاه n زوج باشد ، آنگاه $n=2k$ ، که در آن k عددی صحیح است ؛ و درنتیجه ،

$$n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2),$$

که عددی زوج است ، زیرا به شکل $2m$ است ، که در آن $m=2k^2$ عددی صحیح می‌باشد . از آن‌سو ، هرگاه n فرد باشد ، آنگاه $n=2k+1$ (k عددی صحیح است) ؛ ودرنتیجه ،

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1,$$

که عددی‌است فرد ،زیرا به‌شکل $2m+1$ است ،که این بار عددصحیح m مساوی $2k^2+2k$ می‌باشد .

اعداد گویا . مجموعهٔ Z مرکب از تمام اعداد صحیح تحت تقسیم بسته نیست . این یعنی خارج‌قسمت‌دوعددصحیح‌همیشه‌عددی‌صحیح‌نیست . مثلاً" ، $2\div 3=\frac{2}{3}$ و $-5\div 4=-\frac{5}{4}$ ، که در آنها $\frac{2}{3}$ و $-\frac{5}{4}$ کسر هستند نه اعدادی صحیح . البته ، خارج‌قسمت دو عدد صحیح *گاهی* عددی صحیح است ؛ مثلاً" ، $12\div 3=4$ و $10\div(-5)=-2$. اما ، برای آنکه تقسیم کلاً" ممکن باشد ، به مجموعه‌ای از اعداد بزرگتر از Z نیاز داریم . لذا ،***اعداد گویا*** را معرفی می‌کنیم ؛ یعنی ، کسرهایی به شکل m/n ، که در آن m و n اعدادی صحیح بوده و مخرج n صفر نیست . توجه کنید که هر عدد صحیح m ،به انضمام 0 ،عددی گویاست، زیرا $m/1=m$. یک عدد گویا را **تحویل*نا*پذیر** گویند اگر صورت و مخرجش عامل مشترک

صحیح نداشته باشند. (اعداد 1 و 1− در اینجا عامل مشترک به حساب نمی‌آیند.) مثلاً"، $\frac{8}{12}$ تحویل‌ناپذیر نیست، اما، با تقسیم صورت و مخرج آن بر 4، عدد گویای $\frac{2}{3}$ به دست می‌آید، که تحویل‌ناپذیر است.

فرض کنیم Q مجموعهٔ تمام اعداد گویا باشد. مجموعهٔ Q تحت چهار عمل اصلی حساب، یعنی جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم مشروط بر اینکه بر صفر تقسیم نکنیم، بسته است. برای آنکه ببینیم چرا **تقسیم بر صفر مستثنی شده است**، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $a/b = c$، آنگاه حتماً" $a = bc$. فرض کنیم $b = 0$، که نظیر تقسیم a بر صفر است. در این صورت،

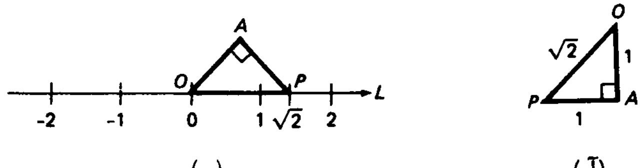
$$a = 0 \cdot c, \qquad (۱)$$

که غیر ممکن است مگر $a = 0$، زیرا عبارت سمت‌راست مساوی صفر است. اما اگر $a = 0$، فرمول (۱) خواهد شد

$$0 = 0 \cdot c, \qquad (۱')$$

که به ازای هر عدد c درست است. از اینرو، یا عددی مانند c نیست که در $a/0 = c$ به‌ازای $a \neq 0$ صدق کند، یا هر عدد c این خاصیت را به ازای $a = 0$ دارد. (به این دلیل، عبارت $0/0$ را اغلب یک‌**صورت مبهم** می‌نامند.) بنابراین، تقسیم بر صفر یا غیر ممکن است یا مبهم؛ ولذا، در هر حال بی‌معنی است.

اعداد گنگ. اعداد گویا در رسم روی خط اعداد، نقاط نظیر به اعداد صحیح و بسیاری دیگر را می‌گیرند اما نه همهٔ نقاط بین را. به عبارت دیگر، نقاطی از خط اعداد وجود دارند که نظیر هیچ عدد گویایی **نیستند**. برای مشاهدهٔ این امر، مثلث‌قائم‌الزاویهٔ PAO را مطابق شکل ۲ (آ) به اضلاع PA و AO به طول 1 می‌سازیم. بنابرقضیهٔ آشنای فیثاغورس، ضلع OP به طول $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ است. حال ضلع OP را مثل شکل۲ (ب) بر خط اعداد قرار می‌دهیم، به‌طوری که نقطهٔ O برمبداء خط منطبق شود. دراین‌صورت،



(ب) (آ)

شکل ۲

نقطهٔ P نظیر به عدد $\sqrt{2}$ می‌باشد. اما، همانطور که مدتها پیش کشف شده است، عدد

$\sqrt{2}$ نمی‌تواند گویا باشد؛ و لذا، P نقطه‌ای از خط اعداد است که نظیر یک عدد گویا نیست.

منظور از یک **عدد گنگ** یعنی عددی، مانند $\sqrt{2}$، که گویا نباشد. گنگ‌بودن $\sqrt{2}$ به‌طور غیرمستقیم ثابت شده است؛ با نشان دادن اینکه فرض گویابودن $\sqrt{2}$ به تناقض می‌انجامد.

اختیاری. فرض کنیم $\sqrt{2}$ عددی گویا باشد. پس

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی‌هستند، و می‌توان فرض کرد کسر m/n *قبلاً* به‌صورت تحویل‌ناپذیر درآمده‌باشد. با مربع‌کردن طرفین این‌معادله، به دست می‌آوریم $2 = m^2/n^2$ یا، معادلاً،

$$m^2 = 2n^2.$$

لذا، m^2 بر 2 بخشپذیر است؛ و درنتیجه، عددی‌زوج می‌باشد. اما، در این صورت، خود m باید زوج باشد، چرا که اگر m فرد می‌بود، همانطور که در مثال ۶ نشان داده‌شد، m^2 نیز فرد می‌شد. چون m زوج است، می‌توان m را به شکل $m = 2k$ نوشت، که‌در آن k عدد صحیح مثبتی است. بنابراین، $m^2 = 4k^2$، و وقتی این فرمول را با $m^2 = 2n^2$ مقایسه می‌کنیم، درمی‌یابیم که $4k^2 = 2n^2$ یا، معادلاً،

$$n^2 = 2k^2.$$

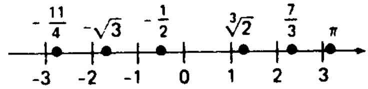
بنابراین، n^2 عددی زوج است؛ و درنتیجه، به دلیلی که هم اکنون در رابطه با m^2 و m شرح داده شد، n زوج می‌باشد.

لذا، نشان داده‌ایم که m و n هر دو زوجند؛ یعنی، هر دوی m و n بر 2 بخش پذیرند. اما این با فرض اصلی که کسر m/n تحویل‌ناپذیر است تعارض دارد. چون بافرض گویا بودن $\sqrt{2}$ به تناقض رسیدیم، باید نتیجه بگیریم که $\sqrt{2}$ عددی‌گنگ است. این مطلب بر یونانیان باستان، که آن را به همین ترتیب ثابت کردند، معلوم بوده است.

اعداد گنگ بسیار دیگری وجود دارند. مثلاً، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، و $\sqrt{7}$ همه گنگ‌اند؛ و همچنین است π (حرف‌کوچک یونانی‌پی)، که نسبت محیط هردایره به قطرش می‌باشد.

اعداد حقیقی. حال یک عدد حقیقی را عددی، گویا یا گنگ، تعریف می‌کنیم که نظیر به نقطه‌ای از یک خط اعداد باشد. مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی دستگاه ***اعداد حقیقی*** نام

دارد ، و خط اعداد نیز **خط حقیقی** نامیده می‌شود . از حالا به بعد ، وقتی از کلمهٔ "عدد" بی‌توصیف بیشتر استفاده می‌کنیم ، همیشه مقصودمان عددی حقیقی است . شکل ۳ جای تقریبی چند عدد گویا و گنگ بر خط حقیقی را نشان می‌دهد .



شکل ۳

رابطهٔ اعداد حقیقی با اعشاریها قابل توجه است ، و بینش بیشتری از تمایز بین اعداد گویا و گنگ به شما می‌دهد . هرگاه عددی گویا به شکل اعشاری بیان شود ، آن عدد اعشاری یا مختوم است ، مثل

$$\frac{5}{8} = 0.625, \qquad (۲)$$

یا دسته‌ای از ارقام را داراست که بی‌پایان تکرار می‌شود ، مثل دستهٔ 037 در

$$\frac{28}{27} = 1.037037037\ldots$$

این اعشاری را می‌توان با نوشتن

$$\frac{28}{27} = 1.\overline{037}$$

خلاصه کرد ، که علامت بار دستهٔ مکرر را می‌پوشاند ، که در این حالت 037 است . اما ، هرگاه عددی گنگ به‌شکل اعشاری بیان‌شود ،اعشاری نه مختوم است و نه دسته‌ای بی‌پایان از ارقام مکرر را داراست . مثلاً ،

$$\sqrt{2} = 1.414213562373\ldots,$$

که رشته ارقام بی‌پایانش از نظمی برخوردار نیست . در واقع ، می‌توان عدد گویای (۲) را به صورت زیر نیز نوشت :

$$\frac{5}{8} = 0.625000\ldots = 0.625\overline{0}.$$

این نشان می‌دهد که هر اعشاری مختوم را می‌توان یک اعشاری مکرر گرفت که از مرحله‌ای به بعد ارقامش رشته‌ای از صفر است . درنتیجه ، اگر درست نگاه کنیم ، فقط دو نوع اعشاری می‌بینیم ، اعشاریهای مکرر که نظیر اعداد گویایند ، و اعشاریهای نامکرر که نظیر اعداد گنگ می‌باشند . شهوداً واضح است که نوع دوم به مراتب از اولی بیشترند ؛ درواقع ، این امر به نوعی درست است و می‌توان آن را دقیق ساخت .

مثال۷. نمایشهای اعشاری دیگری از اعداد گویا عبارتنداز:

$$\frac{7}{16} = 0.4375, \qquad -\frac{93}{32} = -2.90625, \qquad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

(دو تای اول اعشاریهایی مختوم هستند) ، و نمایشهای اعشاری دیگری از اعداد گنگ عبارتند از:

$$\sqrt{3} = 1.732050807568\ldots. \qquad \sqrt[3]{2} = 1.259921049894\ldots.$$
$$\pi = 3.141592653589\ldots$$

تبصره. می‌توان نشان داد که تناظر بین اعشاریها و اعداد حقیقی **یک به یک** است، بدین معنی که به ازای هر اعشاری‌عددی منحصر به‌فرد و به ازای هر عدد حقیقی اعشاری‌منحصر به فرد وجود دارد. برای درست بودن این حکم، باید اعشاریهایی که از مرحله‌ای به بعد رشتهٔ بی‌پایانی نه‌دارندرا با اعشاری مختوم " بلافاصله پس از آن " یکی کنیم. مثلا" ،

$$0.14999\ldots = 0.14\bar{9} = 0.15.$$

قواعد اساسی اعمال حسابی براعداد (حقیقی) درلیست‌زیرآمده‌اند، که در آنها a ، b ، و c اعدادی دلخواه می‌باشند.

$a + b = b + a,$	$ab = ba$	(قوانین تعویضپذیری)
$(a + b) + c = a + (b + c),$	$(ab)c = a(bc)$	(قوانین شرکتپذیری)
$(a + b)c = ac + bc,$	$a(b + c) = ab + ac$	(قوانین پخشپذیری)
$a + 0 = a,$	$a + (-a) = 0,$	
$1 \cdot a = a,$	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \quad (a \neq 0)$	
$0 \cdot a = 0,$	$(-1)a = -a,$	
$(-a)b = a(-b) = -ab,$	$(-a)(-b) = ab.$	

بعضی از این قواعد را می‌توان از دیگران نتیجه گرفت، اما این یک موضوع تکنیکی است. **قرینهٔ** a ، که با $-a$ نموده می‌شود، عددی است که $a + (-a) = 0$. بخصوص، این ایجاب می‌کند که $-(-a) = a$. توجه کنید که $-0 = 0$ ، زیرا $0 + 0 = 0$ ، اما هیچ عددی غیر از 0 قرینهٔ خود نیست. **متقابل** a ، که با $1/a$ نموده می‌شود، عددی است که $a(1/a) = 1$ ؛ در اینجا، برای احتراز از تقسیم بر صفر، باید تأکید کنیم که $a \neq 0$.

تفریق b معادل جمع با قرینهٔ b است:

$$a - b = a + (-b).$$

به همین نحو، تقسیم بر b معادل ضرب در متقابل b می‌باشد:

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right) \qquad (b \neq 0).$$

مثال ۸. به کمک قواعد فوق، ثابت کنید هرگاه $ab = 0$، آنگاه دست کم یکی از عوامل a و b صفر است.

حل. هرگاه $a = 0$، برهان تمام است. هرگاه $a \neq 0$، طرفین تساوی $ab = 0$ را در $1/a$ ضرب می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$(ab)\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \cdot \frac{1}{a} = 0 \cdot$$

اما نیز داریم

$$(ab)\left(\frac{1}{a}\right) = \left[a\left(\frac{1}{a}\right)\right]b = 1 \cdot b = b,$$

و درنتیجه، $b = 0$.

مسائل

هر یک از مجموعه‌های زیر را با ذکر عناصر به صورتی دیگر بنویسید.

۱. $\{x\colon\ x = -x\}$

۲. $\{x\colon\ x^2 = 9\}$

۳. $\{x\colon\ x + 7 = 13\}$

۴. $\{x\colon\ x^2 - 5x + 6 = 0\}$

۵. $\{x\colon\ x = x^3\}$

۶. $\{x\colon\ x = x^4\}$

فرض کنید A مجموعهٔ $\{1, 2, \{3\}, \{4, 5\}\}$ باشد. (توجه کنید که دو عنصر از A خود مجموعه‌اند!) از روابط زیر کدامها درست‌اند کدامها نادرست، و جواب خود را توضیح دهید.

۷. $1 \in A$

۸. $3 \in A$

۹. $\{2\} \in A$

۱۰. $\{2\} \subset A$

۱۱. $\{1, 2\} \in A$

۱۲. $\{1, \{3\}\} \subset A$

۱۳. $\{4, 5\} \subset A$

۱۴. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

۱۵. $\varnothing \subset \{A\}$

۱۶. مجموعهٔ $A = \{a, b, c\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ آنها را ذکر کنید.

عدد گویای داده شده را به صورت یک اعشاری مختوم بیان کنید.

۱۷. $\frac{1}{4}$ ۱۸. $-\frac{1}{5}$ ۱۹. $\frac{1}{8}$

۲۰. $\frac{1}{25}$ ۲۱. $\frac{1}{125}$ ۲۲. $\frac{1}{64}$

عدد گویای داده شده را به صورت یک اعشاری مکرر بیان کنید.

۲۳. $\frac{1}{3}$ ۲۴. $\frac{1}{6}$ ۲۵. $\frac{1}{9}$

۲۶. $\frac{1}{11}$ ۲۷. $-\frac{1}{22}$ ۲۸. $\frac{1}{33}$

عدد گویای داده شده را به صورت تحویل‌ناپذیر درآورید.

۲۹. $\frac{57}{133}$ ۳۰. $-\frac{161}{99}$

۳۱. $\frac{81}{363}$ ۳۲. $\frac{91}{169}$

۳۳. نشان دهید هرگاه دو عدد گویا باشند، آنگاه مجموع و حاصل‌ضربشان نیز چنین‌اند.

۳۴. بدون استفاده از اعشاریها، نشان دهید که عدد $\sqrt{2} - 1$ گنگ است.

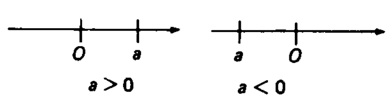
۳۵. دو عدد گنگ مثال بزنید که مجموعشان گویا باشد.

۳۶. دو عدد گنگ (نابرابر) مثال بزنید که حاصل ضربشان گویا باشد.

۳۷. در نمایش اعشاری $\frac{1}{17}$، دستهٔ مکرر چندرقمی است؟

۲۰۰ نامساویها و قوانین نماها

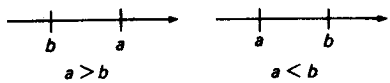
فرض کنیم a یک عدد حقیقی **ناصفر** باشد. پس a یا **مثبت** است، که می‌نویسیم $a > 0$، یا **منفی** است، که می‌نویسیم $a < 0$. هرگاه a را نقطه‌ای از خط حقیقی L با جهت از چپ به راست بگیریم، همانطور که شکل ۴ نشان داده، $a > 0$ یعنی a سمت راست مبداء



شکل ۴

O است، و $a < 0$ یعنی a سمت چپ O قرار دارد.

علایم $<$ و $>$. حال فرض کنیم a و b یک جفت عدد **نابرابر** باشند. در این صورت، یا $a-b>0$ یا $a-b<0$. در حالت اول گوییم a از b **بزرگتر است**، که می‌نویسیم $a>b$، و در حالت دوم گوییم a از b **کوچکتر است**، که می‌نویسیم $a<b$. به طور هندسی، $a>b$ یعنی a سمت راست b قرار دارد، و $a<b$ یعنی a سمت چپ b واقع است، مثل شکل ۵.



شکل ۵

هر فرمول از نوع $a>b$ یا $a<b$ یک **نامساوی** نامیده می‌شود.

مثال ۱. چند نامساوی نمونه عبارتند از

$$\sqrt{2}>0,\quad -3<0,\quad -2>-3,\quad 3<\pi,\quad 4>\pi,$$
$$-1>-1000,\quad -\frac{1}{7}<-\frac{1}{8},\quad -1<-0.001,\quad 3.2999>3.2998.$$

مطالب زیر در باب اعداد مثبت و منفی را دانسته گرفته و آزادانه به کار خواهیم برد.

(یک) a مثبت است اگر و فقط اگر $-a$ منفی باشد؛ یعنی، a و $-a$ مختلف‌العلامه‌اند.
(دو) اگر a مثبت باشد، متقابل آن $1/a$ نیز چنین است.
(سه) اگر a و b مثبت باشند، مجموع $a+b$ و حاصل‌ضرب ab نیز چنین است.
(چهار) حاصل‌ضرب ab مثبت است اگر و فقط اگر a و b متحدالعلامه باشند، و منفی است اگر و فقط اگر a و b مختلف‌العلامه باشند.

در حالت خاص، با انتخاب $b=a$ در قاعدهٔ (چهار)، معلوم می‌شود که به ازای هر a ناصفر، $a^2>0$. این، همراه با فرمول $0^2=0$، نشان می‌دهد که **مربع هرعددحقیقی همیشه نامنفی است**. (یک عدد نامنفی عددی است که مثبت یا صفر است.)

نامساویها اغلب تلفیق شده‌اند. مثلاً، $a<b<c$ به معنی دو نامساوی $a<b$ و $b<c$ است. به همین نحو، $a>b>c$ به معنی $a>b$ و $b>c$ می‌باشد. مثلاً، $3<\pi<4$ و $2>\sqrt{2}>1$.

حال چند قضیهٔ آسان ثابت می‌کنیم که ابزار کار با نامساویها به‌طور جبری را به

ما می‌دهند .

قضیهٔ ۱ (قاعدهٔ جمع برای نامساویها) . هرگاه $a < b$ ، آنگاه به ازای هر عدد c ،

$$a + c < b + c \qquad (۱)$$

برهان . هرگاه $a < b$ ، یا معادلاً $b - a > 0$ ، آنگاه

$$(b + c) - (a + c) = (b - a) + (c - c) = b - a > 0$$

که با (۱) معادل است .

قضیهٔ ۲ (قاعدهٔ ضرب برای نامساویها) . هرگاه $a < b$ ، آنگاه به ازای هر عدد مثبت c ،

$$ac < bc \qquad (۲)$$

ولی به ازای هر عدد منفی c ،

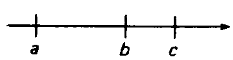
$$ac > bc \qquad (۲')$$

برهان . فرض کنیم $a < b$ ، پس $b - a$ مثبت است . در این صورت ، $(b - a)c$ همان علامت c را دارد . لذا ، به ازای c ای مثبت ، $bc - ac > 0$ ، که با (۲) معادل است ، حال آنکه به ازای c ای منفی ، $bc - ac < 0$ ، که با (۲') معادل می‌باشد .

مهم است توجه شود که قضیهٔ ۱ با قضیهٔ ۲ فرق دارد . اولی می‌گوید هرگاه عددی ، مثبت یا منفی، رابه طرفین یک نامساوی بیفزاییم ، نتیجه نامساوی درست دیگری است . از آن سو ، طبق قضیهٔ ۲ ، نامساوی حاصل از ضرب طرفین یک نامساوی در یک عدد ناصفر درست است فقط اگر عدد مثبت باشد ، و در واقع جهت نامساوی در صورت منفی بودن عدد عکس می‌شود .

قضیهٔ ۳ (تعدی نامساویها) . هرگاه $a < b$ و $b < c$ ، آنگاه $a < c$.

برهان . a ، b ، و c را نقاط خط حقیقی می‌گیریم . در این صورت ، a سمت چپ b ، و b سمت چپ c قرار دارد (ر.ک. شکل ۶) . پس a سمت چپ c قرار خواهد داشت.



شکل ۶

به آسانی می‌بینیم که اگر جهت تمام نامساویها را عوض کنیم، یعنی هر علامت $>$ را با علامت مخالف آن $<$ تعویض کنیم، قضایای ۱ تا ۳ درست خواهند ماند.

قضیهٔ ۴ (قاعدهٔ تقابلها برای نامساویها). هرگاه $0 < a < b$ یا $a < b < 0$، آنگاه

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}. \qquad (۳)$$

برهان. هرگاه $0 < a < b$ یا $a < b < 0$، آنگاه a و b متحدالعلامه‌اند و $a < b$؛ درنتیجه، $ab > 0$ و $b - a > 0$. چون خارج‌قسمت دو عدد مثبت مثبت است، نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0,$$

که با (۳) معادل است.

مثالهای زیر موارد استعمال این قضایا را نشان می‌دهند. توجه کنید که یک نامساوی درصورت تقسیم طرفین آن بر عددی مثبت حفظ می‌شود، زیرا تقسیم بر عدد مثبت c معادل ضرب در متقابل آن $1/c$ است، که این عدد نیز مثبت است.

مثال ۲. نامساوی

$$3x - 5 < \pi \qquad (۴)$$

را حل کنید؛ یعنی، جمیع x هایی را بیابید که به ازای آنها (۴) برقرار باشد.

حل. بنابر قضیهٔ ۱، $(3x - 5) + 5 < \pi + 5$؛ و درنتیجه،

$$3x < \pi + 5.$$

با تقسیم طرفین این نامساوی بر 3، به دست می‌آوریم

$$x < \frac{\pi + 5}{3}. \qquad (۵)$$

مثال ۳. نامساوی

$$x^2 - x - 6 > 0$$

را حل کنید.

حل. عبارت سمت چپ را تجزیه کرده، و (۵) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(x + 2)(x - 3) > 0.$$

سپس جدولی می‌سازیم که بستگی علامت x به عاملهای $x + 2$ و $x - 3$ و حاصل‌ضربشان $(x + 2)(x - 3)$ را نشان می‌دهد:

علامت $(x+2)(x-3)$	علامت $x-3$	علامت $x+2$	شرط بر x
$+$	$-$	$-$	$x < -2$
$-$	$-$	$+$	$-2 < x < 3$
$+$	$+$	$+$	$x > 3$

در اینجا راهنمای ما این امر بود که عبارت $x - a$ به ازای $x < a$ منفی و به ازای $x > a$ مثبت است. از جدول فوراً می‌بینیم که نامساوی $(x + 2)(x - 3) > 0$ برقرار است اگر و فقط اگر $x < -2$ یا $x > 3$؛ و درنتیجه، همین برای نامساوی‌اصلی (۵) درست است. تلفیق دو نامساوی اخیر به صورت تنها فرمول $-2 > x > 3$ صحیح نیست، زیرا عددی مانند x صادق در هر دو نامساوی $x < -2$ و $x > 3$ **به‌طور همزمان** وجود ندارد.

مثال ۴. نامساوی

$$\frac{x+1}{2-x} > 1 \qquad (۶)$$

را حل کنید.

حل. با تفریق ۱ از طرفین (۶)، به دست می‌آوریم

$$\frac{x+1}{2-x} - 1 > 0$$

یا معادلاً

$$\frac{(x+1)-(2-x)}{2-x} = \frac{2x-1}{2-x} > 0.$$

سپس جدولی می‌سازیم که بستگی علامت صورت $2x - 1$ و مخرج $x - 2$ و خارج‌قسمت آنها $(2x - 1)/(2 - x)$ به x را نشان دهد:

علامت $\frac{2x-1}{2-x}$	علامت $2-x$	علامت $2x-1$	شرط بر x
$-$	$+$	$-$	$x<\frac{1}{2}$
$+$	$+$	$+$	$\frac{1}{2}<x<2$
$-$	$-$	$+$	$x>2$

ازجدول‌واضح‌است‌که‌نامساوی $(2x-1)/(2-x)>0$ برقراراست‌اگر وفقط‌اگر $\frac{1}{2}<x<2$. از اینرو، همین امر برای نامساوی اصلی (۶) درست است.

علایم $\geq$ و $\leq$. دو عدد a و b (نه لزوما" متمایز) داده شده‌اند. منظور از $a\geq b$ یعنی a ***بزرگتر یا مساوی*** b ***است***. به‌عبارت‌دیگر، هرگاه $a\geq b$، آنگاه $a>b$ یا $a=b$. به همین‌نحو، $a\leq b$ یعنی a ***کوچکتر یامساوی*** b ***است***؛ یعنی، $a<b$ یا $a=b$. مثلا"،

$$\sqrt{3}\geq\sqrt{2}\geq 1^3\geq 1,\qquad -3\leq 0\leq\frac{1-1}{2}\leq 1. \tag{۷}$$

علایم $\geq$ و $\leq$ تخمینهای " ضعیفتری " از علایم $<$، $>$، و $=$ به دست می‌دهند؛ و در واقع، صورتهای " دقیقتری " از (۷) عبارتنداز

$$\sqrt{3}>\sqrt{2}>1^3=1,\qquad -3<0=\frac{1-1}{2}<1.$$

نامساویهای شامل علایم $<$ و $>$ را گاهی نامساویهای *اکید* گویند تا با نامساویهای شامل علایم $\geq$ و $\leq$ فرق داشته باشند. هرگاه دو نامساوی $a\leq b$ و $a\geq b$ باهم برقرار باشند، آنگاه $a=b$. در واقع، $a\leq b$ ایجاب می‌کند که $a<b$ یا $a=b$، اما $a<b$ با $a\geq b$ ناسازگار است.

علایم max و min. n عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ داده شده‌اند. دست کم یکی از آنها، که آن را M می‌نامیم، بزرگتر یا مساوی بقیه است. به همین نحو، دست کم یکی، به نام m، از دیگران‌کوچکتر یا مساوی‌است. اعداد M و m به***ماکزیمم*** و ***مینیمم*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ معروفند، که به‌ترتیب با $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ نموده‌می‌شوند. مثلا"،

$$\max\{-1, 2, 2\}=2,\qquad \min\{-1, 1, -3\}=-3.$$

واضح است که $M \geq m$ ، و $M = m$ اگر و فقط اگر $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

توانها و ریشه‌ها. اگر a عددی دلخواه و n عدد صحیح مثبتی باشد، حاصل‌ضرب

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{عامل } n}$$

توان n م a نامیده و به صورت a^n نوشته می‌شود. حال تعریف می‌کنیم

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a^0 = 1,$$

که دراین‌فرمولها $a \neq 0$ فرض شده است. مثلاً،

$$4^2 = 16, \quad (-2)^2 = 4, \quad (-1)^3 = -1, \quad 3^3 = 27, \quad 10^4 = 10000,$$

$$2^6 = 64, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = -8, \quad \pi^0 = 1.$$

توانهای صحیح اعداد حقیقی از *قوانین نماها* که کاملاً شناخته شده‌اند تبعیت می‌کنند:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n. \tag{۸}$$

در اینجا m و n اعداد صحیح دلخواهی، مثبت، منفی، یا صفرند، درحالی که a و b اعدادی دلخواهند مگر در فرمول دوم که $a \neq 0$. همچنین، تأکید می‌کنیم که عدد 0 نباید به توانی نامثبت برسد.

اگر $a \geq 0$ ، درست یک عدد *نامنفی* هست که مربعش مساوی a است. این عدد، که با $\sqrt{a}$ نموده می‌شود، **ریشهٔ دوم** a نام دارد. مثلاً، $\sqrt{0} = 0$ و $\sqrt{4} = 2$ ، ولی $\sqrt{4} = -2$ نادرست است هرچند که $(-2)^2 = 4$ ، زیرا $\sqrt{4}$ طبق تعریف نامنفی است. ریشهٔ دوم یک عدد منفی نمی‌تواند عددی حقیقی باشد، زیرا مجذور هر عدد حقیقی همواره نامنفی است. مثلاً، $\sqrt{-4}$ عددی حقیقی نیست. با معرفی اعدادی کلیتر، به نام *اعداد مختلط*، امکان جذرگرفتن از اعداد منفی را خواهیم داشت. اما اعداد مختلط هیچگاه در *این کتاب* به کار نمی‌روند؛ و درنتیجه، ریشهٔ یک عدد منفی را تعریف نشده می‌گیریم.

به‌طورکلی، اگر $a \geq 0$ و n عدد صحیح مثبتی باشد، درست یک عدد *نامنفی* هست که توان n مش مساوی a است، که **ریشهٔ** n م a نامیده و به صورت $\sqrt[n]{a}$ نوشته می‌شود. مثلاً،

$$\sqrt[3]{27} = 3, \qquad \sqrt[4]{0} = 0, \qquad \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}, \qquad \sqrt[6]{64} = 2.$$

بخصوص، $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ ، ولی همیشه می‌نویسند $\sqrt{a}$. با این تعریف ریشهٔ n م ، قواعد آشنای زیر را خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

دراینجا m و n اعداد صحیح مثبت دلخواهی هستند، درحالی که a و b اعداد نامنفی دلخواهی هستند مگر در فرمول سوم که $b \neq 0$.

اگر n فرد باشد، می‌توان $\sqrt[n]{a}$ را به ازای مقادیر منفی a نیز تعریف کرد، و آن عدد (منفی)منحصر به‌فردی است که توان n مش مساوی a است. مثلاً" ، $\sqrt[3]{-1} = -1$ و $\sqrt[5]{-32} = -2$. اما، اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a}$ به ازای a ی منفی، مثل حالت جذر، تعریف نشده است. این بدان خاطر است که اگر n زوج باشد، $n = 2k$ که در آن k عددی صحیح است؛ درنتیجه، $a^n = (a^k)^2 \geq 0$.

مثال ۵. نشان دهید هرگاه $0 < a < b$ ، آنگاه $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

حل. داریم $b - a > 0$ ، یا معادلاً"، برحسب ریشه‌های دوم $A = \sqrt{a}, B = \sqrt{b}$ ، $B^2 - A^2 > 0$. با تجزیهٔ $B^2 - A^2$ ، خواهیم داشت

$$B^2 - A^2 = (B - A)(B + A) > 0. \tag{۹}$$

عامل $B + A$ مثبت است، زیرا مجموع دو عدد مثبت است. لذا، (۹) ایجاب می‌کند که $B - A > 0$ ؛ یعنی، $A < B$ که با $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ معادل می‌باشد.

مثال ۶. به‌طورکلی، نشان دهید هرگاه $0 < a < b$ و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

حل. مجدداً" $b - a > 0$ ، یا معادلاً"، برحسب ریشه‌های n م $A = \sqrt[n]{a},\ B = \sqrt[n]{b}$ ، $B^n - A^n > 0$. با استفاده از فرمولی در جبر برای تجزیهٔ $B^n - A^n$ ، معلوم می‌شود که

$$B^n - A^n = (B - A)(B^{n-1} + B^{n-2}A + \cdots + BA^{n-2} + A^{n-1}) > 0. \tag{۹'}$$

عامل $B^{n-1} + B^{n-2}A + \cdots + BA^{n-2} + A^{n-1}$ مثبت است، زیرا مجموع n عددمثبت می‌باشد. لذا، (۹') ایجاب می‌کندکه $B - A > 0$ ؛ یعنی، $A < B$ یامعادلاً" $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

بالاخره، معنی عبارت a^r را مورد بحث قرار می‌دهیم ، که در آن r عددی است گویا ؛ یعنی ، عددی به‌شکل m/n که درآن m و n صحیح‌اند (و $n \neq 0$) . فرض‌مثبت‌بودن n خللی به‌کلیت وارد نمی‌کند ،زیرا اگر r منفی باشد ،همواره می‌توان m را منفی‌گرفت. برای سادگی ، نیز فرض می‌کنیم a مثبت باشد ؛ درنتیجه ، ریشهٔ n م a همیشه‌تعریف شده است ، و نیز فرض می‌کنیم m/n تحویل‌ناپذیر باشد . در این صورت ، تعریف $a^{m/n}$ خواهد شد

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},$$

یا معادلاً

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

(توجه کنید که $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$) . مثلاً ،

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4, \qquad 32^{-3/5} = (\sqrt[5]{32})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8},$$

و اگر r مثبت باشد ، $0^r = 0$. چون

$$a^{-m/n} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{m/n}},$$

داریم $a^{-r} = 1/a^r$ ، و نشان دادن اینکه

$$a^r a^s = a^{r+s}, \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \qquad (a^r)^s = a^{rs}, \qquad (ab)^r = a^r b^r \tag{۱۰}$$

چندان مشکلتر نیست (جزئیات آن در هر کتاب جبر دبیرستانی بیان شده‌است) .در اینجا r و s اعداد گویای دلخواهی‌هستند ، درحالی‌که a و b اعداد حقیقی مثبت دلخواهی می‌باشند . اگر r و s اعدادی صحیح بوده ، و شرط مثبت بودن a و b را حذف کنیم ، ***قوانین نماهای*** (۱۰) به قوانین نظیر برای توانهای صحیح تحویل می‌شوند .

مثال ۷ . $2^{1/6} \cdot 8^{1/9}$ را ساده کنید .

حل . با استفاده از دو فرمول (۱۰) ، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} 2^{1/6} \cdot 8^{1/9} &= 2^{1/6} \cdot (2^3)^{1/9} = 2^{1/6} \cdot 2^{3/9} \\ &= 2^{1/6} \cdot 2^{1/3} = 2^{(1/6)+(1/3)} = 2^{1/2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

مسائل

نشان دهید

۱. هرگاه $a<b$ ، آنگاه $-a>-b$

۲. هرگاه $a<b$ ، آنگاه $c-b<c-a$

۳. هرگاه $a<b$ و $c<d$ ، آنگاه $a+c<b+d$

۴. هرگاه $0<a<b$ و $0<c<d$ ، آنگاه $0<ac<bd$

۵. هرگاه $0<a<1$ ، آنگاه به ازای هر عدد صحیح $n\geq 2$ ، $\sqrt[n]{a}>a$

بدون محاسبات عددی ، معین کنید کدام عدد بزرگتر است .

۶. $\frac{1}{\pi}$ یا $\frac{1}{3}$

۷. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ یا $\frac{1}{2}$

۸. $94\cdot 98$ یا 96^2

۹. $23\cdot 24\cdot 26\cdot 27$ یا 25^4

۱۰. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ یا $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

۱۱. $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ یا $\sqrt{6}-2$

۱۲. فرض کنید $p=m/n$ و $p'=m'/n'$ دو عدد گویای مختلف باشند ، که بامخرجهای‌مثبت نوشته‌شده‌اند (این همیشه ممکن‌است) . نشان دهید که $p<p'$ معادل $mn'>m'n$ است ، حال آنکه $p>p'$ معادل $mn'<m'n$ می‌باشد .

بدون تقسیم،با استفاده از مسئلهٔ قبل ، بگویید کدام عدد بزرگتر است .

۱۳. $\frac{33}{10}$ یا $\frac{10}{3}$

۱۴. $\frac{46}{25}$ یا $\frac{11}{6}$

۱۵. $\frac{7}{19}$ یا $\frac{18}{49}$

۱۶. $-\frac{10}{3}$ یا $-\frac{167}{50}$

۱۷. از $a^2+b^2=0$ چه چیز در باب a و b نتیجه می‌شود ؟

۱۸. تحقیق کنید که

$$\frac{4}{7}<\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<1.$$

۱۹. **میانگین هندسی** دو عدد مثبت x و y با $g=\sqrt{xy}$ و **میانگین حسابی** (یا **متوسط**) آنها با $a=\frac{1}{2}(x+y)$ تعریف می‌شود . نشان دهید که $g<a$ مگر آنکه $x=y$ ،که در این حالت $g=a$.

۲۰. با استفاده از مسئلهٔ قبل ، نشان دهید که از تمام مستطیلهای با محیط معلوم p ، مربع بیشترین مساحت را دارد . این مساحت چقدر است ؟

۲۱. هرگاه $2 \le a \le 4$ و $4 \le b \le 6$ ، در باب اندازهٔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ چه می‌توان گفت؟

جمیع x هایی را بیابید که به ازای آنها:

۲۲. $2 < 4x - 5 < 7$

۲۳. $(x-1)(x+1) \le (x+1)(x+2)$

۲۴. $x^2 < 5x - 6$

۲۵. $\dfrac{x}{x+2} > 0$

۲۶. $\dfrac{x+1}{x+2} < 1$

۲۷. $(x+1)(x+2)(x+3) > 0$

۲۸. $(x-1)^2 x(x+1) > 0$

۲۹. $(x-1)(x+1)(x^2+1) < 0$

مقادیر زیر را بیابید:

۳۰. $\max\{-2, (-2)^2, (-2)^3\}$

۳۱. $\min\{-1, (-1)^2, (-1)^3\}$

۳۲. $\min\{-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -2\}$

۳۳. $\max\{1, 2, \frac{4}{2}, (\sqrt{2})^2\}$

عبارات زیر را بدون نماهای منفی بنویسید:

۳۴. $\left(\dfrac{x^2}{yz}\right)^{-3}$ ۳۵. $\dfrac{a^3b^2c}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}$ ۳۶. $\dfrac{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{a^3b^2c}$

عبارات زیر را به صورت توانی از 2 بنویسید:

۳۷. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^7$ ۳۸. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-5}$ ۳۹. $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$

عبارات زیر را ساده کنید:

۴۰. $\sqrt{4 \cdot 16 \cdot 36}$ ۴۱. $\sqrt[3]{64a^9}$

۴۲. $\sqrt[3]{1.728 \times 10^6}$ ۴۳. $\sqrt[4]{81a^4}$

۴۴. $\sqrt[5]{-0.00001}$ ۴۵. $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

۴۶. $\sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}}$ ۴۷. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

۴۸. $(8a^6)^{4/3}$ ۴۹. $(125a^3)^{-2/3}$

۵۰. $(32)^{-4/5}(16)^{5/4}$ ۵۱. $2^{1/6} \cdot 2^{1/3} \cdot 2^{1/2}$

۵۲. $(0.0001)^{3/2}$ ۵۳. $\left(\frac{81}{625}\right)^{-3/4}$ ✓

۵۴. دانشجویان موسیقی رشتهٔ C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B, C را به عنوان یک گام کروماتیک C ، مرکب از 12 نیمصدای متوالی ، می‌شناسند . C ی دوم یک اکتاو بالاتر از C ی اول است و دارای فرکانس (پای) دوبرابر می‌باشد . فرض کنید فرکانس هر نت گام r (ثابت) برابر فرکانس نت قبلی باشد ، که در دستگاه با *فواصل مساوی* برای کوک‌کردن وسایل به کار می‌رود . r را بیابید . نسبت فرکانس دو صدای کامل متوالی (مانند C و D) چیست ؟

۵۵. نشان دهید که هرگاه $p<q$ و $r=\frac{1}{2}(p+q)$ ، آنگاه $p<r<q$ ، که در آن r در صورت گویا بودن p و q گویاست .

۵۶. با استفاده از مسئلهٔ قبل ، نشان دهید که بزرگترین عدد گویا (یا حقیقی) کوچکتر از 1 وجود ندارد ، و کوچکترین عدد گویا (یا حقیقی) بزرگتر از 0 موجودنیست.

۳.۰ قدر مطلق و بازه‌ها

علامت | | . منظور از **قدرمطلق** عدد a ، که به صورت $|a|$ با دو خط قائم نوشته می‌شود ، یعنی عددی مساوی خود a اگر a نامنفی باشد و مساوی $-a$ اگر a منفی باشد. به عبارت دیگر ،

$$|a| = \begin{cases} a & \text{،}\quad a \geq 0 \text{ اگر} \\ -a & \text{،}\quad a < 0 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (1)$$

که در آن دو ابرو برای تلفیق دو فرمول در یک فرمول به کار می‌رود .

به عنوان مثال ،

$$|0| = 0, \qquad |-1.45| = -(-1.45) = 1.45,$$
$$|(-3)^2| = |9| = 9, \quad |(-3)^3| = |-27| = -(-27) = 27,$$
$$|x-2| = -(x-2) = 2-x \text{ ،}\ x<2 \text{ اگر}$$

به آسانی معلوم می‌شود که

$$|a| = \sqrt{a^2}. \qquad (2)$$

در واقع ، هرگاه $a \geq 0$ ، $|a| = a$ و $\sqrt{a^2} = a$ ، اما هرگاه $a<0$ ، آنگاه $|a| = -a$ و $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)(-a)} = -a$. (چرا $\sqrt{a^2} = a$ به ازای a ی منفی نادرست است ؟) با

مربع کردن طرفین (۲) ، به دست می‌آوریم

$$|a|^2 = a^2 \qquad (۲')$$

لذا ، مربع قدر مطلق یک عدد مساوی مربع خود عدد است . از (۲) معلوم می‌شود که

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2},$$

یا ، معادلا" ،

$$|ab| = |a|\,|b|. \qquad (۳)$$

این فرمول مهم به ازای هر دو عدد a و b معتبر است . استدلالی مشابه نشان می‌دهدکه

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0),$$

و به عنوان تمرین گذارده می‌شود . با اختیار $b = -1$ در (۳) ، درمی‌یابیم که

$$|-a| = |a|.$$

بی‌درنگ از (۱) نتیجه می‌شود که

$$a = \begin{cases} |a| & \text{، اگر } a \geq 0 \\ -|a| & \text{، اگر } a < 0 \end{cases} \qquad (۱')$$

بنابراین ، به ازای هر عدد a ،

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

نامساوی مثلثی . قضیهٔ زیر در حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت زیادی دارد .

قضیهٔ ۵ (نامساوی مثلثی) . *نامساوی*

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad (۴)$$

به‌ازای هر دو عدد a *و* b *برقرار است .*

برهان . از نامساوی

$$ab \leq |ab| = |a|\,|b|$$

معلوم می‌شود که

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a|\,|b| + b^2 = |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2.$$

بنابراین،

$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2,$$

و با گرفتن جذر از طرفین آن (به کمک مثال ۵، صفحهٔ ۱۷)، نامساوی (۴) به‌دست می‌آید.

هرگاه a و b متحدالعلامه باشند، یا دست کم یکی از a و b صفر باشد، نامساوی مثلثی (۴) به تساوی $|a+b| = |a| + |b|$ تحویل می‌شود، زیرا اینها شرایطی هستند که تحت آنها $ab = |ab|$. اما، اگر a و b مختلف‌العلامه باشند، نامساوی مثلثی به‌صورت اکید $|a+b| < |a| + |b|$ درمی‌آید، زیرا در این صورت $ab < |ab|$. به عنوان مثال،

$$4 = |3-7| < |3| + |-7| = 10.$$

نکتهٔ مهم این است که (۴) همواره، بی‌توجه به علامات a و b، برقرار است.

تعویض a با $a-b$ در (۴) نتیجه می‌دهد

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|,$$

که ایجاب می‌کند

$$|a-b| \geq |a| - |b|.$$

به همین نحو، از تعویض b با $b-a$ در (۴) نتیجه می‌شود

$$|b| = |a+(b-a)| \leq |a| + |b-a| = |a| + |a-b|,$$

که ایجاب می‌کند

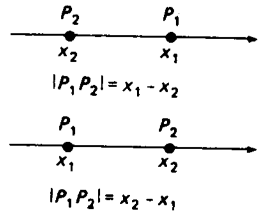
$$|a-b| \geq |b| - |a|.$$

اما یکی از دو عدد $|a| - |b|$ و $|b| - |a|$ قدرمطلق $|a| - |b|$ است؛ و لذا،

$$|a-b| \geq ||a| - |b||. \qquad (۵)$$

ما گاهی به این نامساوی نیاز خواهیم داشت.

مختصات و فاصلهٔ بین نقاط. منظور از مختص نقطهٔ P بر خط حقیقی یعنی عدد حقیقی نظیر P. فرض‌کنیم P_1 و P_2 دونقطه برخط حقیقی به‌مختصات x_1 و x_2 بوده، و $|P_1P_2|$ فاصلهٔ بین P_1 و P_2 یا معادلاً" طول پاره‌خط P_1P_2 باشد. همانطور که شکل ۷ نشان‌داده، $|P_1P_2|$ چیزی جز تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین دو عدد x_1 و x_2 نیست. (نقاط P_1 و P_2 درصورتی که $x_1 = x_2$ منطبق‌اند.) به طور دقیقتر،



شکل ۷

$$|P_1P_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{،}\quad x_1 \geq x_2 \text{ اگر} \\ x_2 - x_1 & \text{،}\quad x_1 < x_2 \text{ اگر} \end{cases}$$

که معادل است با

$$|P_1P_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{،}\quad x_1 - x_2 \geq 0 \text{ اگر} \\ x_2 - x_1 & \text{،}\quad x_1 - x_2 < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

این ظاهر پیچیده‌ای دارد ، ولی برحسب قدرمطلق به صورت

$$|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$$

در می‌آید . پیش‌بینی این نتیجه‌بود که در نمادمان برای فاصلهٔ بین P_1 و P_2 خطوط‌قائم به‌کار بردیم . توجه کنید که ، طبق خاصیتی از قدرمطلق ،$|P_2P_1| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ ؛ و لذا ، همانطور که از ملاحظات هندسی انتظار می‌رفت ، $|P_1P_2| = |P_2P_1|$.

چون $|x| = |x - 0|$ ، قدرمطلق x چیزی جز فاصلهٔ نقطهٔ x تا مبداء خط حقیقی نیست . البته ، منظور از " نقطهٔ x " یعنی نقطه به مختص x . به همین نحو ، $|x - 3|$ فاصلهٔ بین نقطهٔ x و نقطهٔ 3 است ، حال آنکه $|x + 3| = |x - (-3)|$ فاصلهٔ بین x و نقطهٔ $3-$ می‌باشد . برای تعبیر $|x + 3|$ به عنوان فاصله باید $3+$ را $-(-3)$ تصور کرد .

نامساوی

$$|x| < a \qquad (a > 0)$$

می‌گوید که فاصلهٔ بین نقطهٔ x و مبداء کوچکتر از a است . مجموعهٔ تمام x هایی‌که این نامساوی به ازای آنها درست است همان مجموعهٔ تمام x هایی است که

$$-a < x < a.$$

به همین نحو ، $|x| \leq a$ اگر و فقط اگر $-a \leq x \leq a$. به عنوان‌تمرین ، نشان دهید که $|x| > a$ $(a > 0)$ اگر و فقط اگر $x > a$ یا $x < -a$ ، و $|x| \geq a$ اگر و فقط اگر $x \geq a$ یا

. $x \le -a$

مثال ۱. کلیهٔ x هایی را بیابید که $|x^2 - 2| \le 7$.

حل. این نامساوی مضاعف معادل است با $-7 \le x^2 - 2 \le 7$ ، که به نوبهٔ خود برقرار است اگر و فقط اگر

$$-5 \le x^2 \le 9. \qquad (۶)$$

نامساوی اول در (۶) خود به‌خود برقرار است، زیرا x^2 به‌ازای هر x نامنفی است، حال آنکه نامساوی دوم را می‌توان به صورت $|x|^2 \le 9$ یا معادلاً $|x| \le 3$ نوشت. بنابراین، x در نامساوی $|x^2 - 2| \le 7$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر

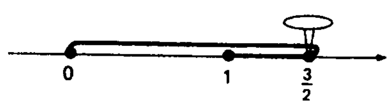
$$-3 \le x \le 3.$$

مثال ۲. معادلهٔ

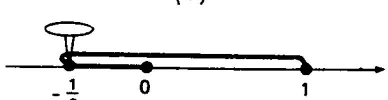
$$|x| + |x - 1| = 2 \qquad (۷)$$

را حل کنید.

حل. در اینجا روش هندسی خوب کار می‌کند. معادلهٔ (۷) می‌گوید که فاصلهٔ بین نقطهٔ x و مبداء به علاوهٔ فاصلهٔ بین نقطهٔ x و نقطهٔ 1 مساوی 2 است. یک نخ به‌طول 2 که دو انتهایش در نقاط 0 و 1 محکم شده‌است را درنظر می‌گیریم. اگر نخ را تا نقطهٔ $\frac{3}{2}$، یعنی نصف واحد به راست 1 [ر.ک. شکل ۸ (آ)]، یا به نقطهٔ $-\frac{1}{2}$ ، یعنی نصف‌واحد به چپ 0 ، بکشیم، نخ محکم کشیده می‌شود[ر.ک. شکل ۸ (ب)]. به عبارت دیگر، معادلهٔ (۷) دارای دو جواب $x = \frac{3}{2}$ و $x = -\frac{1}{2}$ است.



(آ)



(ب)

شکل ۸

مثال ۳. معادلهٔ (۷) را به‌طور جبری حل کنید.

حل. هرگاه

$$x \geq 1,$$

آنگاه x و $1 - x$ هر دو نامنفی‌اند؛ درنتیجه، (۷) به معادلهٔ $x + (x - 1) = 2$ یا $2x = 3$، با جواب $x = \frac{3}{2}$، تحویل می‌شود. هرگاه

$$0 \leq x < 1,$$

آنگاه x نامنفی است و $1 - x$ منفی. در این حالت، (۷) به صورت $x - (x - 1) = 2$ یا معادلاً $1 = 2$ درمی‌آید، که نادرست است؛ لذا، (۷) جوابی به ازای $0 \leq x < 1$ ندارد. بالاخره، هرگاه

$$x < 0,$$

آنگاه x و $1 - x$ هر دو منفی‌اند و (۷) به معادلهٔ $-x - (x - 1) = 2$ یا $-2x = 1$، با جواب $x = -\frac{1}{2}$، تحویل می‌شود. باتوجه به جمیع حالات، نتیجه می‌شود که معادلهٔ (۷) فقط دو جواب $x = \frac{3}{2}$ و $x = -\frac{1}{2}$ را دارد.

انواع بازه‌ها. فرض‌کنیم a و b دو نقطه از خط حقیقی باشند به‌طوری که $a < b$. دراین صورت، مجموعهٔ تمام نقاط بین a و b یک *بازه* نام دارد. در اینجا موقتاً تعلق *نقاط انتهایی* a و b به بازه را مشخص نمی‌کنیم. در واقع، چهار حالت وجود دارد:

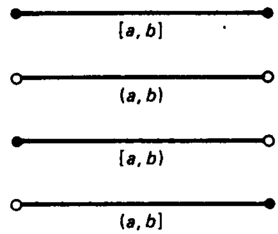
(یک) مجموعهٔ $\{x: a \leq x \leq b\}$ مرکب از تمام نقاط x بین a و b *به انضمام* نقاط انتهایی a و b یک *بازهٔ* بسته نام دارد و با $[a, b]$ نموده می‌شود، که در آن از **دوکروشه** استفاده می‌شود.

(دو) مجموعهٔ $\{x: a < x < b\}$ مرکب از تمام نقاط x بین a و b **جز** نقطهٔ انتهایی a و b یک *بازهٔ باز* نام دارد و با (a, b) نموده می‌شود، که در آن از **دو پرانتز** استفاده می‌شود.

(سه) مجموعهٔ $\{x: a \leq x < b\}$ مرکب از تمام نقاط x بین a و b *به انضمام* نقطهٔ انتهایی a **جز** نقطهٔ انتهایی راست b یک *بازهٔ* **نیمباز** نام دارد و با $[a, b)$ نموده می‌شود، که در آن از کروشه در چپ و پرانتز در راست استفاده می‌شود.

(چهار) مجموعهٔ $\{x: a < x \leq b\}$ مرکب از تمام نقاط بین a و b **جز** نقطهٔ انتهایی چپ a *به انضمام* نقطهٔ انتهایی راست b نیز یک *بازهٔ* **نیمباز** نام دارد، منتها این بار با $(a, b]$ نموده می‌شود، که در آن از پرانتز در چپ و از کروشه در راست استفاده می‌شود.

هر چهار بازهٔ $[a, b]$ ، (a, b) ، $[a, b)$ ، و $(a, b]$ دارای نقاط انتهایی a و b اند؛ و درنتیجه، به همهٔ آنها طول $b - a$ اطلاق می‌شود (برای مشاهدهٔ علت، نقطه را با طول صفر تصور کنید) . معنی هندسی انواع مختلف بازه‌ها در شکل ۹ نموده شده است،



انواع مختلف بازه‌های متناهی

شکل ۹

که در آن نقاط انتهایی داخل بازه‌ها به صورت نقاط توپر و نقاط انتهایی خارج بازه‌ها به شکل نقاط توخالی نموده شده‌اند . منظور از یک **نقطهٔ** درونی یکی از این بازه‌ها یعنی نقطه‌ای غیر از یک نقطهٔ انتهایی؛ یعنی: نقطه‌ای از بازهٔ*باز* (a, b) .

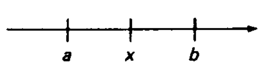
در نوشتجات‌علمی به‌عباراتی‌مانند" بازهٔ $1 \le x \le 4$ " یا " بازهٔ $-2 < y < 5$ " برمی‌خورید ، که در واقع به معنی بازهٔ $\{x: 1 \le x \le 4\}$ یا بازهٔ $\{y: -2 < y < 5\}$ است. هر بازه یک مجموعه است نه یک نامساوی مضاعف . در هر صورت ، وقتی این تمایز روشن باشد ، استفاده از نماد " نامساوی " برای بازه‌ها اشکالی ندارد ، و هر وقت مناسب بود از آن استفاده خواهیم کرد .

مثال ۴. نشان دهید که هر بازه با نقاط انتهایی a و b دارای نقطهٔ میانی $\frac{1}{2}(a + b)$ است .

حل . فرض‌کنیم x نقطهٔ میانی بازه ، مثل شکل ۱۰ ، بوده ، و $a < b$. پس $a < x < b$ و

$$x - a = b - x$$

زیرا x از a و b به‌یک فاصله است . با حل این معادله نسبت به x ، درمی‌یابیم که



شکل ۱۰

$x = \frac{1}{2}(a+b)$. همیــن نتیجه اگر $b < a$ به دست می‌آید (چرا؟) .

مثال ۵ . مجموعهٔ I مرکب از تمام نقاطی که فاصله‌شان تا نقطهٔ 4 کوچکتر از 0.1 است‌را بیابید .

حل . واضح است که

$$I = \{x: |x-4| < 0.1\} = \{x: -0.1 < x-4 < 0.1\},$$

درنتیجه ،

$$I = \{x: 4-0.1 < x < 4+0.1\} = \{x: 3.9 < x < 4.1\}.$$

بنابراین ، I بازهٔ باز (3.9, 4.1) است .

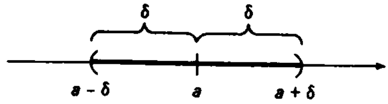
همسایگیها . مثال ۵ را تعمیم داده ، فرض می‌کنیم I مجموعهٔ تمام‌نقاطی باشدکه‌فاصله‌شان تا نقطهٔ ثابت a از عدد مفروض $\delta > 0$ کوچکتر است . (استفاده از δ ، یعنی دلتای کوچک یونانی ، در این محدوده رسم شده است) . در این صورت ،

$$I = \{x: |x-a| < \delta\} = \{x: -\delta < x-a < \delta\},$$

درنتیجه ،

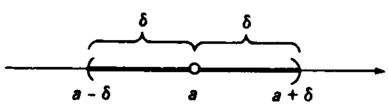
$$I = \{x: a-\delta < x < a+\delta\}.$$

بنابراین ، همانطور که شکل ۱۱ (آ) نشان داده ، I بازهٔ باز $(a-\delta, a+\delta)$ به طول 2δ با نقطهٔ میانی a است . هر بازه ازاین نوع یک **همسایگی** a ، یادقیقتر ، δـ**همسایگی** a ، نام دارد .



یک δـهمسایگی

(آ)



یک δـ همسایگی سفته

(ب)

شکل ۱۱

چون نامساوی $|x-a|<\delta$ معرف δ-همسایگی a است، نامساوی مضاعف

$$0<|x-a|<\delta \tag{۸}$$

همان همسایگی را که یک نقطه اش، یعنی خود نقطهٔ میانی a، مفقود شده تعریف می‌کند [ر.ک. شکل ۱۱ (ب)]. در واقع، (۸) برقرار است اگر و فقط اگر

$a-\delta<x<a$ یا $a<x<a+\delta$ ؛

یعنی، نقاط x صادق در (۸) یک جفت بازهٔ باز

$(a-\delta, a)$ و $(a, a+\delta)$

را می‌سازند. اسم تکنیکی برای مجموعهٔ نقاط تعریف شده با (۸) همسایگی سفتهٔ a است. مثلاً "، 0.01 - همسایگی سفتهٔ نقطهٔ 2 بازهٔ باز (1.99, 2.01) است که خود نقطهٔ 2 از آن مفقود شده، یا معادلاً" جفت‌بازه‌های باز (1.99, 2) و (2, 2.01) می‌باشد. می‌توانستیم (۸) را به شکل

$$0\neq|x-a|<\delta \tag{۸'}$$

بنویسیم، که حذف a را روشنتر نشان می‌دهد، ولی (۸) زیباتر به نظر می‌رسد و به‌صورت متعارف درآمده است.

بازه‌های نامتناهی. بازه‌هایی که تاکنون درنظر گرفته‌ایم *متناهی* یا *کراندار* اند، بدین معنی که طول معینی‌دارند. همچنین، می‌توان بازه‌های *نامتناهی* یا *بی‌کران* درنظر گرفت؛ یعنی، بازه‌هایی که در یک یا هر دو جهت در امتداد خط‌حقیقی " تا ابد می‌روند "؛ و لذا، نمی‌توان به آنها طول نسبت داد. (گرچه می‌توان گفت که این بازه‌ها بی‌نهایت طویل‌اند.) برای توصیف بازه‌های نامتناهی، دوعلامت جدید معرفی می‌کنیم. این علایم عبارتنداز ∞ ، به نام(**به علاوهٔ**) بی‌نهایت، و $-\infty$ ، به نام **منهای *بی‌نهایت***. علایم ∞ و $-\infty$ را **نباید عدد گرفت**، اگر چه می‌توانند در نامساویها ظاهر شوند. حال، با استفاده از ∞ و $-\infty$ ، بازه‌های نامتناهی زیر را معرفی می‌کنیم، که در آنها c عدد ثابتی است:

(یک) مجموعهٔ $\{x: x\geq c\}$ ، که با $[c,\infty)$ یا $c\leq x<\infty$ نموده می‌شود؛

(دو) مجموعهٔ $\{x: x\leq c\}$ ، که با $(-\infty, c]$ یا $-\infty<x\leq c$ نموده می‌شود؛

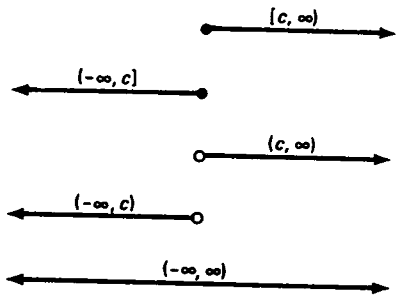
(سه) مجموعهٔ $\{x: x>c\}$ ، که با (c,∞) یا $c<x<\infty$ نموده می‌شود؛

(چهار) مجموعهٔ $\{x: x<c\}$ ، که با $(-\infty, c)$ یا $-\infty<x<c$ نموده می‌شود؛

(پنج) تمام خط‌حقیقی، که با $(-\infty,\infty)$ یا $-\infty<x<\infty$ نموده می‌شود.

بازه‌های (یک) و (دو) را بسته، و بازه‌های (سه)، (چهار)، و (پنج) را باز

می‌گیرند . تعبیر هندسی انواع مختلف بازه‌های نامتناهی در شکل ۱۲ نموده شده است،که در آن نقاط انتهایی جزو بازه‌ها با نقاط توپر ، نقاط انتهایی خارج بازه‌ها با نقاط توخالی،



انواع مختلف بازه‌های نامتناهی

شکل ۱۲

و نقاط انتهایی نامتناهی با سر سهم که اشاره به " بی‌نهایت " دارد نشان داده‌شده‌اند. چون ∞ و $-\infty$ عدد نیستند ، مجاز نیستیم بنویسیم $x = \infty$ یا $x = -\infty$. بنابراین، نوشتن $x \leq \infty$ یا $-\infty \leq x$ ، یا گذاردن کروشه کنار علامت ∞ یا $-\infty$ درست نیست .

مثال ۶. بنابر مثال ۳، صفحه ۱۳، x در نامساوی درجهٔ دوم $x^2 - x - 6 > 0$ صدق می‌کند اگرو فقط اگر x متعلق به یکی از بازه‌های باز نامتناهی $(3, \infty)$ یا $(-\infty, -2)$ باشد .

تبصره. ما هم‌اکنون انواع مختلف بازه‌ها ، متناهی و نامتناهی ، را معرفی کردیم . هریک‌از از این بازه‌ها " همبند " است به این معنی که هرگاه شامل دو نقطهٔ متمایز x و y باشد، آنگاه شامل هر نقطه بین x و y است . به عکس، هر مجموعهٔ همبند از نقاط برخط‌حقیقی باید یک بازه از انواع فوق باشد . این امر شهودا" واضح است ، اما اثبات دقیق آن‌نیاز به فوت و فنهایی دارد که در اینجا داده نمی‌شود .

مسائل

قدرمطلقهای زیر را حساب کنید .

۱ . $|6 - 15|$

۲ . $|1 - \sqrt{3}|$

۳ . $|\sqrt{2} - 1|$

۴ . $|-|-3||$

۵. $||-1|-|-2||$

۶. $|1-(\frac{1}{2})^{-2}|$

۷. $|\pi-\sqrt{11}|$

۸. $|(-1)^n|$ (n عدد صحیح دلخواهی است)

فرض کنید $|a-10|<2$ و $|b-6|<1$. در باب اندازهٔ کمیات زیر چه می‌توان گفت؟

۹. $a+b$

۱۰. $a-b$

۱۱. a^2-b^2

۱۲. a^2+ab+1

عبارات زیر را برحسب قدرمطلق بیان کنید.

۱۳. x به مبداء تا نقطهٔ -2 نزدیکتر است.

۱۴. فاصلهٔ بین x و نقطهٔ 2 از π متجاوز نیست.

۱۵. فاصلهٔ x تا نقطهٔ 1 دوبرابر فاصله‌اش تا نقطهٔ -1 است.

جمیع x هایی را بیابید که

۱۶. از نقاط -3 و 7 به یک فاصله‌اند.

۱۷. فاصله‌شان تا نقطهٔ -1 یکچهارم فاصله‌شان تا نقطهٔ 4 است.

۱۸. در فاصلهٔ 2 تا نقطهٔ -1 قرار دارند.

۱۹. به نقطهٔ 1 نزدیکترند تا مبداء.

۲۰. از نقطهٔ 2 دورترند تا از نقطهٔ -3.

۲۱. مجموع فواصلشان تا نقاط 1 و -1 کوچکتر از 4 است.

جمیع x هایی را بیابید که در معادلهٔ داده شده صدق می‌کنند.

۲۲. $|1-x|=2$

۲۳. $|x-1|=|3-x|$

۲۴. $|x+1|=|3+x|$

۲۵. $|2x|=|x-2|$

۲۶. $|x+2|+|x-1|=2$

۲۷. $|x+2|+|x-1|=4$

۲۸. چند عدد صحیح مثبت قدرمطلق کوچکتر از 5 دارند؟ چند عدد صحیح از این خاصیت برخوردارند؟

جمیع x هایی را بیابید که در نامساوی داده شده صدق می‌کنند.

۲۹. $|x+1|\geq 2$

۳۰. $|2x+1|<|3x+4|$

۳۱. $|x^2-1|>3$

۳۲. $|x|-|x-1|\geq 0$

۳۳. $|x|-|x-1|<1$

۳۴. $|x|-|x-1|>1$

۳۵. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>0$

۳۶. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$

۳۷. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\geq 1$

۳۸. برهان دیگری از نامساوی (۵) بیاورید، از این شروع کنید که

$$|a-b|^2=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

نقطهٔ میانی هر بازه با نقاط انتهایی داده شده را بیابید.

۳۹. $3, 6$

۴۰. $-1, 8$

۴۱. $-7, -1$

۴۲. $-\sqrt{2}, \sqrt[4]{4}$

بازه‌های زیر را به طریقی دیگر بنویسید.

۴۳. $-2 < x \leq 3$

۴۴. $(2, \pi)$

۴۵. $[-1, 1)$

۴۶. $-\infty < x < 3$

۴۷. $5 < x < 13$

۴۸. $2 \leq x < \infty$

۴۹. $(3, \infty)$

۵۰. $(-\infty, -1]$

۵۱. $-4 \leq x < -2$

۵۲. $(-3, 4]$

۵۳. $[-2, -1]$

۵۴. $3 \leq x \leq 9$

۵۵. $-\infty < x \leq -5$

۵۶. $-1 < x < \infty$

۵۷. $(-\infty, 5)$

۵۸. $[-\pi, \infty)$

۵۹. $|x-3| \leq 2$

۶۰. $|x| < \sqrt{2}$

۶۱. $|x+2| < 1$

۶۲. $|x-\frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}$

همسایگیهای زیر را به کمک قدرمطلق بنویسید.

۶۳. 2 ـ همسایگی 1.

۶۴. $\sqrt{3}$ـ همسایگی -2.

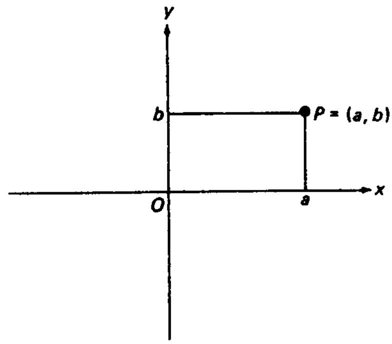
۶۵. 1 ـ همسایگی سفتهٔ -1.

۶۶. $\frac{1}{2}$ ـ همسایگی سفتهٔ π.

۴.۰ مختصات در صفحه

تا بحال ما فقط مختصات روی یک خط را داشته‌ایم. برای معرفی مختصات در صفحه (مثلاً، همین صفحهٔ کاغذ)، دو خط جهتدار می‌کشیم که در زاویهٔ قائمه متقاطع باشند، و آنها را خطوط اعداد تصور می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خطوط مبدأ مشترک O است که فواصل از آن در امتداد دو خط با یک واحد طول سنجیده می‌شوند. دو خط **محورهای مختصات** نام دارند. یک خط، به نام محور x، معمولاً افقی و به طرف راست، و دیگری، به‌نام محور y، معمولاً قائم و به بالا، مثل شکل ۱۳، رسم می‌گردند. صفحهٔ معین شده به‌وسیلهٔ

محورهای x و y صفحهٔ xy نام دارد.



شکل ۱۳

جفتهای مرتب و مختصات قائم. حال فرض‌کنیم (a, b) جفت مرتبی از اعداد حقیقی باشد، که در آن a اول می‌آید و b دوم[1]. عنصر اول a از جفت (a, b) را به عنوان نقطه‌ای از محور x و عنصر دوم b را به عنوان نقطه‌ای از محور y رسم کرده، عمودی در a برمحور x و عمودی در b بر محور y می‌کشیم. همانند شکل ۱۳، این عمودها در نقطهٔ P متقاطعند، که آن را نمایش جفت مرتب (a, b) می‌گیریم. گوییم نقطهٔ P دارای **مختصات (قائم)** a و b است؛ به‌طور مشخص، مختص x آن a ومختص y آن b است. با معکوس کردن این ساختن، یعنی با رسم عمودهایی از P بر محورهای مختصات، می‌توان مختصات و درنتیجه جفت مرتب نظیر به نقطهٔ P، را یافت.

لذا، نظیر هر جفت مرتب نقطهٔ منحصر به فردی در صفحه وجود دارد؛ و به‌عکس، نظیر هر نقطه در صفحه جفت مرتب منحصر به فردی موجود است. به خاطر این تناظر یک به یک، مابین جفتهای مرتب و نقاط نمایش آنها تمایز کمی می‌گذاریم یا اصلاً تمایزی قایل نمی‌شویم. بخصوص، $P = (a, b)$ یعنی P نقطه‌ای است که مختص x آن a و مختص y آن b است. (بعضی از مؤلفان برای این نقطه می‌نویسند $P(a, b)$.) توجه کنید که مبداء O نقطهٔ $(0, 0)$ است. البته، تساوی دو جفت مرتب (a, b) و (c, d) یعنی این دو جفت دارای یک عنصراول و یک عنصردومند؛ یعنی، $a = c$ و $b = d$. مثلاً $(\sqrt{4}, 1) = (2, 1)$، ولی $(2, \sqrt{3}) \neq (2, 1)$.

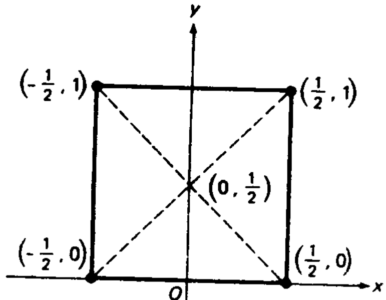
---

[1]. نماد دو پرانتزی هم برای جفتهای مرتب به کار می‌رود هم برای بازه‌های باز، لیکن زمینهٔ بحث همواره از خلط این دو مفهوم جلوگیری خواهد کرد.

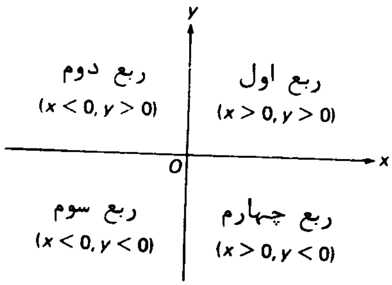
ما هم‌اکنون یک **دستگاه مختصات قائم** در صفحه برپا کردیم . به‌طور کلی ، محورها را می‌توان با حروفی غیراز x و y برچسب زد ، و واحدهای سنجش در امتداد دو محورممکن است متفاوت باشند . مثلا" ، در هواشناسی می‌توان محور افقی را با t برای زمان ، که با ثانیه سنجیده می‌شود ،و محور قائم را با p برای فشارهوا ،که با میلی بار سنجیده‌می‌شود ، برچسب زد . منظور از *طول* یک نقطه یعنی مختص آن در امتداد محور افقی ، و منظور از عرض یعنی مختص‌آن در امتداد محور قائم . این اصطلاحات مفیدند ، زیرا مشـکل کمبود اسم برای علامات به‌کار رفته برای مختصات را برطرف می‌کنند . حال ، با این ملاحظات ، به صفحهٔ xy باز می‌گردیم ، که در آن طول x و عرض y بوده ، و واحدهای سنجش در امتداد دو محور یکی هستند .

مثال ۱ . یک ضلع مربعی در امتداد محور x بوده و اقطارش در نقطهٔ $(0, \frac{1}{2})$ متقاطعند . رئوس مربع کجا هستند ؟

حل . جواب از شکل ۱۴ واضح است . توجه کنید که طول ضلع مربع ۱ است .



شکل ۱۴



چهار ربع صفحهٔ xy

شکل ۱۵

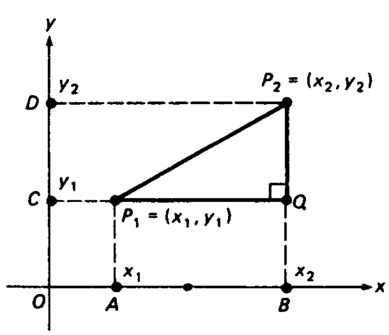
نقطهٔ (x, y) بر محور x واقع است اگر و فقط اگر $y = 0$ ، و بر محور y قرار دارد اگر و فقط اگر $x = 0$. محور مثبت x مشتمل است بر نقاط $(x, 0)$ با $x > 0$ ، و محور منفی x مشتمل است بر نقاط با $x < 0$. به همین نحو، محور مثبت y مرکب است از نقاط $(0, y)$ با $y > 0$ ، و محور منفی y مرکب است از نقاط با $y < 0$. همانطور که در شکل ۱۵ نموده شده، محورهای مختصات صفحهٔ xy را به چهار قسمت، به نام ربع، تقسیم می‌کنند. ربع اول مرکب است از تمام نقاط (x, y) که در آنها $x > 0, y > 0$ ، و سه ربع دیگر با شرایط داده شده در شکل بر x و y تعریف می‌شوند.

فرمول فاصله. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ P_1 و P_2 در صفحه با همان نماد $|P_1P_2|$ برای نقاط بر خط نموده می‌شود. قضیهٔ زیر طرز محاسبهٔ این فاصله را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۶ (فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحه). *فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ در صفحه با فرمول زیر داده می‌شود:*

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (1)$$

برهان. با رسم عمودهایی از P_1 و P_2 بر محورهای x و y ، درمی‌یابیم که P_1P_2 وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ P_1QP_2 نموده شده در شکل ۱۶ است، که در آن



شکل ۱۶

Q نقطهٔ (x_2, y_1) است، واضح است که $|P_1Q| = |AB|$ و $|QP_2| = |CD|$ ، که در آنها A و B به مختصات x_1 و x_2 به صورت نقاطی از محور x در نظر گرفته شده‌اند، درحالی که C و D به مختصات y_1 و y_2 اند که به صورت نقاطی از محور y در نظر گرفته شده‌اند. لذا، طبق قضیهٔ فیثاغورس و فرمول فاصلهٔ بین دو نقطه بر خط (ر.ک. صفحهٔ

۲۴) ، داریم

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2.$$

یا ، معادلاً ،

$$|P_1P_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \qquad (۲)$$

با جذر گرفتن از طرفین (۲) ، فرمول مطلوب (۱) به دست می‌آید .

شکل ۱۶ با فرض $x_1 < x_2$ و $y_1 < y_2$ رسم شده است ، اما به آسانی دیده می‌شود که ، با عکس کردن جهت یکی از این دو نامساوی (یا هر دو) ، همان فرمول فاصلهٔ (۱) به دست می‌آید .

مثال ۲ . فاصلهٔ بین نقاط $P_1 = (1, 7)$ و $P_2 = (13, 2)$ را بیابید .

حل . بنابر (۱) ،

$$|P_1P_2| = \sqrt{(1-13)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$$

مثال ۳ . آیا مثلث ABC به رأسهای $A = (-1, -4)$ ، $B = (2, -1)$ و $C = (-2, 3)$ قائم الزاویه است ؟

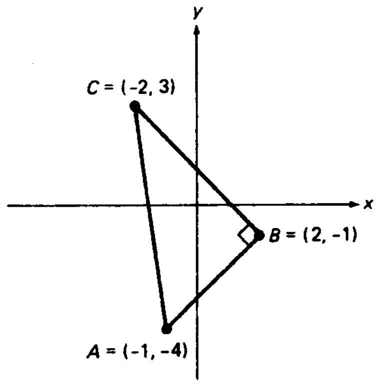
حل . با استفاده از فرمول (۲) ، مجذور طول اضلاع ABC را حساب می‌کنیم ، به دست می‌آوریم

$$|AB|^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 18, \qquad |BC|^2 = 4^2 + (-4)^2 = 32,$$
$$|AC|^2 = 1^2 + (-7)^2 = 50.$$

لذا ، طول اضلاع ABC در فرمول فیثاغورس

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

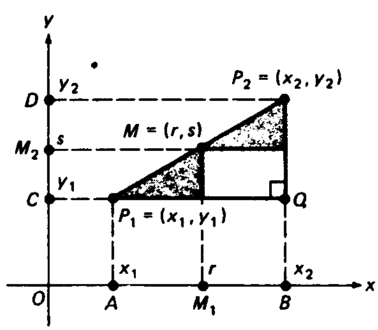
صدق می‌کنند . بنابراین ، ABC یک مثلث قائم الزاویه است ، که ضلع AC وتر آن می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۷) . در اینجا عملاً از عکس قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم .



شکل ۱۷

مثال ۴. نقطهٔ میانی M پاره‌خط P_1P_2 و اصل بین نقاط $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ را بیابید.

حل. با امتحان شکل ۱۸، که تعدیلی از شکل ۱۶ است، می‌بینیم



M نقطهٔ میانی پاره خط P_1P_2 است.

شکل ۱۸

که مثلثهای قائم سایه‌دار همنهشت‌اند (چرا؟). بنابراین، M_1 و M_2، یعنی پای عمودهای وارد از M به محورهای x و y، نقاط میانی AB و CD اند. مثلاً، اگر $M = (r, s)$، بنابر مثال ۴، صفحهٔ ۲۷،

$$r = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad s = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

و فرمول *نقطهٔ میانی* را خواهیم داشت:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

نمودار معادلات و نامعادلات. منظور از *نمودار* یک معادله یا نامعادله از دو متغیر x و y یعنی مجموعهٔ نقاطی چون (x, y) در صفحهٔ xy که مختصاتش در معادله یا نامعادله‌صدق می‌کنند. مثلاً، نمودار معادلهٔ

$$xy = 0$$

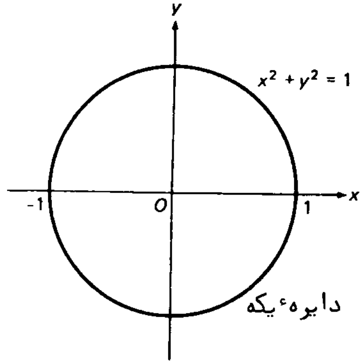
از دو محور مختصات تشکیل شده است، زیرا $xy = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$ یا $y = 0$ (یا هر دو). یکی از متغیرهای x و y ممکن است غایب باشد. مثلاً، نمودار $x = a$ خط قائم ماربر نقطهٔ $(a, 0)$ است، حال آنکه نمودار $y = b$ خط افقی ماربر نقطهٔ $(0, b)$ می‌باشد.

مثال ۵. نمودار معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (۳)$$

را رسم کنید.

حل. چون $x^2 + y^2$ مربع فاصلهٔ بین‌نقطهٔ (x, y) ومبداء $O = (0, 0)$ است، نقطهٔ (x, y) متعلق به نمودار (۳) است اگر و فقط اگر فاصلهٔ بین (x, y) و O مساوی 1 باشد. لذا، نمودار معادلهٔ (۳) *دایرهٔ یکه* است؛ یعنی، دایره‌ای به شعاع 1 و به مرکز O (ر. ک. شکل ۱۹).



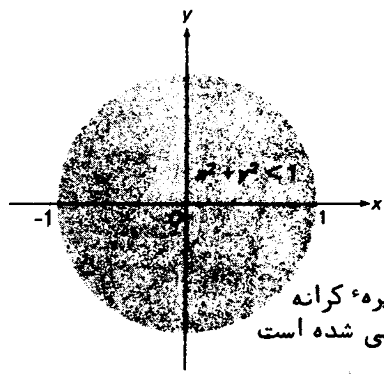
شکل ۱۹

مثال ۶. نمودار نامعادلهٔ

$$x^2 + y^2 < 1 \qquad (۴)$$

را رسم کنید.

حل. بنا بر (۴)، مربع فاصلهٔ بین‌نقطهٔ (x, y) و مبداء O کوچکتراز 1 است؛ ودرنتیجه، همین امر برای خود فاصله درست است. لذا، نمودار (۴) ناحیهٔ *داخل* دایرهٔ یکه است (ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۲۰).



شکل ۲۰

به همین نحو، نمودار نامعادلهٔ $x^2 + y^2 > 1$ ناحیهٔ *خارج* دایرهٔ یکه است.

دایره‌ها و کامل کردن مربع. با تعمیم مثال ۵، درمی‌یابیم که مختصات نقطهٔ (x, y) در معادلهٔ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad (r > 0) \qquad (۵)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر مربع فاصلهٔ بین (x, y) و نقطهٔ ثابت (a, b) مساوی r^2 باشد، یا معادلا" اگر و فقط اگر فاصلهٔ بین (x, y) و (a, b) مساوی r باشد. لذا، مختصات (x, y) در (۵) صدق می‌کننداگر و فقط اگر (x, y) بر دایره به شعاع r و مرکز (a, b) واقع باشد. توجه کنید که اگر $a = b = 0$ و $r = 1$ انتخاب شوند رابطهٔ (۵) به معادلهٔ (۳) دایرهٔ یکه تحویل می‌شود.

حال فرض کنیم معادله‌ای به شکل

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (۶)$$

داده شده باشد، که در آن A ، B ، و C ثابت (اعدادی ثابت) می‌باشند. آیا این معادلهٔ یک دایره است؟ برای جواب دادن به این سئوال، سعی می‌کنیم (۶) را به شکلی شبیه (۵) برگردانیم. ابتدا در هر یک از عبارات $x^2 + Ax$ و $y^2 + By$ *مربع را کامل* می‌کنیم؛ یعنی، می‌نویسیم

$$x^2 + Ax = \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4},\ y^2 + By = \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4}.$$

سپس، با گذاردن این عبارات در معادلهٔ (۶)، معادلهٔ معادل زیر را به دست‌می‌آوریم

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = D, \qquad (۶')$$

که در آن

$$D = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C.$$

حال همه چیز به علامت کمیت D وابسته است. اگر $D \geq 0$ ، نمودار (۶')، و درنتیجه نمودار (۶)، دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{D}$ و مرکز $(-A/2, -B/2)$ ، که اگر $D = 0$ ، دایره به نقطهٔ $(-A/2, -B/2)$ " تباه می‌شود "، زیرا در این صورت شعاع دایره صفر است. از آن سو، اگر $D < 0$ ، نقطه‌ای مانند (x, y) که مختصاتش در معادلهٔ (۶) صدق کنند وجود ندارد، زیرا طرف چپ معادلهٔ معادل (۶') همواره نامنفی است. دراین حالت گوییم (۶) نمودار ندارد، یا به‌طور صوریتر، نمودار (۶) مجموعهٔ تهی است.

مثال ۷. نمودار معادلهٔ

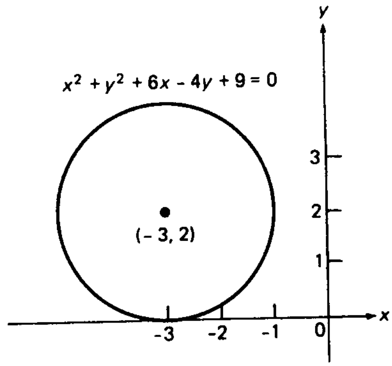
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \qquad (۷)$$

را رسم کنید.

حل. این معادله به شکل (۶) یا (۶') است، که در آن $A = 6$ ، $B = -4$ ، $C = 9$ ، و

$$D = \frac{6^2}{4} + \frac{(-4)^2}{4} - 9 = 9 + 4 - 9 = 4 > 0.$$

از اینرو، نمودار (۷) دایره‌ای است به‌شعاع $\sqrt{D} = 2$ به مرکز $(-A/2, -B/2) = (-3, 2)$. توجه کنید که، همانطور که شکل ۲۱ نشان داده، محور x بر دایره در نقطهٔ $(-3, 0)$ مماس است. راه بهتر حل این مسئله آن است که، بدون استفاده از معادلات کلی (۶) و



شکل ۲۱

(۶') ، *مستقیما* " در (۷) مربعها را کامل کنیم . در واقع ، با گذاردن

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9, \qquad y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$$

در (۷) ، به‌دست می‌آوریم

$$(x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 9 = 0,$$

یا ، معادلا " ،

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4, \tag{۸}$$

که فورا " به عنوان یک معادلهٔ دایره به شعاع 2 و مرکز $(-3, 2)$ شناخته می‌شود . ازاینرو ، معادلهٔ اصلی (۷) نیز این دایره را به عنوان نمودار دارد .

توجه کنید که در سطر دوم از آخر در مثال۷ می‌گوییم "یک "معادله تا معادله . علتش آن است که بی‌نهایت معادله با یک نمودار وجود دارند . در واقع ، اگر طرفین یک معادله را در عددی ناصفر ضرب کنیم ، اگر جملات یک معادله را از یک طرف به طرف‌دیگر ببریم ، یا اگر اعمالی جبری (نظیر محاسبهٔ مربعها) صریحا" انجام شوند ، معادلهٔ جدیدهمان نمودار معادلهٔ قدیم را دارد . مثلا " ، معادلات

$$\frac{1}{4}(x+3)^2 + \frac{1}{4}(y-2)^2 = 1$$

و

$$(x+3)^2 = 4 - (y-2)^2$$

همان نمودار (۸) را دارند ،و همین طور معادلهٔ اصلی (۷) . لذا ، هر یک از این معادلات یک معادلهٔ دایره به شعاع 2 و مرکز $(-3, 2)$ است .

مسائل

۱. نقاط $A = (2, 0)$ ، $B = (0, 3)$ ، $C = (-2, 0)$ ، $D = (-2, 2)$ ، $E = (0, -1)$ ، $F = (2, 2)$ را بر یک کاغذ گراف معمولی بکشید . سپس A را به B به C به A و نیز D را به E به F به D وصل کنید . شکل حاصل چیست ؟

۲. فرض کنید شکل مسئلهٔ قبل به‌قدر یک واحد به راست و دو واحد به بالا انتقال‌یافته باشد . در این صورت، A, B, C, D, E, F به نقاط جدید A', B', C', D', E', F' می‌روند. این نقاط جدید چه هستند ؟

۳. از نقاط $(2, 0)$ ، $(0, -2)$ ، $(-2, 1)$ ، $(2, -1)$ ، $(-2, 0)$ ، $(0, 2)$ کدامها درربع چهارم قرار دارند ؟

۴. نشان دهید هرگاه نقاط $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ بر یک خط افقی واقع باشند، آنگاه $|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$ ، اما هرگاه بر یک خط قائم واقع باشند ، آنگاه $|P_1P_2| = |y_1 - y_2|$.

فاصلهٔ بین هر جفت نقاط زیر را بیابید .

۵. $(1, 3), (5, 7)$
۶. $(-2, -3), (1, 1)$
۷. $(1, 3), (1, 4)$
۸. $(6, 2), (4, 2)$
۹. $(1, -1), (-1, 1)$
۱۰. $(0, 1), (1, 0)$
۱۱. $(-1, 1), (3, 3)$
۱۲. $(3, 5), (-2, -4)$
۱۳. $(2, -1), (-1, 3)$
۱۴. $(7, 11), (3, 9)$
۱۵. $(\pi, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\pi)$
۱۶. $(2\sqrt{2}, 4), (2, -\sqrt{2})$

آیا مثلث به رئوس داده شده قائم‌الزاویه است ؟

۱۷. $(2, 3), (-3, 3), (1, 1)$
۱۸. $(7, -4), (5, -3), (7, 1)$
۱۹. $(3, 1), (2, 0), (0, 1)$
۲۰. $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (4, 2), (-1, 2)$

نقطهٔ میانی پاره‌خط‌واصل بین هر جفت نقطه را بیابید .

۲۱. $(-1, 3), (11, 5)$
۲۲. $(3, -2), (-4, 3)$
۲۳. $(100, -50), (-100, 50)$
۲۴. $(-2, -5), (18, 3)$

۲۵. نقاط $A = (4, 0), B = (3, 4), C = (-1, 3), D = (0, -1)$ را رسم کنید . نشان‌دهیدکه

شکل $ABCD$ مربع است. طول ضلع مربع چقدر است؟

۲۶. نقاط میانی اضلاع مربع مسئلهٔ قبل را بیابید. معادلهٔ دایره به شعاع و مرکز داده شده را بیابید.

۲۷. $1, (-1, 1)$

۲۸. $\sqrt{2}, (0, 1)$

۲۹. $3, (4, -5)$

۳۰. $\frac{3}{4}, (-1, 0)$

نمودار معادلهٔ داده شده را توصیف کنید.

۳۱. $(x+2)^2 + y^2 = 64$

۳۲. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$

۳۳. $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 0$

۳۴. $x^2 + (y-5)^2 = 5$

۳۵. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

۳۶. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که

۳۷. $(3, 2)$ و $(-1, 6)$ دو انتهای یک قطرش باشند.

۳۸. به‌شعاع 1 بوده و محورهای مختصات مثبت بر آن مماس باشند.

۳۹. از نقاط $(1, 1), (2, 2), (3, 1)$ بگذرد.

معین کنید نقطهٔ $(1, -2)$ داخل، خارج، یا روی نمودار معادلهٔ داده شده است.

۴۰. $x^2 + y^2 = 1$

۴۱. $x^2 + y^2 = 5$

۴۲. $x^2 + y^2 = 9$

۴۳. $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$

۴۴. $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$

ناحیه‌ای از صفحهٔ xy را که با جفت نامساویهای زیر معین شده رسم کنید.

۴۵. $x \le 2, y \le -1$

۴۶. $|x| \ge 1, |y| \ge 2$

۴۷. $xy > 0, |y| < 2$

۴۸. $xy < 0, x^2 + y^2 < 4$

۴۹. با کامل کردن مربع، نشان دهید معادلهٔ درجهٔ دو $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ به ازای $b^2 > 4ac$ دارای دو ریشهٔ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

است، به ازای $b^2 = 4ac$ فقط ریشهٔ $x = -b/2a$ را دارد، و به ازای $b^2 < 4ac$ ریشه (حقیقی) ندارد.

۵.۰ خطوط مستقیم و معادلات آنها

شیب خط. فرض کنیم L یک خط مستقیم *مایل* در صفحهٔ xy بوده، و $P_1=(x_1, y_1)$ و $P_2=(x_2, y_2)$ دو نقطهٔ متمایز از L باشند. منظور از *شیب* L یعنی نسبت

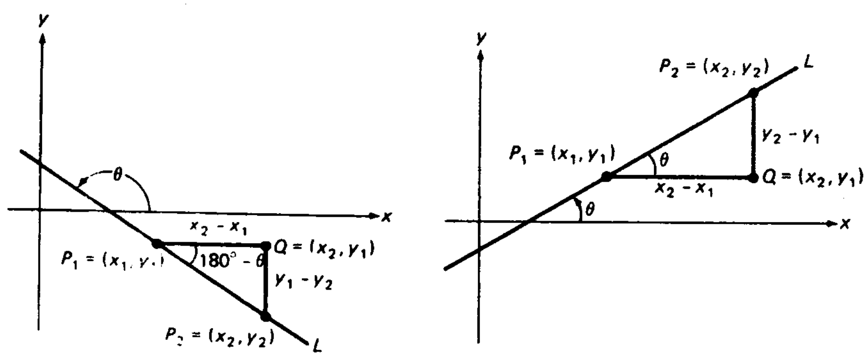
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{1}$$

فرض مایل بودن L تضمین می‌کند که $x_1 \neq x_2$؛ درنتیجه، مخرج این نسبت ناصفر بوده و شیب m تعریف شده است. شیب یک خط قائم تعریف نشده است، زیرا در چنین خط $x_1=x_2$.

برای تعبیر هندسی شیب، فرض می‌کنیم نقطهٔ P_1، وقتی از چپ به راست می‌رویم، پیش از نقطهٔ P_2 بر خط L است. در واقع، این فرض خللی به کلیت وارد نمی‌کند، زیرا تعویض برچسبهای 1 و 2 در نقاط P_1 و P_2 و مختصات آنها مقدار m داده شده بافرمول (۱) را تغییر نمی‌دهد. فرض کنیم Q نقطهٔ برخورد خط مار بر P_1 موازی محور x و خط مار بر P_2 موازی محور y باشد؛ درنتیجه، P_1QP_2 مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع P_1Q و P_2Q است. پس شیب مساوی است با

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{|P_2Q|}{|P_1Q|}>0 \tag{2}$$

اگر، مثل شکل ۲۲ (آ)، خط L از چپ به راست بالا رود. کمیت $|P_2Q|/|P_1Q|$ نسبت طول پاره‌خط قائم P_2Q به طول پاره‌خط افقی P_1Q است. در مهندسی راه و ساختمان، این



خط با شیب منفی (ب)

خط با شیب مثبت (آ)

شکل ۲۲

را نسبت پرش به دوش می‌نامند، و میزان صعود یک‌جادهٔ کوهستانی را می‌سنجند. هرگاه خط L از چپ به راست سقوط کند، آنگاه، همانند شکل ۲۲ (ب)، به جای (۲) خواهیم داشت

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -\frac{|P_2Q|}{|P_1Q|} < 0, \qquad (2')$$

از دید مهندسی، یک جاده با شیب منفی m به پای تپه می‌رود، و $|m|$ میزان پایین رفتن آن را می‌سنجد.

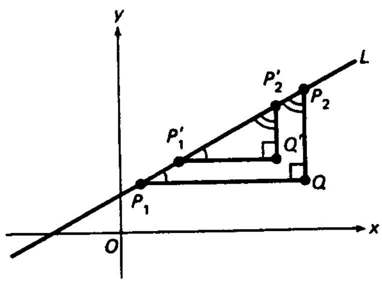
به بیان دیگر، وقتی یک نقطه در امتداد خط L از P_1 به P_2 می‌رود، مختص x آن از x_1 به x_2 تغییر می‌کند، درحالی که مختص y ش از y_1 به y_2 تغییر خواهد کرد. لذا،

$$\text{شیب} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{تغییر در } y}{\text{تغییر در } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

که در نوشتن $\Delta y/\Delta x$ نماد نمو که در فصل ۲ معرفی می‌شود پیش‌بینی شده است (Δ دلتای بزرگ یونانی است).

باید توجه کرد که شیب خط L به نقاط P_1 و P_2 که در محاسبهٔ شیب به کار رفتند بستگی ندارد. این صرفاً بدان خاطر است که هر دو مثلث قائم‌الزاویه که وترهایشان در امتداد خط L بوده و اضلاع دیگرشان موازی محورهای مختصات باشند متشابهند؛ درنتیجه، نسبتهای اضلاع نظیرشان مساوی می‌باشند. به عنوان مثال، در شکل ۲۳ شیب برابراست با

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{|P_2Q|}{|P_1Q|}$$



شکل ۲۳

اگر با استفاده از نقاط $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), Q = (x_2, y_1)$ حساب شود، و

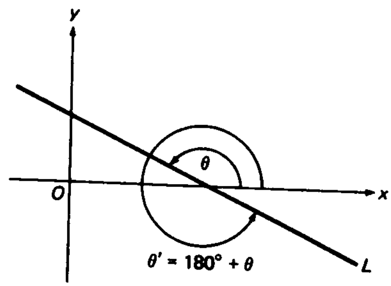
$$m' = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{|P_2'Q'|}{|P_1'Q'|}$$

اگر با استفاده از نقاط $P'_1=(x'_1, y'_1), P'_2=(x'_2, y'_2), Q'=(x'_2, y'_1)$ محاسبه گردد. اما، بنابر تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ P_1QP_2 و $P'_1Q'P'_2$ ،

$$\frac{|P_2Q|}{|P_1Q|}=\frac{|P'_2Q'|}{|P'_1Q'|}$$

درنتیجه، $m=m'$.

میل خط. منظور از *زاویهٔ میل*، یا فقط *میل*، خط مستقیم L درصفحهٔ xy یعنی کوچکترین زاویهٔ θ بین محور مثبت x و L ، که از محور x به L در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود (θ تتای کوچک یونانی است) . هر خط موازی محور x میل صفر دارد. از شکل ۲۴ واضح است که شیب θ ی هر خط مستقیم باید در شرط $0° \le \theta < 180°$ صدق



میل L مساوی θ است نه θ'

شکل ۲۴

کند. به عنوان مثال، میل خط L در شکل مساوی $150°$ است نه $330°$ یا $-30°$.

به کمک قدری مثلثات[1]، به آسانی فرمولی ثابت می‌شود که شیب m خط L را به میلش θ مربوط می‌کند. فرض کنیم L با رفتن از چپ به راست بالا می‌رود. دراین‌صورت، مثل شکل ۲۲ (آ) ،

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\theta,$$

---

۱. مثلثات در بخش ۳.۱ مرور خواهد شد. *ما فعلاً* فقط به تعریف *تانژانت* و فرمولهای $\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$ و $\tan(90°+\theta)=-1/\tan\theta$ ، که در مثال ۳، صفحهٔ ۹۶، ثابت شده‌اند، نیاز داریم.

که در آن $\tan\theta$ *تانژانت* زاویهٔ θ است؛ یعنی، طول ضلع مقابل θ در مثلث قائم P_1QP_2 بخش‌بر طول ضلع مجاور به θ. اگر میل θ بین $90°$ و $180°$ واقع باشد، خط L با رفتن از چپ به راست پایین می‌آید، اما فرمول

$$m = \tan\theta \qquad (۳)$$

هنوز به قوت خود باقی است. در واقع، در این حالت، مثل شکل ۲۲ (ب)،

$$m = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -\tan(180° - \theta),$$

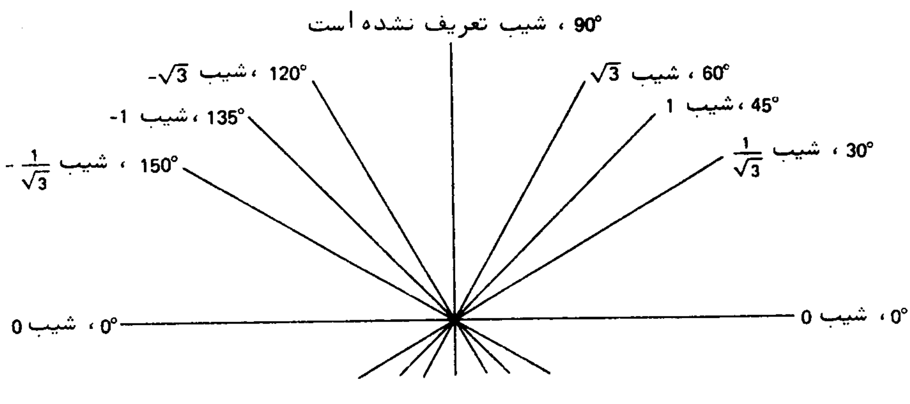
که در آن، بنابر فرمول آشنایی از مثلثات،

$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$$

درنتیجه، مثل قبل،

$$m = -\tan(180° - \theta) = \tan\theta,$$

شکل ۲۵ خطوط مختلف، همراه با میلها و شیبهای آنها را که با فرمول (۳) به هم مربوط شده‌اند، را نشان می‌دهد. توجه کنید که یک خط قائم، با وجود آنکه شیبش تعریف نشده است، دارای میل $90°$ است.



مقایسهٔ میلها و شیبها

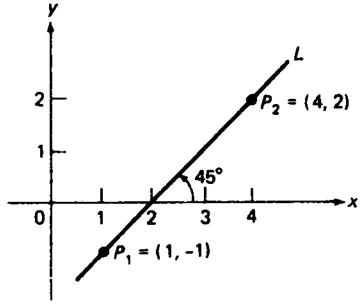
شکل ۲۵

مثال ۱. شیب و میل خط L ماربر نقاط $P_1 = (1, -1)$ و $P_2 = (4, 2)$ را بیابید.

حل. در اینجا

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1.$$

لذا ، طبق (۳) و تعریف میل ، θ کوچکترین زاویهٔ مثبتی است که تانژانت آن مساوی 1 است؛ یعنی ، $45°$ (ر.ک. شکل ۲۶) .



شکل ۲۶

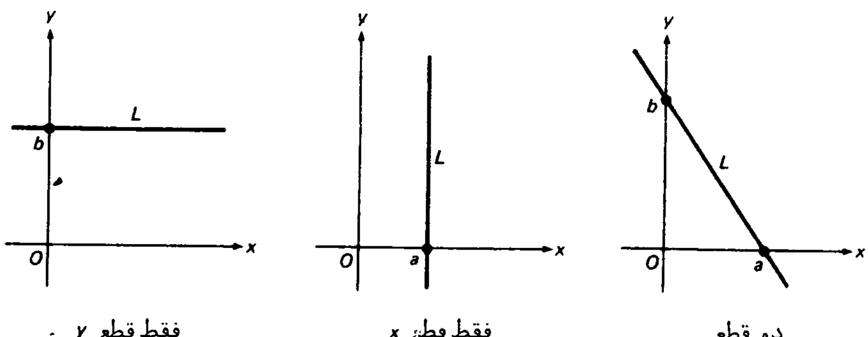
مثال ۲. شیب m خطی را بیابید که میلش $15°$ است .

حل . در اینجا ، تا پنج رقم اعشار ،

$$m = \tan 15° = 0.26795$$

که در آن از جدول تانژانتها کمک گرفته‌ایم یا از یک ماشین حساب استفاده کرده‌ایم .

قطعهای خط . باتوجه به شکل ۲۷ (آ) ، می‌بینیم که اگر خط مستقیم L *مایل* باشد ، یعنی نه افقی باشد نه قائم ، L محور x را در نقطهٔ $(a, 0)$ ومحور y را در نقطهٔ $(0, b)$ قطع می‌کند . ما (عدد) a را قطع x ، L و b را قطع y ، L می‌نامیم ، و وقتی از اصطلاح



فقط قطع y . (پ)   فقط قطع x (ب)   دو قطع (آ)

شکل ۲۷

قطع استفاده می‌کنیم منظور قطع x یا قطع y است. هر خط غیرمایل فقط یک قطع دارد لذا، اگر L مثل‌شکل ۲۷ (ب) قائم باشد، L دارای قطع x، a است ولی قطع y ندارد، درحالی که اگر L مثل شکل ۲۷ (پ) افقی باشد، L دارای قطع y، b است ولی‌قطع x ندارد. این در مورد محورهای مختصات نیز صادق است؛ یعنی، محور y فقط قطع x (مساوی 0) دارد، و محور x فقط‌قطع y (نیز مساوی 0) خواهد داشت.

قضیهٔ ۷ (معادلات نقطه ــ شیب و شیب ــ قطع خط). *معادلهٔ خط‌ به شیب m و مار بر نقطهٔ داده شدهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ عبارت است از*

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{۴}$$

معادلهٔ خط‌به شیب m و قطع y، b مساوی است با

$$y = mx + b. \tag{۵}$$

برهان. فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطهٔ متغیری از خط‌باشد. در این صورت، اگر $x \neq x_1$، خط دارای شیب $(y - y_1)/(x - x_1)$ است، زیرا از P_1 و P می‌گذرد. از مساوی‌قراردادن این عبارت با شیب m، به دست می‌آوریم

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

که با (۴) معادل است. معادلهٔ (۴) برای مقدار مستثنی شدهٔ $x = x_1$ نیز برقرار است (چرا؟). اگر خط دارای قطع y، b باشد، نقطهٔ $(0, b)$ بر خط‌قرار دارد، و با فرض $x_1 = 0, y_1 = b$، بــه دســت می‌آوریم $y - b = mx$، که معادل (۵) است.

مثال ۳. بنابر (۴)، معادلهٔ خط‌به شیب -2 و ماربر نقطهٔ $(-1, 5)$ عبارت است از

$$y = -2(x + 1) + 5 = -2x + 3.$$

بنابر (۵)، معادلهٔ خط‌ به شیب 9 و قطع y، -7 مساوی است با

$$y = 9x - 7.$$

مثال ۴. معادلهٔ

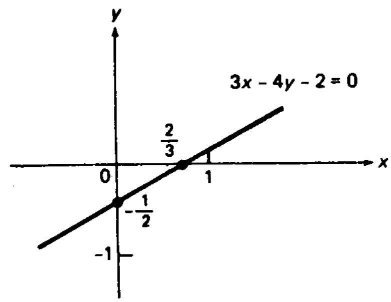
$$3x - 4y - 2 = 0 \tag{۶}$$

را رسم کنید.

حل. معادلهٔ (۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}. \qquad (۶')$$

اما فوراً معلوم می‌شود که (۶') معادلهٔ خطی است به شیب $\frac{3}{4}$ و قطع y ، $-\frac{1}{2}$ (ر. ک. شکل ۲۸). این خط دارای قطع x ، $\frac{2}{3}$ است، که با گذاردن $y = 0$ در (۶) و حل آن نسبت به x معلوم می‌شود.



شکل ۲۸

به‌طورکلی، همانطور که به آسانی ثابت می‌شود، نمودار هر معادله به شکل

$$Ax + By + C = 0, \qquad (۷)$$

که در آن A ، B ، و C ثابت‌اند، خطی مستقیم است؛ و به عکس، هر خط مستقیم نمودار معادله‌ای به این شکل می‌باشد؛ در اینجا البته فرض شده که A و B هر دو صفر نباشند. بنابراین، هر معادله به شکل (۷) را خطی می‌گویند.

قضیهٔ ۸ (معادلات دونقطه‌ای و دوقطعی‌خط). *معادلهٔ خط مار بر دو نقطهٔ* $P_1 = (x_1, y_1)$ *و* $P_2 = (x_2, y_2)$ *عبارت است از*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (۸)$$

اگر $x_1 \neq x_2$. *معادلهٔ خط با قطع* x ، a *و قطع* y ، b *مساوی است با*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (۹)$$

اگر $a \neq 0, b \neq 0$.

برهان. با گذاردن $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ در (۴)، رابطهٔ (۸) به دست می‌آید.

هرگاه خط دارای قطع x ، a و قطع y ، b باشد، آنگاه دو نقطهٔ $(a, 0)$ و $(0, b)$ برخط واقعند. لذا، برای این خط، می‌توان در (۸) اختیار کرد $x_1 = a$ ، $y_1 = 0$ ، و $x_2 = 0$ تا به دست آید

$$y = \frac{b}{-a}(x - a),$$

یا، معادلاً،

$$bx + ay = ab,$$

که، پس از تقسیم بر ab ، به رابطهٔ (۹) تحویل می‌شود.

مثال ۵. بنابر (۸)، معادلهٔ خط مار بر نقاط $(-2, 3)$ و $(4, -1)$ عبارت است از

$$y - 3 = \frac{-1 - 3}{4 - (-2)}(x + 2) = -\frac{2}{3}(x + 2),$$

یا، معادلاً،

$$2x + 3y - 5 = 0$$

که به شکل (۷) است. بنابر (۹)، معادلهٔ خط با قطع x ، -2 و قطع y ، 5 مساوی است با

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1$$

یا، معادلاً،

$$5x - 2y + 10 = 0.$$

حال نظرمان را به جفتهایی از خطوط مستقیم معطوف می‌کنیم.

مثال ۶. نقطهٔ برخورد P دو خط به معادلات

$$x + y - 3 = 0, \qquad x - 2y + 2 = 0 \tag{۱۰}$$

را بیابید.

حل. نقطهٔ P بر هر دو خط است؛ درنتیجه، مختصات P باید در هر دو معادلهٔ (۱۰) صدق کنند. لذا، یافتن P به‌طور جبری معادل حل دستگاه (۱۰) مرکب از دو معادلهٔ خطی با دو مجهول x و y است. برای این کار، دو برابر معادلهٔ اول را به دومی

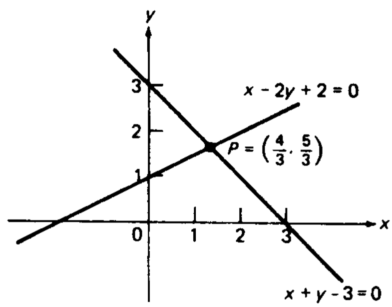
می‌افزاییم :

$$2(x + y - 3) + (x - 2y + 2) = 0.$$

پس جملات شامل y حذف شده ، فقط معادلهٔ

$$3x - 4 = 0$$

با جواب $x = \frac{4}{3}$ باقی می‌ماند . حال $x = \frac{4}{3}$ را در یکی از معادلات اصلی قرار داده ، به دست می‌آوریم $y = \frac{5}{3}$. همانطور که شکل ۲۹ نشان داده ، $P = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ نقطهٔ برخورد دو خط داده شده می‌باشد .



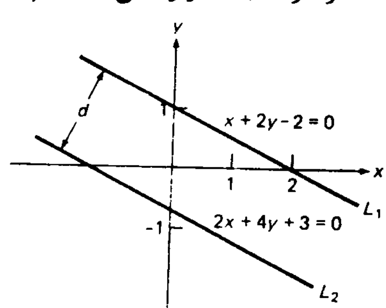
شکل ۲۹

خطوط موازی . واضح است که دو خط در صفحهٔ xy موازیند اگر و فقط اگر دارای یک میل باشند . لذا ، دوخط غیرمایل موازیند اگروفقط اگر یک شیب داشته‌باشند . البته ، جمیع خطوط قائم موازیند .

مثال ۷ . دو خط L_1 و L_2 به معادلات

$$x + 2y - 2 = 0, \qquad 2x + 4y + 3 = 0 \qquad (11)$$

دارای شیب مساوی $-\frac{1}{2}$ اند ؛ و درنتیجه ، موازی می‌باشند (ر.ک. شکل ۳۰). اگر به حل



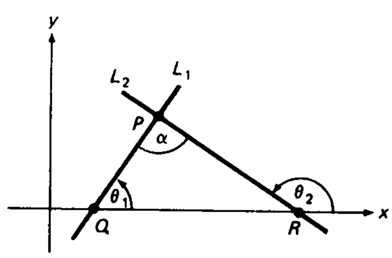
شکل ۳۰

دستگاه معادلات (۱۱) بپردازید ، به سرعت به مشکل برخواهید خورد . در واقع ، تفریق دوبرابر معادلهٔ اول از معادلهٔ دوم نتیجه می‌دهد $0 = 7$ ، که نادرست است . پس نتیجه می‌شود که دستگاه (۱۱) جواب ندارد . به‌طور هندسی ، این امر معادل آن است که خطوط موازی متمایز هم را قطع نمی‌کنند .

خطوط عمود برهم . حال شرطی برای عمود بودن دو خط، یعنی برای آنکه در زاویهٔ قائمه متقاطع باشند ، بیان می‌داریم .

قضیهٔ ۹ (شرط تعامد) . *دو خط مایل برهم عمودند اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب شیبهایشان* -1 *باشد .*

برهان . یک‌خط ، که آن را L_1 می‌نامیم ،دارای شیب مثبت m_1 و زاویهٔ میل θ_1 بین $0°$ و $90°$ است ، و خط دیگر ، که آن را L_2 می‌نامیم ، دارای شیب منفی m_2 و زاویهٔ‌میل θ_2 بین $90°$ و $180°$ است . می‌توان فرض کرد محور x زیر نقطهٔ برخورد P خطوط L_1 و L_2 قرار دارد (در غیراین صورت ،می‌توان محور x جدید را موازی‌محور قدیم گرفت با نقطهٔ برخورد بالای آن ، اما این شیب خطوط‌را تغییر نمی‌دهد) . لذا ، وضعیتی مانند شکل ۳۱ داریم ، که در آن θ_1 و α (آلفای کوچک یونانی) زوایای درونی مثلث PQR و θ_2 یک



شکل ۳۱

زاویهٔ‌بیرونی PQR است . هر زاویهٔ بیرونی یک مثلث مساوی مجموع زوایای درونی غیر مجاور به آن است . بنابراین ، $\theta_2 = \alpha + \theta_1$ ، یا معادلاً $\alpha = \theta_2 - \theta_1$.هرگاه L_1 و L_2 برهم عمود باشند ، آنگاه $\alpha = 90°$ و ، بنابر فرمول آشنایی از مثلثات ،

$$m_2 = \tan\theta_2 = \tan(90° + \theta_1) = -\frac{1}{\tan\theta_1},$$

درنتیجه،

$$m_1m_2 = \tan\theta_1\left(-\frac{1}{\tan\theta_1}\right) = -1.$$

به عکس، هرگاه $m_1m_2 = \tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$ ، آنگاه

$$\tan\theta_2 = -\frac{1}{\tan\theta_1} = \tan(90° + \theta_1),$$

که ایجاب می‌کند که $\theta_2 = 90° + \theta_1$ یا $\alpha = 90°$ ؛ درنتیجه، L_1 و L_2 برهم عمودند.

لذا، دو خط مایل به شیبهای m_1 و m_2 برهم عمودند اگر و فقط اگر

$$m_1m_2 = -1,$$

یعنی، اگروفقط اگر شیب هر خط قرینهٔ متقابل شیب خط دیگر باشد.

تبصره. در اثبات اینکه $\tan\theta_2 = \tan(90°+\theta_1)$ ایجاب می‌کند که $\theta_2 = 90°+\theta_1$ تلویحاً" براین امر تکیه داشتیم که θ_2 و $\theta_1 + 90°$ هر دو در بازهٔ $90° < \theta < 180°$ قرار دارند. این تضمین می‌کند که هر دو تانژانت تعریف‌شده‌اند و تانژانتهای دوزاویهٔ θ_2 و $\theta_1 + 90°$ مساویند فقط اگر خود زوایا مساوی باشند.

مثال ۸. تحقیق کنید که دو خط به معادلات $2x + 5y - 7 = 0$ و $15x - 6y + 4 = 0$ برهم عمودند.

حل. خط اول به شیب $-\frac{2}{5}$ و خط دوم به شیب $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ است. چون $-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2} = -1$ ، خطوط برهم عمودند.

مثال ۹. عمودمنصف پاره‌خط به نقاط انتهایی $P_1 = (-4, 3)$ و $P_2 = (2, -1)$ رابیابید.

حل. نقطهٔ میانی پاره‌خط P_1P_2 نقطهٔ

$$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (-1, 1)$$

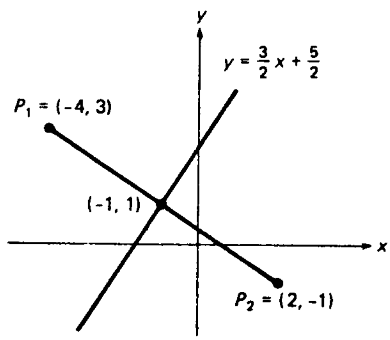
است (ر.ک. مثال ۴، صفحهٔ ۲۷)، و P_1P_2 به شیب

$$\frac{-1-3}{2-(-4)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

است . از اینرو ، عمودمنصف P_1P_2 خط ماربر $(-1, 1)$ به شیب $\frac{3}{2}$ ، مساوی قرینهٔ متقابل $-\frac{2}{3}$ ، می‌باشد . بنابرقضیهٔ ۷ ، معادلهٔ این خط خواهد بود

$$y = \frac{3}{2}(x + 1) + 1 = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

(ر.ک. شکل ۳۲)



شکل ۳۲

فاصله بین یک نقطه و یک خط . بالاخره ، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که مطالب این بخشرا در خود جمع داشته و به خودی خود اهمیت قابل توجهی دارد .

قضیهٔ ۱۰ (فاصلهٔ بین نقطه و خط) . *فاصلهٔ* d *بین نقطهٔ* $P_1 = (x_1, y_1)$ *و خط* L *به معادلهٔ*

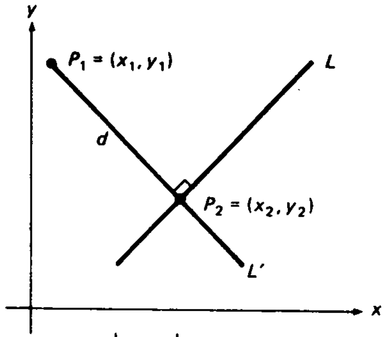
$$Ax + By + C = 0 \tag{۱۲}$$

مساوی است با

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{۱۳}$$

برهان . همانند شکل ۳۳ ، فرض کنیم $P_2 = (x_2, y_2)$ پای عمود مرسوم از P_1 به L باشد. در این صورت ، فاصلهٔ d بین P_1 و L مساوی طول پاره‌خط P_1P_2 تعریف می‌شود . چون شیب L مساوی $-A/B$ است ، با حل (۱۲) نسبت به y می‌توان دید که شیب خط L' ماربر P_1 عمود بر L مساوی B/A ، یعنی قرینهٔ متقابل $-A/B$ ، است . لذا ، معادلهٔ L' خواهد بود

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1).$$



فاصله‌ٔ P_1 تا L مساوی d است .

شکل ۳۳

اما P_2 بر L' قرار دارد . بنابراین ،

$$y_2 - y_1 = \frac{B}{A}(x_2 - x_1),$$

یا،معادلا "،

$$\frac{x_2 - x_1}{A} = \frac{y_2 - y_1}{B}. \qquad (۱۴)$$

اگر نسبت (۱۴) را با q نشان دهیم ، درمی‌یابیم که

$$x_2 - x_1 = Aq, \qquad y_2 - y_1 = Bq;$$

و درنتیجه،

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{A^2q^2 + B^2q^2} = \sqrt{A^2 + B^2}|q|. \qquad (۱۵)$$

اما P_2 نیز بر L واقع است؛ درنتیجه، x_2 و y_2 درمعادله‌ٔ (۱۲) صدق می‌کنند . بنابراین ،

$$Ax_2 + By_2 + C = A(Aq + x_1) + B(Bq + y_1) + C = 0.$$

با حل آن نسبت به q ، به دست می‌آوریم

$$q = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}. \qquad (۱۶)$$

بالاخره، با گذاردن (۱۶) در (۱۵) ، رابطه‌ٔ (۱۳) به دست خواهد آمد .

در اثبات قضیه‌ٔ ۱۰ تلویحا " فرض کرده‌ایم هر دوی A و B ناصفر باشند . لازم است

تحقیق شود که (۱۳) حتی اگر A یا B صفر باشد نیز صحیح است.

مثال ۱۰. فاصلهٔ بین نقطهٔ $(3, 1)$ و خط $3x + 4y - 3 = 0$ را بیابید.

حل. البته، منظور از خط $3x + 4y - 3 = 0$ یعنی خط به معادلهٔ $3x + 4y - 3 = 0$ (این نوع زبان اختصاری مرسوم است). به کمک (۱۳)، درمی‌یابیم که

$$d = \frac{|3(3) + 4(1) - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2.$$

مثال ۱۱. فاصلهٔ d بین خطوط موازی در مثال ۷ را بیابید.

حل. واضح است که d مساوی فاصلهٔ بین L_1 و یک نقطهٔ L_2 است، یا بین L_2 و یک نقطهٔ L_1 می‌باشد (ر.ک. شکل ۳۰). نقطهٔ $(0, 1)$ بر L_1 واقع است؛ و لذا،

$$d = \frac{|2(0) + 4(1) + 3|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{20}}.$$

مسائل

با استفاده از جدول تانژانتها و یک ماشین حساب علمی، شیب خط با میل داده شده را (تا سه رقم اعشار) بیابید.

۱. 20° ✓ ۲. 100° ۳. 50° ✓

۴. 165° ۵. 140° ✓ ۶. 89°

شیب خط مار بر جفت نقاط داده شده را بیابید.

۷. $(2, -3), (4, 2)$ ✓ ۸. $(3, -5), (-3, -2)$

۹. $(3, 8), (\sqrt{2}, 8)$ ✓ ۱۰. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

۱۱. $(\pi, 7), (\pi, -1)$ ✓

میل خط مار بر جفت نقاط داده شده را بیابید.

۱۲. $(2, 4), (4, 6)$ ۱۳. $(2, 3), (2, 5)$ ✓

۱۴. $(2, -4), (4, -6)$ ۱۵. $(0, -1), (-\sqrt{3}, 0)$ ✓

۱۶. $(2, \sqrt{2}), (-2, \sqrt{2})$

۱۷. ✓ نشان دهید که $y = mx$ معادلهٔ خطی است به شیب m مار بر مبداء.

معادلهٔ خطی را بیابید به شیب m که از نقطهٔ دادهٔ شدهٔ P بگذرد.

۱۸. $m = 2, P = (1, 2)$

۱۹. $m = -1, P = (2, -1)$

۲۰. $m = \frac{1}{2}, P = (3, 1)$

۲۱. $m = -2, P = (-1, -2)$

۲۲. $m = 1, P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

معادلهٔ خطی را بیابید به شیب m و قطع y، b.

۲۳. $m = \frac{2}{3}, b = 3$

۲۴. $m = 3, b = 0$

۲۵. $m = 0, b = -2$

۲۶. $m = -\frac{3}{4}, b = 1$

۲۷. $m = -7, b = -3$

۲۸. تحقیق کنید هرگاه خطی قطع x، a و قطع y، b داشته باشد، آنگاه $a = b = 0$ یا a و b هر دو ناصفرند.

شیب m، قطع x، a، و قطع y، b خط داده شده را بیابید.

۲۹. $5x - y + 3 = 0$

۳۰. $2x + 3y - 5 = 0$

۳۱. $5x + 2y + 2 = 0$

۳۲. $3x + 2y = 0$

۳۳. $2y - 4 = 0$

معادلهٔ خط مار بر جفت نقاط داده شده را بیابید.

۳۴. $(2, -5), (3, 2)$

۳۵. $(-\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{4})$

۳۶. $(-3, 1), (7, 8)$

۳۷. $(5, 3), (-1, 6)$

۳۸. $(-3, -7), (-4, -5)$

معادلهٔ خط با قطع x، a و قطع y، b را بیابید.

۳۹. $a = -1, b = 2$

۴۰. $a = -\frac{1}{3}, b = -1$

۴۱. $a = 4, b = -\frac{1}{2}$

۴۲. $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{8}$

۴۳. $a = 5, b = \frac{1}{5}$

اگر میل خطی مقدار دادهٔ شدهٔ زیر باشد، قطع x، a و قطع y، b آن چگونه به هم مربوطند؟

۴۴. $45°$

۴۵. $60°$

۴۶. $135°$

نقطهٔ برخورد جفت خطوط داده شده را بیابید.

۴۷. $5x + y - 2 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0$

۴۸. $3x - 2y + 4 = 0,\ 3x + y - 5 = 0$

۴۹. $2x + 6y - 1 = 0,\ x + 3y + 4 = 0$

۵۰. $-4x + 5y + 1 = 0,\ 3x + 4y + 7 = 0$

معادلهٔ خط مار بر نقطهٔ P موازی خط داده شده را بیابید.

۵۱. $P = (0, 0),\ x + y + 1 = 0$

۵۲. $P = (2, -3),\ 3x - 7y + 3 = 0$

۵۳. $P = (1, 2),\ x + 9y - 11 = 0$

۵۴. $P = (-4, 1),\ 16x - 24y - 7 = 0$

معادلهٔ خط مار بر نقطهٔ P عمود بر خط داده شده را بیابید.

۵۵. $P = (0, 0),\ 3x - y + 2 = 0$

۵۶. $P = (2, 3),\ 4x + 3y + 5 = 0$

۵۷. $P = (-1, 4),\ x - 2y - 7 = 0$

۵۸. $P = (0, 5),\ 2x - 5y + 6 = 0$

معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط واصل بین نقاط داده شده را بیابید.

۵۹. $(2, 1), (1, 2)$

۶۰. $(7, 4), (-3, 5)$

۶۱. $(3, 3), (0, -1)$

۶۲. $(-5, -2), (6, -4)$

فاصلهٔ بین نقطهٔ P و خط داده شده را بیابید.

۶۳. $P = (2, -1),\ 4x + 3y + 10 = 0$

۶۴. $P = (0, 3),\ 5x - 12y - 29 = 0$

۶۵. $P = (-2, 3),\ 2x - y - 3 = 0$

۶۶. $P = (1, -2),\ x - 2y - 5 = 0$

فاصلهٔ بین جفت خطوط موازی داده شده را بیابید.

۶۷. $3x - 4y - 10 = 0,\ 6x - 8y + 5 = 0$

۶۸. $5x - 12y + 26 = 0,\ 5x - 12y - 13 = 0$

۶۹. $4x - 3y + 15 = 0,\ 8x - 6y + 25 = 0$

۷۰. $24x - 10y + 39 = 0,\ 12x - 5y - 26 = 0$

اصطلاحات و مباحث کلیدی

مجموعه‌ها و اعداد، مجموعهٔ تهی

اعداد گویا و گنگ، اعداد حقیقی و خط حقیقی

محاسبات جبری با نامساویها
ماکزیمم و مینیمم یک مجموعه از n عدد
توانها و ریشه‌ها، قوانین نماها
قدرمطلق و نامساوی مثلثی
بازه‌های بسته، باز، و نیمباز؛ بازه‌های نامتناهی
همسایگیها و همسایگیهای سفته
جفتهای مرتب و مختصات قائم
فاصله بین دو نقطه در صفحه
نمودارهای معادلات و نامعادلات
معادلات دوایر و کامل کردن مربع
شیب، میل، و قطعهای خط
معادلات نقطه ــ شیب و شیب ــ قطع خط
شرط تعامد
فاصلهٔ بین نقطه و خط

مسائل تکمیلی

مجموعهٔ تمام عناصر متعلق به دست کم یکی از دو مجموعهٔ A و B ***اجتماع*** A و B نام دارد و با $A \cup B$ نموده‌می‌شود، و مجموعهٔ تمام عناصر متعلق به هر دوی A و B ***اشتراک*** A و B نام دارد و با $A \cap B$ نموده می‌شود. $A \cup B$ و $A \cap B$ را درصورتی بیابید که

۱. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{0, 1, 2, 3\}$

۲. $A = \{x: x^2 = 4\}, B = \{x: 2x = 4\}$

۳. $A = \{x: x \geq 1\}, B = \{x: |x| > 1\}$

۴. $A = \{x: x^2 - 2x + 1 = 0\}, B = \{x: x^2 + 1 = 0\}$

دو مجموعهٔ A و B داده شده‌اند. منظور از ***تفاضل*** بین A و B، که با $A - B$ نموده می‌شود، یعنی مجموعهٔ تمام عناصرمتعلق‌به B ولی‌غیرمتعلق‌به A. فرض‌کنید $A = \{1, 2, 3\}$. $A - B$ را درصورتی بیابید که

۵. $B = \{1, 2\}$

۶. $B = \{4, 5\}$

۷. $B = \varnothing$

۸. $B = \{1, 2, 3\}$

۹. $16 \quad 2^4 \cdot 4^3 \cdot 8^2$ را به صورت توانی از 2، و به صورت توانی از 4 بیان کنید.

۱۰. نشان دهید که اگر n زوج باشد، a^n به ازای هر a نامنفی است، درحالی که‌اگر n

فرد باشد، a^n با $a\,(\neq 0)$ هم‌علامت خواهد بود.

۱۱. عدد گویای دیگری بین $\frac{31}{100}$ و $\frac{3111}{10000}$ قرار دهید.

۱۲. فرض کنید $r = m/n$ عددی گویا به صورت تحویل ناپذیر، با n مثبت، باشد. نشان دهید که اگر n فرد باشد، a^r به ازای a ی منفی تعریف شده است، ولی اگر n زوج باشد تعریف نشده است.

نشان دهید هرگاه $a > 0$، آنگاه

۱۳. $a + \frac{1}{a} \geq 2$

۱۴. $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{a+1}}$

تحقیق کنید که

۱۵. $|a - b| = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}$

۱۶. $\min\{a, b\} = \frac{(a+b) - |a-b|}{2}$ و $\max\{a, b\} = \frac{(a+b) + |a-b|}{2}$

۱۷. وقتی x از 0 تا 1 تغییر کند، بر سر نقطهٔ $(1-x)a + xb$ چه خواهد آمد؟ (فرض کنید $a \neq b$.)

۱۸. چه وقت نقطهٔ x^2 سمت راست x واقع است؟ چه وقت سمت چپ x است؟ چه وقت بر x منطبق است؟

۱۹. بدون محاسبات عددی، نشان دهید که

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

۲۰. نشان دهید که به ازای اعداد دلخواه a، b، و c،

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$M = \max\{a, a^2, \ldots, a^n\}$ و $m = \min\{a, a^2, \ldots, a^n\}$ را به‌ازای $n > 1$ درصورتی بیابید که

۲۱. $0 < a < 1$

۲۲. $a > 1$

۲۳. $a = 0, \pm 1$

۲۴. $-1 < a < 0$

۲۵. $a < -1$

هر یک از مجموعه‌های داده شده، که اجتماع یا اشتراک دوبازه‌اند (ر.ک. مقدمهٔ مسائل ۱ تا ۴)، را به صورت یک بازه بنویسید.

۲۶. $(-\infty, 1) \cup (0, \infty)$

۲۷. $[-1, 2) \cup [2, 4)$

۲۸. $[-2, 3] \cap [0, 4]$

۲۹. $(-\infty, 1] \cap (-2, \infty)$

نمودار معادلهٔ داده شده را توصیف کنید.

۳۰. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$

۳۱. $x^2 + y^2 + x = 0$

۳۲. $x^2 + y^2 + y = 0$

۳۳. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$

۳۴. معادلهٔ $x^2 - y^2 = 0$ را رسم کنید.

۳۵. نمودار نامعادلهٔ $x^2 - y^2 > 0$ را رسم کنید.

۳۶. نمودار نامعادلات همزمان $x^2 + y^2 < 1,\ x^2 - y^2 > 0$ را رسم کنید.

۳۷. جمع نقاطی از صفحهٔ xy که از محور x، محور y، و نقطهٔ $(3, 6)$ هم فاصله‌اند را بیابید.

۳۸. جمع نقاطی از دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ که از نقاط $(1, 3)$ و $(-2, 2)$ هم فاصله‌اند را بیابید.

۳۹. چند نقطه مانند (m, n)، که m و n هر دو اعدادی صحیح‌اند، داخل دایره به شعاع $\frac{5}{2}$ و مرکز مبداء قرار دارند؟

۴۰. نقطهٔ $P = (x, y)$ طوری حرکت می‌کندکه تفاضل بین مربعات فواصل‌آن تا نقاط $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ همواره مساوی 4 است. مسیر نقطه را بیابید.

۴۱. مساحت ناحیهٔ مثلثی محدود به محورهای مختصات و خط $2x + 5y - 20 = 0$ چقدر است؟

۴۲. از تمام خطوط ماربر نقطهٔ $(2, 3)$، دو تا قطع مساوی دارند. این دو خط را بیابید.

۴۳. خط ماربر نقطهٔ $(1, 2)$ عمود برخط ماربر نقاط $(2, 4)$ و $(3, 5)$ را بیابید. نقطهٔ برخورد این دو خط را بیابید.

خط واصل بین مبداء و نقطهٔ برخورد جفت خطوط داده شده را بیابید.

۴۴. $x + 2y - 3 = 0,\ x - 3y + 7 = 0$

۴۵. $2x + 3y + 4 = 0,\ x - 2y - 3 = 0$

۴۶. تحقیق کنید که چهارضلعی به رئوس $(2, -2)$، $(5, 1)$، $(3, 6)$، و $(0, 3)$ یک متوازی‌الاضلاع است. معادلات اقطار آن را بیابید. نقطهٔ برخورد اقطار چیست؟

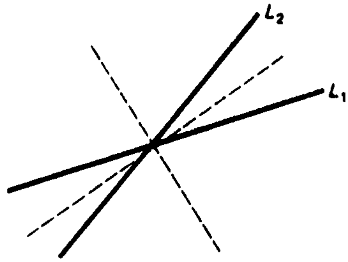
دو خط متقاطع L_1 و L_2 داده شده‌اند. دو خط دیگر، یعنی خطوط نقطه‌چین درشکل ۳۴، وجوددارندکه **نیمسازهای** زوایای‌بین L_1 و L_2 اند (چرا نیمسازهاهمواره‌برهم عمودند؟). نیمسازهای زوایای بین جفت خطوط داده شده را بیابید، و در هر حالت عمودبودن آنها را تحقیق نمایید.

۴۷. $x - y = 0,\ x + y = 0$

۴۸. $2x + 3y - 4 = 0,\ 3x + 2y + 1 = 0$

۴۹. $6x + 2y + 1 = 0,\ x - 3y - 2 = 0$

۵۰. $x + y + 2 = 0,\ 2x - 2y - 3 = 0$



شکل ۳۴

راهنمایی. نقاط هر نیمساز از L_1 و L_2 متساوی‌الفاصله‌اند.

نامعادلهٔ خطی داده شده را رسم کنید.

۵۱. $x + 2y - 2 < 0$

۵۲. $x + y - 3 > 0$

۵۳. $3x - 4y + 6 \geq 0$

۵۴. $2x - 3y - 3 \leq 0$

مسائل ۵۵ تا ۶۲ نشان می‌دهند که چگونه خطوط مستقیم در حل مسائل تجارت و اقتصاد به‌کار می‌روند. فرض کنیم q_d مقداری از یک کالای مورد تقاضا به بهای p بوده، و q_s مقدار تولید شده به بهای p باشد. اغلب فرض اینکه q_d و q_s توابعی خطی از p اند تقریب موجهی است، و بدین معنی است که

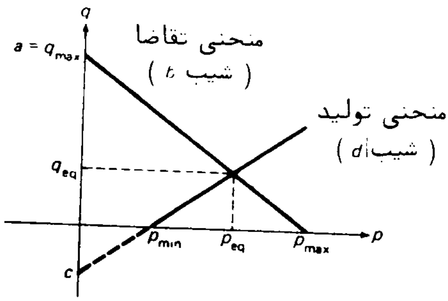
$$q_d = a + bp, \qquad \text{(یک)}$$

$$q_s = c + dp, \qquad \text{(دو)}$$

که در آنها a ، b ، c ، و d ثابت‌اند. در شرایط عادی بازار، افزایش بها به‌کاهش q_d و افزایش q_s منجر می‌شود. همچنین، q_d ، q_s ، و p به‌جهت معنی‌اقتصادی آنها، ذاتاً نامنفی‌اند، و $q_s = 0$ اگر p کوچکتر از عدد معینی باشد (در قیمت خیلی پایین تولیدی وجود ندارد). پس نتیجه می‌شود که ضرایب a و d مثبت اند، حال آنکه b و c منفی می‌باشند (ر.ک. شکل ۳۵). توجه کنید که b شیب **منحنی تقاضای** (یک) است، حال آنکه d شیب **منحنی تولید** (دو) می‌باشد.

۵۵. فرض کنید ماکزیمم تقاضا برای کالایی خاص در هر بها q_{max} بوده، و بهایی که در آن تقاضا متوقف می‌شود p_{max} باشد. منحنی تقاضای (یک) را بیابید.

۵۶. فرض کنید بهایی که در آن کالای مفروضی شروع به تولید می‌شود p_{min} باشد، درحالی



شکل ۳۵

که به ازای هر واحد افزایش در بها تولید d واحد بالا رود. منحنی تولید (دو) را پیدا کنید.

۵۷. بازار یک کالا وقتی در حال تعادل است که کمیت مورد تقاضا مساوی کمیت تولیدشده باشد. **بهای تعادل** نظیر p_{eq} و **تقاضای تعادل** (یا **تولید تعادل**) q_{eq} برای مدل بازار خطی (یک) و (دو) را معین نمایید.

۵۸. فرض کنید تقاضا برای کالایی در هر بها به یک مقدار افزایش یابد؛ این ممکن است مثلاً" در بازار شکر رخ دهد، پس از آنکه دولت شکر خاصی را که احتمالاً" سرطان‌زا است قدغن نماید. نشان دهید که اثر این کار افزایش بهای تعادل و تقاضای تعادل می‌باشد.

بهای تعادل q_{eq} و تقاضای تعادل p_{eq} را برای بازار با **منحنیهای تقاضا و تولیدداده شده** بیابید.

۵۹. $q_d = 450 - 3p,\ q_s = -100 + 2p$

۶۰. $q_d = 1000 - 40p,\ q_s = -50 + 10p$

۶۱. $q_d = 3000 - 12p,\ q_s = -2000 + 38p$

۶۲. $q_d = 1600 - 5p,\ q_s = 75p$

توابع و حدود[1]

در چهار بخش اول این فصل توابع و نمودارهایشان ،باتأکیدی خاص بر **توابع مثلثاتی** مهم، بررسی می‌شوند. مفهوم تابع بین ریاضیات پیش حساب و حساب دیفرانسیل و انتگرال قرار دارد، و فقط در بخش ۵.۱ است که وقتی به ایدهٔ **حد** و ایدهٔ نزدیک به آن **پیوستگی** می‌رسیم ،حساب دیفرانسیل و انتگرال را آغاز کرده‌ایم .در واقع ، اغلب حساب دیفرانسیل و انتگرال را بخشی از ریاضیات تعریف می‌کنند که درآن حدود نقشی اساسی برعهده دارند.

یکی از نکات اصلی این کتاب نوع خاصی حد است ، به نام **مشتق** ، که در کاربردها از اهمیت والایی برخوردار است . لذا ، باید به یاد داشت که تکنیکهای حد ارائه شده در اینجا ، باوجود رنگ و بوی نظری ،درواقع منبعی است برای استفاده‌های بعدی در مطالعهٔ مشتقها .

۱.۱ مفهوم تابع

توابع و متغیرها. منظور از ***تابع*** یعنی تناظری یک به یک بین دو مجموعه ازاعداد باخاصیت کلیدی زیر: به هر عدد در مجموعهٔ اول ، به نام **قلمرو (تعریف)** تابع ، **یک و فقط یک** عدد در مجموعهٔ دوم نظیر است . مرسوم است که اعداد مجموعهٔ اول را مقادیر یک **متغیر مستقل** و اعداد مجموعهٔدوم نظیر آنها را مقادیر یک**متغیر وابسته** می‌گیرند؛ واژهٔ "متغیر" یعنی علامتی که برای نمایش عضو نامشخصی از یک مجموعه به کار می‌رود. در این صورت، گوییم متغیر وابسته ***تابعی از*** متغیر مستقل است ، و این **متغیرها می‌توانند** در یک مسئله هر چه بخواهند باشند . توجه کنید که در این زبان قلمرو تابع مجموعهٔ تمام مقادیری است که متغیر مستقل می‌گیرد . مجموعهٔ تمام مقادیری که متغیر **وابسته** می‌گیرد **برد** تابع نام دارد .

مثال ۱. مساحت یک مربع تابعی از طول ضلع آن است ، چرا که اگر s طول ضلع مربع باشد،

مساحتش A از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$A = s^2.$$

در اینجا s متغیر مستقل است، و A متغیر وابسته. قلمرو و برد تابع مجموعه‌هایی یکسانند؛ یعنی، مجموعهٔ تمام اعداد مثبت. مساحت یک مربع تابعی از محیطش نیز هست. درواقع، یک مربع به طول ضلع s دارای محیط $p = 4s$ است. لذا، $s = \frac{1}{4}p$ و $A = s^2 = (\frac{1}{4}p)^2$؛ درنتیجه،

$$A = \frac{1}{16}p^2.$$

در اینجا، مثل قبل، متغیر وابسته مساحت A است، ولی متغیر مستقل محیط p می‌باشد.

مثال ۲. آیا مساحت یک مستطیل تابعی از محیطش است؟

حل. خیر، زیرا محیط یک مستطیل کلی (برخلاف مربع) مساحتش را به‌طور منحصربه‌فرد مشخص نمی‌کند. لذا، مثلاً، مستطیلی به‌طول 15 و عرض 3 دارای محیط $36 = 3 + 15 + 3 + 15$ و مساحت $15 \cdot 3 = 45$ است، درحالی‌که مربعی به‌ضلع 9 همان محیط $36 = 9 + 9 + 9 + 9$ را دارد، ولی با مساحت متفاوت $9^2 = 81$ (ر.ک. شکل ۱).

9

15   9 مساحت 81 9

3 مساحت 45 3

15   9

محیط 36   محیط 36

شکل ۱

نمادتابع. به‌طورصریحتر، فرض‌کنیم x متغیر مستقل، y متغیر وابسته، و f تابع باشد. ایدهٔ نمایش **تابع** به وسیلهٔ علامتی چون f فکری اساسی است، و ما آن را از ریاضیدان بزرگ سوئیسی، لئونارد اویلر[1] (۱۷۰۷–۱۷۸۳) داریم. بالاخره، مقادیر x و y عددند، ولی f چیزی مجردتر است. در واقع، f را می‌توان قاعده یا روندی تصور کرد که تناظری بین

1. Leonhard Euler

مقادیر x و y برقرار می‌کند ، و به هر مقدار داده شده از x مقدار **منحصر به فردی** از y را نسبت می‌دهد . این را می‌توان با علامت بیان کرد :

$$y = f(x),$$

که خوانده می‌شود : " y مساوی اف x است . " اگر x مقدار خاصی چون c داشته باشد ، مقدار نظیر y با $f(c)$ نموده و **مقدار f در c** نامیده می‌شود . اما استفاده از یک‌حرف برای نمایش متغیرمستقل و مقادیرش‌ساده‌تر است ،و بااین قرار ، $f(x)$ را مقدار f در x می‌نامیم. گوییم f **بر** (یا **در**) یک مجموعه تعریف شده است اگر هر نقطه از مجموعه به قلمرو f تعلق داشته باشد .

مثال ۳ . فرض کنیم تابع f ریشهٔ دوم عدد x را بگیرد . در این صورت ،

$$f(x) = \sqrt{x}. \qquad (۱)$$

بین تابع f ("ریشهٔ دوم‌گیر") و مقدارش در x تمایزی وجود دارد ، ولی اگر این تمایز مانعی در زبان ایجاد کند چیزی جز وسواس نخواهد بود . لذا ، نمی‌گوییم " تابع f به طوری که $f(x) = \sqrt{x}$ " ، هرچند این بیان منطقا " درست است . به جای آن‌فقط می‌گوییم " تابع $f(x) = \sqrt{x}$ " یا " تابع $y = \sqrt{x}$ " اگر y متغیر وابسته باشد ، یا حتی خلاصه‌تر " تابع $\sqrt{x}$ " . توجه کنید که وسیعترین مجموعه‌ای که تابع (۱) بر آن تعریف شده است مجموعهٔ تمام اعداد نامنفی است ، زیرا نمی‌توان از اعداد منفی جذر گرفت . چند مقدار نمونه از تابع (۱) عبارتنداز

$$f(0) = \sqrt{0} = 0, \qquad f(9) = \sqrt{9} = 3, \qquad f(50) = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

هرگاه یک تابع با فرمول صریحی مانند (۱) ، بدون هیچ اطلاعی از مقادیر متغیر مستقل ، داده شده باشد ، فرض است که قلمرو تابع **وسیعترین** مجموعهٔ مقادیری است که فرمول به ازای آنها با معنی است . این مجموعه **قلمرو طبیعی** تابع نام دارد . مثلا "، قلمرو طبیعی تابع (۱) بازهٔ $0 \le x < \infty$ است . به همین نحو ، اگر

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad (۲)$$

قلمرو طبیعی f بازهٔ $-1 \le x \le 1$ است ،زیرا $1 - x^2$ منفی است اگر x خارج این بازه باشد. هر مجموعهٔ کوچکتر از قلمرو طبیعی تابع f را نیز می‌توان قلمرو f گرفت ، ولی در اینگونه حالات همواره قلمرو را صریحا " نشان می‌دهیم ، مثل فرمول زیر

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}), \qquad (۲')$$

که در آن قلمرو، به جای $-1 \leq x \leq 1$ ، مساوی بازهٔ $0 < x < \frac{1}{2}$ است.

مثال ۴. فرض کنید

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}. \tag{۳}$$

$f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، و $f(-3)$ را بیابید.

حل. برای یافتن $f(0)$ ، $x = 0$ را در فرمول (۳) می‌گذاریم. این نتیجه می‌دهد که

$$f(0) = \frac{1}{0^2 - 4} = -\frac{1}{4},$$

و، به همین نحو،

$$f(1) = \frac{1}{1^2 - 4} = -\frac{1}{3}, \qquad f(-3) = \frac{1}{(-3)^2 - 4} = \frac{1}{5}.$$

از آن سو، کمیت

$$f(2) = \frac{1}{2^2 - 4} = \frac{1}{4 - 4}$$

تعریف نشده است، زیرا مستلزم تقسیم بر صفر است! توجه کنید که قلمرو طبیعی f از تمام اعداد x جز 2 و 2− تشکیل شده است.

استفاده از حروف x ، y ، و f برای متغیر مستقل، متغیر وابسته، و تابع، اگرچه زیاد به‌کار می‌روند، اجباری نیست. مثلاً ، در مثال ۱ می‌توان تابعی را که محیط p یک مربع را به مساحتش A مربوط می‌کند به صورت زیر نوشت:

$$A = \phi(p) = \frac{1}{16} p^2,$$

که در آن علامت ϕ (حرف کوچک یونانی فی) برای تابع انتخاب شده است. متغیرها اغلب، مثل این حالت، کمیات هندسی یا فیزیکی مورد بحث را بازگو می‌کنند. مثلاً A ، برای مساحت، V برای حجم، t برای زمان، و غیره به کار می‌روند. واژهٔ *شناسه* مترادف دیگری برای متغیر مستقل است. لذا، x شناسهٔ تابع $f(x) = x^2$ است، u شناسهٔ تابع $g(u) = u^3 - 1$ است، و از این قبیل.

همانند مثالهای فوق، توابع معمولاً به کمک فرمول تعریف می‌شوند، ولی *دلیلی برای آنکه کلاً چنین باشد وجود ندارد*؛ در مثال زیر تابعی را می‌بینیم که فرمولی متغیرهای

مستقل و وابستهٔ آن را به هم ربط نمی‌دهد. در واقع، در تحلیل اخیر، یک تابع چیزی جز گردایه‌ای از جفتهای مرتب متمایز از اعداد حقیقی که هیچ دو تای آنها عنصر اول یکسان ندارند نیست (ر.ک. مسئلهٔ ۵۸). همچنین، توابع مورد نظر در اینجا **توابعی حقیقی از یک متغیر حقیقی‌اند**؛ یعنی، هر دو متغیر مستقل و وابسته اعدادی حقیقی‌اند یا، معادلاً، نقاطی بر خط حقیقی می‌باشند. بعداً در این کتاب مفهوم تابع را بااختیار یک نقطه در صفحه یا در فضای سه‌بعدی (یا بیشتر) ابتدا به عنوان متغیر وابسته و سپس‌متغیر مستقل تعمیم خواهیم داد.

مثال ۵. فرض کنیم p بهای قطعی فولاد امریکا در بورس نیویورک بوده، و d مدت زمان باز بودن بورس باشد (d را می‌توان یک عدد هشت رقمی گرفت، که دو رقم اول ماه، دو رقم بعدی روز، و چهار رقم آخر سال را بدهد؛ مثلاً، 10241929 عبارت است از 24 اکتبر 1929، 07041976 عبارت‌است‌از 4 ژوئیهٔ 1976، و از این قبیل.) دراین صورت، p تابعی است از d. باآنکه فرمول‌صریحی متغیرهای p و d را به‌هم ربط نمی‌دهد، همیشه می‌توان مقدار p نظیر به مقدار داده شدهٔ d را با **نگاه کردن** به مقدار منحصر فرد p در ستون مالی یک‌روزنامهٔ عصر منتشر شده در روز d یافت. منحصر به فرد بودن p تابع d بودن آن را تضمین می‌کند. این تابع را می‌توان با علامت $p = h(d)$ بیان کرد، این بار علامت h برای تابع اختیار شده است.

مثال ۶. فرض کنیم سنگی را در چاه خشک عمیقی بیاندازیم. فرض کنیم s مقدار سقوط سنگ به فوت بوده، و t زمان سپری شده به ثانیه پس از سقوط سنگ باشد. همانطور که در فیزیک دیده‌ایم، فرمول

$$s = 16t^2 \qquad (۴)$$

با تقریبی مناسب، s را به عنوان تابعی از t بیان می‌کند. با اینحال، فرمول (۴) فقط برای زمانی محدود معتبر است، زیرا سنگ مآلاً به ته چاه می‌خورد. اگر چاه 64 ft عمق داشته باشد، سنگ پس از 2 sec به ته چاه رسیده و سپس بی‌حرکت می‌شود (فرض می‌کنیم برگشت نداشته باشد). در این حالت، فرمول (۴) فقط به ازای $0 \le t \le 2$ معنی دارد؛ یعنی، قلمرو تابع (۴) بازهٔ $0 \le t \le 2$ است. این را می‌توان با نوشتن

$$s = 16t^2 \qquad (0 \le t \le 2), \qquad (۴')$$

به جای (۴)، تصریح کرد. رفتار بعدی سنگ با فرمول $s = 64$، یا به‌طور دقیقتر، با

$$s = 64 \qquad (t > 2)$$

توصیف می‌شود . ضمناً ، در اینجا داشتن توابع **ثابت** ، یعنی توابعی که فقط یک مقدار دارند ، احساس می‌شود .

دو فرمول اخیر را می‌توان در یک فرمول تلفیق کرد :

$$s = \begin{cases} 16t^2 & \text{،} \quad 0 \le t \le 2 \text{ اگر} \\ 64 & \text{،} \quad t > 2 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۴'')$$

قلمرو تابع جدید بازهٔ نامتناهی $0 \le t < \infty$ است . توجه کنید که دو تابع ('۴) و ("۴) ، اگرچه متفاوتند ، ولی یک برد (یعنی بازهٔ $0 \le s \le 64$) دارند .

مسائل

فرض کنید $f(x) = x^2 + 3x + 5$. مقادیر زیر را بیابید .

۱. $f(0)$ ۲. $f(-1)$ ۳. $f(1)$

۴. $f(2)$ ۵. $f(-7)$ ۶. $f(\sqrt{3})$

فرض کنید $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. مقادیر زیر را بیابید .

۷. $g(-1)$ ۸. $g(0)$ ۹. $g(1)$

۱۰. $g(2)$ ۱۱. $g(3)$ ۱۲. $g(4)$

فرض کنید $h(x) = |x|/x$. مقادیر زیر را بیابید .

۱۳. $h(0)$ ۱۴. $h(1)$ ۱۵. $h(-1)$

۱۶. $h(\pi)$ ۱۷. $h(100)$ ۱۸. $h(-99)$

فرض کنید $F(s) = (s-1)/(s+1)$. مقادیر زیر را بیابید .

۱۹. $F(1)$ ۲۰. $F(0)$ ۲۱. $F(\frac{9}{10})$

۲۲. $F(-1)$ ۲۳. $F(\sqrt{2})$ ۲۴. $F(1+a)$

فرض کنید $G(t) = \sqrt{4-3t}$. مقادیر زیر را بیابید .

۲۵. $G(1)$ ۲۶. $G(0)$ ۲۷. $G(1.33)$

۲۸. $G(1.34)$ ۲۹. $G(4)$ ۳۰. $G(-4)$

فرض کنید $\phi(u) = 2u^2 - |u|$. مقادیر زیر را بیابید .

۳۱. $\phi(3)$ ۳۲. $\phi(-\frac{1}{2})$ ۳۳. $\phi(-\sqrt{5})$

۳۴. $\phi(\sqrt[4]{2})$ ۳۵. $\phi(1-\pi)$ ۳۶. $\phi(\sqrt{3}-2)$

۳۷. آیا مساحت یک دایره تابعی از محیط آن است؟

۳۸. آیا مساحت یک مثلث تابعی از محیط آن است؟

۳۹. فرض کنید c تعداد ویرگولها در صفحهٔ p این کتاب باشد. آیا c تابعی از p است؟ آیا p تابعی از c است؟

۴۰. آیا وزن یک نامهٔ سفارشی تابع هزینهٔ پست آن است؟

۴۱. فرض کنید $f(n) = a_n$ ، که در آن

$$3.a_1a_2\ldots a_n\ldots \qquad (0 \le a_n \le 9)$$

نمایش اعشاری عدد π است. کدام بزرگتر است، $f(4)$ یا $f(5)$ ؟

۴۲. تابعی که بعضی از مقادیرش در جدول زیر داده شده است:

x	0	20	—	60	80	100
y	32	68	104	140	—	212

یک تابع آشنا در زندگی روزمره است. این چه تابعی است؟ فرمولی برای بیان y به صورت تابعی از x و فرمولی برای بیان x به صورت تابعی از y بیابید. دوجای‌خالی در جدول را پر کنید. y به ازای $x = -40$ چقدر است؟

۴۳. کسر

$$\frac{f(1+a)-f(1)}{a} \qquad (a \neq 0)$$

را درصورتی حساب کنید که $f(x) = x^2$ (کسرهایی از این نوع در بررسی مشتقات ظاهر می‌شوند.)

۴۴. کسر

$$\frac{f(-2+a)-f(-2)}{a} \qquad (a \neq 0)$$

را درصورتی حساب کنید که $f(x) = x^3$.

قلمرو (طبیعی) توابع زیر را بیابید.

۴۵. $y = \dfrac{x(x+1)}{x}$

۴۶. $y = \dfrac{1}{2x-3}$

۴۷. $y = \dfrac{1}{x+|x|}$

۴۸. $y = \sqrt{x+2}$

۴۹. $y = \sqrt[3]{x+1}$

۵۰. $y = \sqrt{x^2-9}$

۵۱. $y = \sqrt{16-x^2}$

۵۲. $y = \sqrt{4x-x^2}$

۵۳. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

تابع $y = f(x)$ را با بازهٔ داده شده به عنوان قلمرو طبیعی‌اش بیابید.

۵۴. بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$

۵۵. بازهٔ باز $(0, 1)$

۵۶. بازهٔ نیمباز $[0, 1)$

۵۷. بازهٔ نیمباز $(0, 1]$

۵۸. تحقیق کنید که تعاریف زیر در اساس با تعاریف این بخش سازگارند. فرض کنید f مجموعه‌ای از جفتهای مرتب متمایز از اعداد حقیقی باشد به‌طوری که هیچ دو جفت (x, y) در f یک عنصر اول نداشته باشند، و فرض کنید $D = \{x: (x, y) \in f\}$؛ یعنی، D مجموعهٔ تمام عناصر اول جفتهای در f باشد. در این صورت، گوییم f یک **تابع تعریف شده بر D** است، و D **قلمرو** f نام دارد. هرگاه (x, y) جفت مرتبی در f باشد، آنگاه y، یعنی عنصر دوم جفت، **مقدار f در x** نامیده و به صورت $f(x)$ نوشته می‌شود. مجموعهٔ $\{y: (x, y) \in f\}$، یعنی محموعهٔ تمام عناصر دوم جفتهای در f، **برد f** نامیده می‌شود.

راهنمایی. x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته بگیرید. آنچه از x می‌دانیم y را به‌طور منحصر به فرد معین می‌کند.

۲.۱ اعمال بر توابع؛ نمودار توابع

دو تابع f و g داده شده‌اند. فرض کنیم D بزرگترین مجموعه‌ای باشدکه هر دوی f و g بر آن تعریف شده‌اند (D ناتهی فرض می‌شود). در این صورت، منظور از **مجموع $f + g$** یعنی تابعی که مقدارش در هر نقطهٔ x در D مجموع مقدار f در x و مقدار g در x است. به‌طور دقیقتر، به ازای هر x در D،

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

اعمال جبری دیگر بر f و g به همین نحو تعریف می‌شوند؛ یعنی،

$$(cf)(x) = cf(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(x)f(x)\cdots f(x)}_{\text{عامل } n},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

که البته در فرمول آخر فرض است که به ازای هر x در D، $g(x) \neq 0$.

مثال ۱ . فرض کنید

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \qquad g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

مقادیر $f+g$ و fg را در نقطهٔ $x = 5$ بیابید .

حل . چون

$$f(5) = \sqrt{5-1} = 2, \qquad g(5) = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6},$$

داریم

$$(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6},$$

$$(fg)(5) = f(5)g(5) = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

قلمرو طبیعی توابع $f+g$ و fg بازهٔ $[1, \infty)$ است ، زیرا این وسیعترین مجموعه‌ای است که هر دوی f و g بر آن تعریف شده‌اند .

علامت $\equiv$. منظور از $f(x) \equiv g(x)$ یعنی توابع f و g دارای قلمرو یکسان D اند و به ازای هر x در D ، $f(x) = g(x)$. فرمول $f(x) \equiv g(x)$ را ، که یک ***همانی*** نامیده می‌شود ، می‌خوانیم :"$f(x)$ به‌طور همانی مساوی $g(x)$ است . "تساوی توابع یعنی تساوی‌همانی" بدین معنی که $f = g$ یعنی $f(x) \equiv g(x)$.

مثال ۲ . توابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$ (به‌طور همانی) مساویند . قلمرو تعریف مشترکشان تمام خط حقیقی $-\infty < x < \infty$ است .

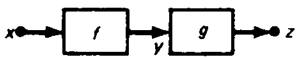
درحالاتی که از قراین روشن باشد که فرمولی یک‌همانی‌است ، علامت تساوی $=$ اغلب به‌جای علامت‌همانی $\equiv$ به‌کارمی‌رود . مثلا" ، تجزیهٔ آشنای فرمول $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ یک همانی است ، زیرا به ازای هر x معتبر است .

شکل ۲ روش سودمندی را برای تصور تابع f به صورت دستگاه ورودی ــ خروجی

شکل ۲

نشان می‌دهد. عدد x به دستگاه f خورانده می‌شود، و عدد $y=f(x)$ ، یعنی مقدار f در x ، از آن بیرون می‌آید. این را این طور نیز توصیف می‌کنند که می‌گویند f ، x را به y می‌نگارد، یا y نقش x تحت f است. اینکه f تابع است یعنی ورودی مفروض x همواره خروجی y را تولید می‌کند. به‌طورکلی، ممکن است طرز کار دستگاه را ندانیم، و مهندسان وقتی محتویات یک‌دستگاه مجهول یا اغماض شده‌باشد، آن را یک "جعبهٔ سیاه" می‌نامند.

توابع مرکب. حال طبیعی است بپرسیم اگر خروجی یک دستگاه ورودی دستگاه‌دیگری‌باشد، چه رخ می‌دهد، مثل شکل ۳، که در آن x به دستگاه f خورانده شد، خروجی y به دست می‌آید، و سپس آن را به دستگاه دوم g خورانده‌ایم و خروجی نهایی z به دست‌آمده‌است.



شکل ۳

چون $z=g(y)$ و $y=f(x)$ ، واضح است که $z=g(f(x))$. یک تابع مانند $g(f(x))$ یک تابع مرکب نامیده می‌شود، و این گونه توابع در سراسر حساب دیفرانسیل و انتگرال ظاهر می‌شوند. عمل تلفیق توابع به این نحو **ترکیب** نام دارد. البته، در شکل ۳ باید تأکید کنیم که خروجی "میانی" y یک ورودی قابل قبول برای دستگاه دوم g است؛ این بدان خاطر است‌که $g(f(x))$ فقط به ازای مقادیری از x تعریف شده است که $f(x)$ درقلمرو g است. به همین نحو، می‌توان توابع مرکب دیگر، مانند $f(g(x))$ ، $f(f(x))$ ، و غیره را تعریف کرد.

مثال ۳. فرض کنیم

$$f(x)=x+1, \qquad g(x)=x^2 \tag{۱}$$

جانشانی مستقیما" نتیجه می‌دهد

$$g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1 \tag{۲}$$

و

$$f(g(x))=f(x^2)=x^2+1. \tag{۳}$$

به همین نحو،

$$f(f(x))=f(x+1)=(x+1)+1=x+2$$

و

$$g(g(x))=g(x^2)=(x^2)^2=x^4.$$

علامت ο . تابعی که از x به $g(f(x))$ می‌رود با $g \circ f$ نموده می‌شود . لذا ،

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

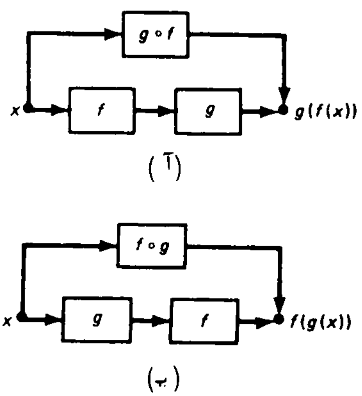
و به همین نحو ، $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ ، و غیره . با این نماد ، (۲) خواهد شد

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 1, \tag{۲'}$$

و (۳) به صورت زیر درمی‌آید :

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 1, \tag{۳'}$$

و غیره . تعبیر $g \circ f$ به صورت یک دستگاه ورودی ــ خروجی در شکل ۴ (آ) نمــوده شده است . این دستگاهی است که همان اثر دو دستگاه f و g را دارد که " به‌طور سری" به هم مربوطند که f اول و g دوم است . اگر f و g با ترتیب دیگر ، اول g و بعد f ، به‌هم مربوط شوند ، اثر کل دو دستگاه با اثر دستگاه $f \circ g$ یکی است [ر.ک. شکل ۴ (ب)] .



شکل ۴

تابع مرکب $f \circ g$ را نباید با تابع حاصل ضرب fg اشتباه کنید (علامت ο در ترکیب به کار می‌رود نه در ضرب) . مثلا " ، حاصل ضرب توابع (۱) مساوی است با

$$(fg)(x) = (x + 1)x^2 = x^3 + x^2,$$

که کاملا " با توابع مرکب (۲') و (۳') متفاوت است . ترکیب توابع تعویض‌ناپذیر است ؛ یعنی ، در حالت کلی ، $f \circ g \neq g \circ f$ ، مثل توابعی که هم‌اکنون درنظرگرفتیم ، درحالی که ضرب توابع همیشه تعویضپذیر است $(fg = gf)$.

مثال ۴ . فرض کنیم $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = -x^2$. در این صورت ،

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{-x^2}$$

به ازای هر مقدار x جز $x = 0$ تعریف نشده است ، و $(f \circ g)(0) = 0$ ، حال آنکه

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(\sqrt{x})^2 = -x$$

به ازای هر مقدار نامنفی x تعریف شده است .

عمل ترکیب می‌تواند شامل بیش از دو تابع باشد . در این صورت ، ترکیب مرحله به مرحله ، از چپ به راست در مورد نماد $\circ$ و از داخل به خارج در مورد پرانتزها ، انجام می‌شود .

مثال ۵ . فرض کنیم

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

در این صورت ،

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(\sqrt{x})) = f((\sqrt{x})^2) = f(x) = \frac{1}{x},$$

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)) = h\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = h\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = h\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|},$$

و غیره . توجه کنید که قلمرو $f \circ g \circ h$ مجموعهٔ تمام $x > 0$ های است ، ولی قلمرو $h \circ g \circ f$ مجموعهٔ تمام $x \neq 0$ های می‌باشد . به عنوان تمرین ، نشان دهید که ترکیب توابع **شرکت‌پذیر** است ، بدین معنی که $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ؛ و لذا ، بدون پرانتز می‌نویسیم $f \circ g \circ h$.

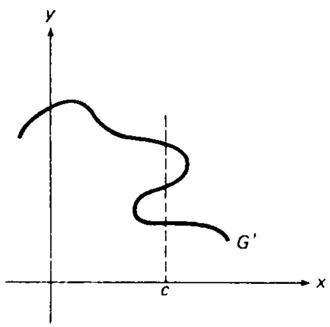
خاصیت خط قائم . حال به نمایش تصویری توابع رو می‌آوریم . منظور از **نمودار** تابع

$$y = f(x) \qquad (۴)$$

یعنی شکلی هندسی در صفحهٔ xy که از رسم تمام نقاط (x, y) که مختصاتشان در فرمول (۴) ، به عنوان معادله‌ای از دو متغیر x و y ، صدق می‌کنند به‌دست می‌آید . نمودار تابع

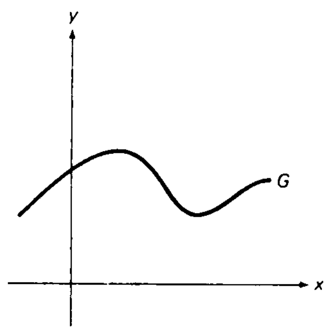
$y = f(x)$ ، بـر خلاف نمودار یک معادلهٔ کلیتر از متغیرهای x و y ، خاصیت متمایز زیر را دارد: **هیچ خط قائم ، یعنی هیچ خط موازی محور y ، نمی‌تواند نمودار $y = f(x)$ را در بیش از یک نقطه قطع کند** . زیرا هرگاه خط قائم $x = c$ نمودار $y = f(x)$ را در دو یا چند نقطه قطع کند ، آنگاه دو یا چند مقدار از y ، یعنی عرضهای این نقاط ، نظیر یک مقدار از x ، یعنی c ، اند و این با تعریف تابع تضاد دارد .

مثال ۶ . هیچ خط قائمی منحنی G در شکل ۵ (آ) را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند . لذا . G نمودار یک تابع است . از آن سو ، خطوط قائمی وجود دارند که منحنی G' در شکل ۵ (ب) را در بیش از یک نقطه قطع کنند؛ مثلاً " ، خط $x = c$ نمودار G' را در سه نقطه



G' نمودار یک تابع نیست .

(ب)



G نمودار یک تابع است .

(آ)

شکل ۵

قطع می‌کند . بنابراین ، G' نمودار یک تابع **نیست** .

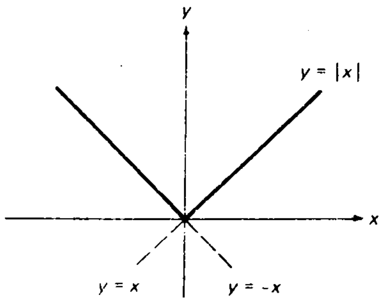
مثال ۷ . نمودار تابع قدرمطلق

$$y = |x| \qquad (۵)$$

را رسم کنید .

حل . هرگاه $x \geq 0$ ، آنگاه $|x| = x$ و (۵) به خط مستقیم $y = x$ به شیب 1 مار بر مبداء تحویل می‌شود ، ولی هرگاه $x < 0$ ، آنگاه $|x| = -x$ و (۲) به خط مستقیم $y = -x$ به شیب -1 مار برمبداء تحویل خواهد شد . لذا . نمودار تابع (۵) ، که در شکل ۶نموده‌شده است ، از قطعاتی از خطوط $y = x$ و $y = -x$تشکیل‌شده‌است .توجه‌کنیدکه‌نمودار درمبداء ،

که در آنجا خطوط $y = x$ و $y = -x$ متقاطع اند، گوشهٔ تیز دارد.



شکل ۶

یک تابع مانند $|x|$، که نمودارش از قطعاتی از خطوط مستقیم ساخته شده، **قطعه قطعه خطی** نام دارد (اگر فقط یک خط موجود باشد، تابع **خطی** خوانده می‌شود).

مثال ۸. نمودار تابع

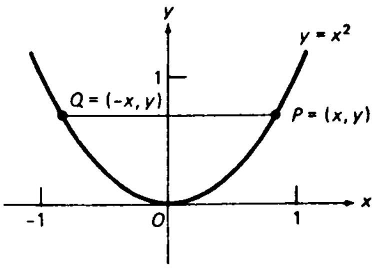
$$y = x^2 \tag{۶}$$

را رسم کنید.

حل. با تشکیل جدول کوچکی از مقادیر x و مقادیر نظیر y حاصل از فرمول (۶) آغاز می‌کنیم:

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$

سپس جفتهای (x, y) را به صورت نقاطی در صفحهٔ xy رسم کرده و آنها را با منحنی هموای به هم وصل می‌نماییم. با این کار منحنی شکل ۷ به دست می‌آید، که یک **سهمی** است. چون قلمرو و برد تابع (۶) هر دو بازه‌هایی نامتناهی‌اند (از کدام نوع ؟)، شکل در واقع بخشی از نمودار در مجاورت مبداء است. هرگاه نقطهٔ $P = (x, y)$ به‌نمودار (۶) تعلق داشته باشد، نقطهٔ $Q = (-x, y)$ نیز دارد، زیرا $(-x)^2 = x^2$. همچنین، P و Q از محور y به یک فاصله بوده و بر یک خط افقی قرار دارند. لذا، به ازای هر نقطهٔ P از نمودار در یک‌طرف محور y ، نقطه‌ای‌مانند Q از نمودار در آن طرف وجود دارد به‌طوری



شکل ۷

که محور y عمود منصف پاره‌خط PQ است. این را خلاصه کرده می‌گویند منحنی $y = x^2$ **نسبت به محور y متقارن** می‌باشد.

تبصره. این امر که با اتصال چند نقطهٔ "نوعی" به این طریق ویژگیهای اصلی نمودار (۶) ضایع نمی‌شود کاملا" موجه است، و می‌توان آن را به کمک روشهای رسم منحنی در حساب دیفرانسیل و انتگرال که در فصل ۳ عرضه شد یا توصیف هندسی سهمی در فصل ۱۰ توجیه کرد. به‌طورکلی، نمودار G هر تابع به شکل $y = ax^2 + bx + c$، که در آن a، b، و c ثابت‌اند (با $a \neq 0$) یک سهمی است؛ و همچنین است هر شکلی که از انتقال یا دوران G در صفحهٔ xy به دست آید.

توابع زوج. تابع f را زوج گوییم اگر

$$f(-x) \equiv f(x). \tag{۷}$$

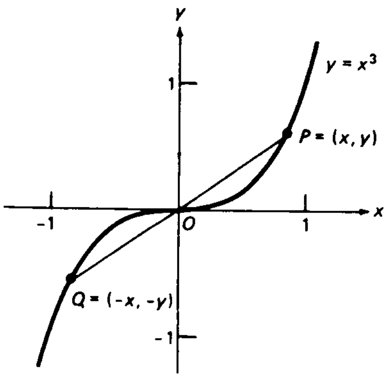
ما هم اکنون نشان دادیم که تابع $f(x) = x^2$ زوج است و نمودارش نسبت به محور y متقارن است. نمودار هر تابع زوج دیگر همین خاصیت تقارن را داراست. مثلا"، تابع $f(x) = |x|$ زوج است، زیرا $|-x| \equiv |x|$؛ و درنتیجه، نمودار $y = |x|$ نسبت به محور y متقارن است، و این از شکل ۶ آشکار می‌باشد.

مثال ۹. تابع زیر را رسم کنید:

$$y = x^3. \tag{۸}$$

حل. با رسم چند نقطهٔ نوعی (x, y) که y شان از (۸) به دست آمده و وصل آنها با یک منحنی هموار، نمودار شکل ۸ به دست می‌آید. هرگاه نقطهٔ $P = (x, y)$ متعلق به نمودار

(۸) باشد ،آنگاه نقطهٔ $Q = (-x, -y)$ نیز تعلق دارد ،زیرا $-x^3 = (-x)^3$ .. همچنین ،



شکل ۸

بنا برمثال ۴ ، صفحهٔ ۳۷ ، نقطهٔ میانی پاره‌خط PQ نقطهٔ

$$\left(\frac{x + (-x)}{2}, \frac{y + (-y)}{2}\right) = (0, 0)$$

است؛ یعنی ، مبداء O . لذا ، به ازای هر نقطهٔ P از نمودار در یک طرف محور y ، نقطه‌ای مانند Q از نمودار در طرف دیگر محور y وجود دارد به‌طوری که مبداء O نقطهٔ میانی پاره خط PQ است . این را خلاصه کرده می‌گویند منحنی $y = x^3$ **نسبت به مبداء متقارن** است .

توابع فرد . تابع f را **فرد** گوییم اگر

$$f(-x) \equiv -f(x). \qquad (۷')$$

هم‌اکنون نشان دادیم که تابع $f(x) = x^3$ فرد و نمودارش نسبت به مبداء متقارن است . نمودار هر تابع فرد دیگر از همین خاصیت تقارن برخوردار است . به عنوان مثال ، هر خط $y = mx$ ماربر مبداء همین خاصیت را دارد .

خاصیت زوج یا فرد بودن توابع نقش مهمی در ریاضیات کار بسته و فیزیک دارد . به ازای تابع f ، این سئوال که " **جفتی** f چیست؟ " صرفا " یعنی " آیا f زوج است‌یافرد؟ " البته ، اغلب توابع نه‌زوجند نه‌فرد . این ، مثلا " ، در مورد تابع $f(x) = x^2 + x^3$ درست است ، که نه در (۷) صدق می‌کند نه در (۷') .

توابع صعودی و نزولی . حال فرض کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ ، با حرکت ازچپ‌به‌راست نقطهٔ متغیر P بر نمودار آن ، که طول x آن دربازه‌ای مانند I است ، *بالا* رود . در این

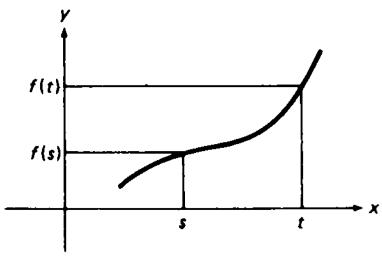
صورت ،گوییم f بر I **صعودی** است. به همین نحو، اگر نمودار f ، با حرکت از چپ به‌راست نقطهٔ P ، که طول x آن در بازه‌ای مانند I است، **پایین بیاید**، گوییم $f(x)$ بر I **نزولی** است.

مثال ۱۰. توابع $|x|$ و x^2 هردو بربازهٔ $0 \le x < \infty$ صعودی‌اند، واین فوراً از شکلهای ۶ و ۷ دیده‌می‌شود. همچنین، از این اشکال معلوم می‌شود که $|x|$ و x^2 بر $-\infty < x \le 0$ نزولی‌اند.

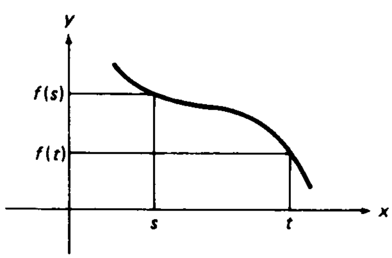
مثال ۱۱. تابع x^3 بر تمام خط حقیقی صعودی است، یعنی بر بازهٔ $-\infty < x < \infty$ ، و این از شکل ۸ مشهود است.

مثال ۱۲. نمودار تابع ثابت $f(x) \equiv c$ خط افقی $y = c$ است، که نه بالا می‌رود نه پایین می‌آید. لذا، یک تابع ثابت (بر هر بازه) نه صعودی است نه نزولی.

به‌آسانی می‌توان برای تابع صعودی یا نزولی تعریف جبری آورد. تابع f تعریف شده بر مجموعهٔ X ، که معمولاً یک بازه است، بر X صعودی است اگر هر وقت $s < t$ ، $f(s) < f(t)$ (در اینجا s و t هر دو در X قرار دارند). به همین نحو، f بر X **نزولی** است اگر هر وقت $s < t$ ، نامساوی $f(s) > f(t)$ برقرار باشد. تعبیر هندسی این تعاریف در شکل ۹ (آ) برای تابع صعودی و در شکل ۹ (ب) برای تابع نزولی شده است.



(آ) f صعودی



(ب) f نزولی

شکل ۹

مثال ۱۳. به‌طور جبری نشان دهید که $f(x) = x^2$ بر $[0, \infty)$ صعودی و بر $(-\infty, 0]$ نزولی است.

حل. هرگاه $0 \le s < t < \infty$ ، آنگاه $t + s > 0$ و $t - s > 0$ ؛ درنتیجه،

$$f(t) - f(s) = t^2 - s^2 = (t+s)(t-s) > 0,$$

و لذا، $f(s) < f(t)$. به همین نحو، هرگاه $-\infty < s < t \le 0$ ، آنگاه $t + s < 0$ و $t - s > 0$ ؛ درنتیجه،

$$f(t) - f(s) = (t+s)(t-s) < 0,$$

که نامساوی $f(s) > f(t)$ را نتیجه می‌دهد.

نمودارهای انتقال. قضیهٔ زیر طرز انتقال نمودار یک تابع در جهت افقی یا قائم را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱ (انتقال نمودار یک تابع). *تابع*

$$y = f(x) \qquad (۹)$$

با نمودار G داده شده است. نمودار تابع

$$y = f(x - c) \qquad (۱۰)$$

حاصل انتقال افقی G به اندازهٔ $|c|$ واحد است، به راست اگر $c > 0$ و به چپ اگر $c < 0$.
به‌همین‌نحو، نمودار تابع

$$y = f(x) + c \qquad (۱۰')$$

حاصل انتقال قائم G به اندازهٔ $|c|$ واحد است، به بالا اگر $c > 0$ و به‌پایین اگر $c < 0$.

برهان. نقطهٔ (x, y) در (۹) صدق می‌کند اگر و فقط اگر نقطهٔ افقی انتقال‌یافتهٔ $(x + c, y)$ در (۱۰) صدق کند. به همین نحو، (x, y) در (۹) صدق می‌کند اگر و فقط اگر نقطهٔ قائم انتقال یافتهٔ $(x, y + c)$ در (۱۰') صدق نماید.

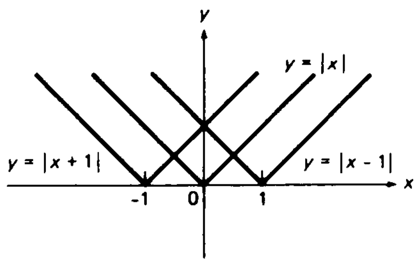
علامت منها در (۱۰) و علامت به‌علاوه در (۱۰') ممکن است معما باشند و این معما حل نمی‌شود مگر درک کنیم "y شبیه" دقیق (۱۰) عبارت است از

$$y - c = f(x)$$

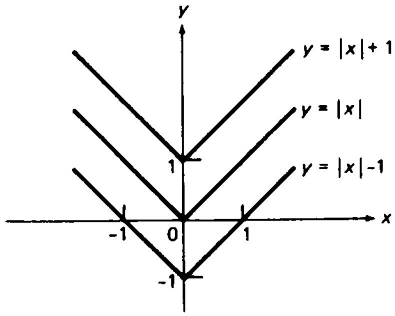
تا معادلهٔ معادل (۱۰') که در آن، طبق معمول، ثابت c به طرف راست انتقال‌یافته‌است.

مثال ۱۴. فرض کنیم G نمودار تابع $y = |x|$ باشد. نمودار $y = |x - 1|$ از انتقال G به اندازهٔ یک واحد به راست، و نمودار $y = |x + 1|$ از انتقال G به اندازهٔ یک واحد به‌چپ

به دست می‌آید [ر.ک. شکل ۱۰ (آ)] . به همین نحو، نمودار $y = |x| + 1$ از انتقال G به اندازهٔ یک واحد به بالا، و نمودار $y = |x| - 1$ از انتقال G به اندازهٔ یک واحد به پایین به دست می‌آید [ر.ک. شکل ۱۰ (ب)] .



(آ) انتقالهای افقی یک نمودار



(ب) انتقالهای قائم یک نمودار

شکل ۱۰

مثال ۱۵. نمودار تابع

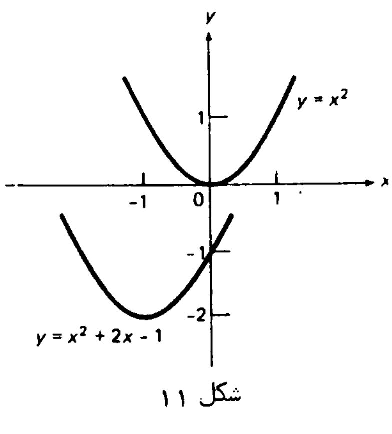
$$y = x^2 + 2x - 1 \qquad (۱۱)$$

را رسم کنید.

حل. با کامل کردن مربع در (۱۱)، به دست می‌آوریم

$$y = (x + 1)^2 - 2. \qquad (۱۱')$$

بنابر قضیهٔ ۱، نمودار (۱۱') همان نمودار $y = (x + 1)^2$ است که 2 واحد به پایین انتقال یافته است، و نمودار $y = (x + 1)^2$ همان نمودار $y = x^2$ است که 1 واحد به چپ انتقال یافته است. لذا. همانطور که شکل ۱۱ نشان می‌دهد، نمودار (۱۱')، یا معادلاً (۱۱)،



شکل ۱۱

نمودار سهمی $y = x^2$ است که 1 واحد به چپ و 2 واحد به پایین انتقال یافته است .

مسائل

فرض کنید $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = 1/x$. مقادیر زیر را حساب کنید .

۱. $(f+g)(3)$ ✓ ۲. $(f-g)(8)$ ۳. $(fg)(-2)$ ✓

۴. $(2f+3g)(15)$ ۵. $(f^2)(24)$ ۶. $(f/g)(35)$ ✓

فرض کنید f و g توابع زیر باشند . آیا $f(x) \equiv g(x)$ درست است ؟

۷. $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$ ✓

۸. $f(x) = x/x, g(x) \equiv 1$

۹. $f(x) = |x|/x, g(x) = x/|x|$ ✓

۱۰. $f(x) = (1+x)^2 - (1-x)^2, g(x) = 4x$ ✓

فرض کنید $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x^2 - 1$. مقادیر زیر را حساب کنید .

۱۱. $f(f(2))$ ✓ ۱۲. $f(g(1))$ ۱۳. $g(f(-1))$ ✓

۱۴. $g(g(0))$ ۱۵. $g(f(g(1)))$ ✓ ۱۶. $f(f(f(0)))$ ✓

فرض کنید $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ و $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. تابع مرکب ذکر شده را بیابید .

۱۷. $(f \circ f)(x)$ ✓ ۱۸. $(f \circ g)(x)$ ۱۹. $(g \circ f)(x)$ ✓ ۲۰. $(g \circ g)(x)$ ✓

فرض کنید $f(x) = x^3$ ، $g(x) = x - 1$ ، و $h(x) = \sqrt{x}$. تابع مرکب ذکر شده را بیابید .

۲۱. $(f \circ g \circ h)(x)$ ✓ ۲۲. $g(g(f(x)))$ ۲۳. $f(f(g(x)))$ ✓

۲۴. $(h \circ g \circ f)(x)$ ۲۵. $(g \circ h \circ f)(x)$ ✓ ۲۶. $f(h(g(x)))$

تابع خطی $f(x) = ax + b$ را طوری بیابید که در اتحاد داده شده صدق کند .

۲۷. $f(x+1) \equiv 2x$ ✓ ۲۸. $f(2x+3) \equiv 3x - 2$

۲۹. $f(1-x) \equiv 5x + 1$ ✓ ۳۰. $f(f(x)) \equiv 4x + 3$

تابع داده شده را رسم کنید .

۳۱. $y = x^2 + x + 1$ ✓ ۳۲. $y = 1 - x^2$

۳۳. $y = \sqrt{x^2 + 4}$ ✓ ۳۴. $y = \sqrt{9 - x^2}$

۳۵. $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$ ✓ ۳۶. $y = 3 - \sqrt{16 - x^2}$

۳۷. $y = |x+1| + |x-1|$ ✓

۳۸. $y = |x| + |x+1| + |x+2|$

معین کنید که تابع داده شده زوج یا فرد (یا هیچکدام) است .

۳۹. $f(x) \equiv 10$

۴۰. $f(x) = \frac{1}{x}$

۴۱. $f(x) = x^3 - x + 1$

۴۲. $f(x) = x^4 + x^2 - 7$

۴۳. $f(x) = x^5 - x^3 + x$

۴۴. $f(x) = x^6 + x^3$

۴۵. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

۴۶. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

۴۷. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^3 + 2}}$

۴۸. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + x}}$

۴۹. فرض کنید قلمرو تابع f چنان است که وقتی شامل x باشد ، شامل $x-$ نیز هست . نشان دهید که اتحاد

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

f را به صورت مجموعی از یک تابع زوج و یک تابع فرد نمایش می‌دهد .

تابع داده شده را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید .

۵۰. $f(x) = \frac{2}{x^2 - x + 1}$

۵۱. $f(x) = (1 + x)^{100}$

۵۲. تابع $y = x^2 - 4x + 3$ کجا صعودی است ؟ کجا نزولی است ؟

۵۳. تابع $y = |x + 1| + |x - 1|$ کجا صعودی است ؟ کجا نزولی است ؟ کجا ثابت است ؟ (ر.ک. مسئلهٔ ۳۷ .)

۵۴. از یک قطعه نخ به طول 12 برای ساختن یک کنتور مستطیلی ، که یکی از اضلاعش به طول x است ، استفاده شده است . بزرگترین بازهٔ $a \leq x \leq b$ را بیابید که مساحت داخل کنتور تابعی صعودی از x باشد .

تابع $y = g(x)$ را طوری بیابید که نمودارش حاصل دو انتقال داده شده برنمودار $y = f(x) = x^2 + x + 1$ باشد .

۵۵. 5 واحد به راست و 6 واحد به بالا

۵۶. 3 واحد به راست و 4 واحد به پایین

۵۷. 2 واحد به چپ و 7 واحد به پایین

۵۸. 10 واحد به چپ و 1000 واحد به بالا

۵۹. دو انتقال نام ببرید که نمودار $y = f(x) = x^2 + x$ را به‌نمودار $y = g(x) = x^2 + 2x$ تبدیل نمایند .

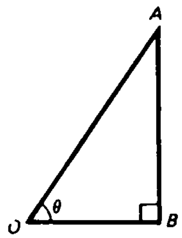
۶۰. فرض کنید $f(x+1)-f(x)\equiv 8x+3$ ، که در آن $f(x)=ax^2+bx+5$. a و b را بیابید .

۶۱. نشان دهید که تابع f بر بازهٔ I صعودی است اگر و فقط اگر $-f$ بر I نزولی باشد .

۶۲. نشان دهید که تابع f با علامت ثابت (یعنی ، تابعی که مقادیرش یا همه مثبت‌اند یا همه منفی) بر بازهٔ I صعودی است اگر و فقط اگر متقابلش $1/f$ بر I نزولی باشد .

۳۰۱ توابع مثلثاتی

فرض کنیم OAB مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر OA بوده ، و θ (تتای کوچک یونانی) زاویهٔ حاده در رأس O باشد ، مثل شکل ۱۲ . در این صورت ، با گرفتن θ به عنوان متغیر مستقل ،



شکل ۱۲

توابع مثلثاتی زیر را معرفی می‌کنیم . ابتدا سینوس و کسینوس θ را با نسبتهای زیر معرفی می‌کنیم :

$$\sin\theta=\frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}}=\frac{|AB|}{|OA|},\qquad \cos\theta=\frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}}=\frac{|OB|}{|OA|}.$$

سپس تانژانت و کتانژانت θ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta},\tag{۱}$$

و سکانت و کسکانت θ را به صورت زیر :

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}.\tag{۲}$$

برحسب مثلث OAB ،

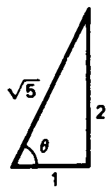
$$\tan\theta=\frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta}=\frac{|AB|}{|OB|},$$

و

$$\cot\theta = \frac{|OB|}{|AB|}, \qquad \sec\theta = \frac{|OA|}{|OB|}, \qquad \csc\theta = \frac{|OA|}{|AB|}$$

تناسب این شش تعریف توابع مثلثاتی مبتنی براین امر است که تمام مثلثهای قائم‌الزاویه دارای زاویهٔ حادهٔ θ متشابه‌اند (چرا؟)

مثال ۱ . در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۱۳ ، داریم



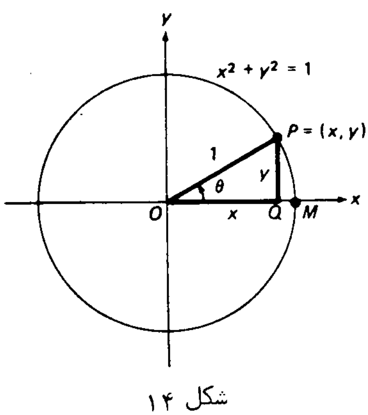
شکل ۱۳

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = 2,$$

$$\cot\theta = \frac{1}{2}, \qquad \sec\theta = \sqrt{5}, \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

توجه کنید که چون طول اضلاع مثلث 1 و 2 است ، از قضیهٔ فیثاغورس معلوم می‌شود که طول وتر مساوی است با $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$.

فرض کنید OAB را با مثلث قائم‌الزاویه و متشابه OPQ به طول وتر 1 عوض کرده باشیم . در این صورت ، OPQ را می‌توان در دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ چنان جا داد که O مرکز دایره ، OP شعاع دایره ، و OQ در امتداد محور مثبت x واقع باشد ، مثل شکل ۱۴ .



شکل ۱۴

فرض کنیم نقطهٔ P به طول x و عرض y باشد. در این صورت،

$$\cos\theta = \frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{x}{1}, \qquad \sin\theta = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{y}{1},$$

درنتیجه،

$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y. \tag{۳}$$

برای تعریف سینوس و کسینوس به ازای θ ی دلخواه، که فقط زاویهٔ θ حاده (یعنی، بین $0°$ و $90°$) نباشد، کافی است استفاده از فرمولهای (۳) را ادامه دهیم. در این وضع، فرمولهای (۱) و (۲) را تعاریف تانژانت، کتانژانت، سکانت، و کسکانت به ازای مقادیر دلخواه θ می‌گیریم. مثل همیشه، زوایا وقتی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شوند مثبت، و وقتی در جهت عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شوند منفی گرفته می‌شوند.

به‌عنوان نتیجه‌ای فوری از این تعاریف، فرمولهای مهم زیر را به دست می‌آوریم:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \tag{۴}$$

$$|\cos\theta| \le 1, \qquad |\sin\theta| \le 1, \tag{۵}$$

که به ازای هر θ معتبرند. در واقع، طبق (۳)، $\cos\theta$ و $\sin\theta$ مختصات x و y نقطهٔ متغیر P از دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ اند، و این بی‌درنگ فرمول (۴) را ایجاب می‌کند، که در آن رسم است‌که به‌جای $(\cos\theta)^2$ و $(\sin\theta)^2$ می‌نویسند $\cos^2\theta$ و $\sin^2\theta$. همچنین، واضح است‌که مختصات هرنقطهٔ $P = (x, y)$ از دایرهٔ یکه‌درنامساویهای $|x| \le 1, |y| \le 1$، که معادل (۵) اند، صدق می‌کنند. سایر فرمولهای مثلثاتی را می‌توان از (۴) نتیجه‌گرفت. مثلاً،

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta, \tag{۶}$$

زیرا، به کمک (۱)، (۲)، و (۴)،

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta.$$

به همین نحو، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود،

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta. \tag{۶'}$$

مقیاس رادیان. در شکل ۱۴ فرض کنیم $M = (1, 0)$ نقطه‌ای از دایرهٔ یکه باشد که‌برمحور مثبت x قرار دارد. منظور از مقیاس رادیان زاویهٔ θ یعنی طول قوس $\widehat{MP}$ به صورت یک عدد "بدون بعد"؛ یعنی، بدون بعد فیزیکی طول (که مثلاً" به اینچ یا متر است).

چون محیط دایرهٔ یکه 2π است، پس 2π رادیان $= 360$ درجه، یا معادلاً π رادیان $= 180$ درجه. بنابراین،

$$0.01745 \text{ رادیان } \approx \frac{\pi}{180} \text{ رادیان } = ۱ \text{ درجه}$$

$$59.29578 \text{ درجه } \approx \frac{180}{\pi} \text{ درجه } = ۱ \text{ رادیان}$$

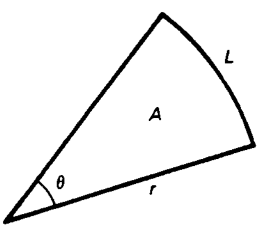
که در آن علامت $\approx$ تساوی تقریبی است. برای احتراز از خلط درجه و رادیان، این قرارداد را می‌پذیریم که ***زاویه به رادیان است مگر آنکه همراه با کلمهٔ " درجه " یا علامت درجه °*** ***باشد***. لذا، با این فرض،

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\frac{180}{\pi} \text{ درجه } = 30°, \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\frac{180}{\pi} \text{ درجه } = 45°,$$

$$60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad 90° = 90\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{2},$$

و از این قبیل.

به‌طورکلی، فرض کنیم دایرهٔ شکل ۱۴ به شعاع r باشد؛ درنتیجه، $|OP| = r$، $M = (r, 0)$ به جای $|OP| = 1$، $M = (1, 0)$، و L طول قوس $\widehat{MP}$ باشد. دراین‌صورت، مقیاس رادیان θ مساوی نسبت L/r تعریف می‌شود (اگر $r = 1$، این به تعریف قبل تحویل می‌شود). واحد طول در نسبت L/r حذف می‌شود، و به این دلیل مقیاس رادیان " بدون بعد " است. حال می‌توان برای طول L یک قوس مستدیر به شعاع r که، مثل شکل ۱۵، در مرکزش زاویه‌ای برابر θ رادیان دربردارد یک‌فرمول نوشت. در واقع، چون $\theta = L/r$



شکل ۱۵

فوراً معلوم می‌شود که

$$L = r\theta. \tag{۷}$$

همچنین، برای مساحت A یک قطاع مستدیر به شعاع r که زاویهٔ مرکزی‌اش θ رادیان است فرمول ساده‌ای وجود دارد (ر.ک. شکل ۱۵). واضح است که A با θ نسبت مستقیم

داشته و وقتی $\theta = 0$ مساوی‌صفر است. بنابراین، $A = k\theta$ ، که در آن k یک ثابت‌تناسب مثبت است. برای تعیین k ، ملاحظه می‌کنیم که وقتی $\theta = 2\pi$ ، $A = \pi r^2$ ، زیرامساحت یک قرص مستدیر کامل به‌شعاع r مساوی πr^2 است. لذا، $\pi r^2 = 2\pi k$ ، یامعادلاً $k = \frac{1}{2}r^2$ و فرمول $A = k\theta$ خواهد شد

$$A = \frac{1}{2} r^2\theta. \qquad (۸)$$

تبصره. فرمولهایی که بعداً برای محاسبهٔ حدود، مشتقات، و انتگرالهای توابع مثلثاتی به دست می‌آیند همه براین فرض تلویحی استوارند که زوایا به رادیان اند، و در صورتی که به درجه باشند شکل متفاوت پیچیده‌تری را به خود می‌گیرند. لذا، درحل‌مسائل‌حساب دیفرانسیل و انتگرال باید از مقیاس رادیان استفاده کرد، که اغلب در این مورد اشتباه می‌شود. با اینحال، اغلب می‌خواهند *جوابهای* مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال را به درجه بیان کنند، زیرا در زندگی روزمره مقیاس درجه از مقیاس رادیان معمولتر است.

فرض کنیم n عدد صحیح دلخواهی باشد. با افزودن $2n\pi$ رادیان به زاویهٔ θ در شکل ۱۴ موجب می‌شودکه شعاع OP ، $|n|$ دوران‌کامل‌حول‌مبداء درجهت خلاف عقربه‌های ساعت بزند اگر $n > 0$ و در جهت عقربه‌های ساعت بزند اگر $n < 0$ (OP در صورت $n = 0$ اصلاً تغییر نمی‌کند). این تأثیری بر موضع نهایی OP ندارد؛ درنتیجه، اثری بر مختصات P ، یعنی بر مقادیر کسینوس و سینوس، نخواهد داشت. بنابراین، به‌ازای‌هر عدد صحیح n ،

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$

همچنین، شعاع OP قائم است اگر و فقط‌اگر $\theta = (n + \frac{1}{2})\pi$ و افقی است اگر و فقط‌اگر $\theta = n\pi$ ، که در آن n عدد صحیح دلخواهی است. چون $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ ، پس $\cos\theta = 0$ اگروفقط‌اگر $\theta = (n + \frac{1}{2})\pi$، درحالی‌که $\sin\theta = 0$ اگروفقط‌اگر $\theta = n\pi$. بخصوص

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

و

$$\sin 0 = \sin\pi = 0.$$

شعاع OP در امتداد محور مثبت x است اگر $\theta = 0$ و در امتداد محور منفی x است اگر $\theta = \pi$ ؛ درنتیجه،

$$\cos 0 = 1, \qquad \cos\pi = -1,$$

درحالی که OP در امتداد محور مثبت y است اگر $\theta = \pi/2$ و درامتداد محور منفی y است

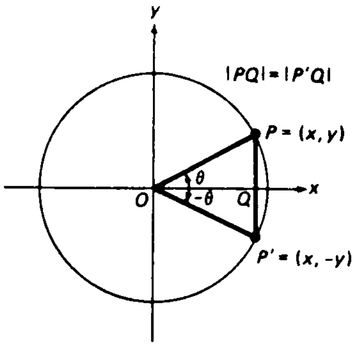
اگر $\theta = 3\pi/2$ ؛ درنتیجه،

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

همچنین، تغییر θ به $-\theta$ موجب تبدیل نقطهٔ $P = (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ بـه نقطهٔ $P' = (x, -y) = (\cos\theta, -\sin\theta)$ می‌شـود ، که منعکس آن نسبت به محور x است (ر. ک. شکل ۱۶) . اما $P' = (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ ؛ و لذا، طبق تساوی جفتهای مرتب،

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta. \tag{۹}$$

اولین فرمول از این فرمولهای مهم به ما می‌گوید که $\cos\theta$ یک تابع زوج است، و دومین فرمول می‌گوید که $\sin\theta$ یک تابع فرد می‌باشد.



شکل ۱۶

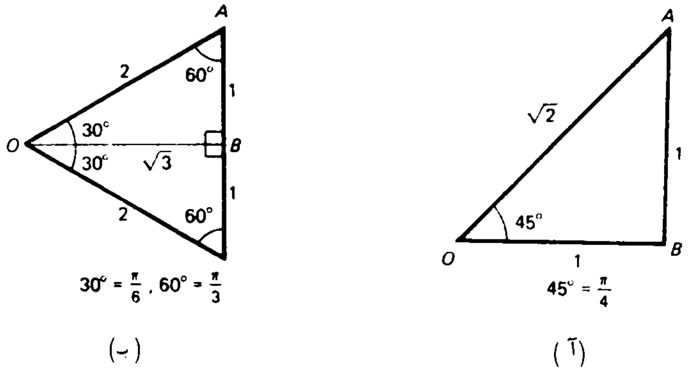
علاوه‌بر مضارب صحیح $\pi/2$ ، چند مقدار خاص دیگری از θ وجود دارند کـه مقادیر توابع مثلثاتی در آنها را می‌توان بدون مراجعه به جداول عددی یا ماشین حساب علمی حساب کرد. شکل ۱۷ (آ) یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به طول ضلع ۱ را نشان می‌دهد، که در آن می‌توان دید

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan\frac{\pi}{4} = \frac{|AB|}{|OB|} = 1,$$

وشکل ۱۷ (ب) یک مثلث متساوی‌الاضلاع دو نیم شده به طول ضلع 2 را نشان می‌دهد، که در آن می‌توان دید

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{|OB|}{|AB|} = \sqrt{3}.$$



شکل ۱۷

این مقادیر از توابع سینوس، کسینوس، و تانژانت را باید به‌خاطر سپرد، زیرا باآنها مکرر مواجه می‌شویم.

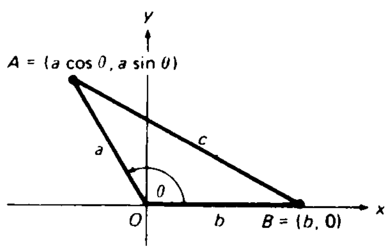
قانون کسینوسها. تعمیم زیر از قضیهٔ فیثاغورس ابزار مفیدی برای حل مسائل مثلثاتی است.

قضیهٔ ۲ (قانون کسینوسها). *فرض کنیم OAB مثلثی (نه لزوماً " قائم‌الزاویه) بوده، و θ زاویه‌ای به رأس O باشد. در این صورت،*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta, \tag{۱۰}$$

که در آن $a = |OA|$ ، $b = |OB|$ ، و $c = |AB|$.

برهان. مثلث OAB به رأس O را در مبداء صفحهٔ xy و ضلع OB را درامتدادمحور مثبت x قرار می‌دهیم. در این صورت، مثل شکل۱۸، و به کمک فرمول (۲)، صفحهٔ۳۶، برای



شکل ۱۸

مجذور فاصلهٔ بین دو نقطه، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} c^2 = |AB|^2 &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta)^2 \\ &= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2 - 2ab\cos\theta, \end{aligned}$$

که، به خاطر (۴)، معادل (۱۰) می‌باشد.

توجه کنید که اگر $\theta = \pi/2$ ، مثلث OAB قائم‌الزاویه شده و قانون کسینوسها به قضیهٔ فیثاغورس $c^2 = a^2 + b^2$ تحویل می‌شود.

مثال ۲. زاویهٔ بین دو ضلع یک مثلث 60° است. اگر این اضلاع به طولهای 2 و 3 باشند، طول ضلع سوم چقدر است؟

حل. فرض کنیم a و b طول اضلاع داده شده بوده، و c طول ضلع سوم باشد. می‌دانیم که $a = 2$ ، $b = 3$ ، و نیز $\theta = \pi/3$. بنابراین، طبق فرمول (۱۰)،

$$c^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = 4 + 9 - 12\left(\frac{1}{2}\right) = 7,$$

درنتیجه، $c = \sqrt{7}$.

به کمک قضیهٔ ۲، می‌توان فرمول کلیدی

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (11)$$

برای کسینوس تفاضل بین دو زاویهٔ α و β (حروف کوچک یونانی آلفا و بتا) را ثابت‌کرد. مثلث OAB درشکل ۱۹ را درنظرمی‌گیریم، که در آن O مبداء است ، $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ و $B = (\cos\beta, \sin\beta)$. زاویهٔ مقابل به ضلع AB مساوی $\theta = \alpha - \beta$ است ، و $|OA| = |OB| = 1$. از یک سو، طبق قانون کسینوسها که بر مثلث OAB اعمال شده ،

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA|\,|OB|\cos\theta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta),$$

و از سوی دیگر، بنابر فرمول مجذور فاصلهٔ بین نقاط A و B ،

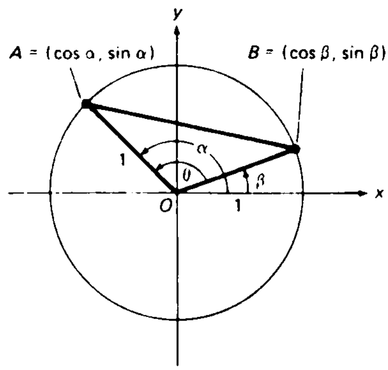
$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta \\ &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta), \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta),$$

که با (۱۱) معادل است.

شکل ۱۹ با این فرض رسم شده که $0 < \beta < \alpha$. لازم است حالات دیگر را در نظر گرفته و متقاعد شوید که در هر مورد همان فرمول (۱۱) به دست می‌آید.



شکل ۱۹

از تعویض β با $-\beta$ در (۱۱) و استفاده از فرمولهای (۹)، فرمول لنگه‌ٔ

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{۱۱'}$$

به دست می‌آید. برای به دست آوردن فرمولهایی برای $\sin(\alpha + \beta)$ و $\sin(\alpha - \beta)$، ابتدا در (۱۱) اختیار می‌کنیم $\alpha = (\pi/2) + \theta, \beta = \pi/2$. این کار نتیجه می‌دهد

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\cos\frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\sin\frac{\pi}{2},$$

یا، معادلاً،

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta, \tag{۱۲}$$

زیرا $\cos(\pi/2) = 0$ و $\sin(\pi/2) = 1$. حال در (۱۱') اختیار می‌کنیم $\alpha = \pi/2, \beta = \theta$، نتیجه می‌دهد

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta,$$

یا، معادلاً،

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta. \tag{۱۲'}$$

حال، از تعویض α با $\alpha + (\pi/2)$ در (۱۱') ، به دست می‌آوریم

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\beta,$$

که پس از اعمال (۱۲) و (۱۲') و ضرب در -1 ، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad (۱۳)$$

بالاخره، از تعویض β با $-\beta$ در (۱۳) ، فرمول لنگه‌ٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \qquad (۱۳')$$

قوانین جمع . فرمولهای (۱۱) ، (۱۱') ، (۱۳) ، و (۱۳') ، که اکنون آنها را به شکل مناسبتری برای به خاطر آوردن درمی‌آوریم ، **قوانین جمع** برای توابع سینوس و کسینوس نامیده می‌شوند .

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

جدول زیر شامل چند فرمول مثلثاتی مفید دیگر است و به‌طرز اثبات آنها اشاره شده است .

فرمول	برهان
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	در فرمول مربوط به $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ ، θ را به $-\theta$ تغییر دهید .
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$	در فرمول مربوط به $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ ، θ را به $-\theta$ تغییر دهید .
$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$	در فرمول مربوط به $\sin(\alpha + \beta)$ ، $\alpha = \pi, \beta = \theta$ را اختیار کنید .
$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	در فرمول فوق، θ را به $-\theta$ تغییر دهید .
$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$	در فرمول مربوط به $\cos(\alpha + \beta)$ ، $\alpha = \pi, \beta = \theta$ را اختیار کنید .
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	در فرمول فوق، θ را به $-\theta$ تغییر دهید .

فرمولهای زاویهٔ مضاعف. با فرض $\alpha = \beta = \theta$ در فرمولهای مربوط به $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ ، **فرمولهای مهم زاویهٔ مضاعف** به دست می‌آیند :

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \tag{۱۴}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta. \tag{۱۴'}$$

باتوجه به

$$1 + \cos 2\theta = 1 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = (1 - \sin^2\theta) + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta,$$
$$1 - \cos 2\theta = 1 - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = (1 - \cos^2\theta) + \sin^2\theta = 2\sin^2\theta$$

به جفت فرمول مفید دیگری می‌رسیم :

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

ما قبلاً فرمولی برای سینوس تفاضل بین زوایا داشتیم . همچنین ، می‌توان فرمولی برای تفاضل بین دو سینوس به دست آورد . در واقع ،

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$- \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

و لذا . پس از حذف یک جفت جمله ،

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{۱۵}$$

بعداً خواهید دید که این فرمول مفید است .

فرمولهای فوق ، که مربوط به سینوس و کسینوس اند ، می‌توانند در اثبات فرمولهای مشابهی در باب سایر توابع مثلثاتی مفید واقع شوند .

مثال ۳ . نشان دهید که

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta,$$

و

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}. \tag{۱۶}$$

حل . با استفاده از فرمولهای نظیر به سینوس و کسینوس، داریم

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta,$$

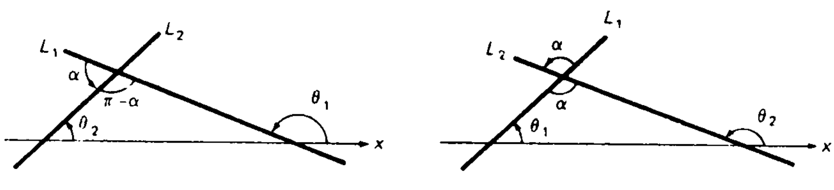
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta.$$

همچنین،

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta},$$

که پس از تقسیم صورت و مخرج بر حاصل ضرب $\cos\alpha\cos\beta$ ، به فرمول (۱۶) تحویل می‌شود .

زاویهٔ بین دو خط . حال، به عنوان کاربردی از فرمول (۱۶)، زاویهٔ بین دو خط را مورد بحث قرار می‌دهیم . فرض کنیم L_1 و L_2 دو خط متقاطع در نقطهٔ P باشند، که می‌توان فرض کرد بالای محور x باشد (مثل برهان قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۵۳) . در این صورت، کوچکترین زاویهٔ α که L_1 می‌تواند حول P در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بچرخد تا بر L_2 منطبق شود *زاویهٔ* بین L_1 و L_2، یا دقیقتر *زاویه از* L_1 به L_2، نام دارد . (زاویهٔ بین دو خط موازی یا منطبق 0 تلقی می‌شود .) از شکل ۲۰ واضح است که α همواره در بازهٔ $0\le\alpha<\pi$ قرار دارد . فرض کنیم θ_1 میل L_1، و θ_2 میل L_2 باشد . هرگاه مثل شکل ۲۰ (آ) $\theta_1<\theta_2$، آنگاه $\theta_2=\alpha+\theta_1$ یا $\alpha=\theta_2-\theta_1$ (ر.ک. برهان قضیهٔ



(ب)　　　　(آ)

شکل ۲۰

مذکور)، حال آنکه هرگاه مثل شکل ۲۰ (ب) $\theta_1>\theta_2$ ، آنگاه $\theta_1=(\pi-\alpha)+\theta_2$ یا $\alpha=\pi+(\theta_2-\theta_1)$. فرض کنیم L_1 و L_2 مایل و غیرعمود به شیبهای m_1 و m_2 باشند؛ درنتیجه، $m_1=\tan\theta_1$ و $m_2=\tan\theta_2$. هرگاه $\theta_1<\theta_2$ ، آنگاه، به‌کمک رابطهٔ

.(۱۶)

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

حال آنکه هرگاه $\theta_1 > \theta_2$ ، آنگاه

$$\tan\alpha = \tan[\pi + (\theta_2 - \theta_1)] = \frac{\sin[\pi + (\theta_2 - \theta_1)]}{\cos[\pi + (\theta_2 - \theta_1)]}$$
$$= \frac{-\sin(\theta_2 - \theta_1)}{-\cos(\theta_2 - \theta_1)} = \tan(\theta_2 - \theta_1),$$

درنتیجه ، مثل قبل ،

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}. \qquad (۱۷)$$

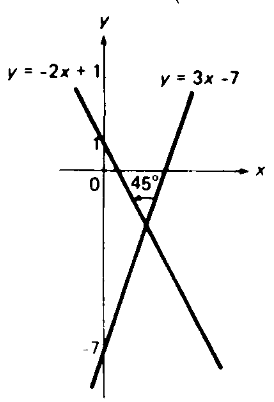
توجه کنید که $m_1 m_2 \neq -1$ ، زیرا L_1 و L_2 غیر عمودند ؛ درنتیجه ، مخرج $1 + m_1 m_2$ در (۱۷) ناصفر است .

مثال ۴ . زاویهٔ α ی بین خطوط $y = 3x - 7$ و $y = -2x + 1$ را بیابید .

حل . اولین خط به شیب $m_1 = 3$ ، و دومین خط به شیب $m_2 = -2$ است . با گذاردن این مقادیر در فرمول (۱۷) ، به دست می‌آوریم

$$\tan\alpha = \frac{-2 - 3}{1 - 6} = 1.$$

چون $0° \le \alpha < 180°$ ، نتیجه می‌گیریم که زاویهٔ α مساوی $45°$ است ، که از خط اول به خط دوم سنجیده می‌شود (ر.ک. شکل ۲۱) .



شکل ۲۱

مسائل

زاویهٔ داده شده را از درجه به رادیان ببرید .

۱. 15° ۲. 150° ۳. 1500°

۴. -72° ۵. -220° ۶. 423°

زاویهٔداده شده را از رادیان به درجه ببرید .

۷. $\pi/15$ ۸. $\pi/45$ ۹. $-\pi/12$

۱۰. -5 ۱۱. π^2 ۱۲. 60

طول L قوس مستدیر و مساحت A قطاع مستدیر با شعاع r و زاویهٔ مرکزی θ ی داده شده‌را بیابید .

۱۳. $r = 2, \theta = \pi/4$ ۱۴. $r = 3, \theta = \pi/6$

۱۵. $r = 5, \theta = 120^\circ$ ۱۶. $r = 10, \theta = 5\pi/6$

۱۷. $r = 50, \theta = 1^\circ$ ۱۸. $r = 4, \theta = 36^\circ$

مثلث به اضلاع a, b, c و زاویهٔ θ مقابل ضلع c داده شده است .

۱۹. c را درصورتی بیابید که $a = 3, b = 5, \theta = \pi/6$

۲۰. c را درصورتی بیابید که $a = 4, b = 6, \theta = \pi/4$

۲۱. b را درصورتی بیابید که $a = 5, c = 7, \theta = 2\pi/3$

۲۲. a را درصورتی بیابید که $b = 6, c = 9, \theta = \pi/3$

۲۳. a را درصورتی بیابید که $b = 10, c = 15, \theta = 3\pi/4$

۲۴. θ را درصورتی بیابید که $a = 5, b = 12, c = 13$

رسم است که برای اضلاع و طولشان یک علامت به کار می‌رود .

در مسائل ۲۵ تا ۴۸ عبارت داده شده را بدون توسل به جدول یا ماشین حساب محاسبه کنید .

۲۵. $\tan 135^\circ$ ۲۶. $\sec 45^\circ$ ۲۷. $\csc 60^\circ$

۲۸. $\cot 30^\circ$ ۲۹. $\csc 30^\circ$ ۳۰. $\cot 45^\circ$

۳۱. $\sec \frac{\pi}{6}$ ۳۲. $\tan \frac{2\pi}{3}$ ۳۳. $\sec \frac{\pi}{3}$

۳۴. $\tan \frac{5\pi}{6}$ ۳۵. $\cot \frac{\pi}{3}$ ۳۶. $\csc \frac{\pi}{4}$

۳۷. $\cos(-120^\circ)$ ۳۸. $\sin 765^\circ$ ۳۹. $\sec 150^\circ$

۴۰. $\cot 210^\circ$ ۴۱. $\csc 135^\circ$ ۴۲. $\tan 300^\circ$

۴۳. $\cot\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$ ۴۴. $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)$ ۴۵. $\tan \frac{19\pi}{6}$

۴۶. $\csc\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$ ۴۷. $\sec\frac{11\pi}{3}$ ۴۸. $\cos\frac{99\pi}{4}$

آیا عدد داده شده مثبت، منفی، یا صفر است؟

۴۹. $\sin 200\pi$ ۵۰. $\sec 5$ ۵۱. $\cos 899°$ ۵۲. $\sin 2^4$

۵۳. مثلثی به اضلاع a, b, c و زوایای A, B, C مقابل به این اضلاع داده شده‌است. قانون سینوسها را تحقیق کنید:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

۵۴. نشان دهید که مساحت مثلث مسئلهٔ قبل مساوی است با

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

۵۵. مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع s چقدر است؟

۵۶. مساحت یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه به طول وتر h چقدر است؟

اتحاد مثلثاتی داده شده را ثابت کنید.

۵۷. $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

۵۸. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

۵۹. $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

۶۰. $\sin 4\theta = 8\sin\theta\cos^3\theta - 4\sin\theta\cos\theta$

۶۱. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

۶۲. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

۶۳. $\tan\theta = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ ۶۴. $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

۶۵. $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ۶۶. $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

زاویهٔ بین جفت خطوط داده شده، که از خط اول به خط دوم سنجیده می‌شود، را بیابید.

۶۷. $5x - y + 7 = 0,\ 3x + 2y = 0$

۶۸. $3x - 2y + 7 = 0,\ 2x + 3y - 3 = 0$

۶۹. $2x - y - 4 = 0,\ x - 3y + 5 = 0$

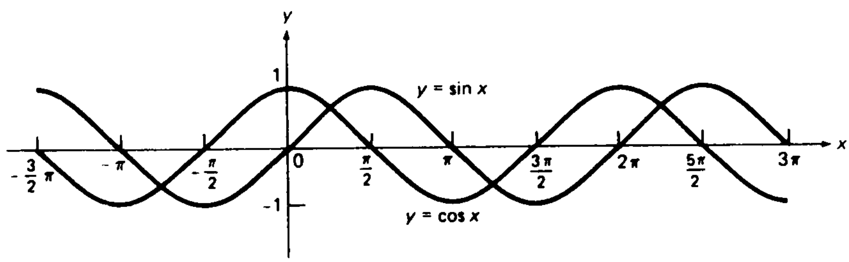
۷۰. $\sqrt{3}x - y + 1 = 0,\ \sqrt{3}x + y - 1 = 0$

۷۱. تقریب $\frac{355}{113} \approx \pi$ با کمال تعجب دقیق است. چقدر دقیق؟

۷۲. نشان دهید که طول شیار مارپیچ در یک صفحهٔ گرامافون 12 اینچی حدود یکچهارم میل است. فرض کنید صفحه 20 دقیقه طول بکشد، در 2 اینچی مرکز تمام شود، و سرعتش $33\frac{1}{3}$ rpm (دور بر دقیقه) باشد.

۴.۱ مطالب دیگر در باب توابع مثلثاتی

حال نمودار توابع مثلثاتی را بررسی می‌کنیم، متغیر مستقل را به جای θ با x نشان داده، و فرض می‌کنیم x به رادیان باشد. بحث را با سینوس و کسینوس آغاز می‌کنیم. نمودارهای $\sin x$ و $\cos x$ در شکل ۲۲ و در یک دستگاه مختصات دکارتی نموده شده‌اند، و هریک‌را



شکل ۲۲

می‌توان مستقیما" از تعبیر هندسی توابع یا غیرمستقیم به کمک ماشین حساب علمی یا جداول توابع مثلثاتی به دست آورد. هر نمودار یک منحنی‌است‌که‌به‌طور‌مرتب‌بالاوپایین می‌رود. البته، هیچ شکلی نمی‌تواند بیش از قسمتی از نمودار تابعی مانند $\sin x$ که بر تمام خط حقیقی تعریف شده‌است را نشان دهد، ولی آنچه رخ می‌دهد واضح است. بخشی از $\sin x$ که روی هر بازهٔ

$$2n\pi \leq x \leq 2(n+1)\pi \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

است نسخهٔ کامل بخشی از آن است که روی بازهٔ $0 \leq x \leq 2\pi$ قرار دارد، و همین امر در مورد نمودار $\cos x$ درست است.

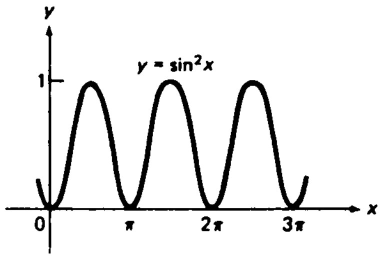
توابع متناوب. این خاصیت تکراری نمودارهای سینوس و کسینوس (و توابع بسیار دیگر، از جمله توابع مثلثاتی دیگر) **تناوب** نام دارد. به‌طور دقیقتر، گوییم تابع f **متناوب**، با دورهٔ **تناوب** p ($p \neq 0$) است اگر

$$f(x+p) \equiv f(x),$$

یعنی، اگر p را به شناسهٔ f بیفزاییم، مقدارش تغییر نکند: در اینجا فرض است که قلمرو

f در صورت شامل بودن x حاوی $x \pm p$ باشد. با این زبان، توابع $\sin x$ و $\cos x$ هر دو متناوب‌اند، با دورهٔ تناوب 2π. این توابع متناوب با دورهٔ تناوب $2n\pi$، که n عدد صحیح مثبت یا منفی دلخواهی است، نیز می‌باشند. کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت یک تابع متناوب دورهٔ *تناوب اساسی* آن نام دارد. از شکل ۲۲ واضح است که دورهٔ تناوب اساسی $\sin x$ و $\cos x$ مساوی 2π است.

مثال ۱. شکل ۲۳ نشان می‌دهد که دورهٔ تناوب اساسی $\sin^2 x$ مساوی π، یعنی نصف



شکل ۲۳

دورهٔ تناوب اساسی خود $\sin x$ است.

اختیاری. این مطلب را می‌توان به‌طور جبری به صورت زیر دید. عدد π دورهٔ تناوب $\sin^2 x$ است، زیرا $\sin^2 (x+\pi) \equiv (-\sin x)^2 \equiv \sin^2 x$. فرض کنیم $\sin^2 x$ دورهٔ تناوب مثبت p کوچکتر از π دارد. پس

$$\sin^2 (x+p) \equiv \sin^2 x,$$

که در آن $0 < p < \pi$. با اختیار $x = 0$ در آخرین فرمول، به دست می‌آوریم

$$\sin^2 p = \sin^2 0 = 0,$$

یا معادلاً $\sin p = 0$. اما این ممکن نیست، زیرا $\sin p$ به ازای $0 < p < \pi$ نا صفر است. بنابراین، π **کوچکترین** دورهٔ تناوب مثبت $\sin^2 x$ می‌باشد.

توابع کراندار و بی‌کران. نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ هردو به نوار افقی $-1 \le y \le 1$ محدود شده‌اند. این نظیر آن است که بگوییم به ازای هر x، $|\sin x| \le 1$ و $|\cos x| \le 1$ (ر.ک. صفحهٔ ۸۸) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ کاملاً در نوار افقی $-C \le y \le C$ جا

داشته باشد ، یا معادلاً " ، به ازای هر x ، $|f(x)| \leq C$ ، گوییم f *کراندار* است ، در غیر این صورت گوییم f *بی‌کران* است . به‌طورکلی ، گوییم تابع $y = f(x)$ برب*ازهٔ* I *کراندار* است اگر $-C \leq f(x) \leq C$ ، یا معادلاً " ، به ازای جمیع مقادیر x در I و $C > 0$ ای ، $|f(x)| \leq C$ ، اما در غیر این صورت گوییم f بر I *بی‌کران* می‌باشد .

مثال ۲ . تابع خطی

$$f(x) = mx + b \qquad (m \neq 0)$$

بر $[-1, 1]$ کراندار و بر $[0, \infty)$ بی‌کران است . به‌طورکلی ، f بر هر بازهٔ متناهی کراندار و بر بازهٔ نامتناهی بی‌کران است .

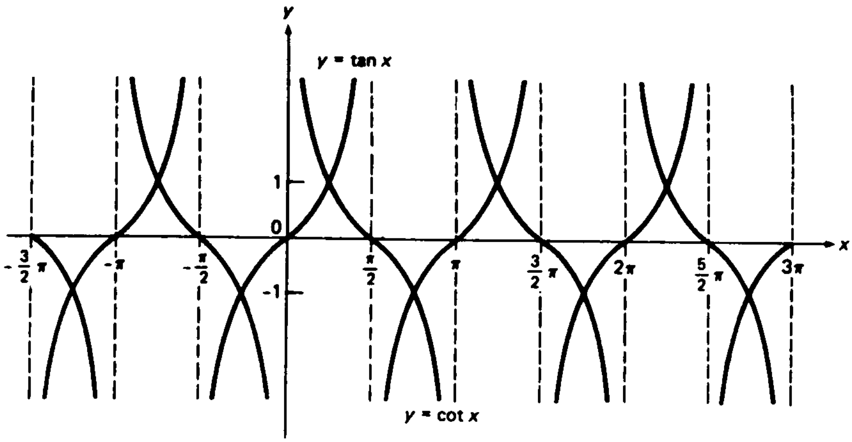
به‌خاطر قضیهٔ ۱ ، صفحهٔ ۸۲ ، و فرمولهای

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

انتقال $\sin x$ به اندازهٔ $\pi/2$ به چپ نمودار $\cos x$ را می‌دهد ، و معادلاً " ، انتقال نمودار $\cos x$ به اندازهٔ $\pi/2$ به راست نمودار سینوس را خواهد داد (ر.ک. شکل ۲۲) . به زبان مهندسی ، که توابع سینوس و کسینوس برای توصیف پدیده‌های متناوب به کار می‌روند و x زمان است ، $\cos x$ از $\sin x$ به اندازهٔ $\pi/2$ (یا $90°$) *تقدم دارد* (" جلو است ")، ولی $\sin x$ از $\cos x$ به اندازهٔ $\pi/2$ *تأخر* دارد (" عقب است ") . در همین وضع ، گویند دو " شکل موجی " $\sin x$ و $\cos x$ به اندازهٔ $90°$ *تفاوت فاز* دارند . توجه کنید که نمودار $\cos x$ نسبت به محور y متقارن است ، و این مطلب انتظارش می‌رفت ، زیرا $\cos x$ تابعی زوج است ، و نمودار $\sin x$ نسبت به مبداء متقارن است ، زیرا $\sin x$ یک تابع فرد است . همچنین ، می‌بینیم که $\cos x$ بر $[-\pi, 0]$ صعودی و بر $[0, \pi]$ نزولی است ، ولی $\sin x$ بر $[-\pi/2, \pi/2]$ صعودی و بر $[\pi/2, 3\pi/2]$ نزولی می‌باشد .

حال توابع $\tan x$ و $\cot x$ را درنظر می‌گیریم . شکل ۲۴ نمودار این دو تابع را دریک دستگاه مختصات قائم نشان می‌دهد . تابع $\tan x$ به ازای $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ ، که در آن n عدد صحیح است ، تعریف نشده است . از اینرو ، می‌توان $\tan x$ را متشکل از بی‌نهایت[1]

۱ . *اگر مجموعه‌ای شامل n عنصر باشد ، که n عددی صحیح و نامنفی است ، گوییم مجموعه متناهی است ؛ در غیر این صورت ، گوییم مجموعه نامتناهی است ، یا شامل بی‌نهایت عنصر است . مثلاً " ، مجموعهٔ تمام اعداد صحیح نامتناهی است ، به ازای بی‌نهایت مقدار از x ، $\sin x = 0$ ، و از این قبیل .*



شکل ۲۴

تابع جداگانهٔ

$$y = \tan x \qquad ((n - \tfrac{1}{2})\pi < x < (n + \tfrac{1}{2})\pi),$$

تصور کرد به نام *شاخه‌های* $\tan x$ که هر یک قلمرو تعریف و نمودار خود (که آن نیز یک شاخه نامیده می‌شود) را دارد که روی بازهٔ بازی به طول π قرار دارد. توجه کنید که شاخه‌های $\tan x$ به وسیلهٔ خطوط قائم $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ از هم جدا شده‌اند. به‌همین‌نحو، تابع $\cot x$ به ازای $x = n\pi$ تعریف نشده‌است؛ و لذا، این نیز از بی‌نهایت شاخهٔ

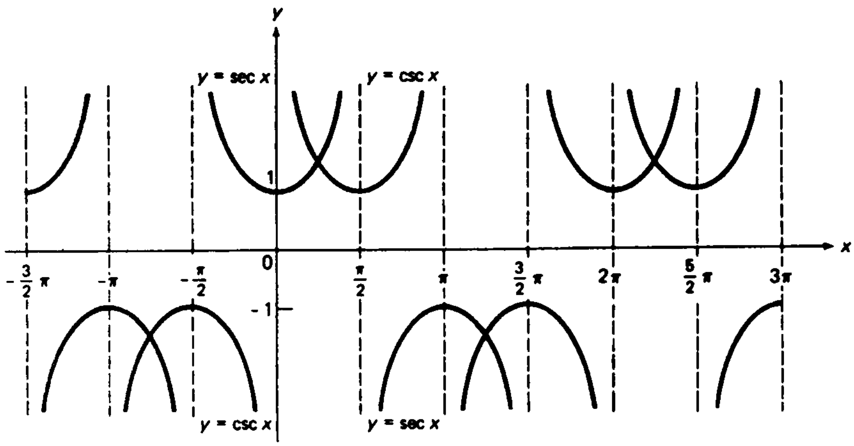
$$y = \cot x \qquad (n\pi < x < (n + 1)\pi)$$

تشکیل شده است که به‌وسیلهٔ خطوط مستقیم $x = n\pi$ از هم جدا شده‌اند.

از شکل ۲۴ معلوم می‌شود که هر شاخهٔ $\tan x$ یک تابع صعودی بی‌کران است، حال آنکه هر شاخهٔ $\cot x$ یک تابع نزولی بی‌کران می‌باشد. شکل نیز نشان می‌دهد که هر دو تابع $\tan x$ و $\cot x$ متناوبند، با دورهٔ تناوب اساسی π (یک تابع متناوب لازم نیست به ازای هر مقدار از x تعریف شده باشد). البته، 2π نیز دورهٔ تناوب این توابع است، ولی دورهٔ تناوب *اساسی*، یعنی کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت، نیست. توجه کنید که $\tan x = 0$ اگر و فقط اگر $x = n\pi$، حال آنکه $\cot x = 0$ اگر و فقط اگر $x = (n + \frac{1}{2})\pi$.

نمودار توابع مثلثاتی $\sec x$ و $\csc x$ در شکل ۲۵ نموده شده است. از این شکل واضح است که هر یک از این توابع بی‌کران و متناوب است، با دورهٔ تناوب اساسی 2π، و بی‌نهایت شاخه دارد. توجه کنید که $\sec x$ به اندازهٔ $\pi/2$ بر $\csc x$ تقدم دارد، ولی $\csc x$ به اندازهٔ $\pi/2$ از $\sec x$ تأخر دارد. این خاصیت از توابع $\sin x$ و

$\cos x$ ، که $\csc x$ و $\sec x$ متقابلهای آنهایند، " به ارث رسیده است".



شکل ۲۵

مثال ۳. جمیع مقادیر x را بیابید که $\sec x = 2$.

حل. تابع $\sec x$ مساوی 2 است هر وقت $\cos x = 1/\sec x$ مساوی $\frac{1}{2}$ باشد. این امر در نقاط $x = \pm\pi/3$ رخ می‌دهد، ولی در هیچ نقطه از بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رخ نمی‌دهد، زیرا $\cos x$ بر $[-\pi, 0]$ صعودی و بر $[0, \pi]$ نزولی است. همچنین، به ازای هر عدد صحیح n ، $\sec(x + 2n\pi) \equiv \sec x$. بنابراین، $\sec x = 2$ اگر و فقط اگر $x = (2n \pm \frac{1}{3})\pi$ که در آن n عدد صحیح دلخواهی است.

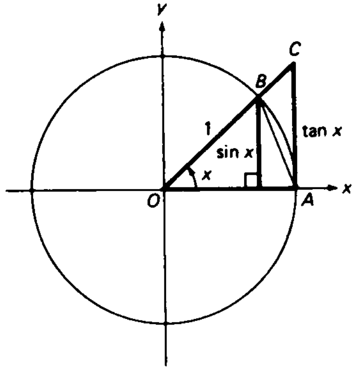
چند نامساوی مثلثاتی. بالاخره، چند نامساوی مفید به دست می‌آوریم که توابع سینوس و کسینوس در آنها صدق می‌کنند. شکل ۲۶ را درنظر می‌گیریم، که در آن دایره به‌شعاع یک بوده و زاویهٔ x در بازهٔ $0 < x < \pi/2$ قرار دارد. چون

مساحت مثلث AOB > مساحت قطاع AOB > مساحت مثلث AOC

نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x, \qquad (۱)$$

که در آن از فرمول (۸)، صفحهٔ ۹۰، و این امر که مساحت یک مثلث نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاعش می‌باشد استفاده کرده‌ایم. از تقسیم (۱) بر کمیت مثبت $\frac{1}{2}\sin x$ ، به



شکل ۲۶

دست می‌آوریم

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

یا، معادلاً،

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (۲)$$

(ر.ک. قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۱۳۶). این نامساوی مضاعف به ازای $-\pi/2 < x < 0$ و نیز به‌ازای $0 < x < \pi/2$ برقـرار است؛ و درنتیجه، به ازای $0 < |x| < \pi/2$ برقرار است، زیراتعویض x با $-x$ مقدار تابع زوج $\cos x$ یا تابع $(\sin x)/x$، که آن نیز زوج است، را تغییـر نمی‌دهد:

$$\frac{\sin(-x)}{-x} \equiv \frac{-\sin x}{-x} \equiv \frac{\sin x}{x} \qquad (x \neq 0).$$

چون $(\sin x)/x$ به ازای $0 < |x| < \pi/2$ مثبت است، نامساوی دوم در (۲) رامی‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1,$$

یا، معادلاً،

$$|\sin x| < |x|. \qquad (۳)$$

این نامساوی به‌ازای $|x| \geq \pi/2$ و نیز به‌ازای $0 < |x| < \pi/2$ برقرار است، زیرا $|\sin x| \leq 1$ و $\pi/2 \approx 1.57 > 1$. بنابراین، (۳) به ازای هر $x \neq 0$ برقرار است، و در واقع،

$$|\sin x| \leq |x| \qquad (۳')$$

به ازای هر x ، به انضمام $x = 0$ ، برقرار است، زیرا $|\sin 0| = |0|$.

مسائل

فرض کنید n عددی صحیح باشد. نشان دهید که

۱. $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x$

۲. $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$

فرض کنید تابع f متناوب با دورهٔ تناوب p باشد؛ درنتیجه، $f(x + p) \equiv f(x)$. نشان دهید که

۳. $f(x - p) \equiv f(x)$

۴. به ازای هر عدد صحیح n ، $f(x + np) \equiv f(x)$.

نشان دهید که

۵. $\tan x$ و $\cot x$ هر دو توابعی فردند

۶. $\sec x$ یک تابع زوج است، ولی $\csc x$ یک تابع فرد می‌باشد.

بگویید تابع داده شده زوج است یا فرد (یا هیچکدام) .

۷. $f(x) = \sin x + \cos x$

۸. $f(x) = x + \sin x$

۹. $f(x) = \sin^2 x - \cos x$

۱۰. $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$

تمام مقادیر صادق در هر یک از روابط زیر را بیابید.

۱۱. $\cos x = 1$

۱۲. $\sin x = 1$

۱۳. $\sin x = -1$

۱۴. $\cos x = -1$

۱۵. $\sin x = \frac{1}{2}$

۱۶. $\cos x = -\frac{1}{2}$

۱۷. $\tan x = 1$

۱۸. $\cot x = -1$

۱۹. $\csc x = -2$

۲۰. $\sec x = \sqrt{2}$

۲۱. $\sec x$ تعریف نشده است.

۲۲. $\csc x$ تعریف نشده است

جمیع بازه‌هایی به طول π را بیابید که بر آنها

۲۳. $\sin x$ صعودی است

۲۴. $\sin x$ نزولی است

۲۵. $\cos x$ نزولی است

۲۶. $\cos x$ صعودی است

دورهٔ تناوب اساسی تابع داده شده را بیابید.

۲۷. $\sqrt{\sin x}$

۲۸. $\cos^3 x$

۲۹. $|\cos x|$

۳۰. $\cos x + \sin x$

۳۱. نمودار تابع متناوب $y=f(x)$ را بکشید، با دورهٔ تناوب 2 ، که مقادیرش بر بازهٔ $-1 \le x \le 1$ با فرمول $y=1-|x|$ داده شده‌اند.

۳۲. تحقیق کنید که

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

از این چه رابطه‌ای بین نمودارهای $\tan x$ و $\cot x$ نتیجه می‌شود؟

۵.۱ مفهوم حد و پیوستگی

حال یک مسئلهٔ اساسی از حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطرح می‌کنیم. وقتی شناسهٔ x تابع $f(x)$ به‌مقدار معلوم a نزدیک می‌شود، رفتار مقادیر این تابع چگونه است؟ در بعضی حالات جواب شهودا" واضح است. مثلا" ، اگر $f(x)=x^2+1$ و x به عدد 2 نزدیک‌شود، به نظر واضح است که $f(x)$ به عدد $f(2)=2^2+1=5$ ، یعنی مقدار تابع در $x=2$ ، نزدیک می‌شود. این را خلاصه‌کرده می‌گوییم **حد** $f(x)$ ، وقتی x به 2 نزدیک شود، مساوی 5 است. اما، در حالات دیگر، نمی‌توان حد را به این آسانی، با یک جا نشانی ساده، یافت. در واقع، ممکن است تابع حتی در نقطه‌ای که باید حد حساب شود **تعریف نشده باشد**! مثالهای زیر نحوهٔ بروز این امر را نشان می‌دهند. در فصل بعد خواهید دید که این مثالها، صرف‌نظر از طبیعی بودن، مواردی است که **هر لحظه** بخواهیم نوع مهمی حد، به نام مشتق، را حساب کنیم رخ می‌دهند. لذا، خوب است در اینجا حدود را بیاموزیم؛ درنتیجه، داستان مشتق را می‌توان بعدا" بدون وقفه بازگو کرد.

مثال ۱. تابع

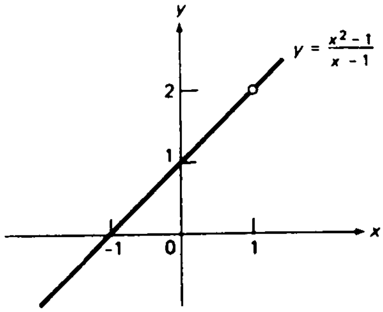
$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \tag{1}$$

به ازای هر $x \ne 1$ تعریف شده است، ولی به ازای $x=1$ تعریف نشده است، زیرا مخرج $x-1$ به ازای $x=1$ صفر است. در واقع، طرف راست (۱) به ازای $x=1$ به صورت مبهم $0/0$ درمی‌آید. چون

$$\text{اگر } x \ne 1 ، \quad f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1 \tag{1'}$$

ولی $f(1)$ تعریف نشده است، نمودار (۱) خط مستقیم $y=x+1$ بدون نقطهٔ $(1, 2)$ می‌باشد. این نمودار در شکل ۲۷ نموده شده است، که در آن نقطهٔ مفقود، طبق معمول،

با نقطهٔ توخالی نموده شده است. از شکل واضح است که، با آنکه $f(x)$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده است، اگر x خیلی به 1 نزدیک باشد، $f(x)$ خیلی به 2 نزدیک است، که از



شکل ۲۷

فرمول ('۱) به‌طور جبری نیز واضح است، چرا که اگر x تقریباً" (ولی نه صددرصد) مساوی 1 باشد، $x + 1$ باید تقریباً" مساوی 2 باشد. ما همهٔ این نکات را خلاصه کرده می‌گوییم **حد $f(x)$ وقتی x به 1 نزدیک شود مساوی 2 است**، یا، با علامت،

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2. \tag{۲}$$

به بیان دیگر، می‌توان گفت که **وقتی x به 1 نزدیک شود، $f(x)$ به 2 نزدیک می‌شود**، یا به طور خلاصه

$$f(x) \to 2 \quad ، \quad x \to 1 \text{ وقتی} \tag{'۲}$$

هنوز باید مفهوم حد را صوری کرد و آن را دقیقتر ساخت، و این کار در بخش بعد خواهد شد. ولی در این بین متذکر می‌شویم که هم‌اکنون به‌طور غیرصوری نشان داده‌ایم که

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2. \tag{۳}$$

حد (۳) نمونه‌ای است از یک مشتق؛ یعنی، مشتق تابع x^2 در نقطهٔ 1. به‌طور کلی، مشتق x^2 در نقطهٔ a حد زیر است:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

که اساساً" با همان استدلالی که در اثبات فرمول (۳)، که نظیر به حالت $a = 1$ است، به کار رفت معلوم می‌شود که مساوی $2a$ می‌باشد. بعداً" در این باب مطالب بسیاری خواهیم

گفت .

برای محاسبهٔ حد (۳) ، **فقط به کمی جبر نیاز داریم . همانطور که مثال زیر نشان** می دهد ، بعضی از حدود به این آسانی محاسبه نمی شوند .

مثال ۲ . حد

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad (۴)$$

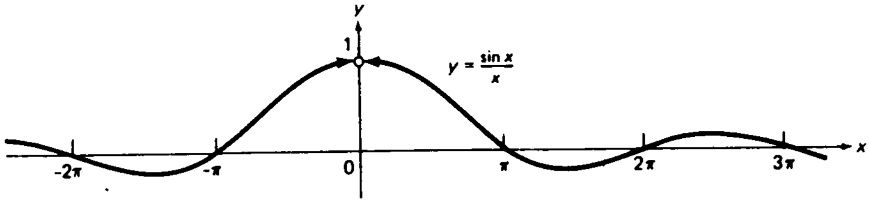
را محاسبه کنید .

حل . تابع $(\sin x)/x$ در $x = 0$ ، یعنی نقطه‌ای که می‌خواهیم حد را در آن حساب کنیم ، تعریف نشده است . به خاطر شباهت با مثال ۱ ، ممکن است بخواهیم صورت و مخرج را بر $x \neq 0$ تقسیم کنیم . اما در اینجا راهی برای تقسیم جبری وجود ندارد . برای محاسبهٔ حد (۴) ، مآلاً " به روش دیگری متوسل می شویم . اما فعلاً " می خواهیم ببینیم آیا می توان مقدار حد را حدس زد .

برای این کار ، از یک ماشین حساب علمی استفاده کرده مقادیر $(\sin x)/x$ را به‌ازای x های نزدیک به 0 محاسبه می‌کنیم ، و در این راه توجه می‌کنیم که $(\sin x)/x$ تابعی زوج است ؛ و لذا ، در هر دو نقطهٔ x و $-x$ یک مقدار خواهد داشت . نتایج محاسبات ما در جدول زیر نموده شده‌اند ، که در آن x به رادیان بوده و علامت $\pm$ داخل پرانتز به یاد می‌آورد که هردرایهٔ x عدد ذکر شده یا قرینهٔ آن می باشد .

x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$
$(\pm)$ 1.2	0.77670	$(\pm)$ 0.10	0.99833
1.0	0.84147	0.08	0.99893
0.8	0.89670	0.06	0.99940
0.6	0.94107	0.04	0.99973
0.4	0.97355	0.02	0.99993
0.2	0.99335	0	تعریف نشده

از این جدول قویاً " این برداشت می‌شود که وقتی x به 0 نزدیک شود ، مقادیر تابع $(\sin x)/x$ به 1 نزدیک می‌شوند ، و این امر در شکل ۲۸ نموده شده است ، که نمودار $(\sin x)/x$ را نشان می‌دهد . رفتار حدی تابع $(\sin x)/x$ در $x = 0$ ، یعنی رفتار تابع وقتی $x \to 0$ ، با رسم دو سر سهم درنقطهٔ $(0, 1)$ که نمودار وقتی $x \to 0$ به‌آنها می‌رسد نموده شده‌است. خود نقطهٔ $(0, 1)$ به‌نمودار تعلق ندارد ، و این امر با نقطهٔ توخالی در $(0, 1)$ نموده شده است ؛ این صرفاً " بدان خاطر است که تابع $(\sin x)/x$ در $x = 0$ تعریف نشده است . لذا ،



شکل ۲۸

به نظر می‌رسد که

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

و ما مآلاً برهان دقیق آن را در مثال ۷، صفحهٔ ۱۳۸، خواهیم داد.

تعریف غیرصوری حد. حال مثالهای ۱ و ۲ را در محدودهٔ کلیتری قرار داده و در باب‌هر تابع $f(x)$، هر حد L، و هر نقطهٔ ثابت a که متغیر مستقل یا شناسهٔ x به آن نزدیک می‌شود صحبت می‌کنیم. مثلاً، در مثال ۱،

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, \qquad a = 1, \qquad L = 2,$$

و در مثال ۲،

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad a = 0, \text{ و } \quad L = 1.$$

حال گوییم وقتی $x \to a$، **$f(x)$ به حد L نزدیک می‌شود**، یا **$f(x)$ در a دارای حد L است**، اگر وقتی x به a (بدون‌آنکه‌مساوی a شود) نزدیک شود، $f(x)$ به L نزدیک‌گردد. این را به صورت

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \tag{۵}$$

یا

$$\text{وقتی } x \to a \text{، } f(x) \to L \tag{۵'}$$

می‌نویسیم.

همانطور که امثلهٔ فوق نشان می‌دهند، وقتی می‌گوییم به ازای $x \to a$، $f(x)$ به L نزدیک می‌شود، مقصود ما واقعاً این است که وقتی $x \to a$، $f(x)$ می‌تواند به هر میزان خواسته شده به L نزدیک شود. به عبارت دیگر، به ازای هر x به‌قدر کافی نزدیک a، چه

سمت چپ چه سمت راست آن، باید بتوان $f(x)$ را هرقدر بخواهیم به L نزدیک سازیم (این کار به تغییر " دوطرفهٔ " x نیاز دارد) . هرقدر کمیت $|f(x)-L|$ کوچکتر باشد ، $f(x)$ به L نزدیکتر است؛ بدین معنی که کوچکی $|f(x)-L|$ یعنی نزدیکی $f(x)$ به L ، و به همین نحو ، کوچکی $|x-a|$ یعنی نزدیکی x به a . لذا ، رابطهٔ (۵) ، برحسب قدرمطلق ، می‌گوید که $|f(x)-L|$ را می‌توان به ازای جمیع مقادیر " به‌قدر کافی کوچک " (ولی ناصفر) از $|x-a|$ ، " بدلخواه کوچک " نمود . این ایده‌ها در بخش بعد دقیقتر خواهند شد .

اغلب کافی است از یک تابع حددار بدون تعیین حد آن سخن گفت . لذا ، گوییم $f(x)$ در a حد دارد اگر عددی مانند L باشد به‌طوری که (۵) برقرار باشد ، و در این حالت گوییم حد سمت چپ (۵) **وجود دارد** . اگر عدد L موجود نباشد ، گوییم حد **وجود ندارد** ، یا اینکه $f(x)$ در a حد ندارد .

مثال ۳. نشان دهید که تابع

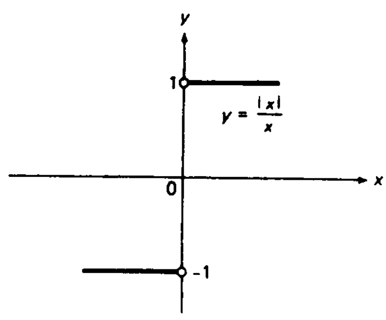
$$f(x)=\frac{|x|}{x}$$

در $x=0$ حد ندارد .

حل. به آسانی معلوم می‌شود که تابع $|x|/x$ به ازای هر $x\neq 0$ تعریف شده است و دقیقاً با تابع زیر یکی است :

$$f(x)=\begin{cases}1 ، & \text{اگر } x>0\\ -1 ، & \text{اگر } x<0\end{cases}$$

که در شکل ۲۹ رسم شده است . هرگاه وقتی $x\to 0$ ، $f(x)\to L$ ، آنگاه $f(x)$ باید بدلخواه نزدیک L باشد؛ مثلاً ، به ازای جمیع x های نزدیک به 0 ، در فاصلهٔ کمتر از $\frac{1}{2}$. اما این ممکن نیست ، زیرا هر همسایگی سفتهٔ $x=0$ ، **مهم نیست چقدر کوچک**، شامل نقاطی مانند



شکل ۲۹

$x>0$ است که $f(x)=1$ و نیز شامل نقاطی مانند $x<0$ که $f(x)=-1$، وعددی‌مانند L وجود ندارد که در فاصلهٔ کمتر از $\frac{1}{2}$ از 1 و 1- باشد. پس نتیجه می‌شود که $f(x)$ در $x=0$ حد ندارد.

مثال ۴. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$ را محاسبه کنید.

حل. مثل مثال ۲، با استفاده از یک ماشین حساب، مقادیر تابع $\cos x$ را به ازای مقادیر نوعی x که به 0 نزدیک‌می‌شوند حساب می‌کنیم. نتایج در جدول زیر داده شده‌اند (به‌یاد آورید که $\cos x$ یک تابع زوج است).

x	$\cos x$	x	$\cos x$
$(\pm)$ 1.2	0.3624	$(\pm)$ 0.10	0.9950
1.0	0.5403	0.08	0.9968
0.8	0.6967	0.06	0.9982
0.6	0.8253	0.04	0.9992
0.4	0.9211	0.02	0.9998
0.2	0.9801	0	تعریف شده و مساوی 1 است

با امتحان این اعداد قویاً" این برداشت را خواهیم داشت که

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1,$$

و، در واقع، می‌توان نشان داد که این امر درست است. اما، بین این جدول و جدول مثال ۲ تفاوتی اساسی وجود دارد، زیرا $\cos x$ به ازای $x=0$ *تعریف شده است*، حال آنکه تابع $(\sin x)/x$ *تعریف نشده است*. به‌علاوه، حد $\cos x$ در $x=0$ همان *مقدار* $\cos x$ در $x=0$ است؛ یعنی، $\cos 0=1$. این مطلب کلیدی را این طور بیان می‌کنیم که می‌گوییم تابع $\cos x$ در $x=0$ **پیوسته** است.

پیوستگی و دلایل ناپیوستگی. به‌طورکلی، فرض کنیم f تابعی باشد که در نقطهٔ a تعریف شده است، و نیز حد f در $x=a$ موجود و مساوی $f(a)$ باشد؛ درنتیجه،

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{۶}$$

در این صورت، گوییم f در a **پیوسته** است. تابع f می‌تواند به یکی از سه دلیل زیر در a **ناپیوسته** باشد (یعنی، در a پیوسته نباشد):

(یک) ممکن است حد f در a موجود نباشد، مثل مثال ۳؛

(دو) ممکن است حد f در a موجود باشد، ولی f در a تعریف نشده باشد، مثل مثالهای ۱ و ۲؛

(سه) ممکن است حد f در a موجود و f در a تعریف‌شده‌باشد، ولی این حد مساوی $f(a)$ نباشد، مثل مثال ۷ در زیر.

هرگاه تابع f در a ناپیوسته باشد، ناپیوستگی همیشه به‌وسیلهٔ غیرعادی بودن نمودار f در امتداد خط $x = a$ آشکار می‌شود. به بیان نادقیق، نمودار یک‌تابع پیوسته در a نمی‌تواند در a "شکستگی" داشته باشد و، بخصوص، نمی‌تواند در a "سوراخ" یا "جهش" داشته باشد.

مثال ۵. تابع

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

رسم شده در شکل ۲۹ به دلیل (یک) در $x = 0$ ناپیوسته است، و این از جهش نمودار از خط $y = -1$ به خط $y = 1$ آشکار می‌شود.

مثال ۶. در شکل ۲۷ نمودار تابع

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

بدلخواه به نقطهٔ $(1, 2)$ نزدیک می‌شود، ولی خود نقطه در نمودار نیست، ووجود سوراخ نظیر به ما فوراً می‌گوید که تابع به دلیل (دو) در $x = 1$ ناپیوسته است.

مثال ۷. تابع

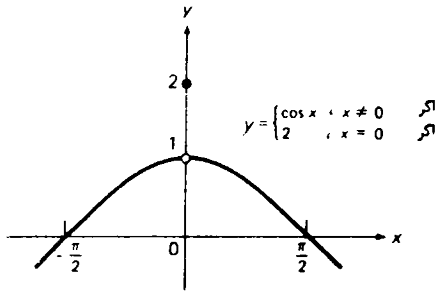
$$f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ ، } & x \neq 0 \text{ اگر} \\ 2 \text{ ، } & x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

که در شکل ۳۰ رسم شده است، به دلیل (سه) در $x = 0$ ناپیوسته است.

در واقع، به همان دلیل مذکور در مثال ۴، وقتی $x \to 0$ ، $f(x) \to 1$، ولی $f(0) = 2$؛ درنتیجه،

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0),$$

که بدین وسیله شرط پیوستگی f در $x = 0$ نقض می‌شود. ناپیوستگی f در $x = 0$ مجدداً"



شکل ۳۰

وجود یک سوراخ در نمودار را آشکار می‌کند، که این بار در نقطهٔ $(0, 1)$ می‌باشد. نمودار دارای یک نقطهٔ توپر " تنها " در $(0, 2)$ نیز هست، که می‌گوید $f(0) = 2$.

در قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۱۳۵، نشان خواهیم داد که هر **تابع چند جمله‌ای** (یا فقطچند جمله‌ای)، یعنی تابعی به شکل

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0),$$

به ازای هر x پیوسته است. در اینجا n یک عدد صحیح نامنفی است، به نام **درجهٔ** چند جمله‌ای، و $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثابتهایی هستند به نام **ضرایب** چندجمله‌ای. به علاوه، در قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۱۳۶، نشان خواهیم داد که هر یک‌از شش تابع مثلثاتی $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$، $\cot x$، $\sec x$، و $\csc x$ در هر نقطه که تابع تعریف شده باشد پیوسته است.

مثال ۸. بنابر پیوستگی چندجمله‌ای $x^2 + 1$، مانند اولین بند این بخش،

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5.$$

به همین نحو، بنابر پیوستگی چندجمله‌ای $x^3 - 3x + 2$،

$$\lim_{x \to -2} (x^3 - 3x + 2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0.$$

مثال ۹. بنابر پیوستگی $\sin x$،

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0.$$

در تعریف نسبتا " غیرصوری ما از حد تابع f در نقطهٔ a، متغیر مستقل x باید بتواند مقادیر بدلخواه نزدیک a را اختیار کند، ولی از آن طرف، لازم نیست f در خود نقطهٔ a تعریف شده باشد، مثل تابع $(\sin x)/x$ که در $x = 0$ تعریف‌نشده است. ازاینرو،

حد f در a فقط تحت تأثیر مقادیر f در مجاورت a می‌باشد. لذا، برای بحث درحد تابع f در نقطهٔ a، کافی است فرض کنیم f در همسایگی سفته‌ای از a تعریف شده باشد. به همین نحو، برای بحث در پیوستگی تابع f در نقطهٔ a، کافی است فرض کنیم f در همسایگی a تعریف شده است، ولی این باید یک همسایگی عادی **ناسفته** شامل خود a باشد، زیرا فرمول (۶) معرف پیوستگی f در a مستلزم **مقدار** f در a است.

مسائل

با استفاده از استدلالی همانند در مثال ۱، حدود زیر را محاسبه کنید.

۱. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$

۲. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

۳. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

۴. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-125}{x-5}$

۵. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

۶. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

۷. با ساختن جدولی ازمقادیرتابع $f(x)=(x-1)/(\sqrt{x}-1)$ نزدیک $x=1$، متقاعدشوید که وقتی $x\to 1$، تابع به حدی نزدیک می‌شود. این حد چقدر است؟ همین نتیجه را به‌طور جبری ثابت کنید. تابع را در مجاورت $x=1$ رسم کنید.

۸. با ساختن جدولی‌از مقادیر تابع $(\tan x)/x$ نزدیک x، متقاعدشوید که‌وقتی $x\to 0$، تابع به حدی نزدیک می‌شود. این حد چقدر است؟ تابع را در محاورت $x=0$ رسم کنید.

حدود زیر را با استدلالی غیرصوری محاسبه کنید.

۹. $\lim\limits_{x\to 0} |x|$

۱۰. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x}$

۱۱. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x}$

۱۲. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x}{x}$

۱۳. $\lim\limits_{x\to 0.1} \dfrac{|x|}{x}$

۱۴. $\lim\limits_{x\to -0.2} \dfrac{|x|}{x}$

۱۵. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x}$

۱۶. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x}$

۱۷. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

۱۸. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

۱۹. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{x}$

۲۰. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin |x|}{x}$

حدود زیر را با استفاده از پیوستگی چندجمله‌ایها محاسبه نمایید.

۲۱. $\lim\limits_{x\to -3} (x^2+3x+4)$

۲۲. $\lim\limits_{x\to 4} (x^3+1)$

۲۳. $\lim_{x\to 3} (x^4 - 9x - 6)$ ✓

۲۴. $\lim_{x\to -2} (x^5 + 5x^2)$ ✓

۲۵. $\lim_{x\to 1} (2x^6 - 3x^5 + x^4)$ ✓

۲۶. $\lim_{x\to -1} (x^{11} - x^7 + 2)$ ✓

حدود زیر را با استفاده از پیوستگی توابع مثلثاتی محاسبه کنید.

۲۷. $\lim_{x\to 1} \sin x$ ✓

۲۸. $\lim_{x\to \pi} \cos x$ ✓

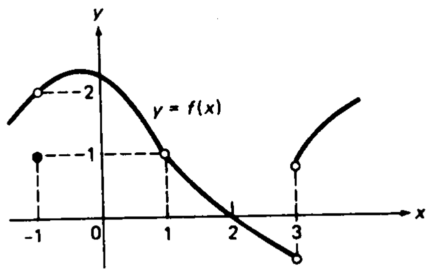
۲۹. $\lim_{x\to -\pi/4} \tan x$ ✓

۳۰. $\lim_{x\to \pi/2} \cot x$ ✓

۳۱. $\lim_{x\to 0} \sec x$ ✓

۳۲. $\lim_{x\to \pi/4} \csc x$ ✓

شکل ۳۱ نمودار تابع f را نشان می‌دهد. حدود زیر را بیابید.



شکل ۳۱

۳۳. $\lim_{x\to -1} f(x)$

۳۴. $\lim_{x\to 1} f(x)$

۳۵. $\lim_{x\to 2} f(x)$

۳۶. $\lim_{x\to 3} f(x)$

۳۷. تابع شکل ۳۱ در کدام نقاط $x = \pm 1, 2, 3$ پیوسته است؟

۶.۱ نگاهی دقیقتر به حدود

به یاد آورید که گفتیم وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ یعنی $|f(x) - L|$ را می‌توان، به ازای جمیع مقادیر " به قدر کافی کوچک " ولی ناصفر از $|x - a|$ ، " بدلخواه کوچک " کرد. آیا می‌توان این تعریف شهودی حد را کاملا " دقیق ساخت؟ جواب مثبت است، و این کار به روشی انجام می‌شود که توسط ریاضیدانان آلمانی، وایراشتراس[1] و هاینه[2]، حدود صد سال قبل، یعنی دویست سال پس از ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن[3] و لایب

1. Weierstrass
2. Heine
3. Newton

نیتز[1] ، معرفی شد . این روش " روش ε, δ " نامیده می‌شود ، زیرا شامل اعدادی است که از قدیم با حروف یونانی ε و δ (حروف کوچک اپسیلن و دلتا) نموده می‌شوند . اینکه می‌گوییم $|f(x) - L|$ به ازای جمیع $|x - a|$ های به قدر کافی کوچک بدلخواه کوچک است چه معنی دارد ؟ معنی آن این است که : فرض‌کنیم شخصی که ما وی را " مدعی " می‌نامیم عدد مثبتی مانند ε به ما بدهد . باید بتوانیم عدد مثبت دیگر δ را طوری بیابیم که به ازای هر $x \neq a$ صادق در نامساوی $|x - a| < \delta$ ، داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$. در اینجا ممکن است بپرسید این چه‌ربطی به کوچک‌بودن اعداد $|f(x) - L|$ و $|x - a|$ دارد . جواب این است که ما به مدعی اجازه می‌دهیم هر عدد مثبت ε که بخواهد اختیار کند ؛ بخصوص ، ε ی که مدعی هرقدر بخواهد کوچک باشد ؛ یعنی ، بدلخواه کوچک . سپس باید عدد مثبت نظیر δ را بیابیم ، که در حالت کلی اندازه‌اش باید کنترل شود ودرنتیجه باید به قدر کافی کوچک باشد ، به‌طوری که هروقت $|x - a| < \delta$ و $x \neq a$ ، داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$.

تعریف صوری حد . به زبان صوریتر ، فرض کنیم $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از نقطهٔ a تعریف شده باشد . در این صورت ،

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{۱}$$

یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ (مهم نیست چقدر کوچک) ، می‌توان $\delta > 0$ ای (به قدرکافی کوچک) یافت به‌طوری که هر وقت

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{۲}$$

داشته باشیم

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

در اینجا نامساوی مضاعف (۲) شیوهٔ مناسبی است برای نوشتن همزمان $|x - a| < \delta$ و $x \neq a$ ، و ما قبلا" به آن در صفحهٔ ۲۹ برخورده‌ایم . عبارات داخل پرانتز را می‌توان پس از خوگرفتن با تعریف حذف کرد . همچنین ، وقت آن است که به مسئلهٔ ۳۱ ، که به بحث فعلی مربوط است ، نگاه کنیم .

تبصره . مهم است درک‌شود که هرگاه‌نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ به‌ازای برقراری (۲) برقرار

---

1. Leibniz

باشد ، آنگاه به ازای **هر عدد مثبت کوچکتر** از δ نیز چنین است . بخصوص ، δ تابع ε نیست ، اگرچه δ به ε وابسته است ، زیرا δ **به‌طور منحصر به فرد** به‌وسیلهٔ ε معین‌نمی‌شود (هر δ ی کوچکتر نیز قابل استفاده است) ،

اگر نامساوی مضاعف (۲) را با نامساوی سادهٔ

$$|x-a| < \delta \tag{۲'}$$

عوض کرده و ضمناً " بخواهیم $f(x)$ در یک همسایگی معمولی ناسفتهٔ a تعریف‌شده باشد، که بخصوص $f(a)$ تعریف شده است ، چه رخ خواهد داد ؟ به عبارت دیگر ، اینکه بگوییم به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان $\delta > 0$ ای‌یافت به‌طوری‌که هروقت (۲') برقرارباشد ، $|f(x) - L| < \varepsilon$ چه معنی دارد ؟ با کمی فکر معلوم می‌شود که این باید به این معنی باشد که $f(x)$ در a پیوسته است . در واقع ، $f(x)$ هنوز در a حد L را دارد ، چرا که اگر هروقت (۲') برقرار باشد ، داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، مسلماً " هروقت شرط محدودتر (۲) برقرار باشد، خواهیم داشت $|f(x) - L| < \varepsilon$. به‌علاوه ، چون در اینجا $x = a$ مجاز بوده ، و (۲') خود به خود به ازای $x = a$ برقرار است ، بی‌توجه به مقدار δ ، باید به ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $|f(a) - L| < \varepsilon$ ، که فقط‌وقتی ممکن است که $f(a) = L$. به عبارت‌دیگر ، در اینجا به جای (۱) داریم

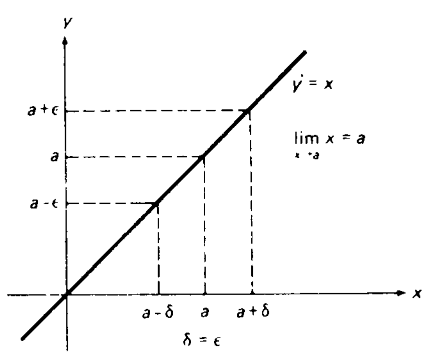
$$\lim_{x \to a} f(x) = L = f(a), \tag{۱'}$$

و این دقیقاً " یعنی $f(x)$ در a پیوسته است .

حال کاربرد روش ε ، δ را نشان می‌دهیم .

مثال ۱ . نشان دهید که به ازای هر a ،

$$\lim_{x \to a} x = a \tag{۳}$$



شکل ۳۲

حل. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، کافی است، مثل شکل ۳۲، $\delta = \varepsilon$ را اختیار کنیم. در این صورت، واضح است که هروقت $0 < |x - a| < \delta$، یا به خاطر $|x - a| < \delta$، $|x - a| < \varepsilon$. علی‌رغم بداهت، (۳) مطلب مهمی را بیان می‌کند و آن این است که تابع $f(x) = x$ به ازای هر x پیوسته است.

مثال ۲. فرض‌کنید c ثابت دلخواهی باشد. نشان دهید که به ازای هر a،

$$\lim_{x \to a} c = c \tag{۴}$$

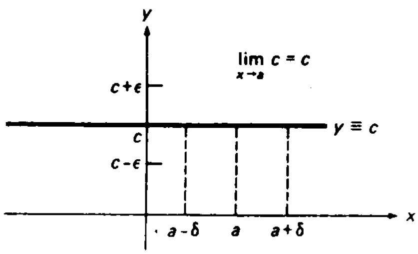
به‌طور دقیقتر، نشان دهید هرگاه $f(x) \equiv c$، آنگاه، به ازای هر a،

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \tag{۴'}$$

حل. می‌بینیم که در این حالت

$$|f(x) - c| \equiv |c - c| = 0.$$

لذا، به‌ازای‌هر $\varepsilon > 0$، $|f(x) - c| < \varepsilon$ به‌ازای $0 < |x - a| < \delta$، یا به‌ازای $|x - a| < \delta$ بی‌توجه به δ ی اختیار شده، خود به خود برقرار است (ر.ک. شکل ۳۳). فرمول (۴) می‌گوید که حد یک ثابت خود ثابت است، یا معادلاً، یک تابع ثابت همه جا (یعنی، به ازای هر x) پیوسته است.



هر $\delta > 0$ ی کارساز است

شکل ۳۳

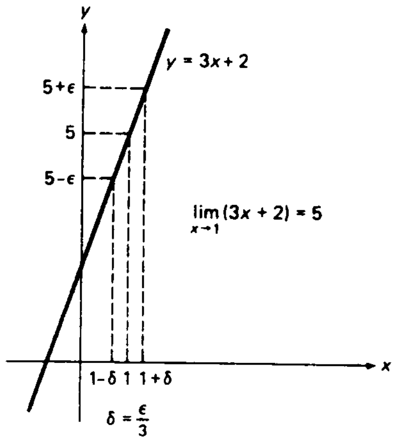
مثال ۳. نشان دهید که

$$\lim_{x \to 1} (3x + 2) = 5. \tag{۵}$$

حل. ما قبلاً" این نوع مسئله را با استفاده از پیوستگی چندجمله‌ایها حل کرده‌ایم (ر.ک. مثال ۸، صفحهٔ ۱۱۵)، ولی آموزنده است ببینیم برهان δ ، ε چطور پیش می‌رود. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای می‌خواهیم که هر وقت $0 < |x-1| < \delta$ ،

$$|(3x+2)-5| = |3(x-1)| = 3|x-1| < \varepsilon$$

زیرا در این صورت (۵) ثابت خواهد شد. چون $3|x-1| < \varepsilon$ معادل $|x-1| < \varepsilon/3$ است. همانطور که شکل ۳۴ نشان می‌دهد، یک انتخاب مناسب $\delta = \varepsilon/3$ می‌باشد.



شکل ۳۴

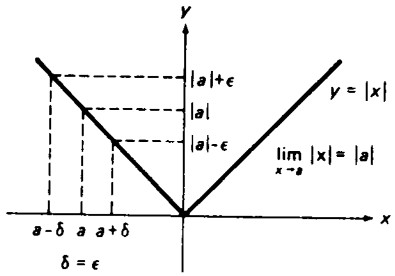
مثال ۴. نشان دهید که به ازای هر a ،

$$\lim_{x\to a} |x| = |a| \qquad (۶)$$

حل. با اعمال نامساوی (۵)، صفحهٔ ۲۳، داریم

$$||x| - |a|| < |x-a|$$

لذا، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، کافی است $\delta = \varepsilon$ را اختیار کنیم تا هر وقت $0 < |x-a| < \delta$ (یا $|x-a| < \delta$)، داشته باشیم $||x|-|a|| < \varepsilon$. این مطلب در شکل ۳۵ برای a ی منفی نموده شده است. فرمول (۶) می‌گوید که $|x|$ ، یعنی تابع قدرمطلق، همه‌جاپیوسته است.



شکل ۳۵

مثال ۵. برای حد

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

که در مثال ۱ ، صفحه ۱۰۸، به‌طور غیرصوری محاسبه شد ، برهان دقیق بیاورید .

حل . به ازای $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای می‌خواهیم که هر وقت $0 < |x - 1| < \delta$ ، داشته‌باشیم

$$\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = \left|\frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} - 2\right| = |(x + 1) - 2| = |x - 1| < \varepsilon$$

البته ، یک انتخاب مناسب $\delta = \varepsilon$ است . توجه کنید که در اینجا قسمت اول نامساوی مضاعف $0 < |x - 1| < \delta$ مورد نیاز است ، زیرا تابع $(x^2 - 1)/(x - 1)$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده است .

مثال ۶ . نشان دهید که

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x}{x} = 1. \qquad (۷)$$

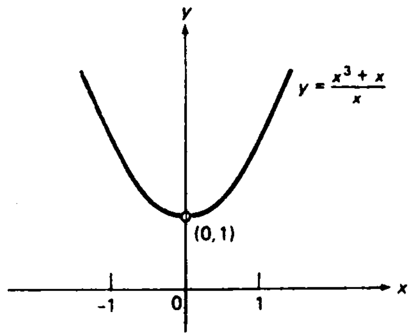
حل . به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای جستجو می‌کنیم که هروقت $0 < |x| < \delta$ ،

$$\left|\frac{x^3 + x}{x} - 1\right| = |(x^2 + 1) - 1| = |x^2| = |x|^2 < \varepsilon$$

چون $|x|^2 < \varepsilon$ معادل $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ است ، یک انتخاب مناسب $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ می‌باشد . به‌صورت دیگر، با تقسیم صورت $x^3 + x$ بر مخرج x و استفاده از پیوستگی چندجمله‌ای حاصل $x^2 + 1$ ، درمی‌یابیم که

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \to 0} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1.$$

(در این مورد ، مسئلهٔ ۹ به نکتهٔ مهمی اشاره می‌کند .) برقراری (۷) را نیز می‌توان با امتحان نمودار تابع $(x^3 + x)/x$ ،که یک‌سهمی بدون نقطهٔ $(0, 1)$ است ، به‌طور غیر صوری دید (ر.ک. شکل ۳۶) .

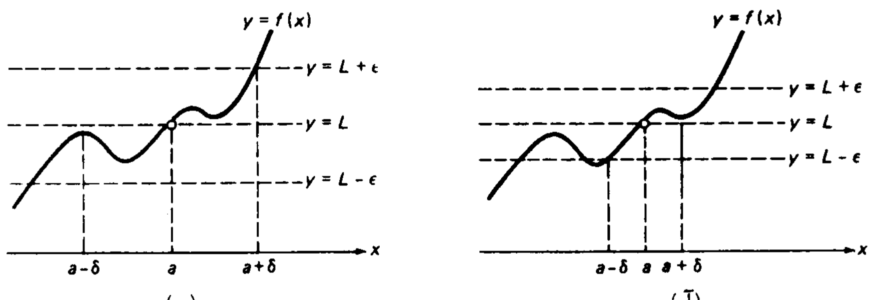


شکل ۳۶

تعبیر هندسی حد. فرض کنیم وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$. در این صورت،به‌ازای‌هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست به طوری که هر وقت $0 < |x - a| < \delta$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$. اما نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ معادل است با $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$ یا

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \qquad (۸)$$

لذا ، تعریف ε, δ حد تعبیر هندسی ساده‌ای دارد : *آن قسمت از نمودار تابع* $y = f(x)$ **نظیر به‌مقادیر x درهمسایگی‌سفتهٔ** $0 < |x - a| < \delta$ *کاملا "درنوارافقی* $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$ **به عرض** 2ε **و موازی محور x** *جای‌دارد*. بااستفاده‌از این مطلب می‌توان بزرگترین‌همسایگی سفته‌ای را ساخت که در آن $|f(x) - L| < \varepsilon$. دو قسمت شکل ۳۷ این ساخت رابرای‌تابع



طرز یافتن بزرگترین δ به ازای ε داده شده

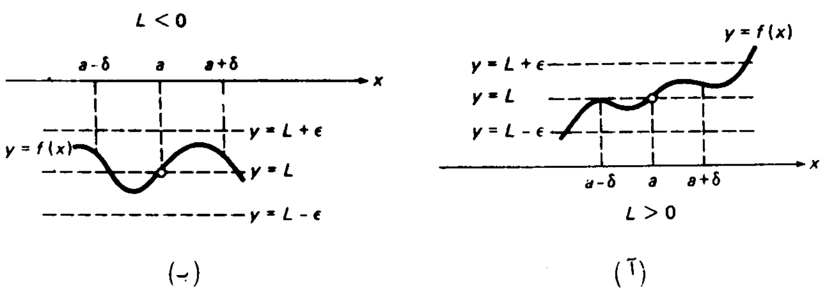
شکل ۳۷

f و دو مقدار مختلف ε نشان می‌دهند. مطمئن شوید که فهمیده‌اید چرا بزرگترین مقدار δ در شکل ۳۷ (آ) از رفتار f در سمت چپ a و در شکل ۳۷ (ب) از رفتار f در سمت راست a معین می‌شود. ما در نقطهٔ (a, L) یک نقطهٔ توخالی گذارده‌ایم تا نشان دهیم که تابع f می‌تواند در a تعریف نشده باشد، یا اینکه ممکن است مقدارش در a با L یکی نباشد. اگر f در a پیوسته باشد، نقطهٔ توخالی یک نقطهٔ توپر خواهد شد.

قواعد اساسی حد. به کمک این تعبیر هندسی روند ε, δ، می‌توان چند قاعدهٔ اساسی حدود را اثبات کرد. در هر حالت، از نامساوی مضاعف (۸)، که به ازای هر x در δ-همسایگی سفتهٔ $0 < |x-a| < \delta$ برقرار است، آغاز می‌کنیم.

(یک) ***هرگاه $f(x)$ در a دارای حد L باشد، آنگاه $f(x)$ در یک همسایگی سفتهٔ a کراندار است***؛ یعنی، اعداد مثبتی مانند C و δ وجود دارند به‌طوری که هروقت $0 < |x-a| < \delta$، $|f(x)| \le C$ یا معادلاً $-C \le f(x) \le C$. در واقع، کافی است C را آنقدر بزرگ بگیریم که نوار $-C \le y \le C$ شامل نوار $L-\varepsilon < y < L+\varepsilon$ شود، که همیشه امکان‌پذیر است.

(دو) ***اگر $f(x)$ در a حد ناصفر L را داشته باشد، همسایگی سفته‌ای از a هست که در آن $f(x)$ ناصفر بوده و با L همعلامت است.*** برای مشاهدهٔ این امر، ابتدا ε را آنقدر کوچک می‌گیریم که $L-\varepsilon > 0$ اگر $L > 0$ یا $L+\varepsilon < 0$ اگر $L < 0$. دراین صورت، همانطور که در شکل ۳۸ (آ) برای $L > 0$ و در شکل ۳۸ (ب) برای $L < 0$ نشان داده شده است،



شکل ۳۸

تابع $f(x)$ به ازای جمیع x های واقع در همسایگی مناسبی از a، با L هم‌علامت است.

(سه) ***هرگاه $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a نامنفی باشد، آنگاه $f(x)$ نمی‌تواند در a حد منفی داشته باشد.*** همین مطلب که در آن *نا*منفی و منفی با *نا*مثبت و مثبت عوض شده باشند نیز درست است. این بیان دیگری است از قاعدهٔ (دو).

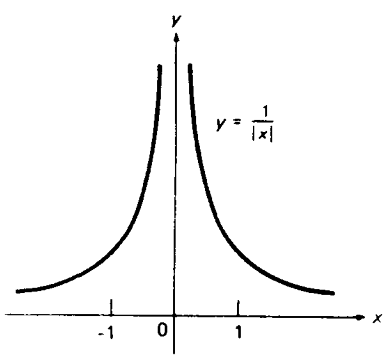
قاعدهٔ آخر تکنیکی‌تر است ، و از اینجهت ذکر شده است که در برهان قضیهٔ ۶ ، صفحهٔ ۱۳۳، به کار خواهد رفت .

اختیاری . (چهار) *هرگاه $f(x)$ در a حد ناصفر L داشته باشد ، آنگاه تابع متقابل $1/f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار است .* برای اثبات این قاعده ، مجدداً ε را آنقدر کوچک می‌گیریم که $L - \varepsilon > 0$ اگر $L > 0$ و $L + \varepsilon < 0$ اگر $L < 0$ (ر.ک. شکل ۳۸) . در این صورت ، $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ ، به کمک قضیهٔ ۴ ، صفحه ۱۳، ایجاب می‌کند که

$$\frac{1}{L+\varepsilon} < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{L-\varepsilon}.$$

لذا ، آن قسمت از نمودار تابع $y = 1/f(x)$ نظیر به مقادیر x در همسایگی سفتهٔ $0 < |x - a| < \delta$ کاملاً در نوار افقی $1/(L + \varepsilon) < y < 1/(L - \varepsilon)$ قرار دارد ، و برای اتمام برهان ، C را آنقدر بزرگ می‌گیریم که این نوار داخل نوار $-C \le y \le C$ قرار گیرد .

مثال ۷ . تابع $f(x) = 1/|x|$ ، که در شکل ۳۹ رسم شده است ، در هر همسایگی سفتهٔ نقطهٔ $x = 0$ بی‌کران است . درواقع ، به ازای هر $C > 0$ ، می‌توان با اختیار $0 < |x| < 1/C$ چنین داشت $|f(x)| > C$. لذا، طبق قاعدهٔ (یک) ، $f(x)$ در $x = 0$ حد ندارد .



شکل ۳۹

حال بررسی حدود مستلزم دو یا چند تابع را آغاز می‌کنیم ، که در دو بخش آینده ادامه خواهد یافت . اولین نتیجه می‌گوید هرگاه تابع کرانداری در یک تابع نزدیک شونده به صفر ضرب شود ، آنگاه حاصل ضرب نیز به صفر نزدیک خواهد شد .

قضیهٔ ۳ (حفظ نزدیک شدن به صفر) . *هرگاه $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار بوده*

و وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ ، آنگاه وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) \to 0$.

برهان (اختیاری). چون $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار است، اعدادی مانند $C > 0$ و $\delta_f > 0$ وجود دارند به‌طوری که هر وقت $0 < |x-a| < \delta_f$ ، $|f(x)| \le C$. همچنین، چون وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta_g > 0$ ای‌وجود دارد به‌طوری که هر وقت $0 < |x-a| < \delta_g$ ، $|g(x) - 0| = |g(x)| < \varepsilon/C$. (استفاده از ε/C به جای ε آخرین مرحلهٔ برهان را پیش‌بینی می‌کند.) حال δ را از دو عدد δ_f و δ_g کوچکتر می‌گیریم؛ یعنی، $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ را اختیار می‌کنیم. این δ از نیاز به داشتن همسایگی سفته‌ای از a ناشی‌شده‌است‌که‌درآن **همزمان** داشته باشیم $|f(x)| \le C$ و $|g(x)| < \varepsilon/C$. در این صورت، هر وقت $0 < |x-a| < \delta$ ، خواهیم داشت

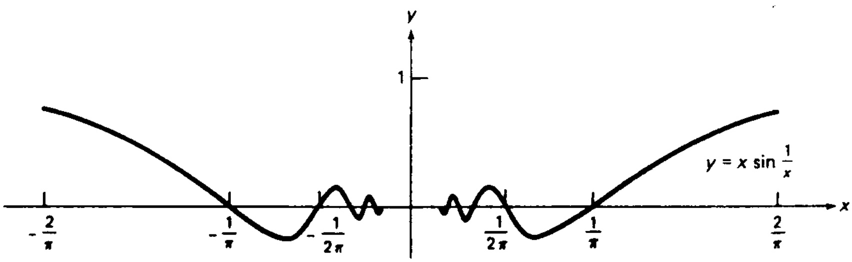
$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)|\,|g(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

اما این به زبان ε, δ یعنی وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) \to 0$.

نتیجه. *هرگاه $f(x)$ در a حدداشته‌باشد ووقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ ، آنگاه‌وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) \to 0$.*

برهان. قضیهٔ ۳ را به کار برده، ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $f(x)$ در a حد داشته باشد، آنگاه، به خاطر قاعدهٔ (یک)، $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار است.

مثال ۸. تابع $x \sin(1/x)$ را، که در شکل ۴۰ رسم شده، در نظر می‌گیریم ،که‌وقتی $x \to 0$ ، x بیشتر و بیشتر نوسان می‌کند (این تابع به ازای $x = 0$ تعریف نشده است). چون‌به‌ازای



حد در $x = 0$ موجود و مساوی 0 است

شکل ۴۰

هر $x \neq 0$ ، $|\sin(1/x)| \leq 1$ و چون $\lim_{x\to 0} x = 0$ ، از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

مثال ۹ . فرض کنیم $f(x) = 1/|x|$ و $g(x) = |x|$. در این صورت ،

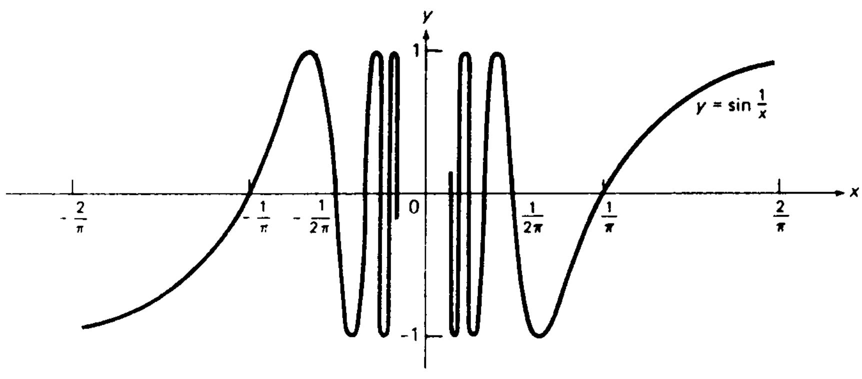
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

(ر.ک. مثال ۴) ، حال آنکه

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

این با قضیهٔ ۳ تعارضی ندارد ، زیرا ، همانطور که در مثال ۷ گفتیم ، $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از $x = 0$ کراندار نیست .

مثال ۱۰ . در مثال ۸ ، به خاطر عامل x ، نوسانات $x \sin(1/x)$ ، وقتی $x \to 0$ ، ضعیفتر می‌شوند . حال این عامل را حذف کرده و رفتار خود تابع $\sin(1/x)$ را در نظر می‌گیریم . وقتی $x \to 0$ ، $\sin(1/x)$ نوسانات بیشتری بین $1-$ و 1 خواهد داشت ، و همزمان با آن فاصلهٔ بین عبورهای متوالی نمودار تابع از محور x کوچکتر می‌شود (ر.ک. شکل ۴۱) . به سختی می‌توان باورکرد که $\sin(1/x)$ درمجاورت $x = 0$ نزدیک عددی بماند ، زیرا همسایگی سفته‌ای از $x = 0$ وجود ندارد که در آن تابع نوسان کاملی (در واقع ، بی‌نهایت نوسان!)



حد در $x = 0$ وجود ندارد .

شکل ۴۱

نداشته باشد. لذا، درک شهودی ما قویا" می‌گوید که $\sin(1/x)$ در $x=0$ حد ندارد.

اختیاری. برای *اثبات* این مطلب، به روش ε, δ نشان می‌دهیم که فرض اینکه $\sin(1/x)$ در $x=0$ دارای حد L است به‌تناقض منجر می‌شود. فرض کنیم وقتی $x \to 0$، $f(x) \to L$. در این صورت، بااختیار $\varepsilon = \frac{1}{2}$، می‌توان $\delta > 0$ را به‌قسمی یافت که هروقت $0 < |x| < \delta$

$$\left|\sin\frac{1}{x} - L\right| < \frac{1}{2} \tag{۹}$$

فرض‌کنیم n عدد صحیحی باشد که قدرمطلقش آنقدر بزرگ است‌که‌هردونقطهٔ $x_1 = 1/(2n+\frac{1}{2})\pi$ و $x_2 = 1/(2n-\frac{1}{2})\pi$ متعلق به همسایگی سفتهٔ $0 < |x| < \delta$ می‌باشند. در این صورت، $\sin(1/x_1) = \sin(2n+\frac{1}{2})\pi = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$، حال آنکه $\sin(1/x_2) = \sin(2n-\frac{1}{2})\pi = \sin(-\frac{1}{2}\pi) = -1$. از رابطهٔ (۹) معلوم می‌شود که

$$\left|\sin\frac{1}{x_1} - L\right| = |1-L| < \frac{1}{2}, \qquad \left|\sin\frac{1}{x_2} - L\right| = |-1-L| < \frac{1}{2}$$

این دو نامساوی ناسازگارند، زیرا اولی ایجاب می‌کند که $L > \frac{1}{2}$ و دومی ایجاب می‌کند که $L < -\frac{1}{2}$. لذا، فرض حد داشتن $\sin(1/x)$ در $x=0$ به تناقض می‌رسد. بنابراین، $\sin(1/x)$ در $x=0$ حد *ندارد*.

مسائل

ابتدا حد L تابع داده‌شدهٔ f را درنقطهٔ a بیابید. سپس، به‌ازای ε داده‌شده، $\delta > 0$ ای بیابید که هروقت $0 < |x-a| < \delta$، $|f(x) - L| < \varepsilon$، و انتخاب خود را توضیح دهید. سعی کنید δ حتی‌الامکان بزرگ باشد (در مسائل ۵ تا ۸ به ماشین حساب نیاز خواهید داشت).

۱. $f(x) = 5x$، a ی دلخواه، $\varepsilon > 0$ دلخواه.

۲. $f(x) = mx + b$ $(m \neq 0)$، a ی دلخواه، $\varepsilon > 0$ دلخواه.

۳. $f(x) = \dfrac{3x^2+8x-3}{x+3}, a = -3, \varepsilon = 0.15$

۴. $f(x) = \dfrac{2x^2-7x-4}{x-4}, a = 4, \varepsilon = 0.25$

۵. $f(x) = x^2, a = 2, \varepsilon = 1$

۶. $f(x) = x^2 \sin x, a = 0, \varepsilon = 0.5$

۷. $f(x) = x^3, a = -1, \varepsilon = 0.1$

۸. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, a = 1, \varepsilon = 0.05$

۹. فرض کنید تابع f در a دارای حد L بوده ولی در a تعریف نشده باشد. همچنین، به ازای هر x در همسایگی سفته‌ای از a ، $f(x) = g(x)$ ، و g در a پیوسته باشد. نشان دهید که $L = g(a)$.

۱۰. فرض کنید تابع f در a دارای حد L باشد، ولی در a تعریف نشده باشد یا در a مقداری غیر از L داشته باشد. در این صورت، همانطور که در صفحهٔ ۱۱۳ دیدیم، f در a ناپیوسته است. نشان دهید این ناپیوستگی **قابل رفع** است به این معنی که می‌توان با تعریف (یا تعریف مجدد) f در a آن را رفع کرد. به‌طور دقیقتر، نشان دهید هرگاه، با تعریف مقدار f در a مساوی L ، تابع f را توسیع (یا تعدیل) کنیم، آنگاه تابع جدید به دست آمده در a پیوسته می‌باشد.

۱۱. فرض کنید f در نقطهٔ a ناپیوسته باشد. چه وقت ناپیوستگی **غیرقابل رفع** است؟

۱۲. آیا ناپیوستگی تابع $(\sin x)/x$ در $x = 0$ قابل رفع است؟ ناپیوستگی $|x|/x$ چطور؟ $\sin(1/x)$ چطور؟

۱۳. آیا ناپیوستگی تابع $(x^2 - 1)/(x - 1)$ در $x = 1$ قابل رفع است؟

۱۴. تابعی مثال بزنید که در هر همسایگی سفتهٔ نقطهٔ a کراندار باشد ولی در a حد نداشته باشد.

حد داده شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

۱۵. $\lim\limits_{x \to 0} x \cos x$

۱۶. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

۱۷. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{x}$

۱۸. $\lim\limits_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$

۱۹. $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$

۲۰. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \cos x$

۲۱. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \sin \dfrac{1}{x}$

۲۲. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \tan x$

۲۳. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \tan x$

۲۴. $\lim\limits_{x \to 0} \sin^n x$ (n عدد صحیح مثبت دلخواهی است)

نشان دهید

۲۵. هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ، آنگاه $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$

۲۶. هرگاه $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ ، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

۲۷. هرگاه $\lim_{x\to a} |f(x)|$ موجود و ناصفر باشد، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ ممکن است موجود نباشد.

۲۸. نشان دهید هرگاه تابع f در a پیوسته باشد، آنگاه $|f|$ نیز چنین است. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$. نشان دهید

۲۹. هرگاه $L < M$ ، آنگاه در مجاورت a (یعنی، در همسایگی سفته‌ای از a)، $f(x) < g(x)$.

۳۰. هرگاه در مجاورت a ، $f(x) \leq g(x)$ ، آنگاه $L \leq M$ ، که در آن $L = M$ حتی اگر $f(x) < g(x)$ امکان‌پذیر باشد.

۳۱. به روش ε, δ نشان دهید هرگاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} f(x) = M$$

آنگاه $L = M$. به‌عبارت دیگر، تحقیق کنید هرگاه حد تابع f در نقطهٔ a موجود باشد، آنگاه این حد **منحصر به فرد** است؛ یعنی، همانطورکه در طول بحث تلویحاً فرض کرده‌ایم، فقط یک مقدار بیشتر ندارد.

۷.۱ اعمال جبری بر حدود

در کارهای آتی باید بتوان حدود عبارات جبری مستلزم دو یا چند تابع را محاسبه کرد. این محاسبات به‌وسیلهٔ این امر، که اکنون (در قضایای ۴ تا ۶) به اثباتش می‌پردازیم، که حد مجموع دو تابع مجموع حدود توابع است، و همچنین احکام حاصل از تعویض مجموع به **تفاضل**، **حاصل‌ضرب**، و **خارج قسمت**، بسیار ساده خواهند شد. اثباتها ساده ولی تکنیکی‌اند؛ و لذا، اختیاری شده‌اند. در صورت حذف برهانها، مطمئن شوید که صورت قضایا را، که آزادانه به کار می‌روند، فهمیده‌اید. این نکته را در مورد قضایای ۹ و ۱۰، که در آخر بخش اثبات می‌شوند، نیز رعایت نمایید.

قضیهٔ ۴ (**حد مجموع یا تفاضل دو تابع**) هرگاه وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ و $g(x) \to M$

آنگاه ، وقتی $x \to a$ ، $f(x)+g(x) \to L+M$ و $f(x)-g(x) \to L-M$.

برهان *(اختیاری)*. استدلال کاملاً شبیه استدلالی است که در اثبات قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱۲۵ ،به کار رفت . چون وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta_f > 0$ وجود دارد به‌طوری که هر وقت $0 < |x-a| < \delta_f$ ، $|f(x)-L| < \varepsilon/2$.(استفاده از $\varepsilon/2$ به جای ε آخرین مرحلهٔ برهان را بازگو می‌کند .) همچنین ، از آنجا که وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to M$ ، عددی مانند $\delta_g > 0$ وجود دارد به طوری که هر وقت $0 < |x-a| < \delta_g$ ، $|g(x)-M| < \varepsilon/2$.

لذا ، طبق نامساوی مثلثی (قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۲۲) ، هر وقت

$$0 < |x-a| < \delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$$

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)-(L+M)| &= |[f(x)-L]+[g(x)-M]| \\ &\le |f(x)-L| + |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

اما ، به زبان ε, δ ، این یعنی وقتی $x \to a$ ، $f(x)+g(x) \to L+M$. اثبات اینکه وقتی $x \to a$ ، $f(x)-g(x) \to L-M$ اساساً به همین صورت است .

نتیجه را می‌توان فوراً به بیش از دو تابع تعمیم داد .

نتیجهٔ ۱ .هرگاه وقتی $x \to a$ ، $f_1(x) \to L_1, f_2(x) \to L_2, \ldots, f_n(x) \to L_n$ ، **آنگاه وقتی** $x \to a$ ،

$$f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x) \to L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n \qquad (1)$$

برهان . در اینجا می‌توان در هر علامت $\pm$ یکی از + یا − را اختیار کرد ، با این فرض‌که‌در جاهای نظیر در طرفین فرمول (۱) یک انتخاب صورت گیرد . برهان تکرار کاربرد قضیهٔ ۴ است .

نتیجهٔ ۲ .وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ *اگر و فقط اگر* $f(x) = L + e(x)$ ، **که در آن وقتی** $x \to a$ ، $e(x) \to 0$.

برهان . فرض کنیم وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ ، و قرار می‌دهیم $e(x) = f(x) - L$.دراین

صورت ،

$$\lim_{x\to a} e(x) = \lim_{x\to a} [f(x) - L] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} L = L - L = 0,$$

زیرا حد ثابت مساوی خود ثابت است . به عکس، فرض کنیم $f(x) = L + e(x)$ ،که درآن وقتی $x \to a$ ، $e(x) \to 0$. در این صورت ،

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [L + e(x)] = \lim_{x\to a} L + \lim_{x\to a} e(x) = L + 0 = L.$$

می‌توان $e(x) = f(x) - L$ را " خطای " تقریب $f(x) \approx L$ نزدیک a تصور کرد . نتیجهٔ ۲ می‌گوید که وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ اگر و فقط اگر این خطا وقتی $x \to a$ ، به 0 نزدیک شود .

قضیهٔ ۵ (حد حاصل ضرب دو تابع) . هرگاه وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ و $g(x) \to M$ آنگاه وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) \to LM$.

برهان (اختیاری) . فرض کنیم $e_f(x) = f(x) - L$ و $e_g(x) = g(x) - M$ خطاهای دو تقریب $f(x) \approx L$ و $g(x) \approx M$ نزدیک a باشند . بنابرنتیجهٔ ۲ ، وقتی $x \to a$ ، $e_f(x) \to 0$ و $e_g(x) \to 0$. به‌علاوه ، با محاسبهٔ جبری ساده‌ای ،

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - LM &= [L + e_f(x)][M + e_g(x)] - LM \\ &= Me_f(x) + Le_g(x) + e_f(x)e_g(x). \end{aligned}$$

اما ، طبق قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱۲۵ ، و نتیجه‌اش ، هر یک از سه جملهٔ سمت راست ، وقتی $x \to a$ به صفر نزدیک می‌شود (هر تابع ثابت کراندار است) ؛ و لذا . بنابرنتیجهٔ ۱ در بالا ، تمام عبارت سمت راست چنین می‌کند . بنابراین ، وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) - LM \to 0$ یا معادلا " $f(x)g(x) \to LM$.

نتیجهٔ ۱ . هرگاه وقتی $x \to a$ ، $f_1(x) \to L_1, f_2(x) \to L_2, \ldots, f_n(x) \to L_n$ ، آنگاه وقتی $x \to a$ ،

$$f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x) \to L_1 L_2 \cdots L_n$$

برهان . قضیهٔ ۵ را تکرار نمایید .

نتیجهٔ ۲ . هرگاه c ثابت دلخواهی بوده ووقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ ، آنگاه ، وقتی $x \to a$ ،

. $cf(x) \to cL$

برهان. در قضیهٔ ۵ $g(x) \equiv c$ را انتخاب کنید.

قضیهٔ ۶ (حدخارج‌قسمت دوتابع). هرگاه وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ و $g(x) \to M \neq 0$ آنگاه، وقتی $x \to a$ ، $f(x)/g(x) \to L/M$.

برهان (اختیاری). با نوشتن

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} = \frac{M - g(x)}{Mg(x)}, \qquad (۲)$$

می‌بینیم که، طبق قضیهٔ ۴،

$$\lim_{x \to a} [M - g(x)] = \lim_{x \to a} M - \lim_{x \to a} g(x) = M - M = 0.$$

به‌علاوه، طبق نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ ۵،

$$\lim_{x \to a} Mg(x) = M^2 \neq 0.$$

درنتیجه، بنابر قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۱۲۵، $1/Mg(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار است. بنابراین، طبق قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۱۲۵، طرف راست (۲) وقتی $x \to a$ ، به صفر نزدیک می‌شود، یا معادلاً"، وقتی $x \to a$ ، $1/g(x) \to 1/M$. اما $f(x)/g(x)$ حاصل ضرب $f(x)$ در $1/g(x)$ ، یعنی متقابل $g(x)$ ، است؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۵، وقتی $x \to a$ ، $f(x)/g(x) = f(x)[1/g(x)] \to L(1/M) = L/M$.

قضایای ۴ تا ۶ به‌طور خلاصه می‌گویند هرگاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M, \qquad (۳)$$

آنگاه

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M, \qquad (۴)$$

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM, \qquad (۵)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0). \qquad (۶)$$

حال موارد استعمال این فرمولها را نشان می‌دهیم .

مثال ۱ . با استفاده از (۴) و (۵) ، نشان دهید که

$$\lim_{x\to -4}\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)=10.$$

حل . ما از قبل می‌دانیم که

$$\lim_{x\to -4} x=-4, \qquad \lim_{x\to -4}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

لذا ، با دو بار استفاده از فرمول (۵) ،

$$\lim_{x\to -4} x^2=\lim_{x\to -4} x\cdot \lim_{x\to -4} x=(-4)(-4)=16,$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{3}{2}x=\lim_{x\to -4}\frac{3}{2}\cdot \lim_{x\to -4} x=\frac{3}{2}(-4)=-6.$$

پس ، با استفاده از (۴) ، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to -4}\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to -4} x^2+\lim_{x\to -4}\frac{3}{2}x=16+(-6)=10.$$

مثال ۲ . حد زیر را بیابید :

$$L=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}.$$

حل . مخرج کسر ، وقتی $x\to 3$ ، به صفر نزدیک می‌شود ، ولی این مشکل را می‌توان با حذف عامل مشترک $x-3$ از صورت و مخرج از بین برد :

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=\frac{x-2}{x-5} \qquad (x\neq 3, 5).$$

بقیهٔ محاسبات سرراست است . با استفاده از (۶) و (۴) ، داریم

$$L=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-5}=\frac{\lim_{x\to 3}(x-2)}{\lim_{x\to 3}(x-5)}=\frac{\lim_{x\to 3}x-\lim_{x\to 3}2}{\lim_{x\to 3}x-\lim_{x\to 3}5}=\frac{3-2}{3-5}=-\frac{1}{2}.$$

خارج قسمت دو چندجمله‌ای ، مانند $(x^2-5x+6)/(x^2-8x+15)$ ، یک تابع

گویا نامیده می‌شود .

اعمال جبری بر توابع پیوسته. حال فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند ، که هر دو در a پیوسته‌اند . در این صورت ، به‌جای (۳) داریم

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a), \tag{۳'}$$

درنتیجه ، فرمولهای (۴) تا (۶) خواهند شد

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = f(a) \pm g(a), \tag{۴'}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = f(a)g(a), \tag{۵'}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \qquad (g(a) \neq 0). \tag{۶'}$$

اما این دقیقاً" یعنی توابع $f(x) \pm g(x)$ ، $f(x)g(x)$ ، و $f(x)/g(x)$ در a پیوسته‌اند . لذا ، نتیجهٔ اساسی زیر ثابت شده است .

قضیهٔ ۷ (**پیوستگی ترکیب توابع**) هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ در a پیوسته باشند ، آنگاه مجموع $f(x) + g(x)$ ، تفاضل $f(x) - g(x)$ ، حاصل ضرب $f(x)g(x)$ ، و خارج‌قسمت $f(x)/g(x)$ نیز چنین‌اند ، مشروط براینکه در حالت اخیر $g(a) \neq 0$.

نتیجه. هرگاه توابع $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ در a پیوسته باشند ، آنگاه مجموع جبری $f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)$ و حاصل ضرب $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ نیز چنین‌اند .

برهان. طبق تعریف ، یک مجموع جبری مجموعی است که هر جمله‌اش می‌تواند یکی از دو علامت را داشته باشد . برای اثبات نتیجه ، قضیهٔ ۷ را چند بار به کار می‌بریم .

پیوستگی چندجمله‌ایها ، توابع گویا ، و توابع مثلثاتی. دو قضیهٔ زیر در صفحهٔ ۱۱۵ پیش‌بینی شده بودند ، و قبلاً" در حل مسائل حد به‌طور غیررسمی مفید واقع شدند .

قضیهٔ ۸ (**پیوستگی چندجمله‌ایها و توابع گویا**) . چندجمله‌ای

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (a_n \neq 0)$$

به ازای هر x پیوسته است. تابع گویای

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_Nx^N} \qquad (a_n \neq 0, b_N \neq 0)$$

در هر نقطه از قلمرو تعریفش، یعنی در هر نقطه که مخرجش ناصفر است، پیوسته می‌باشد.

برهان. هرجملهٔ a_kx^k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ از چندجمله‌ای $P(x)$ پیوسته است، زیرا مساوی حاصل ضرب $k + 1$ تابع پیوسته، یعنی ثابت a_k و k عامل از x، می‌باشد. پس $P(x)$، که مجموع $n + 1$ جمله از این نوع است، نیز پیوسته می‌باشد. چون چندجمله‌ایها پیوسته اند، خارج‌قسمت $R(x) = P(x)/Q(x)$ دوچندجمله‌ای نیز، جز در نقاطی (درصورت‌وجود) که مخرج $Q(x)$ مساوی صفر است، پیوسته می‌باشد.

حال که دانستیم چندجمله‌ایها پیوسته‌اند، محاسبات مثال ۱ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\lim_{x \to -4} \left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) = (-4)^2 + \frac{3}{2}(-4) = 16 - 6 = 10.$$

همچنین، با استفاده از توابع گویا، می‌توان از چند مرحله در مثال ۲ گذشت (کدامها؟).

مثال ۳. تابع گویای $1/(1 + x^2)$ به ازای هر x پیوسته است، زیرا مخرجش هرگز صفر نمی‌شود.

مثال ۴. تابع گویای $x/(1 - x^2)$ همه‌جا جز در دو "نقطهٔ ناپیوستگی" $x = 1$ و $x = -1$ که در آنها مخرجش 0 است، پیوسته می‌باشد.

قضیهٔ ۹ (پیوستگی توابع مثلثاتی). *هر یک از توابع مثلثاتی* $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$، $\cot x$، $\sec x$، *و* $\csc x$ *در هر نقطه از قلمرو تعریف خود پیوسته است.*

نمودار توابع مثلثاتی قویا" پیشنهاد می‌کند که این تابعها پیوسته‌اند، زیرا نمودار هر شاخه یک منحنی " ناشکسته " است، ولی باید برهانی صوری برای آن آورد. این کار قدری تکنیکی است؛ و درنتیجه، در آخر بخش ارائه می‌شود.

مثال ۵. بنابر پیوستگی $\cos x$ ،

$$\lim_{x\to\pi} (\cos^2 x + \cos x + 1) = \cos^2 \pi + \cos \pi + 1 = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1.$$

قضیهٔ ساندویچ. قضیهٔ زیر ابزار مفید دیگری در محاسبهٔ حدود است .

قضیهٔ ۱۰ (قضیهٔ ساندویچ) . *هرگاه در همسایگی سفته‌ای از* a

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

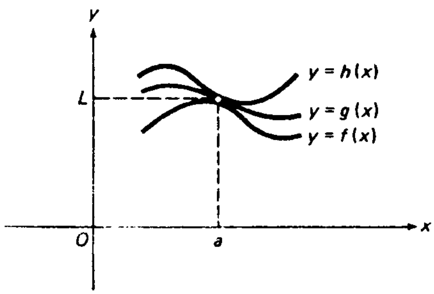
و نیز

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

به عبارت دیگر ، تابعی که بین دو تابع که هر دو حد L را دارند قرار داشته باشد ، باید به L نزدیک شود . شکل ۴۲ برقراری این قضیه را قویا" تأیید می‌کند ($g(x)$ ، وقتی



شکل ۴۲

$x \to a$ ، جز به سمت L کجا می‌تواند برود؟) ، ولی برهان دقیقی بعد از برهان قضیهٔ ۹ داده شده است .

مثال ۶ . به ازای عدد صحیح مثبت n ، نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{1+x} = 1. \qquad (۷)$$

چون $\sqrt[n]{1+0} = 1$ ، این می‌گوید که تابع $\sqrt[n]{1+x}$ در $x = 0$ پیوسته است .

حل . هرگاه $|x| < 1$ ، آنگاه

$$1 - |x| \leq \sqrt[n]{1 + x} \leq 1 + |x|.$$

(ذکر جزئیات ، که مبتنی بر معنی $|x|$ و مثال ۶ ، صفحهٔ ۱۷ ، است ، را به عنوان تمرین می‌گذاریم .) حال چون

$$\lim_{x\to 0} (1 \pm |x|) = \lim_{x\to 0} 1 \pm \lim_{x\to 0} |x| = 1 \pm 0 = 1,$$

فرمول (۸) فوراً از قضیهٔ ساندویچ نتیجه می‌شود .

مثال ۷ . برای حد

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad (۸)$$

که در مثال ۲ ، صفحهٔ ۱۱۰، به‌طور غیرصوری حساب شد ، برهان دقیق بیاورید .

حل . بنابر فرمول (۲) ، صفحهٔ ۱۰۶،

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (0 < |x| < \pi/2),$$

که در آن وقتی $x \to 0$ ، $\cos x$ و ثابت 1 هر دو به 1 نزدیک می‌شوند . با اعمال قضیهٔ ساندویچ ، رابطهٔ (۸) فوراً به دست می‌آید .

برهان قضیهٔ ۹ *(دلخواه)* . با قرار دادن $\alpha = x, \beta = a$ در فرمول (۱۵) ، صفحهٔ ۹۶ به دست می‌آوریم

$$\sin x - \sin a = 2 \cos \frac{x + a}{2} \sin \frac{x - a}{2},$$

که نامساوی زیر را ایجاب می‌کند :

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\cos \frac{x + a}{2}\right|\left|\sin \frac{x - a}{2}\right| \leq 2\left|\sin \frac{x - a}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x - a}{2}\right|,$$

یا معادلاً

$$|\sin x - \sin a| \leq |x - a|, \qquad (۹)$$

که به ازای هر x و a معتبر است . (در اینجا از $|\cos (x + a)/2| \leq 1$ ، همراه با نامساوی (۳′) ، صفحهٔ ۱۰۷، استفاده می‌کنیم .) همچنین ، به خاطر (۹) ،

$$|\cos x - \cos a| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\right|$$
$$\leq \left|\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \left(a + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |x - a|,$$

و نامساوی لنگهٔ زیر را داریم :

$$|\cos x - \cos a| \leq |x - a|, \tag{۹'}$$

که نیز به ازای هر x و a معتبر است. از روابط (۹) و (۹') فوراً نتیجه می‌شود که، هروقت فاصلهٔ x تا a کمتر از $\delta = \varepsilon$ باشد، هر دوی $|\sin x - \sin a|$ و $|\cos x - \cos a|$ از $\varepsilon > 0$ کوچکترند. بنابراین،

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a, \qquad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a,$$

و پیوستگی $\sin x$ و $\cos x$ ثابت شده است. چون توابع $\sin x$ و $\cos x$ به ازای هر x پیوسته‌اند، متقابلهای $\csc x = 1/\sin x$ ، $\sec x = 1/\cos x$ و خارج قسمتهای $\tan x = \sin x/\cos x$, $\cot x = \cos x/\sin x$ هر جا تعریف شده‌اند، یعنی هر جا مخرجهایشان ناصفرند، پیوسته می‌باشند.

برهان قضیهٔ ۱۰. به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، می‌توان عددی مانند $\delta_f > 0$ یافت به‌طوری‌که هر وقت $0 < |x - a| < \delta_f$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$ یا $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$ ، و عددی مانند $\delta_h > 0$ به‌طوری که هروقت $0 < |x - a| < \delta_h$ ، $|h(x) - L| < \varepsilon$ یا $-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$ این نامساویها همراه با $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ایجاب می‌کنند که هر وقت $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ ، $-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon$. بنابراین، هر وقت $0 < |x - a| < \delta$ ، $-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$ یا $|g(x) - L| < \varepsilon$ ؛ درنتیجه، وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to L$.

مسائل

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱. $\lim\limits_{x \to 1.6} \dfrac{25x^2 - 64}{5x - 8}$ ✓

۲. $\lim\limits_{x \to -0.3} \dfrac{100x^2 - 9}{10x + 3}$ ✓

۳. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 1}$ ✓

۴. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$ ✓

۵. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 64}{x + 4}$ ✓

۶. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}$ ✓

۷. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

۸. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)-1}{x}$

۹. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

۱۰. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{100}-10x^{10}+999}{x^{50}-5x^5+99}$

۱۱. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

۱۲. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^4-(1+4x)^3}{x^2}$

۱۳. حد L تابع $f(x)=(x+1)/(x-2)$ در $x=5$ را بیابید. سپس، به ازای $\varepsilon>0$ داده شده، $\delta>0$ ای بیابید به‌طوری که $0<|x-5|<\delta$ ایجاب کند که $|f(x)-L|<\varepsilon$.

نقاطی را، در صورت وجود، بیابید که تابع داده شده در آنها ناپیوسته است.

۱۴. $(x-1)^2$

۱۵. $101x^{11}-1001x$

۱۶. $\dfrac{x^2}{x^2-49}$

۱۷. $\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}$

۱۸. $\dfrac{1}{2x^2+x-1}$

۱۹. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

۲۰. $\dfrac{3x-5}{x^2-3x+2}$

۲۱. $\dfrac{x^2-x+1}{x^3-6x^2+11x-6}$

۲۲. $\dfrac{x^3+10}{x^5-2x^3+x}$

حدود زیر را محاسبه کنید.

۲۳. $\lim\limits_{x\to 1} (\cos^2 x-\sin^2 x)$

۲۴. $\lim\limits_{x\to -1} (\cos^2 x+\sin^2 x)$

۲۵. $\lim\limits_{x\to \pi} (\cos^3 x+\sin^3 x)$

۲۶. $\lim\limits_{x\to -\pi/2} (\cos^4 x-\sin^5 x)$

۲۷. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$

۲۸. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

۲۹. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

۳۰. $\lim\limits_{x\to \pi/4} (2\sec^4 x-1)$

۳۱. $\lim\limits_{x\to \pi/3} (\cot x+\csc x)$

۳۲. در مثال ۸، صفحهٔ ۱۲۶، نشان داده شد که

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

این مطلب را با استفاده از قضیهٔ ساندویچ به صورتی دیگر ثابت کنید.

۸.۱ حد تابع مرکب

برای آنکه حدود را به آسانی حساب کنیم باید طرز پرداختن به حدود توابع مرکب، مانند $\sqrt{2x+3}$ و $\sin(\cos x)$، را بیاموزیم. قضیهٔ زیر طرز کار را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۱ (حد تابع مرکب). *هرگاه*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

و g در L پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(L). \qquad (1)$$

برهان (اختیاری). فرض کنیم $y = f(x)$، و $0 < \varepsilon$ را اختیار می‌کنیم. چون g در L پیوسته‌است، می‌توان $0 < \delta_g$ ای‌یافت به‌طوری‌که‌هروقت $|y - L| < \delta_g$، $|g(y) - g(L)| < \varepsilon$. به‌علاوه، چون f در a دارای حد L است، می‌توان $0 < \delta_f$ ی نیز یافت به‌طوری که هروقت $0 < |x - a| < \delta_f$، $|f(x) - L| = |y - L| < \delta_g$. لذا، $0 < |x - a| < \delta_f$ ایجاب می‌کند که $|y - L| < \delta_g$، که به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که $|g(y) - g(L)| = |g(f(x)) - g(L)| < \varepsilon$. لذا، هر وقت $0 < |x - a| < \delta_f$، $|g(f(x)) - g(L)| < \varepsilon$، و (۱) ثابت می‌شود.

نتیجه (پیوستگی تابع مرکب) *هرگاه f در a و g در $f(a)$ پیوسته باشد، آنگاه $g(f(x))$ در a پیوسته می‌باشد.*

برهان. از قضیه با فرض $L = f(a)$ استفاده کنید.

نتیجه به‌طور غیرصوری می‌گوید که هر تابع پیوسته از یک تابع پیوسته پیوسته است.

مثال ۱. به ازای عدد صحیح مثبت n ، نشان دهید

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[n]{x} = 1. \tag{۲}$$

چون $\sqrt[n]{1} = 1$ ، این می‌گوید که تابع ریشهٔ n م $\sqrt[n]{x}$ در نقطهٔ $x = 1$ پیوسته است.

حل. با اختیار $f(x) = x - 1,\ g(x) = \sqrt[n]{1 + x}$ ، داریم $g(f(x)) = \sqrt[n]{x}$. به‌علاوه،

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0,$$

و، بنابرمثال ۶، صفحهٔ ۱۳۷، $g(x)$ در $x = 0$ پیوسته است. پس‌ازقضیهٔ ۱۱ نتیجه‌می‌شود که

$$\lim_{x\to 1} g(f(x)) = \lim_{x\to 1} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{1 + 0} = 1.$$

مثال ۲. نشان دهید که تابع $\sqrt[n]{x}$ در هر نقطهٔ $a > 0$ پیوسته است.

حل. داریم

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to a} \sqrt[n]{a\frac{x}{a}} = \lim_{x\to a} \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{\frac{x}{a}} = \sqrt[n]{a}\lim_{x\to a}\sqrt[n]{\frac{x}{a}},$$

زیرا $\sqrt[n]{a}$ ثابت است. بامعرفی متغیر جدید $t = x/a$ و توجه به‌این امر که $x \to a$ ایجاب می‌کند که $t \to 1$ ، پس از استفاده از فرمول (۲) با x به جای t ،

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}\lim_{t\to 1} \sqrt[n]{t} = \sqrt[n]{a}\cdot 1 = \sqrt[n]{a}. \tag{۳}$$

اما (۳) می‌گوید که $\sqrt[n]{x}$ در $x = a$ پیوسته است. (توجه کنید که معرفی متغیر جدید $t = x/a$ معادل استفاده از قضیهٔ ۱۱ به ازای $f(x) = x/a$ و $g(x) = \sqrt[n]{ax}$ است.)

دلیل گذاردن شرط $a > 0$ این است که $\sqrt[n]{x}$ ، وقتی n زوج است، به‌ازای x منفی تعریف نشده است، ولی این شرط‌را می‌توان در صورت فرد بودن n حذف کرد. درواقع، اگر n فرد باشد، $\sqrt[n]{x}$ به ازای هر x تعریف شده است و استدلالی که هم‌اکنون داده شد نشان می‌دهد که وقتی $x \to a \neq 0$ ، $\sqrt[n]{x} \to \sqrt[n]{a}$ ، ولی، بنابر استدلال مثال ۱ در بخش بعد، وقتی $x \to 0$ ، $\sqrt[n]{x} \to \sqrt[n]{0} = 0$.

مثال ۳. نشان دهید که $\lim_{x\to 11} \sqrt{2x + 3} = 5$.

حل. توابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = \sqrt{x}$ هر دو پیوسته‌اند، $f(x)$ چون یک چند ـ جمله‌ای است و $g(x)$ بنابر مثال قبل. از اینرو، بنابرنتیجه، تابع $g(f(x)) = \sqrt{2x + 3}$ نیز پیوسته می‌باشد. اما، در این صورت،

$$\lim_{x \to 11} \sqrt{2x + 3} = \sqrt{2(11) + 3} = \sqrt{25} = 5.$$

مثال ۴. حد $\cos(\sin x)$ در نقطهٔ $x = 0$ را بیابید.

حل. چون $\sin x$ و $\cos x$ به ازای هر x پیوسته‌اند، تابع مرکب $\cos(\sin x)$ نیز چنین است. بنابراین،

$$\lim_{x \to 0} \cos(\sin x) = \cos(\sin 0) = \cos 0 = 1.$$

رفع ابهام. در مثالهای زیر از تمام تکنیکهای محاسبهٔ حد مذکور در این فصل استفاده می‌کنیم. در هر حالت حد عبارتی در a حساب می‌شود که با گذاردن $x = a$ در آن به صورت مبهم $0/0$ درمی‌آید. روند محاسبهٔ این حدود اغلب "رفع ابهام از $0/0$" نامیده می‌شود.

مثال ۵. حد $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{x + 1}}{x}$ را محاسبه کنید.

حل. تابع $(1 - \sqrt{x + 1})/x$ به ازای $x = 0$ تعریف نشده است؛ در واقع، جانشانی $x = 0$ آن را به صورت مبهم $0/0$ درمی‌آورد. سعی می‌کنیم x مزاحم در مخرج را با ضرب صورت و مخرج در عامل $\sqrt{x + 1} + 1$ حذف کنیم. این شیوه به طرز زیبایی کارساز است، زیرا به x ی در صورت منجر می‌شود که با x مخرج حذف خواهد شد. به‌طور مشروح،

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x} \frac{1 + \sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt{x + 1}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (x + 1)}{x(1 + \sqrt{x + 1})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x + 1})} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x + 1}}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$L = \frac{-1}{\lim_{x \to 0} (1 + \sqrt{x + 1})} = \frac{-1}{1 + \lim_{x \to 0} \sqrt{x + 1}} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2},$$

که در آن از پیوستگی $\sqrt{x + 1}$ در $x = 0$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۶ . حد $L = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin c\theta}{\theta}$ را حساب کنید ، که در آن c ثابت دلخواهی است .

حل . ابتدا می‌نویسیم

$$L = \lim_{\theta \to 0} c \frac{\sin c\theta}{c\theta} = c \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin c\theta}{c\theta}$$

در این صورت ، با جانشانی $t = c\theta$ و توجه به اینکه وقتی $\theta \to 0$ ، $t \to 0$ به دست می‌آوریم

$$L = c \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = c \cdot 1 = c.$$

مثال ۷ . حد $L = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}$ را محاسبه کنید .

حل . در اینجا با صورت مبهم $0/0$ سروکار داریم ، زیرا $\sin \pi = 0, \cos \pi = -1$. $\sin^2 x$ را با $1 - \cos^2 x$ تعویض کرده ، صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم . سپس ، بعد از حذف عامل مشترک $1 + \cos x$ ، به دست می‌آوریم

$$L = \lim_{x \to \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x \to \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + \cos^2 x}.$$

عامل $1 + \cos x$ ، که در $x = \pi$ مساوی صفر است ، ابهام اولیه را سبب می‌شد ، ولی اینک از بین رفته است ، و می‌توان ، با استفاده از پیوستگی $\cos x$ ، L را حساب کرد . به عبارت دیگر ، اکنون می‌توان جانشانی $x = \pi$ را انجام داده ، به دست آورد

$$L = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1) + (-1)^2} = \frac{1 + 1}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

مثال ۸ . حد $L = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ را حساب کنید .

حل . در اینجا باز با صورت مبهم $0/0$ سروکار داریم . از ضرب صورت و مخرج در $1 + \cos x$ به دست می‌آوریم

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)},$$

که در آن، برخلاف مثال قبل، مشکلی با عامل $\cos x + 1$ نداریم، زیرا این عامل در $x = 0$ صفر نیست. هنوز در مخرج x وجود دارد که جلو ما را می‌گیرد. اما آخرین حد را می‌توان با نوشتن آن به صورت حاصل‌ضربی از دو حد، که یکی از قبل معلوم است و دیگری را می‌توان با پیوستگی به دست آورد، به آسانی محاسبه نمود. به‌تفصیل، داریم

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

مسائل

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱. $\lim_{x\to 0} \sin(\cos x)$

۲. $\lim_{x\to 0} \cos(\tan x)$

۳. $\lim_{x\to 0} \sin(\cos x)\sin x$

۴. $\lim_{x\to 0} \cos(\sin x)\cos x$

۵. $\lim_{x\to \pi/6} \tan(\sin x)$

۶. $\lim_{x\to 2\pi/3} \sin^2(\cos x)$

۷. $\lim_{x\to 0} \sin\left(x \sin\frac{1}{x}\right)$

۸. $\lim_{x\to -1} \sqrt{\frac{3-x}{8-x}}$

۹. $\lim_{x\to 8} \frac{1+\sqrt{x+1}}{x}$

۱۰. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-3}}$

۱۱. $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{\frac{x^3-16}{x+2}}$

۱۲. $\lim_{x\to 3} \sqrt[5]{2x^3-3x^2+x+2}$

۱۳. $\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4-2x^3+4x^2-8x+16}$

۱۴. $\lim_{x\to \pi} \sqrt{\cos^2 x - \cos x + 1}$

۱۵. $\lim_{x\to \sqrt{3}} \tan\sqrt{1+x^2}$

۱۶. $\lim_{x\to -\pi} \sin\sqrt{10+\cos x}$

۱۷. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{x}$

۱۸. $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin \frac{1}{2}z}$

۱۹. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

فرمول: a و b دو عدد حقیقی غیر صفر باشند آنگاه

$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin a\theta}{\sin b\theta} = \frac{a}{b}$

۲۰. $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\tan 2\alpha}{\alpha}$

۲۱. $\lim_{\beta\to 0} \frac{\tan \beta}{\tan 3\beta}$

۲۲. $\lim_{x\to -4} \sqrt[3]{4x^3+x^2-3}$

۲۳. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{4-x^2}{2-x}}$

۲۴. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}$

۲۵. $\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x^2+4}}$

۲۶. $\lim_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

۲۷. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

۲۸. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\cos x)}{\cos x}$

۲۹. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\tan x)}{\tan x}$

۳۰. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)}$

۳۱. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan x}-1}$

۳۲. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

۳۳. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} \cos \dfrac{\pi x}{2}$

۳۴. $\lim_{x\to 0} \sin(\cot x) \sin x$

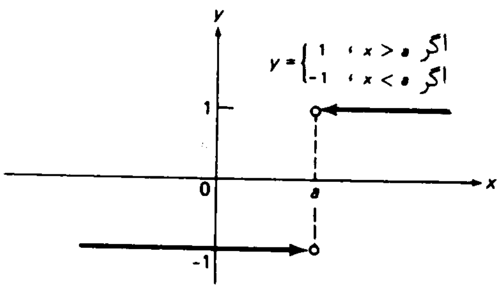
۳۵. ممکن است اغوا شده قضیهٔ ۱۱ را این‌طور تعمیم دهیم . هرگاه وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ و وقتی $x \to L$ ، $g(x) \to M$ ، آنگاه وقتی $x \to a$ ، $g(f(x)) \to M$. با مثال نشان دهید که این حکم نادرست است . شرطی تکمیلی بر رفتار f درمجاورت a قایل شوید که حکم را برقرار سازد .

۹.۱ حدود یکطرفه و پیوستگی

نمودار تابع

$$f(x) = \frac{|x-a|}{x-a} = \begin{cases} 1 \text{ ، } x > a \text{ اگر} \\ -1 \text{ ، } x < a \text{ اگر} \end{cases} \qquad (1)$$

نموده شده در شکل ۴۳ ، وقتی شناسهٔ x از چپ a به راست a می‌رود ، از -1 به 1 جهش دارد؛ و لذا ، f در a حد ندارد . با اینحال ، اگر x فقط از یک سو به a نزدیک شود ، f



شکل ۴۳

در a به مقداری حدی نزدیک خواهد شد. پس می‌توان رفتار f را در طرف دیگر a فراموش کرده، f را تابع ثابت $f(x) \equiv 1$ در سمت راست a، یا تابع ثابت $f(x) \equiv -1$ در سمت چپ a درنظر گرفت. رفتار حدی f، وقتی x از یک سو یا سوی دیگر به a نزدیک می‌شود، با دو سر سهم در شکل نموده شده است. یک سر سهم نظیر به حد از راست بوده و با خط $x = a$ در نقطه‌ای به عرض 1 تماس می‌یابد، و دیگری نظیر به حد از چپ با خط $x = a$ در نقطه‌ای به عرض -1 تماس دارد. (این نقاط را با نقطه‌های توخالی نمایش‌می‌دهیم، زیرا هیچیک از آنها به نمودار f تعلق ندارند؛ در واقع، f در a تعریف نشده است.) لذا. تابع f در a **حدود یکطرفه** دارد، اگرچه حد معمولی f در a وجود ندارد.

اگر نقطهٔ متغیر x از راست به نقطهٔ ثابت a نزدیک شود، فقط مقادیر بزرگتر از a $(x > a)$ را بگیرد، می‌نویسیم $x \to a^+$، حال آنکه اگر x از چپ به a نزدیک شود، فقط مقادیر کوچکتر از a $(x < a)$ را بگیرد، می‌نویسیم $x \to a^-$. مثلاً، هم اکنون در مورد تابع (۱) دیدیم که وقتی $x \to a^+$، $f(x) \to 1$ و وقتی $x \to a^-$، $f(x) \to -1$، یا معادلاً

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -1.$$

اولین حد یکطرفه *حد راست* f در a، دومین حد یکطرفه **حد چپ** f در a نام دارد.

به آسانی می‌توان برای حدود یکطرفه تعریف ε, δ آورد. فرض کنیم f در نقطهٔ a حد معمولی (دوطرفه) داشته‌باشد. این به‌زبان ε, δ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ ای یافت به‌طوری که هروقت $0 < |x - a| < \delta$، یعنی هروقت

$$a < x < a + \delta \tag{۲}$$

یا

$$a - \delta < x < a \tag{۲'}$$

داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$. البته، نقاط x صادق در (۲) سمت راست a، و نقاط صادق در (۲') سمت چپ a واقعند. لذا، برای رفتن به حدود یکطرفه، کافی است (۲) را نگهداشته (۲') را حذف کنیم یا (۲') را نگهداشته (۲) را حذف کنیم. به‌طور دقیقتر، وقتی $x \to a^+$، $f(x) \to L$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ ای یافت به طوری که هروقت $a < x < a + \delta$، $|f(x) - L| < \varepsilon$، حال آنکه وقتی $x \to a^-$، $f(x) \to L$ یعنی هروقت $a - \delta < x < a$، $|f(x) - L| < \varepsilon$.

حدود یکطرفه‌در مقابل‌حدود معمولی. جدول زیر تشابهات و اختلافات بین حد معمولی و

حدود یکطرفه را توضیح می‌دهد.

	حد معمولی	حدود یکطرفه	
فرض کنیم f در	یک همسایگی سفته‌ء a	یک بازه‌ء باز با نقطه‌ء انتهایی چپ a	یک بازه‌ء باز با نقطه‌ء انتهایی راست a تعریف شده باشد
گوییم f دارای	حد L در a	حد راست L در a	حد چپ L در a است
و می‌نویسیم	$\lim_{x\to a} f(x) = L$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$
اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، بتوان $\delta > 0$ ای یافت به‌طوری که $\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$ به ازای	$0 < \lvert x - a\rvert < \delta$	$a < x < a + \delta$	$a - \delta < x < a$ برقرار باشد

در اینجا با ستونهای اول و دوم جدول تعریف حد معمولی، ستونهای اول و سوم تعریف حد راست، و ستونهای اول و آخر تعریف حد چپ به دست می‌آید. از توازی این تعاریف آشکار است که هر حکم مذکور برای حدمعمولی مشابهی برای حدود یکطرفه دارد. بخصوص، این امر در مورد قضایای ۴ تا ۶ بخش ۷.۱ درست است؛ درنتیجه، اعمال جبری وارد بر حدود یکطرفه از همان قواعد اعمال جبری حدود معمولی تبعیت می‌کنند. مثلاً، هرگاه توابع f و g در a حد راست داشته باشند، آنگاه

$$\lim_{x\to a^+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^+} g(x),$$

هرگاه f و g در a حد چپ داشته باشند، آنگاه

$$\lim_{x\to a^-} f(x)g(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \cdot \lim_{x\to a^-} g(x),$$

و از این قبیل.

قضیه‌ء زیر تقریباً واضح است، اما آنقدر مهم هست که بیان صوری داشته باشد.

قضیه‌ء ۱۲ (شرایط وجود حد). حد

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

وجود دارد اگر و فقط اگر حدود یکطرفه‌ء

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

هر دو موجود و مساوی باشند. هرگاه چنین باشد، آنگاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x),$$

یعنی ، حد f در a مساوی مقدار مشترک حدود راست و چپ f در a است .

برهان. اثبات را به عنوان تمرین می‌گذاریم . به جدول مراجعه کنید .

مثال ۱. نشان دهید که

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

حل. به ازای $0 > \varepsilon$ ، باید $0 > \delta$ ای بیابیم به‌طوری که هروقت $\delta > x > 0$ ،

$$|\sqrt[n]{x} - 0| = |\sqrt[n]{x}| = \sqrt[n]{x} < \varepsilon$$

یک انتخاب مناسب $\delta = \varepsilon^n$ است ، زیرا

$$0 < x < \varepsilon^n$$

ایجاب می‌کند که

$$0 < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\varepsilon^n} = \varepsilon$$

(ر.ک. مثال ۶ ، صفحهٔ ۱۷) اگر n زوج باشد ، $\sqrt[n]{x}$ به ازای x منفی تعریف نشده‌است، و صحبت از حد $\sqrt[n]{x}$ وقتی $x \to 0^-$ معنی ندارد . اما ، اگر n فرد باشد ، $\sqrt[n]{x}$ به ازای x منفی تعریف شده است ، و اساسا" همان استدلال نشان می‌دهد که

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt[n]{x} = 0.$$

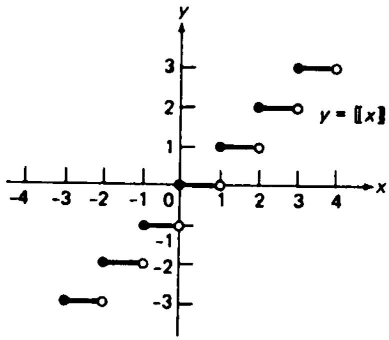
لذا . اگر n فرد باشد ، از قضیهٔ ۱۲ معلوم می‌شود که

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = 0.$$

مثال ۲. اگر x عددی باشد ، بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از x با $[\![x]\!]$ نموده می‌شود . به عبارت دیگر ، $[\![x]\!]$ عدد صحیح منحصر به فرد n است کــه $n \le x < n + 1$. بنابراین ،

$$[\![\tfrac{1}{2}]\!] = 0, \qquad [\![0]\!] = 0, \qquad [\![\sqrt{2}]\!] = 1, \qquad [\![-\tfrac{3}{2}]\!] = -2,$$

و از این قبیل . در شکل ۴۴ تابع $y = [\![x]\!]$ ، که ***تابع بزرگترین عدد صحیح*** نام دارد ، رسم شده است($[\![x]\!]$ **قسمت صحیح** x نیز نامیده می‌شود) . طبق معمول ، نقاط توپر تعلق‌به نمودار دارد ، ولی نقاط توخالی چنین نیستند . از نمودار واضح است که $[\![x]\!]$ همه جا جز



شکل ۴۴

در نقاط صحیح

$$x = n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

حد دوطرفهٔ معمولی دارد. $[\![x]\!]$ در یک چنین نقطه حد راست

$$\lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n \tag{۳}$$

و حد چپ

$$\lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \tag{۳'}$$

داشته ولی حد معمولی ندارد، زیرا این حدود یکطرفه نامساویند.

پیوستگی یکطرفه. نوعی پیوستگی نیز وجود دارد که مستلزم حدود یکطرفه است. اگر

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

گوییم تابع f **از راست در a پیوسته** است، اما اگر

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a),$$

گوییم f **از چپ در a پیوسته** می‌باشد (در اینجا باید فرض کرد که f در a تعریف شده است). از قضیهٔ ۱۲ فوراً نتیجه می‌شود که تابع f در نقطهٔ a پیوسته است اگروفقط اگر هم از راست و هم از چپ در a پیوسته باشد. در واقع، طبق این قضیه،

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

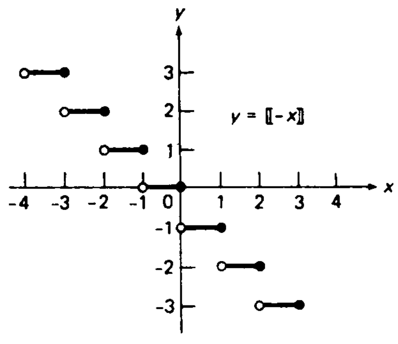
اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

مثال ۳. هرگاه n عددی صحیح باشد، آنگاه $[\![n]\!] = n$. از فرمولهای (۳) و (۳') نتیجه می‌شود که تابع بزرگترین عدد صحیح $[\![x]\!]$ در هر نقطهٔ صحیح $x = n$ از راست پیوسته است ولی از چپ پیوسته نیست. این نیز از بررسی شکل ۴۴ واضح است. تابع $[\![x]\!]$ در هر نقطهٔ دیگر به معنی معمولی پیوسته است.

پیوستگی بر یک بازه. گوییم تابع f بر بازهٔ I پیوسته است اگر در هر نقطهٔ I پیوسته باشد، با این فرض که در نقاط انتهایی I (که متعلق به I اند) پیوستگی یکطرفه است. لذا، پیوستگی f بر بازهٔ *باز* (a, b) یعنی f در هر نقطه از (a, b) پیوسته است، ولی پیوستگی f بر بازهٔ *بستهٔ* $[a, b]$ یعنی f در هر نقطهٔ (a, b)، از راست در نقطهٔ انتهایی چپ a، و از چپ در نقطهٔ انتهایی راست b پیوسته می‌باشد. این معنی دارد، زیرا x نمی‌تواند، بدون خارج شدن از بازهٔ $[a, b]$، از چپ به a یا از راست به b نزدیک شود، و ما می‌خواهیم پیوستگی را برای تابعی که قلمرو تعریفش بازهٔ بسته‌ای است نیز تعریف کنیم. به همین نحو، f در بازهٔ نیمباز $[a, b)$ پیوسته است اگر f بر (a, b) و از راست در a پیوسته باشد، f بر $(-\infty, b]$ پیوسته است اگر f بر $(-\infty, b)$ و از چپ در b پیوسته باشد، و از این قبیل.

مثال ۴. فرض کنیم n عدد صحیحی باشد. در این صورت، تابع بزرگترین عدد صحیح $[\![x]\!]$ بر بازهٔ $[n, n + 1)$ پیوسته است ولی بر بازهٔ $(n, n + 1]$ چنین نیست. با توجه به منعکس نمودار $[\![x]\!]$ نسبت به محور y (ر.ک. شکل ۴۵)، درمی‌یابیم که تابع $[\![-x]\!]$ بر $(n, n + 1]$ پیوسته است ولی بر $[n, n + 1)$ چنین نیست.



شکل ۴۵

مسائل

مقادیر زیر را بیابید .

۱ . $[\![-\pi]\!]$ ۲ . $[\![\pi^2]\!]$ ۳ . $[\![\sqrt{2}-\sqrt{3}]\!]$

۴ . $[\![(\frac{2}{3})^4]\!]$ ۵ . $[\![(1.1)^{10}]\!]$ ۶ . $[\![(-\frac{7}{11})^{13}]\!]$

حد داده شده را (در صورت وجود) بیابید .

۷ . $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{x-1}$ ۸ . $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}$

۹ . $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt[3]{x-1}$ ۱۰ . $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$

۱۱ . $\lim\limits_{x\to 0^-} x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}$ ۱۲ . $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{\sqrt{x}}$

۱۳ . $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{[\![x]\!]}{x}$ ۱۴ . $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{[\![x]\!]}{x}$

۱۵ . $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\![x]\!]}{x}$ ۱۶ . $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{[\![x]\!]}{x}$

۱۷ . $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{[\![x]\!]}{x}$ ۱۸ . $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{[\![x]\!]}{x}$

۱۹ . حدود یکطرفهٔ تابع

$$f(x)=\frac{x+x^2}{|x|} \qquad (x\neq 0)$$

در $x=0$ را بیابید .

۲۰ . حدود یکطرفهٔ تابع

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{اگر } x<2 \\ 1.1x & \text{اگر } x\geq 2 \end{cases}$$

در $x=2$ را بیابید .

۲۱ . به فرض آنکه

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{اگر } 0\leq x<1 \\ 2-x & \text{اگر } 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

دو بازه با نقاط انتهایی 0 و 1 بیابید که f بر آنها پیوسته باشد . نشان دهید که f بر هر بازه با نقاط انتهایی 1 و 2 پیوسته است .

۲۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} -|x+1| \text{ ، } x < 0 \text{ اگر} \\ |x-1| \text{ ، } x > 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

که در آن $f(0)$ تعریف نشده است. $f(0)$ چگونه تعریف شود که f از راست در $x = 0$ پیوسته شود؟ از چپ در $x = 0$ پیوسته شود؟

فرض کنید حدود راست و چپ تابعی در نقطهٔ a موجود و نامساوی باشند. در این صورت کمیت

$$J = \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$$

جهش f در a نام دارد، و گویند f در a ***ناپیوستگی جهشی*** دارد. مثلاً"، هر ناپیوستگی تابع بزرگترین عدد صحیح $[\![x]\!]$، که در شکل ۴۴ رسم شده، یک ناپیوستگی جهشی است، و جهش در هر نقطهٔ ناپیوستگی $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ دارای مقدار یکسان 1 می‌باشد.

۲۳. جهش تابع

$$f(x) = \frac{J}{2} \frac{|x-a|}{x-a}$$

چیست و در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد؟

۲۴. نشان دهید که ناپیوستگی جهشی نمی‌تواند قابل‌رفع باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۱۰، صفحهٔ ۱۲۹).

۲۵. ناپیوستگیهای تابع $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$ را بیابید. آیا اینها ناپیوستگی جهشی‌اند؟ آیا قابل رفع‌اند؟

۲۶. جهشهای تابع

$$f(x) = \begin{cases} 3x \text{ ، } x < 1 \text{ اگر} \\ 0 \text{ ، } x = 1 \text{ اگر} \\ x \text{ ، } 1 < x < 3 \text{ اگر} \\ 4 \text{ ، } x \geq 3 \text{ اگر} \end{cases}$$

را بیابید.

۲۷. به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x \text{ ، } x < -\pi/2 \text{ اگر} \\ a\sin x + b \text{ ، } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \text{ اگر} \\ \cos x \text{ ، } x > \pi/2 \text{ اگر} \end{cases}$$

چه a و b ای تابع f را همه‌جا پیوسته می‌سازند؟

۲۸. نشان دهید که کوچکترین عدد صحیح ناکمتر از x مساوی $-[\![-x]\!]$ است.

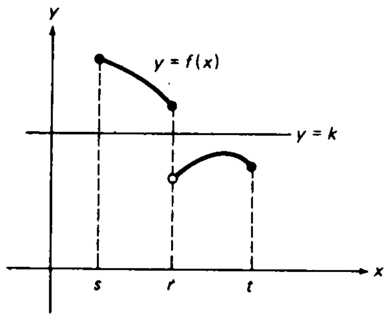
۱۰.۱ خواص توابع پیوسته

حال خواصی از تابع f را بررسی می‌کنیم که صرفاً " نتیجه‌ٔ پیوستگی آن بر یک بازه می‌باشند .

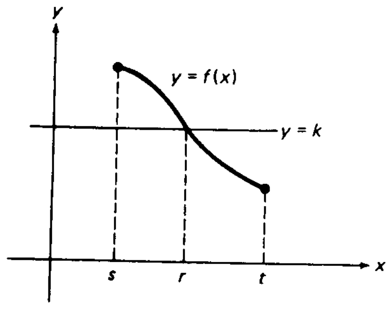
قضیهٔ مقدار میانی

قضیهٔ ۱۳ (قضیهٔ مقدار میانی) . هرگاه f بر بازهٔ I پیوسته بوده و f مقادیر مختلف $f(s)$ و $f(t)$ را در دو نقطهٔ s و t از I بگیرد ، آنگاه f هر مقدار میانی k را خواهدگرفت؛ یعنی ، هر مقدار k بین $f(s)$ و $f(t)$ ، در نقطه ای مانند r بین s و t .

برهان را حذف کرده‌ایم ، زیرا مستلزم مفهومی است (**تمامیت** دستگاه اعداد حقیقی) که از حوصلهٔ نخستین درس در حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج است . اما معنی هندسی قضیه کاملا " واضح می‌باشد . همانطور که شکل ۴۶ (آ) نشان داده ، نمودار تابع پیوستهٔ f نمی‌تواند از یک طرف خط افقی $y = k$ به طرف دیگر رود بی‌آنکه خط را قطع نماید . پیوستگی f برای صحت قضیه لازم است ، زیرا ، همانطور که شکل ۴۶(ب) نشان داده ، نمودار یک تابع ناپیوسته می‌تواند از روی خط $y = k$ بی‌آنکه آن را قطع کند بپرد .



(ب)



(آ)

شکل ۴۶

روش تنصیف . اولین مثال ما طرز استفاده از قضیهٔ مقدار میانی برای حل یک معادلهٔ مشکل با هر دقت مطلوب را نشان می‌دهد .

مثال ۱ . نشان دهید که معادلهٔ

$$2x^5 + 2x^2 + x - 3 = 0 \qquad (1)$$

ریشه‌ای بین 0 و 1 دارد. این ریشه را با تقریب $\frac{1}{16}$ بیابید.

حل. منظور از **ریشه** (یا **جواب**) معادلهٔ (۱) یعنی مقداری مانند x که در معادله صدق کند. تابع

$$f(x) = 2x^5 + 2x^2 + x - 3$$

را معرفی می‌کنیم که پیوسته است (زیرا یک چندجمله‌ای است). می‌بینیم که $f(0) = -3$ و $f(1) = 2$. چون $-3 < 0 < 2$، از قضیهٔ مقدار میانی معلوم می‌شود که به ازای x ی بین 0 و 1، $f(x) = 0$. لذا، معادلهٔ (۱) ریشه‌ای مانند r بین 0 و 1، یعنی در بازهٔ $(0, 1)$، دارد.[1] برای آنکه جای r دقیقتر معین شود، روند زیر را به کار می‌بریم که روش **تنصیف** نام دارد.

ابتدا مقدار f را در نقطهٔ میانی $\frac{1}{2}$ از بازهٔ $(0, 1)$ حساب می‌کنیم:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{31}{16} < 0.$$

اما $f(1) > 0$؛ و درنتیجه، باز طبق قضیهٔ مقدار میانی، $f(x)$ باید به ازای x ی بین $\frac{1}{2}$ و 1 مساوی 0 باشد. بنابراین، $\frac{1}{2} < r < 1$، و r ی را جستجو می‌کنیم که دربازهٔ کوچکتر $(\frac{1}{2}, 1)$ به طول $\frac{1}{2}$ باشد. با تنصیف دیگر، مقدار f را در نقطهٔ میانی $\frac{3}{4}$ از بازهٔ $(\frac{1}{2}, 1)$ محاسبه می‌کنیم:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^5 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - 3 = -\frac{333}{512} < 0.$$

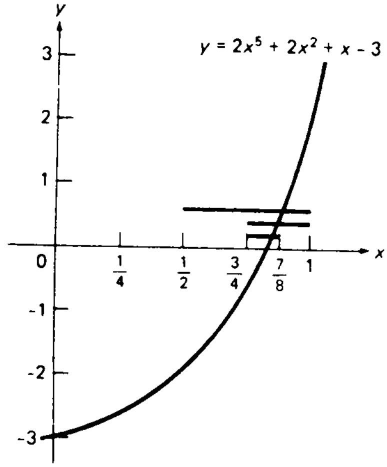
چون $f(\frac{3}{4}) < 0$ و $f(1) > 0$، تابع f در نقاط $\frac{3}{4}$ و 1 مقادیری با علایم مختلف می‌گیرد؛ و لذا، به ازای x ی بین $\frac{3}{4}$ و 1، $f(x) = 0$؛ درنتیجه، r دربازهٔ $(\frac{3}{4}, 1)$ به طول $\frac{1}{4}$ قراردارد. این هنوز برای تعیین r با دقت مطلوب کافی نیست؛ درنتیجه، تنصیف سوم را انجام داده و در می‌یابیم که $f(\frac{7}{8}) > 0$ (محاسبه به عنوان تمرین گذارده می‌شود). چون $f(\frac{3}{4}) < 0$ و $f(\frac{7}{8}) > 0$، می‌توان مطمئن بود که r در بازهٔ $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$ به طول $\frac{1}{8}$ قراردارد. اما نقطهٔ میانی $\frac{1}{2}(\frac{3}{4} + \frac{7}{8}) = \frac{13}{16}$ این بازه در فاصلهٔ حداکثر $\frac{1}{16}$ از هر نقطهٔ درونی خود قرار دارد؛ و درنتیجه، همانطور که مطلوب است، در فاصلهٔ حداکثر $\frac{1}{16}$ از ریشهٔ r واقع

---

۱. *در واقع، می‌توان به کمک آزمونی که بعداً می‌آید نشان داد که f بر $(0, 1)$ صعودی است؛ درنتیجه، r تنها ریشهٔ معادلهٔ (۱) بین 0 و 1 می‌باشد* *(ر.ک. مثال ۴، صفحهٔ ۲۷۰).*

خواهد بود .

لذا ، تقریب $r \approx \frac{13}{16} = 0.8125$ بـه اندازهٔ $\frac{1}{16}$ دقیق است . محاسـباتی دقیقتـر نشان می‌دهد که ، تا چهار رقم اعشار ، $r = 0.8305$ ؛ درنتیجه ، خطای تقریب ما بـه r ، مبتنی برسه‌تنصیف ، حدودا" $0.8305 - 0.8125 = 0.0180$ می‌باشـد . چون $\frac{1}{16} = 0.0625$ این خطا عملا" از میزان انتظار ما کوچکتر است (ر.ک. مسئلهٔ ۳) . در شکل ۴۷ ، تعبیر هندسی سه تنصیف متوالی با سه پاره‌خط افقی نموده شده است ، که در آن کوتاهترین پاره خط نقاط $\frac{3}{4}$ و $\frac{7}{8}$ محور x را به هم وصل می‌کند .



شکل ۴۷

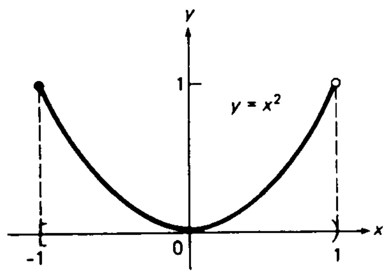
مقادیر اکستریم . فرض کنیم تابع f بربازهٔ I تعریف شده باشد (ولی نه لزوما" پیوسته) ، و نقطه‌ای مانند q در I موجود باشد به‌طوری که به ازای هـر x در I ، $f(q) \geq f(x)$. در این صورت ، عدد $f(q) = M$ **مقدار ماکزیمم** ، یا فقط **ماکزیمم** ، f بر I نامیده می‌شود . به عبارت دیگر ، M **بزرگترین مقداری** است که f در نقطه‌ای از I می‌گیرد . به همین نحو ، فرض کنیم نقطه‌ای‌مانند p در I وجوددارد به‌طوری‌که به ازای هر نقطهٔ x در I ، $f(p) \leq f(x)$ در این صورت ، عدد $f(p) = m$ **مقدار مینیمم** ، یافقط **مینیمم** ، f بر I نام دارد و**کوچکترین مقداری** است که f در نقاط I می‌گیرد . چیزی مانع اینکه f ماکزیمم یا مینیمم خود را در چند نقطه از I بگیرد نیست ، ولی ماکزیمم یا مینیمم در صورت وجود باید منحصر به فرد باشد (چرا؟) . اصطلاح **مقدار اکستریم** ، یا فقط**اکسترمم** ، اشاره به ماکزیمم یامینیمم دارد.

مثال ۲ . فرض کنیم $f(x) = k$ تابع ثابتی باشد که بر بازهٔ I تعریف شده است . f در هر

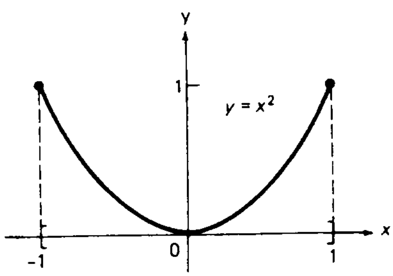
نقطهٔ I ماکزیمم و مینیمم دارد، که هر دو مساوی k می‌باشند. به عکس، هرگاه f بر بازه‌ای چون I دارای ماکزیمم M و مینیمم m بوده، و M و m مساوی با مقدار مشترک k باشند، آنگاه بر I، $f(x) \equiv k$.

مثال ۳. فرض کنیم $f(x) = x^2$ و I بازهٔ نیمباز $[-1, 1)$، مثل شکل ۴۸ (آ)، باشد. واضح است که f بر I دارای ماکزیمم $M = 1$ و $m = 0$ است. در واقع، f ماکزیمم خود را در $x = -1$، یعنی طول نقطهٔ اوج نمودار f، و مینیمم خود را در $x = 0$، یعنی طول نقطهٔ خضیض نمودار، می‌گیرد. هرگاه I بازهٔ بستهٔ $[-1, 1]$ باشد، آنگاه f همان اکسترممها را دارد، ولی دراینجا ماکزیمم M در $x = 1$ و نیز در $x = -1$ گرفته می‌شود [ر.ک. شکل ۴۸ (ب)].

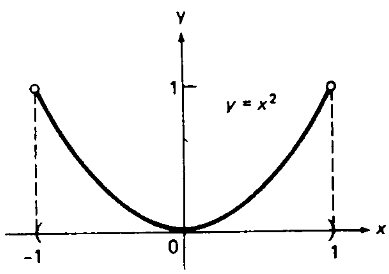
مثال ۴. مجدداً فرض کنیم $f(x) = x^2$، ولی این بار I را بازهٔ **باز** $(-1, 1)$ می‌گیریم. از شکل ۴۸ (پ) واضح است که f، مثل مثال قبل، دارای مینیمم $m = 0$ در $x = 0$ است.



(آ)



(ب)



(پ)

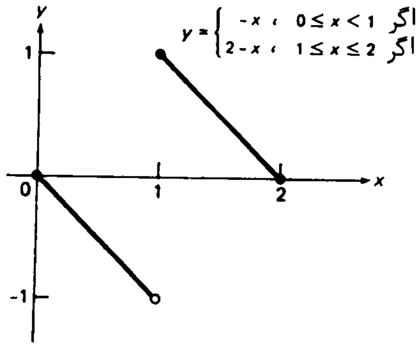
شکل ۴۸

اما f بر I دیگر ماکزیمم ندارد، زیرا f، بی‌آنکه خود مقدار 1 را بگیرد، مقادیر بدلخواه نزدیک 1 را خواهد گرفت (بزرگترین عــدد کوچکتــر از 1 وجود ندارد) .

مثال ۵ . فرض کنیم I بازهٔ بستهٔ $[0, 2]$ بوده، و f تابع پیوستهٔ

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{اگر } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{اگر } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

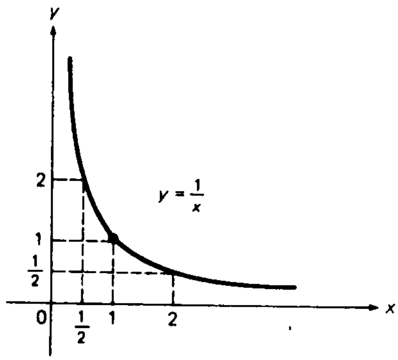
باشد که در شکل ۴۹ رسم شده است . واضح است که f بر I دارای ماکزیمم $M = 1$ اســت



شکل ۴۹

که در $x = 1$ (طول نقطهٔ اوج نمودار) گرفته می‌شود، ولی بر I مینیمم ندارد، زیرا f بی‌آنکه مقدار -1 را بگیرد، مقادیر بدلخواه نزدیک به -1 را خواهد گرفت (کوچکترین عدد بزرگتر از -1 وجود ندارد) .

مثال ۶ . فرض کنیم I بازهٔ بستهٔ بی‌کران $[1, \infty)$ بوده، و $f(x) = 1/x$. ازشکل ۵۰ واضح



شکل ۵۰

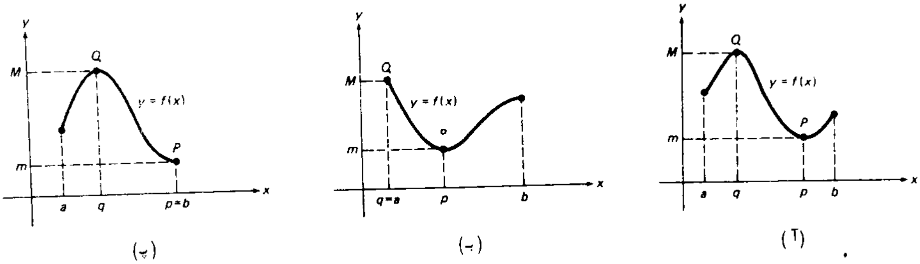
است که f بر I دارای ماکزیمم M است، که در $x = 1$ گرفته می‌شود، ولی مینیمم ندارد، چون f، بی‌آنکه مقدار 0 را بگیرد، مقادیر بدلخواه نزدیک به 0 را خواهد گرفت (کوچکترین عدد مثبت وجود ندارد).

قضیهٔ مقدار اکستریم. همانطور که امثلهٔ فوق نشان می‌دهند، هیچ حکم کلی درباب وجود مقادیر اکستریم تابع دلخواه f بر بازهٔ دلخواه I وجود ندارد. اما، درحالتی که f بر I **پیوسته** بوده، و I **کراندار** و **بسته** باشد، وجود مقادیر اکستریم را می‌توان تضمین کرد:

قضیهٔ ۱۴ (قضیهٔ مقدار اکستریم). *هرگاه f بر بازهٔ بستهٔ کراندار $I = [a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر I کراندار است، و f بر I ماکزیمم M و مینیمم m را دارد. یعنی، نقاطی مانند p و q در I وجود دارند به‌طوری که، به ازای هر x در I،*

$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(q) = M$$

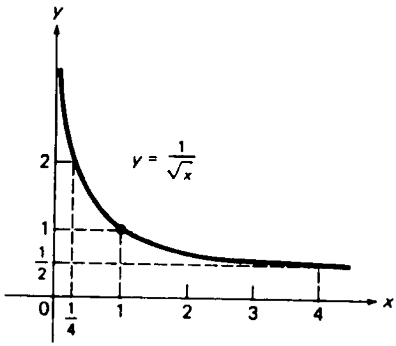
برهان حذف شده است، زیرا مثل برهان قضیهٔ مقدار میانی شامل نکاتی فنی است. با اینحال، اینکه صحت قضیهٔ مقدار اکستریم به پیوستگی f وابسته است در مثال ۵، واینکه این صحت به بسته و کراندار بودن I وابسته‌است در مثالهای ۴ و ۶ نموده شده‌است. تعبیر هندسی قضیه این است که نمودار یک تابع پیوسته بر بازهٔ کراندار بستهٔ I باید دارای نقطهٔ اوج $Q = (q, M)$ و نقطهٔ حضیض $P = (p, m)$ باشد. نقطهٔ q می‌تواند یک نقطهٔ درونی یا یک نقطهٔ انتهایی I باشد، و همین امر در مورد P نیز درست است. چند حالت ممکن در شکل ۵۱ نموده شده است.



شکل ۵۱

مثال ۷. تابع $f(x) = 1/\sqrt{x}$ بر بازهٔ کراندار بستهٔ $I = [1, 4]$ پیوسته است و، درارابطه با قضیهٔ ۱۴، f بر $[1, 4]$ کراندار است باماکزیمم $M = f(1) = 1$ و مینیمم $m = f(4) = \frac{1}{2}$ (توجه کنید که f نزولی است). تابع f بر بازهٔ $(0, 1]$ پیوسته است، ولی از شکل ۵۲

معلوم می‌شود که f بر $(0, 1)$ ماکزیمم ندارد؛ و در واقع، بر $(0, 1)$ بی‌کران می‌باشد. این امر با قضیهٔ ۱۴ سازگار است، زیرا بازهٔ $(0, 1)$ **باز** می‌باشد.



شکل ۵۲

رفتار بازه‌ها تحت نگاشتهای پیوسته. بحث خواص توابع پیوسته را با قضیهٔ مفیدی دررفتار بازه‌ها تحت نگاشتهای پیوسته پایان می‌دهیم. فرض کنیم تابع f برمجموعهٔ X تعریف شده باشد، و Y مجموعهٔ $\{y : y = f(x), x \in X\}$ باشد؛ یعنی، مجموعهٔ تمام مقادیری که f با تغییر متغیر مستقل x در مجموعهٔ X می‌گیرد. گوییم f، *X را به روی Y می‌نگارد*، و همانطور که y نقش x تحت f نامیده می‌شود، Y **نقش X تحت f** خوانده می‌شود.

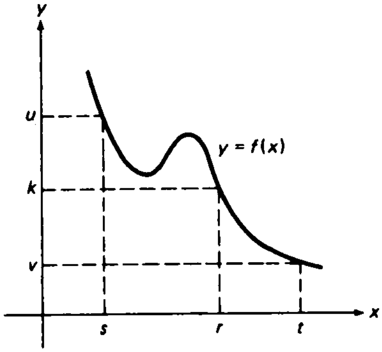
قضیهٔ ۱۵ (قضیهٔ نگاشت بازه). *فرض کنیم f بر بازهٔ I از هر نوع پیوسته بوده، و J نقش I تحت f باشد. در این صورت،*

(یک) J نیز یک بازه می‌باشد؛

(دو) اگر I بازهٔ بستهٔ کرانداری باشد، J نیز چنین می‌باشد.

برهان *(دلخواه)*. برای اثبات (یک)، فرض کنیم u و v نقاط متمایزی در J باشند. در این صورت، نقاط متمایزی چون s و t در I وجوددارند به‌طوری که $f(s) = u$ و $f(t) = v$ (ر.ک. شکل ۵۳). فرض‌کنیم k نقطه‌ای‌بین u و v باشد. بنابر قضیهٔ مقدارمیانی، نقطه‌ای مانند r بین s و t وجود دارد به‌طوری که $f(r) = k$. بنابراین، k متعلق به J می‌باشد. لذا، هروقت مجموعهٔ J شامل دو نقطهٔ متمایز u و v باشد، شامل هر نقطهٔ k بین u و v نیز هست. لذا، طبق تبصرهٔ صفحهٔ ۳۰، J یک بازه می‌باشد.

برای اثبات (دو)، فرض کنیم I کراندار و پیوسته بوده، و M و m ماکزیمم و مینیمم

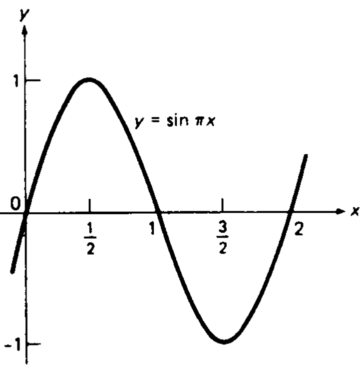


شکل ۵۳

f بر I باشند که وجودشان‌را قضیهٔ مقدار اکستریم تضمین‌می‌کند. در این صورت، مجموعهٔ J ، که به خاطر قسمت (یک) بازه است، فقط می‌تواند بازهٔ کراندار بستهٔ $[m, M]$ باشد. اگر f تابع ثابت باشد، J به مجموعه‌ای شامل فقط یک نقطه تحویل می‌شود. برای احتساب این حالت، از حالا به بعد مجموعه‌ای که فقط شامل یک نقطه، مثلاً k ، باشد‌را به صورت بازهٔ بستهٔ $[k, k]$ ، که نقاط انتهایی‌اش یکی هستند، درنظر می‌گیریم.

قضیهٔ ۱۵ به‌زبان ساده می‌گوید که هر تابع پیوسته بازه‌ها را به روی بازه‌ها و بازه‌های بستهٔ کراندار را به روی بازه‌های بستهٔ کراندار می‌نگارد. نقش پیوستهٔ یک‌بازه که‌کراندار و بسته نباشد ممکن است بازه‌ای از هر نوع باشد. مثلاً، به ازای تابع مثال ۷، نقش بازهٔ کراندار $(0, 1)$ بازهٔ بی‌کران $(1, \infty)$ می‌باشد.

مثال ۸. فرض کنیم $f(x) = \sin \pi x$. با توجه به شکل ۵۴ معلوم می‌شود که اگر $0 < \delta$ ،



شکل ۵۴

تابع پیوسته‌ٔ f بازه‌ٔ باز $(\frac{1}{2}-\delta, \frac{3}{2}+\delta)$ را به روی بازه‌ٔ بسته‌ٔ $[-1, 1]$ می‌نگارد.

مسائل

۱. هرگاه $f(x) = 1/x$ ، آنگاه $f(-1) = -1$ و $f(1) = 1$ ، ولی f مقدار صفر را بین $x=-1$ و $x = 1$ نمی‌گیرد. چرا این با قضیهٔ مقدار میانی تعارضی ندارد؟

۲. نشان دهید که معادلهٔ $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$ ریشه‌ای مانند r_1 بین -1 و 0، ریشه‌ای مانند r_2 بین 0 و 1 ، و ریشه‌ای مانند r_3 بین 1 و 2 دارد. با جانشانی $x = t/2$ ، مقادیر دقیق این ریشه‌ها را بیابید. آیا ریشه‌های دیگری نیز وجود دارند؟

۳. در مثال ۱ سه تنصیف تقریب $r \approx \frac{13}{16}$ را می‌دهد، که خطایی حدوداً مساوی 0.0180 دارد. چند تنصیف دیگر یک چنین خطای کوچکی را تضمین می‌کنند؟

۴. نشان دهید که معادلهٔ $x^6 + 2x - 2 = 0$ ریشه‌ای مانند r_1 بین -2 و -1 ، و ریشهٔ دیگری چون r_2 بین 0 و 1 دارد. نشان دهید که ریشهٔ دیگری وجود ندارد. با استفاده از روش تنصیف، r_1 و r_2 را به میزان $\frac{1}{16}$ تقریب کنید.

راهنمایی. خط $y = 2 - 2x$ منحنی $y = x^6$ را درست در دو نقطه قطع می‌کند.

۵. نشان دهید که معادلهٔ $\cos \pi x = x$ یک و فقط یک ریشه مانند r بین 0 و $\frac{1}{2}$ دارد. با استفاده از روش تنصیف، r را به میزان $\frac{1}{32}$ تقریب کنید.

۶. نشان دهیدکه معادلهٔ $\sin \pi x = x$ ریشه‌ای چون r_1 بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ ، و ریشهٔ دیگری مانند r_2 بین $-\frac{3}{4}$ و $-\frac{1}{2}$ دارد. رابطهٔ بین r_1 و r_2 چیست؟ آیا معادله ریشه‌های دیگری غیراز $x = 0$ دارد؟ با استفاده‌از روش‌تنصیف، r_1 و r_2 را به‌میزان $\frac{1}{64}$ تقریب‌نمایید.

۷. فرض کنید f بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده و، به ازای هر x در $[a, b]$ ، $a \le f(x) \le b$ نشان دهید که نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ ، به نام **نقطهٔ ثابت** f ، وجود داردکه $f(c) = c$.

۸. آسانسوری از یک عمارت رفیع ظرف 5 دقیقه بالا رفته، در طبقات مختلف برای پیاده یا سوار کردن توقف می‌کند. سپس در 3 دقیقه پایین می‌آید. نشان دهیدکه، صرف‌نظر از جزئیات حرکت، جایی (عموماً بین طبقات) وجود دارد که آسانسور درست دو بار به فاصلهٔ 4 دقیقه از آن رد می‌شود.

برای تابع f و بازهٔ I داده شده، ماکزیمم M و مینیمم m تابع f بر I را یافته، و نقاطی از I را تعیین کنید که در آنها M و m گرفته می‌شوند (هر اکسترممی راکه‌وجودندارد مشخص کنید). همچنین، بازهٔ J را طوری بیابید که نقش I تحت f باشد.

۹. $f(x) = x^2 - 2x - 2, I = (0, 3]$

۱۰. $f(x) = 1 + x - x^2, I = [-1, 2]$

۱۱. $f(x) = x^3 + 1, I = [-1, 1]$

۱۲. $f(x) = x^2 + 2x + 3, I = [-2, 1)$

۱۳. $f(x) = 1/(x - 1), I = (1, \infty)$

۱۴. $f(x) = |x| + |x + 1|, I = [-3, 1]$

۱۵. $f(x) = 1/(x^2 + 1), I = (-\infty, 0]$

۱۶. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, I = (-1, 1)$

۱۷. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x}, I = [1, 9]$

۱۸. $f(x) = \sqrt[4]{1 + x}, I = [0, 15]$

۱۹. $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x, I = [0, \pi]$

۲۰. $f(x) = |\sin x|, I = [0, 2\pi)$

۲۱. فرض کنید تابع f دارای ماکزیمم M و مینیمم m بر بازهٔ I باشد. نشان دهید $-f$ نیز بر I مقادیر اکستریم دارد. این مقادیر چه هستند، و کجاها گرفته می‌شوند؟

۲۲. نشان دهید که تابع صعودی f همواره بر بازهٔ کراندار بستهٔ $I = [a, b]$ دارای ماکزیمم M و مینیمم m است، حتی‌اگر f در نقاطی‌از I ناپیوسته باشد. f کجاها مقادیر اکستریم خود را می‌گیرد؟ درحالتی که f نزولی است بحث کنید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

تعریف تابع، متغیرهای مستقل و وابسته

قلمرو و برد تابع. قلمرو طبیعی

شناسه و مقادیر تابع

اعمال جبری بر توابع، تساوی تابعها

تساوی همانی و اتحادها

توابع مرکب و عمل ترکیب

نمودار تابع و خاصیت خط قائم

توابع زوج و فرد، توابع صعودی و نزولی

انتقال نمودار یک تابع

توابع مثلثاتی و نمودار آنها

رادیان در مقابل درجه

طول قوس مستدیر ، مساحت قطاع مستدیر
قانون کسینوسها ، قوانین جمع برای سینوس و کسینوس
زاویهٔ بین دوخط
توابع متناوب ، دورهٔ تناوب اساسی
توابع کراندار و بی‌کران
حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to a$
پیوستگی و دلایل ناپیوستگی
تعریف ε, δ حد و تعبیر هندسی آن
اعمال جبری بر حدود و توابع پیوسته
قضیهٔ ساندویچ
حدود راست و چپ
پیوستگی از راست و از چپ ، پیوستگی بر بازه
قضیهٔ مقدار میانی ، روش تنصیف
مقادیر اکستریم تابع ، قضیـهٔ مقدار اکستریم
قضیهٔ نگاشت بازه

مقادیری از توابع مثلثاتی که مکرر به کار می‌روند

تابع \ θ	$0°$ یا 0 رادیان	$30°$ یا $\frac{\pi}{6}$ رادیان	$45°$ یا $\frac{\pi}{4}$ رادیان	$60°$ یا $\frac{\pi}{3}$ رادیان	$90°$ یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

مسائل تکمیلی

فرض کنید $f(x) = (2x+1)/(3x^2-1)$. مقادیر زیر را بیابید .

۱. $f(-1)$ ۲. $f(0)$ ۳. $f(\frac{1}{2})$
۴. $f(1/\sqrt{2})$ ۵. $f(1/\sqrt{3})$ ۶. $f(-3)$

فرض کنید $f(x) = x^2 - 2x + 3$. تمام جوابهای معادلهٔ داده شده را بیابید .

۷. $f(x) = 6$ ۸. $f(x) = 0$

۹. $f(x) = 2$ ۱۰. $f(x) = 11$

۱۱. آیا محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع تابعی از مساحت آن است؟

۱۲. فرض کنید d تعداد اعداد صحیح مثبتی باشد که (دقیقاً) مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح مثبت n اند؛ مثلاً، $d = 6$ اگر $n = 12$، زیرا 12 دارای مقسوم‌علیه‌های 1، 2، 3، 4، 6، و 12 است. آیا n تابعی از d است؟

فرض کنید $f(t) = 2^t$ و $g(t) = t^2$. مقادیر زیر را حساب کنید.

۱۳. $(2f - g)(0)$ ۱۴. $(f + \frac{1}{2}g)(1)$ ۱۵. $(fg)(-1)$

۱۶. $(1 + g^2)(2)$ ۱۷. $(f/g)(-2)$ ۱۸. $(f^2 - g^2)(4)$

هرگاه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x \le 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x > 0 \\ 1 & \text{اگر } x \le 0 \end{cases}$$

تابع مرکب داده شده را بیابید.

۱۹. $f(f(x))$ ۲۰. $f(g(x))$

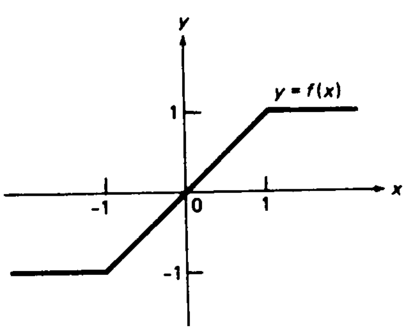
۲۱. $g(f(x))$ ۲۲. $g(g(x))$

۲۳. تابع غیرثابت f را طوری بیابید که $f \circ f = f$.

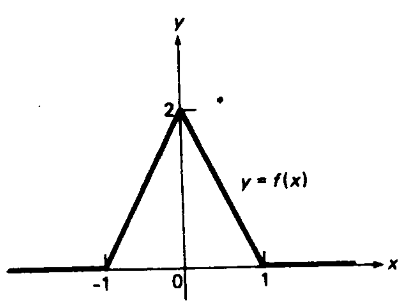
۲۴. نشان دهید که $fg \equiv 0$ با $f \not\equiv 0, g \not\equiv 0$ سازگار است. به عبارت دیگر، نشان دهید که حاصل‌ضرب دو تابع ناصفر می‌تواند صفر باشد. یعنی وضع توابع بااعدادفرق‌دارد.

برای نمودار توابع f زیر فرمول ساده‌ای برحسب قدرمطلق بیابید.

۲۵. شکل ۵۵ ۲۶. شکل ۵۶



شکل ۵۵



شکل ۵۶

زوج یا فرد (یا هیچکدام) بودن تابع داده‌شده را مشخص کنید.

۲۷. $f(x) = \sin(\sin x)$ ۲۸. $f(x) = \cos(\sin x)$

۲۹. $f(x) = \tan(\sec x)$ ۳۰. $f(x) = [\![x]\!]$

۳۱. چه تابع f ی هم زوج و هم فرد است؟

۳۲. نشان دهید که نمودار تابع ناصفر f نمی‌تواند نسبت به محور x متقارن باشد.

۳۳. دو خط مار بر مبداء بیابید که با خط $3x - 2y + 6 = 0$ زاویهٔ ‎45°‎ بسازند.

۳۴. نشان دهید که هر یک از معادلات $\sin x = \cos x$ ، $\tan x = \cot x$ ، و $\sec x = \csc x$ بی‌نهایت جواب دارد.

۳۵. دورهٔ تناوب اساسی تابع $|\sin x| + |\cos x|$ را تعیین کنید.

۳۶. نشان دهید که تابع $f(x) = x - [\![x]\!]$ متناوب، با دورهٔ تناوب اساسی 1 ، است، و نمودار آن را رسم کنید. ناپیوستگیهای f را بیابید.

۳۷. اگر $f + g$ و f در a حد داشته باشند، آیا g نیز چنین است؟ اگر $f + g$ در a حد داشته باشد، آیا f و g نیز چنین‌اند؟

۳۸. اگر fg و f در a حد داشته باشند، آیا g نیز چنین است؟ اگر fg در a حدداشته باشد، آیا f و g نیز چنین اند؟

$f(0)$ چه باید باشد تا تابع دادهٔ شده در $x = 0$ پیوسته گردد؟

۳۹. $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ ۴۰. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{2x}$

۴۱. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ ، اگر } x \neq 0 \\ 2 \text{ ، اگر } x = 0 \end{cases}$

۴۲. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 2} \text{ ، اگر } x \neq 0 \\ -1 \text{ ، اگر } x = 0 \end{cases}$

مقادیر زیر را بیابید.

۴۳. $[\![n - \tfrac{1}{2}]\!]$ (n یک عدد صحیح) ۴۴. $[\![(2.05)^4]\!]$

۴۵. $[\![\pi - \sqrt{10}]\!]$ ۴۶. $[\![(-0.9)^{90}]\!]$

۴۷. آیا درست است که $[\![|x|]\!] \equiv |[\![x]\!]|$ ؟

به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ ، اگر } x < 0 \\ 0 \text{ ، اگر } x = 0 \\ 1 \text{ ، اگر } x > 0 \end{cases}$$

تمام ناپیوستگیهای توابع مرکب $f \circ g$ و $g \circ f$ را درصورتی بیابید که

۴۸. $g(x) = 1 + x^2$

۴۹. $g(x) = x(1 - x^2)$

۵۰. $g(x) = x - [\![x]\!]$

حدود زیر را محاسبه کنید.

۵۱. $\lim_{x \to 1} (x^{100} + x^{50} + 1)$

۵۲. $\lim_{x \to -1} (x^{99} + x^{49} + 1)$

۵۳. $\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 4x + 12}{x^4 - 3x + 4}$

۵۴. $\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 + 10x - 39}{x - 3}}$

۵۵. $\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)^{10}}{(x^2 - 2x + 1)^5}$

۵۶. $\lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$

۵۷. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

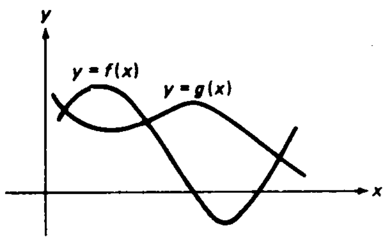
۵۸. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$

۵۹. $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$

۶۰. $\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m, n اعداد صحیح مثبت)

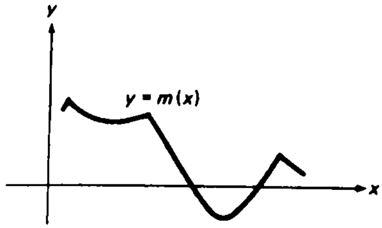
راهنمایی. بنابر **قضیهٔ عاملی** (ثابت شده در صفحهٔ ۶۴۰) ، چندجمله‌ای $Q(x)$ بر عامل خطی $x - c$ بخشپذیر است اگر و فقط اگر $Q(c) = 0$. این مطلب در حل مسائل ۵۶ تا ۵۸ مفید خواهد بود.

۶۱. نشان دهید هرگاه توابع f و g همه‌جا پیوسته باشند، آنگاه توابع $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ و $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ نیز چنین‌اند. [شکلهای ۵۷ (ب) و ۵۷ (پ) $M(x)$ و $m(x)$ توابع f و g و شکل ۵۷ (آ) را نشان می‌دهند.]



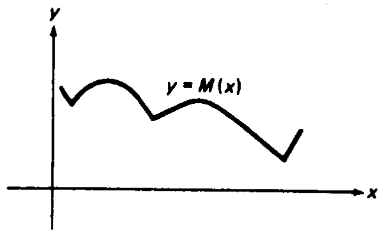
دو تابع

(آ)



مینیمم آنها

(پ)



ماکزیمم آنها

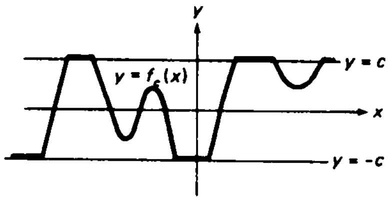
(ب)

شکل ۵۷

۶۲. با استفاده از مسئلهٔ قبل، نشان دهید هرگاه تابع f همه‌جا پیوسته باشد، آنگاه تابع " سنجاق شدهٔ "

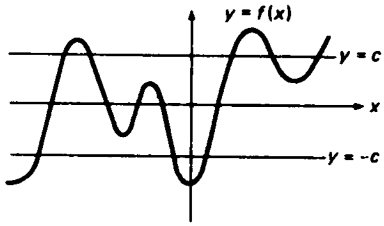
$$f_c(x) = \begin{cases} c & \text{اگر } f(x) > c \text{ ،} \\ f(x) & \text{اگر } |f(x)| \le c \text{ ،} \\ -c & \text{اگر } f(x) < -c \text{ ،} \end{cases}$$

نیز به ازای هر $c > 0$ چنین است. [شکل ۵۸ (ب) شکل سنجاق شدهٔ تابع f را که نمودارش در شکل ۵۸ (آ) رسم شده است نشان می‌دهد.]



بعداز " سنجاق شدن "

(ب)



پیش از " سنجاق شدن "

(آ)

شکل ۵۸

۶۳. نشان دهید که همواره بین هر دو عدد حقیقی متمایز می‌توان عددی گویا و عددی گنگ یافت؛ و در واقع، بی‌نهایت از این اعداد وجود دارند.

۶۴. با استفاده از مسئلهٔ قبل نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویاست ،} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ است ،} \end{cases}$$

در هر نقطهٔ a حد ندارد؛ و درنتیجه، همه‌جا ناپیوسته است.

فرض کنید $f(x)$ همان تابع مسئلهٔ ۶۴ باشد. در رفتار حدی تابع زیر (در هر نقطه) بحث کنید.

۶۵. $xf(x)$

۶۶. $|x|f(x)$

۶۷. $\frac{|x|}{x}f(x)$

۶۸. $f(x)\sin x$

۶۹. اعداد دلخواه a، b، و c داده شده‌اند و $a \neq 0$. نشان دهید که معادلهٔ $ax + b\sin x = c$ همیشه جواب دارد.

۷۰. نشان دهید که معادلهٔ $\cot \pi x = x$ در هر بازهٔ $I_n = (n, n+1)$، که در آن n صحیح و دلخواه است، درست یک ریشه مانند r_n دارد. با استفاده از روش تنصیف، r_0، r_1، و r_2 را به میزان $\frac{1}{32}$ تخمین بزنید.

مشتقات[۲]

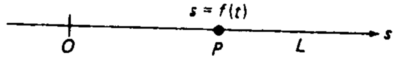
مفهوم **میزان تغییر** یک متغیر نسبت به متغیر دیگر در علوم طبیعی و در علوم احتماعی کمی راه یافته است. مفهوم ریاضی نظیر میزان تغییر نوع خاصی حد است که **مشتق** نام دارد. حال به بررسی مشروح مشتقات پرداخته، نظریهٔ اساسی را با کاربردهای متنوعی به هم می‌آمیزیم. از جمله کاربردهای مهم استفاده از مشتق در تعریف سرعت لحظه‌ای ذره‌ای است که حرکت مستقیم‌الخط دارد (ر.ک. بخش ۲.۱)، و استفاده از مشتق دریافتن خط مماس بر یک منحنی به شکل کلی می‌باشد (ر.ک. بخش ۲.۲).

۲.۱ سرعت و میزانهای تغییر؛ مفهوم مشتق

منظور از ذره یعنی جسمی که اندازه‌اش در یک مسئله قابل اغماض است؛ و لذا، می‌توان آن را یک نقطه تصور کرد. مثلاً، یک الکترون، یک اتومبیل، یا یک سیاره را می‌توان، بسته به موقعیت، یک ذره گرفت. حرکت ذرهٔ P در امتداد خط مستقیم L را درنظر گرفته، فرض می‌کنیم s موضع آن، یعنی مختص آن بر L، باشد. (فرض است که خط L، که می‌توان آن را محور s گرفت، دارای مبداء O، جهت مثبت، و واحد طول می‌باشد.) فرض کنیم موضع ذره در لحظهٔ t با **تابع موضع**

$$s = f(t)$$

مشخص شود (ر.ک. شکل ۱) شهوداً واضح است که ذره در هر لحظهٔ t دارای سرعت



شکل ۱

$v = v(t)$ است، که خود تابعی از t می‌باشد. اما این سرعت چطور باید تعریف شود؟

سرعت متوسط . برای پاسخ دادن به این سئوال ، ابتدا **سرعت متوسط** v_{av} ی ذره بین دو لحظهٔ t و u را به صورت خارج قسمت

$$v_{av} = \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \qquad (۱)$$

تعریف می‌کنیم . مخرج (۱) تغییر زمانی متغیر مستقل ضمن رفتن از مقدار " قدیم " t به‌مقدار " جدید " u است ، و صورت $f(u) - f(t)$ تغییر نظیر در موضع ذره ، یعنی متغیر وابسته ، ضمن رفتن از مقدار قدیم $f(t)$ بـه مقدار جدید $f(u)$ می‌باشد . شایـسته است نمادهای خاصی برای این تغییرات یا تفاضلات وضع شود . مثلاً ، می‌نویسیم

$$\Delta t = u - t, \qquad \Delta s = f(u) - f(t),$$

که در آن باید عبارت Δt و Δs را ، که " دلتای t " و "دلتای s " خوانده می‌شوند ، موجودات *واحدی* تلقی کرد تا حاصل ضربهایی از علایم Δ و t ، یا Δ و s . همچنین ، Δt را نمو t و Δs را نمو s می‌نامیم . توجه کنید که

$$u = t + \Delta t, \qquad f(u) = f(t + \Delta t),$$

و لذا ،

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

عبارت سرعت متوسط (۱) نسبت به نموهای Δt و Δs شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

یا ، معادلاً ،

$$v_{av} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \qquad (۲)$$

سرعت لحظه‌ای . تا اینجا خوب پیش رفته‌ایم . ولی هنوز پای‌بند آنیم که عبارت (۲) به Δt وابسته است ؛ و درنتیجه ، با ایدهٔ شهودی ما از سرعت *لحظه‌ای* در زمان t ، یعنی کمیتی که می‌خواهیم دقیقاً " تعریف کنیم ، متفاوت است . درک شهودی می‌گوید که سرعت لحظه‌ای $v(t)$ نتیجـهٔ محاسبهٔ سرعت متوسط v_{av} در " زمان متوسط " به‌قدر کافی کوچک $|\Delta t|$ است . در فرمول سرعت متوسط (۲) نمی‌توان Δt را 0 گرفت ، زیرا با این کار فرمول (۲) به صورت مبهم 0/0 درمی‌آید . اما *می‌تـوان* Δt را به 0 نزدیک کرد . لذا ، برای یک ذره با **تابع موضـع** $s = f(t)$ ، به تعریف **سرعت متوسط** (یا فقط **سرعت**) در لحظهٔ t بـه صورت حد

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

می‌رسیم؛ یعنی،

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \qquad (۳)$$

همچنین، (۳) را می‌توان به شکل معادل زیر نوشت:

$$v(t) = \lim_{u \to t} \frac{f(u) - f(t)}{u - t}. \qquad (۳')$$

هر یک از حدود (۳) و (۳') طریقه‌ای برای بیان **میزان تغییر** تابع موضع f نسبت به t است. لذا، می‌توان این بحث را خلاصه کرد و گفت که سرعت یک ذرهٔ متحرک میزان تغییر موضع ذره نسبت به زمان است.

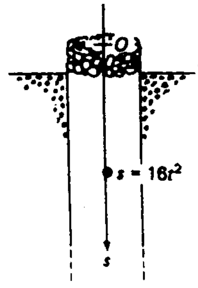
تبصره. سرعت کمیتی *علامتدار* است، و اغلب قدرمطلق آن را **تندی** می‌نامند. طبق یک داستان جعلی، راننده‌ای که در جهت مخالف یک خیابان یکطرفه می‌رفته به‌خاطر "نقض سرعت" توقیف شده است. دلیلش را توضیح دهید.

مثال ۱. سنگی را در چاه عمیقی می‌اندازیم. سرعتش t ثانیه پس از افتادن چیست؟ سه دوم ثانیه پس از افتادن چیست؟

حل. همانند مثال ۶، صفحهٔ ۶۹، موضع سنگ در لحظهٔ t عبارت است از

$$s = 16t^2,$$

که در آن t به ثانیه و s به فوت و به طور قائم از سر چاه به پایین است (ر.ک. شکل ۲).



شکل ۲

لذا ، طبق رابطهٔ (۳) به‌ازای $f(t) = 16t^2$ ، سرعت لحظه‌ای سنگ در زمان t عبارت‌است از

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16(t+\Delta t)^2 - 16t^2}{\Delta t} = 16 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\,\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$

$$= 16 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\,\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 16 \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 16(2t) = 32t.$$

بخصوص ، 1.5 ثانیه‌پس‌از رها شدن ، سرعت سنگ عبارت‌است از 48 فوت بر ثانیه $= 32(1.5)$ (و به طور فشرده‌تر ، 48 ft/sec) . به صورت دیگر ، بنابر (۳') ،

$$v(t) = \lim_{u \to t} \frac{16u^2 - 16t^2}{u - t} = 16 \lim_{u \to t} \frac{(u+t)(u-t)}{u-t}$$

$$= 16 \lim_{u \to t} (u + t) = 16(2t) = 32t.$$

شتاب . فرض کنید بخواهیم میزان تغییر تابع سرعت $v(t)$ را ، که خود یک میزان تغییر است ، نسبت به زمان حساب کنیم . با این کار تابع جدید

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \qquad (۴)$$

به نام *شتاب* ، به دست می‌آید . شتاب منفی را اغلب ***یا شتاب*** می‌نامند .

مثال ۲ . از فرمول (۴) و مثال قبل معلوم می‌شود که شتاب یک سنگ افتان عبارت‌است از

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{32(t+\Delta t) - 32t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{32\,\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 32 = 32,$$

یعنی ، شتاب دراین‌حالت دارای مقدار ثابت 32 فوت بر ثانیه بر ثانیه (به‌طور فشرده‌تر ، $32\ \text{ft/sec}^2$) است . شتاب یک شئی افتان ، که با g نموده می‌شود ، ناشی از جاذبهٔ ثقلی زمین است . درواقع ، g با موقعیت جغرافیایی تغییر می‌کند ، ولی $g \approx 32\ \text{ft/sec}^2$ تقریب مناسبی می‌باشد . در دستگاه متری ، $g \approx 9.8\ \text{meters/sec}^2$.

چگالی متوسط و دقیق . مسئلهٔ فیزیکی کاملا" متفاوت دیگری وجود دارد که در آن *ایدهٔ* میزان تغییر ظاهر می‌شود . این بار ، به جای موضع یا سرعت نسبت به زمان ، جرم نسبت به فاصله تغییر می‌کند . میلهٔ فلزی **غیرهمگن** و نازک AB را درنظر می‌گیریم ، و آن را در

امتداد محور x مثبت به مبداء در A قرار می‌دهیم (ر.ک. شکل ۳). فرض کنیم جرم m

شکل ۳

قطعه‌ای از میله که بین A و نقطهٔ x است با **تابع جرم**

$$m = f(x)$$

داده شده باشد. شهوداً واضح است که میله در هر نقطهٔ x دارای **چگالی** $d(x)$ است، که خود تابعی از x می‌باشد. اما این چگالی را چطور تعریف کنیم؟

برای پاسخ دادن به این سئوال، ابتدا **چگالی متوسط** d_{av} قطعه‌ای از میله با نقاط انتهایی x و $x + \Delta x$ را خارج قسمت جرم Δm این قطعه بر طولش تعریف می‌کنیم:

$$d_{av} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

(چرا این فرمول در صورت $\Delta x < 0$ نیز کار می‌کند؟) درک شهودی می‌گوید که چگالی **دقیق** $d(x)$ حاصل محاسبهٔ چگالی متوسط d_{av} به ازای "طول متوسط" بدلخواه کوچک $|\Delta x|$ است. با آنکه در فرمول d_{av} نمی‌توان $\Delta x = 0$ قرار داد، زیرا صورت مبهم $0/0$ حاصل می‌شود، **می‌توان** Δx را به 0 نزدیک ساخت. لذا، به تعریف **چگالی دقیق**، یافقط **چگالی**، میله در نقطهٔ x به صورت حد

$$d(x) = \lim_{\Delta x \to 0} d_{av} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

می‌رسیم؛ یعنی،

$$d(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

با جانشانی $u = x + \Delta x$ ، می‌توان $d(x)$ را به شکل معادل زیر نوشت:

$$d(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}.$$

تشابه بین این فرمولها برای چگالی $d(x)$ و فرمولهای (۳) و ('۳) برای سرعت $v(t)$ کامل است، اگرچه سرعت و چگالی از دیدگاه فیزیک مفاهیم کاملاً متفاوتی می‌باشند. آنچه درآن سهیمند این است که هر دو به نوع خاصی از حد منجر می‌شوند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال به **مشتق** معروف است. این ما را به بررسی مشتق وا می‌دارد، کاری که هم اکنون بدان خواهیم پرداخت.

تعریف مشتق. فرض کنیم تابع f در همسایگی نقطهٔ x تعریف شده باشد. منظور از مشتق f در x ، که با $f'(x)$ نموده می‌شود، یعنی حد

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{۵}$$

مشروط برآنکه موجود باشد، یا معادلاً "

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \tag{۵'}$$

(قرار می‌دهیم $u = x + \Delta x$) . اگر f در x مشتق داشته باشد، نیز گوییم f در x **مشتقپذیر** است.

باید به یاد داشت که در محاسبهٔ حد (۵) یا (۵') x را **ثابت** می‌گیریم؛ درنتیجه، در (۵) فقط Δx و در (۵') فقط u تغییر می‌کند. لذا، مشتق به ازای هر مقدار ثابت x یک عدد است‌که با $f'(x)$ نموده‌می‌شود. بااینحال، همانطورکه‌ازنمادبرمی‌آید، طبیعی‌است که عدد $f'(x)$ را **مقدار تابع جدید** f' (که به‌جای مشتق f در x فقط مشتق f نام دارد) درنظر بگیریم. همواره از قراین روشن است که مشتق به چه مفهومی گرفته شده است، یک عدد با x ثابت یا تابعی با x متغیر.

عمل مشتقگیری. عملی‌که ما را از تابع f به‌مشتقش f' می‌رساند **مشتقگیری** نسبت به متغیر مستقل نام دارد. این عمل را با علامت D نشان می‌دهیم که جلو تابع مشتقگیری شده نوشته می‌شود و متغیر مستقل به عنوان زیرنویس D می‌آید. لذا، D_x مشتقگیری نسبت به x ، D_t مشتقگیری نسبت t ، و از این قبیل را نشان می‌دهد. عبارت

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{۶}$$

یا، معادلاً "،

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x}, \tag{۶'}$$

که $f'(x)$ حد آن وقتی $\Delta x \to 0$ یا وقتی $u \to x$ است، *خارج‌قسمت تفاضلی* نام دارد. صورت (۶) یا (۶') **نمو تابع f در نقطهٔ** x نام دارد و با $\Delta f(x)$ نموده می‌شود. لذا،

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f(u) - f(x), \tag{۷}$$

که در آن، مثل همیشه در نموها، Δf موجود واحدی‌تلقی‌شده (و خوانده می‌شود "دلتای

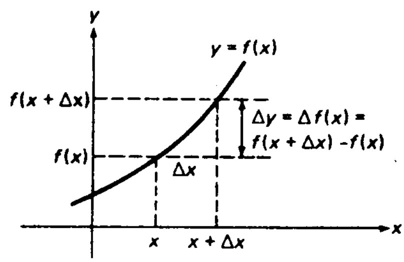
f ") نه به صورت حاصل ضربی از عوامل جداگانهٔ Δ و f . $\Delta f(x)$ طبعا" نه فقط تابع نقطهٔ x است بلکه تابع Δx ، یعنی نمو متغیر مستقل، یا تابع u ، یعنی مقـدار جدید متغیر مستقل، نیز هست ولی ما این نکته را صریحا" ذکر نمی‌کنیم .

خواهید دید که خارج‌قسمت تفاضلی (۶) یا (′۶) به ازای $\Delta x = 0$ یا $u = x$ به صورت مبهم $0/0$ درمی‌آید . لذا ، مسئلهٔ حل صور مبهم به شکل $0/0$ ، جداازاینکه صرفا" یک مسئلهٔ تکنیکی است ، در قلب حساب دیفرانسیل جا دارد!

اغلب شایسته است یک متغیر وابسته معرفی شود . اگر مثلا" $y = f(x)$ ، می‌توان مشتق $D_x f(x)$ یا $f'(x)$ را با $D_x y$ یا فقط y' نشان داد . با این نماد ،

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

که در آن Δy ، یعنی نمو y ، نام دیگری است برای کمیـت (۷) . تعبیـر هندسی $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ در شکل ۴ نموده شده است .



شکل ۴

مثال ۳ . نمو Δy و خارج‌قسمت تفاضلی $\Delta y/\Delta x$ را برای تابع $y = f(x) = x^5$ درصورتی بیابید که $x = 2$ و $\Delta x = 0.1$.

حل . به ازای مقادیر دادهٔ شدهٔ x و Δx ، داریم

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(2.1) - f(2) \\ &= (2.1)^5 - 2^5 = 40.84101 - 32 = 8.84101, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{8.84101}{0.1} = 88.4101. \end{aligned}$$

قواعد مشتقگیری . حال برای محاسبهٔ مشتق چند قاعدهٔ ساده به دست می‌آوریم . این ما

را به پویش وامی دارد، و در بخشهای بعد قواعد دیگری عرضه خواهند شد.

(یک) مشتق تابع ثابت $f(x) \equiv c$ صفر است. در واقع،

$$D_x f(x) = D_x c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

یا، به صورت دیگر،

$$D_x c = \lim_{u \to x} \frac{c - c}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{0}{u - x} = 0,$$

درنتیجه،

$$D_x c = 0.$$

(دو) هرگاه c ثابت دلخواهی باشد، آنگاه

$$D_x cf(x) = cD_x f(x).$$

به عبارت دیگر، مشتق حاصل‌ضرب یک ثابت در یک تابع مساوی حاصل‌ضرب آن ثابت در مشتق آن تابع است. برهان فوراً نتیجه می‌شود.

$$D_x cf(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cD_x f(x).$$

به بیان دیگر،

$$D_x cf(x) = \lim_{u \to x} \frac{cf(u) - cf(x)}{u - x} = c \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = cD_x f(x).$$

(سه) مشتق x متحد 1 است. در واقع،

$$D_x x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1,$$

یا، به صورت دیگر،

$$D_x x = \lim_{u \to x} \frac{u - x}{u - x} = \lim_{u \to x} 1 = 1,$$

درنتیجه،

$$D_x x = 1.$$

(چهار) توابع x^2 و x^3 به ترتیب دارای مشتقات $2x$ و $3x^2$ اند. برای تحقیق این امر،

محاسبات سرراست زیر را انجام می‌دهیم:

$$D_x x^2 = \lim_{u \to x} \frac{u^2 - x^2}{u - x} = \lim_{u \to x} (u + x) = x + x = 2x,$$

$$D_x x^2 = \lim_{u \to x} \frac{u^3 - x^3}{u - x} = \lim_{u \to x} (u^2 + ux + x^2) = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2.$$

(به یاد داشته باشید که x در محاسبهٔ این حدود ثابت است.) لذا،

$$D_x x^2 = 2x,$$
$$D_x x^3 = 3x^2.$$

(پنج) به‌طور کلی، مشتق تابع x^n، که در آن n عدد صحیح مثبتی‌است،از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$D_x x^n = nx^{n-1} \tag{۸}$$

توجه کنید که اگر به نوبت قرار دهیم $n = 1, 2, 3$، فرمول (۸) به قواعد (سه) و (چهار) تحویل می‌شود. برای اثبات فرمول (۸) به ازای عدد صحیح مثبت دلخواه n، ملاحظه می‌کنیم که، به کمک قضیهٔ دوجمله‌ای (ر.ک. مثال ۵، صفحهٔ ۳۶۴، یا هر کتاب جبر)،

$$\begin{aligned} D_x x^n &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$D_x x^n = nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right],$$

که در آن جملات ذکر نشده‌ای که با نقطه نموده شده‌اند همه شامل Δx به توانی بزرگتر از 1 هستند. از اینرو، آخرین حد مساوی 0 است،و (۸) ثابت می‌شود. به بیان دیگر، اگر طرز تقسیم $u^n - x^n$ بر $u - x$ را به یاد آورید،

$$D_x x^n = \lim_{u \to x} \frac{u^n - x^n}{u - x} = \lim_{u \to x} \underbrace{(u^{n-1} + u^{n-2}x + \cdots + ux^{n-2} + x^{n-1})}_{n \text{ جمله}},$$

که فوراً (۸) را ایجاب می‌کند، زیرا هر یک از n جمله وقتی $u \to x$ به حد x^{n-1} نزدیک

می‌شود .

(شش) مشتق تابع $\sqrt{x}$ از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$D_x\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

این فرمول از محاسبات زیر به دست می‌آید :

$$D_x\sqrt{x} = \lim_{u\to x}\frac{\sqrt{u}-\sqrt{x}}{u-x} = \lim_{u\to x}\frac{\sqrt{u}-\sqrt{x}}{(\sqrt{u}+\sqrt{x})(\sqrt{u}-\sqrt{x})} = \lim_{u\to x}\frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

که در آن از پیوستگی $\sqrt{x}$ ، که در مثال ۲ صفحهٔ ۱۴۲ ثابت شد ، استفاده می‌کنیم .

(هفت) مشتق توابع $\sin x$ و $\cos x$ از فرمولهای زیر به دست می‌آیند :

$$D_x \sin x = \cos x \tag{۹}$$

و

$$D_x \cos x = -\sin x. \tag{۹'}$$

برای اثبات (۹) ، در فرمول (۱۵) صفحهٔ ۹۶ قرار می‌دهیم $\alpha = u, \beta = x$ ، خواهیم داشت

$$\sin u - \sin x = 2\cos\frac{u+x}{2}\sin\frac{u-x}{2}. \tag{۱۰}$$

بنابراین ،

$$D_x \sin x = \lim_{u\to x}\frac{\sin u - \sin x}{u-x} = \lim_{u\to x}\cos\frac{u+x}{2}\lim_{u\to x}\frac{\sin\frac{u-x}{2}}{\frac{u-x}{2}}$$

$$= \lim_{u\to x}\cos\frac{u+x}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t},$$

که در آن $t = (u-x)/2$. پس نتیجه می‌شود که

$$D_x \sin x = \left(\cos\frac{x+x}{2}\right)\cdot 1 = \cos x,$$

که در آن از پیوستگی تابع کسینوس و اینکه وقتی $t\to 0$ ، $(\sin t)/t \to 1$ استفاده می‌کنیم .

برای اثبات (۹') ، در فرمول (۱۰) x را با $u + (\pi/2)$ و $x + (\pi/2)$ عوض می‌کنیم . خواهیم داشت

$$\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{u+x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{u-x}{2},$$

یا ، معادلاً ،

$$\cos u - \cos x = -2\sin\frac{u+x}{2}\sin\frac{u-x}{2},$$

درنتیجه ،

$$D_x\cos x = \lim_{u\to x}\frac{\cos u - \cos x}{u-x} = -\lim_{u\to x}\sin\frac{u+x}{2}\lim_{u\to x}\frac{\sin\frac{u-x}{2}}{\frac{u-x}{2}} = -\sin x.$$

لازم است همهٔ این قواعد و نیز قضیهٔ زیر را یاد بگیرید ، که می‌گوید مشتق مجموع دو تابع را می‌توان با مشتقگیری **جمله به جمله** از مجموع حساب کرد .

قضیهٔ ۱ (مشتق مجموع دو تابع) . هرگاه f و g در x مشتقپذیر باشند ، آنگاه مجموع $f+g$ نیز چنین *است* **و**

$$D_x(f+g) = D_xf + D_xg. \qquad (۱۱)$$

برهان . برای ساده بودن نمادها ، در فرمول (۱۱) شناسه‌های f و g حذف شده‌اند . برهان نتیجهٔ فوری این امر است که حد مجموع حدود جملات می‌باشد :

$$D_x(f+g) = \lim_{u\to x}\frac{f(u)+g(u)-[f(x)+g(x)]}{u-x}$$
$$= \lim_{u\to x}\frac{f(u)-f(x)}{u-x} + \lim_{u\to x}\frac{g(u)-g(x)}{u-x} = D_xf + D_xg.$$

نتیجه . هرگاه $f_1, f_2, \ldots, f_n$ در x مشتقپذیر باشند ، آنگاه مجموع جبری $f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n$ نیز چنین *است* **و**

$$D_x(f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n) = D_xf_1 \pm D_xf_2 \pm \cdots \pm D_xf_n. \qquad (۱۱)$$

برهان . قضیه را چندبار به‌کارمی‌بریم . برای سامان‌دادن علایم منها ، از $D_x(-f) = -D_xf$ استفاده می‌کنیم ، که از قاعدهٔ (دو) به ازای $c = -1$ نتیجه می‌شود .

مثالهای زیر کاربرد قضیهٔ ۱ و قواعد (یک) تا (هفت) می‌باشد .

مثال ۴ . از $7x^3 + 3x^2 - 5x + 8$ مشتق بگیرید .

حل. بنابرنتیجهٔ قضیهٔ ۱ و قواعد (یک) تا (چهار)، داریم

$$\begin{aligned} D_x(7x^3 + 3x^2 - 5x + 8) &= D_x(7x^3) + D_x(3x^2) - D_x(5x) + D_x 8 \\ &= 7D_x x^3 + 3D_x x^2 - 5D_x x + 0 \\ &= 7(3x^2) + 3(2x) - 5(1) = 21x^2 + 6x - 5. \end{aligned}$$

پس از تسلط بر قواعد مشتقگیری، نوشتن تمام مراحل محاسبات از این نوع لازم نیست.

مثال ۵. از $2\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sin x$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قواعد (شش) و (هفت)،

$$D_x\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sin x\right) = 2D_x\sqrt{x} - \frac{1}{3}D_x \sin x = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\cos x.$$

از چه قواعد دیگر استفاده شده است؟

مثال ۶. از تابع چندجمله‌ای کلی

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n,$$

که در آن $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ثابت‌اند، مشتق بگیرید.

حل. فرض کنیم $a_n \neq 0$؛ درنتیجه، $P(x)$ از درجهٔ n است. اگر $n = 0$، $P(x)$ مساوی ثابت a_0 است و مشتق $P(x)$ متحد صفر می‌باشد. هرگاه $n \geq 1$، آنگاه، با چند بار استفاده از فرمول (۸) در قاعدهٔ (پنج)،

$$\begin{aligned} P'(x) = D_x P(x) &= D_x a_0 + a_1 D_x x + a_2 D_x x^2 + a_3 D_x x^3 + \cdots + a_n D_x x^n \\ &= 0 + a_1(1) + a_2(2x) + a_3(3x^2) + \cdots + a_n(nx^{n-1}) \\ &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}, \end{aligned}$$

که یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n - 1$ است، زیرا $na_n \neq 0$.

مثال ۷. موضع یک ذرهٔ متحرک در امتداد خطی مستقیم در لحظهٔ $t \geq 0$ عبارت است از $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$. سرعت و شتاب ذره را در لحظهٔ t بیابید. چه وقت جهت حرکت ذره تغییر می‌کند؟ چه وقت ذره به موضع اولیهٔ خود باز می‌گردد؟

حل. سرعت ذره عبارت است از

$$v = D_t s = D_t\left(\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t\right) = \frac{1}{3}D_t t^3 - 2D_t t^2 + 3D_t t$$

$$= \frac{1}{3}(3t^2) - 2(2t) + 3 = t^2 - 4t + 3,$$

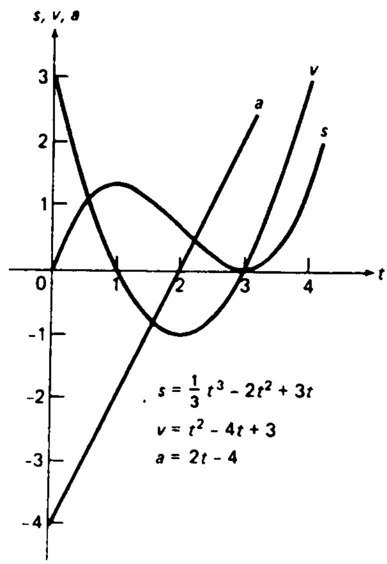
و شتابش خواهد بود

$$a = D_t v = D_t(t^2 - 4t + 3) = D_t t^2 - 4D_t t + D_t 3 = 2t - 4.$$

جهت حرکت ذره وقتی سرعتش v تغییر علامت می‌دهد تغییر می‌کند، و این زمانی صورت می‌گیرد که سرعت صفر است؛ یعنی، وقتی $t = 1$ یا $t = 3$. در واقع، چون $v = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$ ، v به ازای $0 \leq t < 1$ مثبت، به ازای $t = 0$ صفر، به ازای $1 < t < 3$ منفی، به ازای $t = 3$ صفر، و مجدداً به ازای $t > 3$ مثبت می‌باشد. موضع اولیهٔ ذره، یعنی موضع آن در $t = 0$ ، $s = 0$ است. چون

$$s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t = \frac{1}{3}t(t^2 - 6t + 9) = \frac{1}{3}t(t-3)^2,$$

ذره در لحظهٔ $t = 3$ به موضع اولیهٔ خود باز می‌گردد. شکل ۵ موضع، سرعت، و شتاب



شکل ۵

ذره را به صورت توابعی از زمان نشان داده، و تصویر مشروحی از حرکت ذره‌را می‌نمایاند.

مثال ۸. میزان تغییر بار الکتریکی نسبت به زمان *شدت جریان* نام دارد. فرض کنید در

زمان t ثانیه $q = 2t^2 - 3t + 1$ کولن بار در یک سیم هادی جریان یابد. شدت جریان حاصل i را پس از 3 sec به آمپر (کولن برثانیه) بیابید. چه وقت جریان برمی‌گردد؟ اگر یک فیوز 15-amp در مدار باشد، چقدر کار خواهد کرد؟

حل. چون

$$i = D_t q = D_t(2t^2 - 3t + 1) = 4t - 3,$$

شدت جریان پس از 3 sec مساوی $4(3) - 3 = 9$ amp است. جریان زمانی برمی‌گردد که i تغییر علامت دهد، و این وقتی رخ می‌دهد که $i = 0$ ؛ یعنی، وقتی $t = \frac{3}{4} = 0.75$ sec در واقع، چون $i = 4(t - \frac{3}{4})$ ، i به ازای $0 \le t < \frac{3}{4}$ منفی، به ازای $t = \frac{3}{4}$ صفر، و به ازای $t > \frac{3}{4}$ مثبت است. فیوز وقتی می‌سوزد که $i = 4t - 3 = 15$ ؛ یعنی، وقتی $t = \frac{18}{4} = 4.5$ sec.

مسائل

۱. موضع یک ذره متحرک در امتداد خطی مستقیم در لحظهٔ t عبارت است از $s = 10t + 5t^2$ ، که در آن s به فوت و t به ثانیه است. فرض کنید $v_{av}(\Delta t)$ سرعت متوسط ذره بین لحظات $t = 20$ و $t = 20 + \Delta t$ باشد. $v_{av}(\Delta t)$ را به ازای $\Delta t = 1,$ 0.1, 0.01, 0.001 حساب کنید. سرعت لحظه‌ای v ذره در لحظهٔ $t = 20$ چیست؟

۲. در حل مثالهای ۱و۲ در واقع دو مشتق حساب شده‌اند. آنها را مشخص کنید.

نمو $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ و خارج قسمت تفاضلی $\Delta y/\Delta x$ را برای تابع $f(x)$ ، نقطهٔ x ، و نمو Δx پیدا نمایید.

۳. $y = x^2, x = 3, \Delta x = 0.1$

۴. $y = x^3, x = -1, \Delta x = -0.1$

۵. $y = x^4, x = 0, \Delta x = -0.2$

۶. $y = 1/x, x = 2, \Delta x = 2$

۷. $y = 1/x^2, x = 1, \Delta x = -3$

۸. $y = 1/x^3, x = -2, \Delta x = 1$

۹. $y = \sqrt{x}, x = 16, \Delta x = -7$

۱۰. $y = \sin x, x = 0, \Delta x = \pi/6$

۱۱. $y = \cos x, x = \pi/2, \Delta x = \pi/4$

۱۲. $y = \tan x, x = \pi/4, \Delta x = -\pi/2$

از توابع زیر مشتق بگیرید .

۱۳. $x^3 + x^2 + x + 1$

۱۴. $2s^3 - 4s^2 + 8s - 16$

۱۵. $-t^3 + 9t^2 + 5t$

۱۶. $4u^3 - 3u^2 - u + \pi$

۱۷. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

۱۸. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

۱۹. $(x^2 - 4)(x + 4)$

۲۰. $\cos^2 x + \sin^2 x$

۲۱. $x^4 + 3x^2 - 6$

۲۲. $x^5 - 2\sqrt{x}$

۲۳. $x^9 + x^6 + x^3 + 1$

۲۴. $2x^{10} - 3x^7 + 5x^3 + 20$

۲۵. $x^{100} - 2x^{50} + 25x$

۲۶. $3 \sin x - 4 \cos x$

۲۷. $s^4 - s^3 + 3s^2 + 8$

۲۸. $10t^5 - 100t^4 + 1000t$

۲۹. $5u^7 - 7u^6 + 9u^5 - 11$

۳۰. $8w^3 - 4\sqrt{w} + \cos w$

۳۱. $(x^2 + 3)(x^2 - 3)$

۳۲. $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$

۳۳. حد

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

را به صورت مشتق تعبیر کرده ، و آن را محاسبه نمایید .

۳۴. موضع یک ذرهٔ متحرک درامتداد خطی مستقیم درلحظهٔ $t \geq 0$ بـا $s = t^4 - 4t^3 + 4t^2$ داده شده است . سرعت v و شتاب a ذره در لحظهٔ t را بیابید . جهت حرکت ذره چه وقت تغییر می‌کند ؟ ذره چه‌وقت به موضع اولیه‌اش باز می‌گردد ؟

۳۵. ارتفاع بالای موضع اولیهٔ سنگی که با سرعت اولیهٔ $v_0 = 96$ ft/sec به طور قائم‌به بالا پرتاب شده عبارت است از $s = v_0 t - 16t^2$ ، که در آن s به فوت و t به ثانیه است

(این در مثال ۳، صفحهٔ ۴۲۸ ، نموده شده است) . فرض کنید $v_0 = 96$ ft/sec چه وقت سنگ صعودش متوقف شده و شروع به نزول می‌کند ؟ ارتفاع ماکزیمم سنگ چقدر است ؟ شتاب آن چقدر است ؟

۳۶. یک سنگ توسط شخصی که در لبهٔ بام به فاصلهٔ 48 ft از زمین ایستاده با سرعت اولیهٔ 32 ft/sec به طور قائم به بالا پرتاب شده است . اگر سنگ هنگام فرود به بام نخورد ، چه وقت به زمین می‌خورد ؟ سرعتش هنگام برخورد چقدر است ؟

۳۷. در مسئلهٔ قبل ، ارتفاع بام چقدر باشد تا سنگ چهار ثانیه بعد ؛ پنج ثانیه بعد به زمین بخورد ؟

۳۸. موضع اتومبیلی t ثانیه پس از شروع حرکت $s = \frac{1}{2}kt^2$ است ، که در آن s به فوت و t به ثانیه است . ثابت k را تعبیر کرده ، و مقدارش را درصورتی بیابید که در 10 ثانیه به سرعت 60 mph (میل بر ساعت) برسد . آیا فرمول $s = \frac{1}{2}kt^2$ حرکت اتومبیل را به ازای t ی بزرگ توصیف می‌کند ؟

۳۹. فرض کنید $q = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + t$ کولن بار در t ثانیه در یک سیم هادی شارش یابد . شدت جریان i را 4 sec بعد بیابید . آیا جریان برمی‌گردد ؟ اگر یک فیوز 25-amp در مسیر جریان باشد ، چقدر عمر خواهد کرد ؟

۴۰. میلهٔ فلزی غیرهمگن نازک AB به طول 6 متر است . جرم 2 متر اول میله باشروع از A مساوی 1 کیلوگرم است . فرض کنید جرم قطعهٔ AP از میله با مکعب فاصلهٔ A تا P متناسب باشد . چگالی میله در نقطهٔ میانی چقدر است ؟ چگالی متوسط تمام میله چقدر است ؟ چگالی متوسط یکسوم میانی میله چقدر است ؟

۴۱. نشان دهید که

$$\lim_{u \to x} \frac{uf(x) - xf(u)}{u - x} = f(x) - xf'(x).$$

۴۲. فرض کنید $f(x) = (x - a)g(x)$ ، که در آن تابع g در f پیوسته است . نشان دهید مشتق f در a مساوی $g(a)$ است .

مشتق تابع داده شده را با محاسبهٔ مستقیم حد معرف مشتق پیدا کنید .

۴۳. $f(x) = 1/x$

۴۴. $f(x) = 1/x^2$

۴۵. $f(x) = 1/(x^2 + 1)$

۲.۲ خط مماس بر منحنی

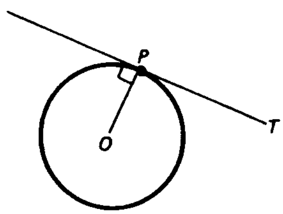
حال، با استفاده از مشتق ، مسئلهٔ هندسی مهم یافتن **خط مماس**، یا فقط **مماس**، بر یک

منحنی به شکل کلی را حل می‌کنیم . مسئلهٔ یافتن مماس بر یک منحنی ازمسئلهٔ **تعریف** مماس جدا نیست . فرض کنیم منحنی C یک دایره بوده ، و P نقطه‌ای از C باشد . بنابر هندسهٔ مقدماتی ، مماس بر C در P عبارت است از

(یک) خطی که C را در نقطهٔ P و فقط این نقطه قطع می‌کند ، یا

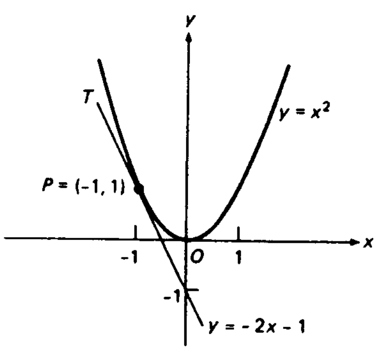
(دو) خط ماربر P و عمود بر شعاعی از C که از P می‌گذرد .

این خط T است که در شکل ۶ نموده شده است . تعریف (دو) ، مستلزم شعاع ،همتابی در



شکل ۶

منحنیهای دلخواه ندارد ، و تعریف (یک) نیز مستعد تعمیم نیست . مثلاً ، در منحنی $y = x^2$ با شکل ۷ (یک سهمی) ، دو خط ، یعنی محور x و محور y ، وجود دارند که



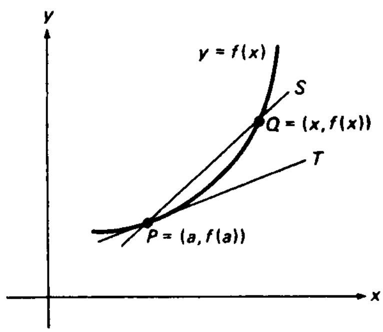
شکل ۷

منحنی را فقط در مبداء O قطع می‌کنند . اما عقل سلیم مماس بودن محور y بر منحنی در O را رد می‌کند ، و در عین حال محور x را به عنوان مماس در O می‌پذیرد . از این نکات چنین برمی‌آید که خاصیت کلیدی مماس این است که در مجاورت نقطهٔ تماس خیلی به منحنی " چسبیده است " . مثلاً ، این امر برای خط T در شکل ۷ درست است که ، همانطور که در مثال ۲ نشان خواهیم داد ، بر سهمی $y = x^2$ در نقطهٔ $P = (-1, 1)$ مماس است .

خط مماس به عنوان موضع حدی خط قاطع. برای آنکه به این ایدهٔ شهودی معنی دقیق ریاضی بدهیم، به صورت زیر استدلال می‌کنیم. فرض کنیم $P = (a, b)$ نقطه‌ای ثابت و $Q = (x, y)$ نقطه‌ای متغیر از منحنی $y = f(x)$ باشد، که در آن f بر بازهٔ بازی شامل a و x پیوسته است. فرض کنیم S خط مستقیمی ماربر نقاط P و Q باشد؛ یک چنین خط یک *خط قاطع*، یا فقط *قاطع*، منحنی نام دارد. اگر S مایل باشد، همانطور که شکل ۸ نشان داده، شیب S مساوی است با

$$m_S = \frac{y - b}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \qquad (۱)$$

حال نقطهٔ Q را درامتداد منحنی تغییرداده آن را به‌نقطهٔ ثابت P نزدیک‌می‌کنیم (مواضع متوالی Q لازم نیست یک طرف P باشند). در این صورت، x به a نزدیک می‌شودودرعین

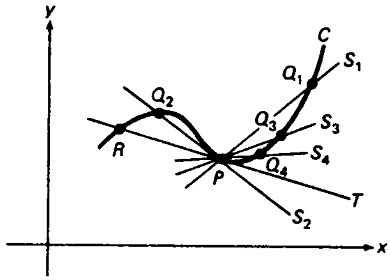


شکل ۸

حال شیب خط قاطع ماربر P و Q تغییر می‌نماید. فرض کنیم حد

$$m = \lim_{x \to a} m_S \qquad (۲)$$

موجود باشد. در این صورت، *مماس* برمنحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ P خط مستقیم ماربر P به شیب m تعریف می‌شود. می‌توان گفت که مماس در P دارای شیب حدی قاطع S ماربر P و Q است وقتی نقطهٔ متغیر Q به نقطهٔ ثابت P نزدیک می‌شود. این رفتار در شکل ۹مجسم شده است، که در آن وقتی نقطهٔ متغیر با گرفتن مواضع متوالی $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \ldots$ به P نزدیک می‌شود، قاطع با گرفتن مواضع $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ به موضع خط مماس T نزدیک می‌گردد. شکل همچنین نشان می‌دهد که، برخلاف دایره، مماس بر منحنی‌کلی C ممکن است C را در نقاطی غیر از نقطهٔ تماس قطع کند (در اینجا T منحنی C را در RوP قطع می‌کند).



شکل ۹

تعریف و معادلهٔ خط مماس. حال آنچه باقی مانده گذاردن (۱) در (۲) است. این کار نتیجه می‌دهد که

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

که فوراً تشخیص می‌دهید که مساوی حد معرف $f'(a)$، یعنی **مشتق f در a**، است. پس منحنی $y = f(x)$ ***دارای خط مماس مایل T در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ است اگر و فقط اگر f در a مشتق‌پذیر باشد***، و دراین صورت، شیب T مساوی $f'(a)$ می‌باشد. این شیب **شیب خود منحنی** در P نیز نام دارد. لذا، شیب منحنی در P را می‌توان میزان تغییر مختص y منحنی $y = f(x)$ نسبت به مختص x آن گرفت که در $x = a$ محاسبه شده است. چون معادلهٔ خط مستقیم به شیب m و مار بر نقطهٔ (a, b) مساوی $y = m(x - a) + b$ است، معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $(a, f(a))$ عبارت است از

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \qquad (۳)$$

توجه کنید که اگر $f'(a) = 0$، مماس خط *افقی* $y = f(a)$ است.

مثال ۱. نشان دهید، همانطور که انتظار می‌رود، مماس بر خط $y = f(x) = mx + b$ در هر نقطه از آن چیزی جز خود آن نیست.

حل. چون $f'(x) = m$، $f'(a) = m$، و $f(a) = ma + b$، در این حالت معادلهٔ (۳) به $y = m(x - a) + (ma + b) = mx + b$ تحویل می‌شود.

مثال ۲. معادلهٔ مماس T بر سهمی $y = x^2$ در نقطهٔ $P = (-1, 1)$ را بیابید.

حل. دراینجا $f(x) = x^2$؛ درنتیجه، $f'(x) = 2x$. باگذاردن $a = -1$، $f(-1) = (-1)^2 = 1$، و $f'(-1) = 2(-1) = -2$ در معادلهٔ (۳)، درمی‌یابیم که معادلهٔ مماس T عبارت است از

$$y = -2(x+1) + 1 = -2x - 1$$

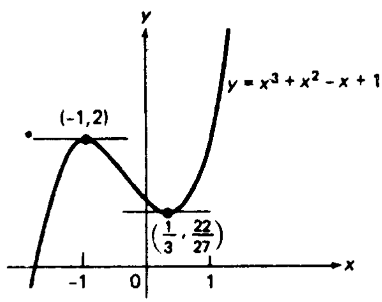
(T در شکل ۷ نموده شده است).

مثال ۳. مماس بر منحنی $y = f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ کجا افقی است؟

حل. شیب مماس در نقطهٔ $(x, f(x))$ مساوی است با

$$f'(x) = D_x(x^3 + x^2 - x + 1) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1).$$

چون $f'(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = \frac{1}{3}$ یا $x = -1$، مماس فقط در دو نقطه از منحنی افقی است؛ یعنی، در $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})) = (\frac{1}{3}, \frac{22}{27})$ و $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$، و این در شکل ۱۰ نموده شده است.



شکل ۱۰

مثال ۴. نشان دهید که منحنی $y = f(x) = x^4$ دو مماس دارد که از نقطهٔ $(\frac{3}{4}, 0)$ محور x می‌گذرد.

حل. نقطهٔ $(\frac{3}{4}, 0)$ خود روی منحنی $y = x^4$ قرار ندارد (ر.ک. شکل ۱۱).
با اینحال، بنابر فرمول (۳) به ازای $f(x) = x^4$ و $f'(x) = 4x^3$، معادلهٔ مماس‌برمنحنی $y = x^4$ در نقطهٔ (a, a^4) عبارت است از

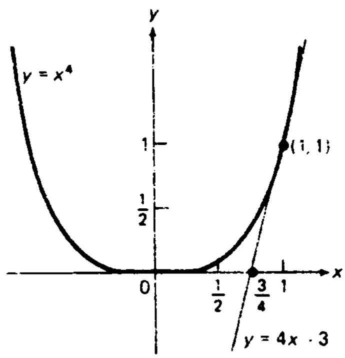
$$y = 4a^3(x-a) + a^4 = 4a^3x - 3a^4, \tag{۴}$$

و اگر مماس بخواهد از نقطهٔ $(\frac{3}{4}, 0)$ بگذرد، (۴) باید دارای جواب $x = \frac{3}{4}, y = 0$ باشد.

با گذاردن $y = 0$، $x = \frac{3}{4}$ در (۴) ، به دست می‌آوریم

$$4a^3\left(\frac{3}{4}\right) - 3a^4 = 0,$$

یا معادلاً $a^3 - a^4 = a^3(1 - a) = 0$. این معادله دارای دو جواب $a = 0$ و $a = 1$ است . با گذاردن این مقادیر a در (۴) ، در می‌یابیم که دو مماس وجود دارند که در شرایط مسئله صدق می‌کنند ، یکی به معادلهٔ $y = 0$ (محور x) و دیگری به معادلهٔ $y = 4x - 3$ ، و این امر در شکل نموده شده است .



شکل ۱۱

مثال ۵ . موضع یک ذرهٔ متحرک در امتداد یک خط مستقیم در لحظهٔ t با تابع $s = f(t)$ داده شده است . سرعت لحظه‌ای v ذره را به عنوان شیب یک منحنی تعبیر نمایید .

حل . نمودار منحنی $s = f(t)$ را با t به عنوان طول و s به عنوان عرض رسم می‌کنیم . در این صورت ، سرعت v چیزی جز شیب منحنی $s = f(t)$ نیست ، زیرا $v = D_t s = f'(t)$. بخصوص ، هر وقت منحنی مماس افقی داشته باشد ، v مساوی صفر است . برای تابع موضع شکل ۵ ، صفحهٔ ۱۸۲ ، این وقتی رخ می‌دهد که $t = 1$ و $t = 3$ ؛ و درنتیجه ، سرعت v دقیقاً در این لحظات مساوی صفر است .

مثال ۶ . نشان دهید که نمودار $y = |x|$ در مبداء دارای مماس نیست .

حل . فرض کنیم $f(x) = |x|$. در این صورت ، طبق مثال ۳ صفحهٔ ۱۱۲ ، حد

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

معرف مشتق f در $x = 0$ **وجود ندارد**. از اینرو، نمودار $y = |x|$ در مبداء مماس ندارد.

از آن‌سو، نمودار $y = |x|$ در هیچ نقطه غیر از مبداء مماس ندارد. در واقع، اگر P سمت راست مبداء باشد، مماس در P خط $y = x$ است که در شکل ۱۲ (آ) نموده شده است، ولی اگر P سمت چپ مبداء باشد، مماس در P خط $y = -x$ است که در شکل ۱۲ (ب) دیده می‌شود (در این باب، ر.ک. مثال ۱۰)

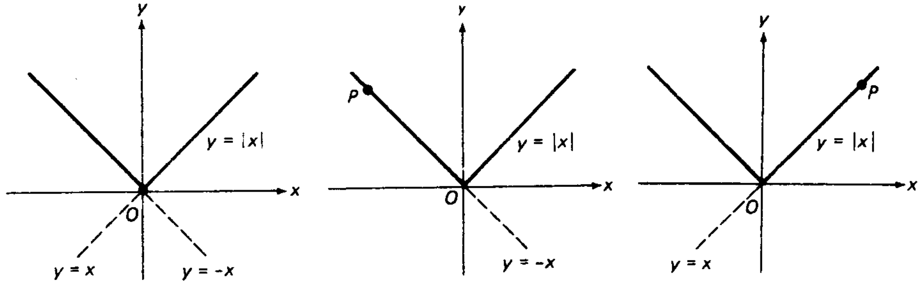
مشتقات یکطرفه و مماسها. در مورد تابع $f(x) = |x|$، مشتق " راست "

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1,$$

و مشتق " چپ "

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

هر دو در $x = 0$ موجود ولی نابرابرند و یک گوشهٔ تیز در مبداء به وجود می‌آورند. چون مشتقات یکطرفهٔ $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ نابرابرند، مشتق معمولی (دوطرفهٔ) $f'(0)$ وجودندارد (ر.ک. قضیهٔ ۱۲، صفحهٔ ۱۴۸)؛ و لذا، مماس معمولی (دوطرفه) در مبداء O وجود ندارد. با اینحال، می‌توان مماس راست در O به شیب $f'_+(0)$، و مماس چپ در O به‌شیب $f'_-(0)$ تعریف کرد. البته، این مماسها خطوط $y = x$ و $y = -x$ بوده، و متمایز بودن این خطوط مجددا " نشان می‌دهد که خط مماس به معنی معمولی در O وجود ندارد[ر.ک. شکل ۱۲ (پ)].



(پ) (ب) (آ)

شکل ۱۲

به‌طورکلی، حد

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مشتق راست تابع f در نقطهٔ a است، و حد

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

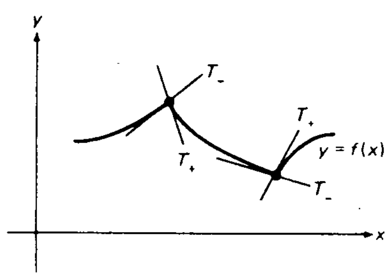
مشتق چپ f در a نام دارد. از قضیهٔ ۱۲، صفحهٔ ۱۴۸، معلوم می‌شود که مشتق معمولی $f'(a)$ موجود است اگر و فقط اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو موجود و مساوی باشند، که‌در این حالت $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$. اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو موجود ولی نابرابر باشند، گوییم منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ دارای **گوشه** است. در این حالت **مماس راست** T_+ در P به معادلهٔ

$$y = f'_+(a)(x - a) + f(a),$$

و **مماس چپ** T_- در P به معادلهٔ

$$y = f'_-(a)(x - a) + f(a)$$

وجود دارد ولی مماس معمولی در P وجود ندارد. شکل ۱۳ یک منحنی با دو گوشه همراه با مماسهای راست و چپ T_+ و T_- نظیر را نشان‌می‌دهد. حالاتی هستند که در آنها نمودار یک تابع پیوسته نه فقط در نقطه‌ای مانند P مماس ندارد بلکه در P **مماس یکطرفه** نیز ندارد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۳).



یک منحنی با دو گوشه

شکل ۱۳

با آنکه تابع $y = |x|$ در $x = 0$ مشتق ندارد، همانطور که در مثال ۶ دیدیم، در $x = 0$ پیوسته است. به بیان کوتاه، این نشان می‌دهد که پیوستگی مشتقپذیری‌را ایجاب نمی‌کند. از آن سو، همانطور که اینک ثابت می‌شود، مشتقپذیری پیوستگی‌را ایجاب **می‌کند**:

یعنی ، یک تابع باید در هر نقطه که مشتق دارد پیوسته باشد .

قضیهٔ ۲ (مشتقپذیری پیوستگی را ایجاب می‌کند) . *هرگاه f در a مشتقپذیر باشد ، آنگاه f در a پیوسته است .*

برهان . فرض کنیم f در a مشتقپذیر باشد . در این صورت ، حد

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

وجود دارد . پس نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

یا ، معادلاً ،

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

یعنی ، f در a پیوسته می‌باشد .

خط قائم به یک منحنی . فرض کنیم منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ دارای مماس T باشد . خط N مار بر P و عمود بر T ***خط قائم*** ، یا فقط ***قائم*** ، به منحنی در نقطهٔ P نام دارد . چون شیب T مساوی $f'(a)$ است ، از شرط تعامد (قضیهٔ ۹ ، صفحهٔ ۵۳) معلوم می‌شود که شیب N مساوی $-1/f'(a)$ است مشروط براینکه $f'(a) \neq 0$. ولی اگر $f'(a) = 0$ ، مماس T خط افقی $y = f(a)$ مار بر P است ، و در این صورت قائم خط قائم $x = a$ مار بر P می‌باشد . لذا ، معادلهٔ قائم به منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ مساوی است با

$$y = -\frac{1}{f'(a)} (x - a) + f(a) \qquad (۵)$$

اگر $f'(a) \neq 0$ و

$$x = a \qquad (۵')$$

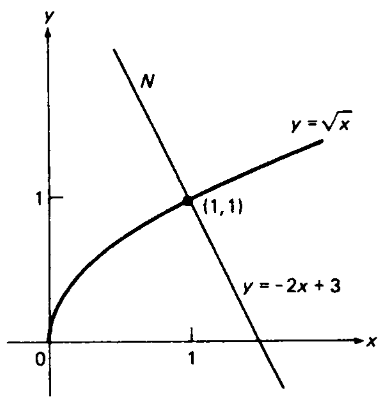
اگر $f'(a) = 0$. حالت مماس قائم و خط قائم افقی مستلزم مفهوم مشتق نامتناهی است و و در بخش ۵.۳ درنظر گرفته خواهد شد .

مثال ۷ . قائم N به منحنی $y = \sqrt{x}$ در نقطهٔ $(1, 1)$ را بیابید .

حل . در اینجا $f(x) = \sqrt{x}, a = 1$ ؛ درنتیجه ،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

لذا ، طبق (۵) ، قائم N خط $y = -2(x-1) + 1$ یا $y = -2x + 3$ است ،که‌در شکل ۱۴ نموده شده است .

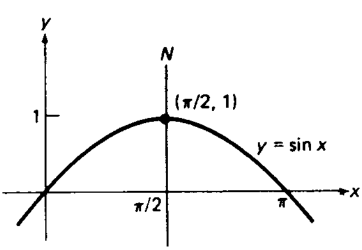


شکل ۱۴

مثال ۸ . قائم N به منحنی $y = \sin x$ در نقطهٔ $(\pi/2, 1)$ را بیابید .

حل . این بار $f(x) = \sin x,\ a = \pi/2$ ؛ درنتیجه ، $f'(x) = \cos x,\ f'(a) = \cos(\pi/2) = 0$

پس N خط قائم $x = \pi/2$ است که در شکل ۱۵ نموده شده است .



شکل ۱۵

مسائل

معادلهٔ مماس بر منحنی داده شده را بیابید .

۱ . $y = x^2 + 2x + 3$ در $(-1, 2)$

۲ . $y = 2 - x - x^2$ در $(2, -4)$

۳ . $y = \frac{1}{3}x^3 - 1$ در $(-1, -\frac{4}{3})$

۴ . $y = 2x^4$ در $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$

۵ . $y = \sqrt{x}$ در $(4, 2)$

۶ . $y = \sin x$ در $(\pi, 0)$

۷ . $y = \cos x$ در $(\pi/2, 0)$

۸ . $y = \sin x + \cos x$ در $(\pi/4, \sqrt{2})$

مماس (یا مماسهای) منحنی داده شده که از نقطهٔ P می‌گذرد را بیابید . (در هر حالت P بر منحنی قرار ندارد .)

۹ . $y = x^2, P = (3, 8)$ ۱۰ . $y = x^3, P = (0, 2)$

۱۱ . $y = x^4, P = (0, -3)$

آیا منحنی داده شده دو مماس موازی متمایز دارد ؟

۱۲ . $y = x^2$ ۱۳ . $y = x^3$ ۱۴ . $y = \sin x$

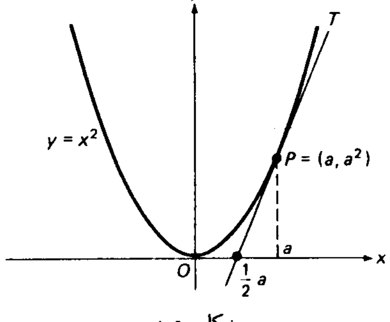
آیا منحنی داده شده دو مماس عمود برهم دارد ؟

۱۵ . $y = x^3$ ۱۶ . $y = x^2$ ۱۷ . $y = \cos x$

۱۸ . در چه نقطه از منحنی $y = x^2$ مماس موازی قاطع ماربر نقاط منحنی به طولهای 1 و 3 است ؟

۱۹ . در چه نقطه از منحنی $y = x^2 - 2x + 5$ مماس بر خط $y = x$ عمود است ؟ $m_1 = m_2$

۲۰ . فرض کنید T بر سهمی $y = x^2$ درنقطهٔ $P = (a, a^2)$ جز مبداء O مماس‌باشد . همانطور



شکل ۱۶

که شکل ۱۶ نشان می‌دهد، T خطی است که از P و نقطهٔ $(\frac{1}{2}a, 0)$ از محور x می‌گذرد. چرا چنین است؟

برای تابع داده شدهٔ f، مشتقات یکطرفهٔ $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را در صورت وجود حساب‌کنید.

۲۱. $f(x) = |x|$

۲۲. $f(x) = |x - x^2|$

۲۳. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$

۲۴. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{اگر } x \leq 0 \\ \cos x & \text{اگر } x > 0 \end{cases}$

۲۵. به ازای چه مقادیری از m و b، تابع

$$f(x) = \begin{cases} mx + b & \text{اگر } x < a \\ x^2 & \text{اگر } x \geq a \end{cases}$$

در a مشتقپذیر است؟

۲۶. تابع $y = |x| + |x - 1|$ را رسم کنید. مماسهای یکطرفه در گوشه‌های نمودار را بیابید.

۲۷. به ازای چه مقادیری از عدد صحیح مثبت n، منحنی

$$y = f(x) = \begin{cases} b & \text{اگر } x < a \\ b + (x - a)^n & \text{اگر } x \geq a \end{cases}$$

در نقطهٔ (a, b) گوشه دارد؟

۲۸. نشان دهید هرگاه منحنی $y = f(x)$ در $(a, f(a))$ گوشه داشته باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

معادلهٔ قائم به منحنی داده شده را بیابید.

۲۹. $y = x^2 + 1$ در $(0, 1)$

۳۰. $y = 1 - x^3$ در $(-1, 2)$

۳۱. $y = x^4 - 6x^2 + 2$ در $(2, -6)$

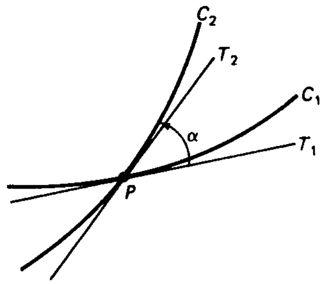
۳۲. $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ در $(\pi/2, 2)$

قائم (یا قائمهای) به‌منحنی $y = x^2$ را بیابید که از نقطهٔ داده شدهٔ P که برمنحنی واقع نیست بگذرد.

۳۳. $P = (3, 0)$ ۳۴. $P = (0, \frac{9}{2})$

همانند در شکل ۱۷، زاویهٔ α $(0 \leq \alpha < \pi)$ بین دو منحنی متقاطع C_1 و C_2 زاویهٔ بین

مماسهای T_1 و T_2 آنها در نقطهٔ اشتراک P تعریف می‌شود که از T_1 به T_2 درجهت‌خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود . به کمک فرمول (۱۷) ، صفحهٔ ۹۸ ، زاویهٔ α بین‌جفت



زاویهٔ بین منحنیهای C_1 و C_2 در P مساوی α است .

شکل ۱۷

منحنیهای داده شده را درصورتی بیابید که از منحنی اول به منحنی دوم سنجیده می‌شود.

۳۵. $y = x^2$ و $y = x^3$ در $(0, 0)$ و $(1, 1)$

۳۶. $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ در $(1, 1)$

۳۷. $y = \frac{1}{2}x^2$ و $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ در $(\pm 1, \frac{1}{2})$

۳۸. $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در $(\pi/4, 1/\sqrt{2})$

۳۹. چه انتخابی از ثابت c منحنیهای $y = 1/x$ و $y = cx^3$ را **متعامد** می‌سازد ؛ یعنی ، یکدیگر را در هر دو نقطهٔ اشتراک در زوایای قائمه قطع می‌کنند ؟

۴۰. چه انتخابی از c منحنیهای $y=x^2$ و $y=1-cx^2$ را متعامد می‌سازد ؟

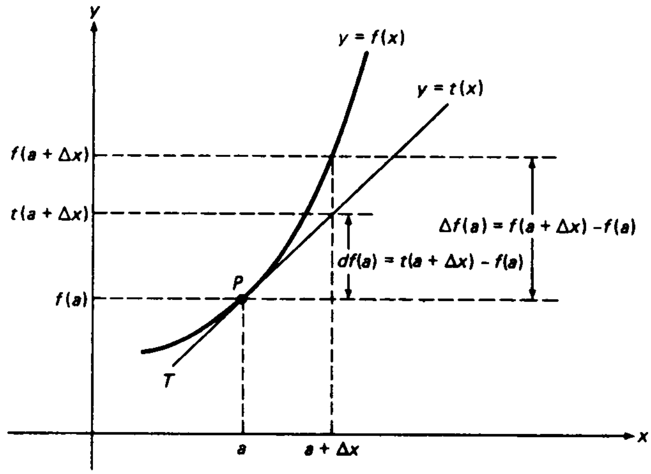
۳.۲ تقریب خط مماس و دیفرانسیلها

روشی برای تقریب توابع وجود دارد که با مفهوم مماس بر یک‌منحنی رابطه‌ای‌نزدیک‌دارد . فرض‌کنیم منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ دارای خط مماس T باشد . بنابر فرمول (۳) ، صفحهٔ ۱۸۸ ، T نمودار تابع $y = t(x)$ است ، که در آن

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1}$$

توجه کنید که $t(a) = f(a)$ ، زیرا ، همانطور که شکل ۱۸ نشان داده ، نقطهٔ P متعلق‌به منحنی $y = f(x)$ و خط $y = t(x)$ می‌باشد .

از شکل برمی‌آید که خط مماس $y = t(x)$ (دست‌کم در مجاورت P) تقریب مناسبی به منحنی $y = f(x)$ است ، و این درحالت کلی نیز درست است (ر.ک. مسئلهٔ ۲۹).لذا،



تعبیر هندسی تقریب خط مماس و دیفرانسیل

شکل ۱۸

اگر $|x - a|$ کوچک ولی ناصفر باشد ، داریم $f(x) \approx t(x)$ ؛ یعنی ،

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

این تقریب ،که **تقریب‌خط مماس** نام دارد ، برحسب‌نمو $\Delta x = x - a$ به‌شکل زیر درمی‌آید :

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x \qquad (۲)$$

این را می‌توان به صورت بسیار فشرده‌ٔ

$$\Delta f(a) \approx f'(a)\,\Delta x \qquad (۲')$$

نیز نوشت ، که در آن

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) \qquad (۳)$$

نمو تابع f در a می‌باشد .

تعریف دیفرانسیل . فرمولهای (۲) و (۲') شامل عبارت $f'(a)\Delta x$ می‌باشنـد ،که‌با $df(a)$ نموده و **دیفرانسیل تابع f در a** نامیده می‌شود . در اینجا df موجود واحدی تلقی شده ، و حاصلضرب عوامل d و f نمی‌باشد . لذا ، **طبق تعریف ،**

$$df(a) = f'(a)\,\Delta x.$$

با گذاردن $\Delta x = x - a$ در فرمول (۱) ، معلوم می‌شود که

$$t(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\,\Delta x.$$

لذا، دیفرانسیل f در a از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$df(a) = t(a + \Delta x) - f(a),$$

که باید با فرمول (۳) مربوط به نمو $\Delta f(a)$ تابع f در a مقایسه شود (فرض است که $df(a)$ و $\Delta f(a)$ هر دو، علاوه‌بر a، تابع Δx نیز هستند). لذا، دیفرانسیل $df(a)$ تغییر عرض (مختص y) **خط مماس** $y = t(x)$ است وقتی x از a تا $a + \Delta x$ تغییر نماید، حال آنکه نمو $\Delta f(a)$ تغییر نظیر عرض خود منحنی $y = f(x)$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۸).

حال a را با x عوض می‌کنیم، زیرا دیگر لازم نیست x مختص x یک نقطهٔ متغیر منحنی $y = f(x)$ یا خط مماس $y = t(x)$ را نشان دهد. درنتیجه، فرمول $df(a) = f'(a)\,\Delta x$ خواهد شد

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x. \qquad (۴)$$

فرض کنید $f(x) = x$ را اختیار کرده‌باشیم، که درمورد آن داریم $df(x) = dx$ و $f'(x) = 1$ در این صورت، (۴) به شکل زیر درمی‌آید:

$$dx = \Delta x,$$

یعنی، **دیفرانسیل و نمو متغیر مستقل باهم مساویند**. به کمک این می‌توان به جای (۴) نوشت

$$df(x) = f'(x)\,dx. \qquad (۴')$$

از تقسیم طرفین (۴') بر dx فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

لذا، می‌توان مشتق $f'(x)$ را خارج قسمت دیفرانسیلهای $df(x)$ و dx تعبیر نمود. مثلاً، با این نماد، فرمول مشتق توان x^n به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}, \qquad (۵)$$

قاعدهٔ مشتقگیری از مجموع دو تابع f و g (اگر شناسه‌ها را حذف کنیم) خواهد شد

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \qquad (۶)$$

و از این قبیل. همانطور که از این فرمولها برمی‌آید، می‌توان از عبارت "خالی" d/dx برای نمایش عمل مشتقگیری نسبت به x، که تاکنون با D_x نموده شده، نیز استفاده کرد. مثلاً، فرمول

$$D_x(x^4 + \sin x) = 4x^3 + \cos x$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx}(x^4 + \sin x) = 4x^3 + \cos x.$$

نماد لایب‌نیتز. نماد $df(x)/dx$، که در ۱۶۸۴ توسط لایب‌نیتز عرضه شد، به‌خاطر سادگی و قابلیت انعطاف بیشتر توجه ما را جلب کرده است، اگرچه طرق دیگری برای نوشتن مشتق f در x، یعنی $f'(x)$ و $D_x f(x)$، نیز وجوددارند که باارزش‌بوده و به کارخواهندرفت. لازم است با همهٔ این نمادهای معادل کاملاً آشنا شوید. علی‌رغم تعبیر $df(x)/dx$ به صورت خارج قسمت دیفرانسیلها، معمولاً بهتر است $df(x)/dx$ را فقط نماد دیگری برای مشتق f در x بگیریم.

چون

$$df(x) = f'(x)\,dx = \frac{df(x)}{dx}\,dx,$$

هر فرمول محاسبهٔ مشتق فرمول مشابهی برای محاسبهٔ دیفرانسیل به دست می‌دهد. لذا، با ضرب طرفین (۵) در dx، فرمول

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$$

برای دیفرانسیل x^n به‌دست می‌آید. به‌همین نحو، از ضرب طرفین (۶) در dx خواهیم داشت

$$d(f+g) = df + dg,$$

که همان قاعدهٔ مشتقگیری از مجموع است منتها در مورد دیفرانسیلها. به همین نحو، اگر c ثابت باشد،

$$dc = 0, \qquad d(cf) = c\,df$$

(اینها مشابه قواعد (یک) و (دو)، صفحهٔ ۱۷۷، برای دیفرانسیلها می‌باشند).

مثال ۱. $d(x^5 + 3\cos x)$ را محاسبه کنید.

حل. چون

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 3\cos x) = \frac{d}{dx}x^5 + 3\frac{d}{dx}\cos x = 5x^4 - 3\sin x,$$

داریم

$$d(x^5 + 3\cos x) = (5x^4 - 3\sin x)\,dx.$$

مثال ۲ . $d(9-2\sqrt{x})$ را محاسبه کنید .

حل . این بار مستقیما " از چند قاعدهٔ حاکم بر دیفرانسیلها استفاده می‌کنیم :

$$d(9-2\sqrt{x}) = d9 - 2d\sqrt{x} = 0 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = -\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

توجه کنید که چگونه با آوردن dx در صورت می‌توان جواب را به‌طور فشرده‌تر نوشت .

مثال ۳ . $d(t^3+t)$ را حساب کنید .

حل . در اینجا متغیر مستقل t است ؛ و درنتیجه ،

$$d(t^3+t) = \frac{d(t^3+t)}{dt}\,dt = (3t^2+1)\,dt.$$

همانطور که قبلا " گفتیم ، تقریب (۲) یعنی تعویض منحنی $y=f(x)$ در مجاورت نقطهٔ $P=(a, f(a))$ باخط مماس آن در P . تقریب معادل‌عبارت‌است از $\Delta f(a) \approx df(a)$ ؛ یعنی ، تقریب نمو $\Delta f(a)$ با دیفرانسیل $df(a)$. همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند ، این تقریبیات به ازای $|\Delta x|$ کوچک کاملا " دقیق‌اند .

مثال ۴ . $\sqrt{98}$ را تخمین بزنید .

حل . ملاحظه‌می‌کنیم که 98 به عدد 100 که ریشهٔ دومش‌دقیقا " 10 است نزدیک‌می‌باشد . لذا ، درفرمول (۲) اختیارمی‌کنیم $f(x)=\sqrt{x},\ a=100,\ \Delta x=-2$. چون $f'(x)=1/2\sqrt{x}$ ، این نتیجه می‌دهد که

$$\sqrt{a+\Delta x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\Delta x,$$

که از مقایسه با مقدار دقیق 9.8995 تا چهار رقم اعشار ،

$$\sqrt{98} = \sqrt{100-2} \approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}(-2) = 10 - \frac{1}{10} = 9.9,$$

مثال ۵ . $\sin 46°$ را تخمین بزنید .

حل . این بار از نزدیک بودن $46°$ به زاویهٔ $45°$ استفاده می‌کنیم که سینوس و کسینوس آن $1/\sqrt{2}$ است . لذا ، در فرمول (۲) اختیار می‌کنیم $f(x) = \sin x, a = 45° = \pi/4, \Delta x = 1° = \pi/180$. چون $f'(x) = \cos x$ (اگر x به رادیان باشد) ، نتیجه عبارت است از

$$\sin (a + \Delta x) \approx \sin a + \Delta x \cos a,$$

لذا ، تا پنج رقم اعشار ،

$$\sin 46° = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi}{180}\right) = 0.71945$$

این با مقدار دقیق 0.71934 با همین تعداد اعشار نزدیک است .

تبصره . در بخش ۹ ۸ ، وقتی تخمین دقت تقریب *از قبل* مطرح می‌شود ، از تقریب خط مماس استفاده خواهیم کرد .

مثال ۶ . اگر شعاع کرهٔ زمین به اندازهٔ 1 فوت زیاد شود ، مساحت سطح آن چقدر زیاد می‌شود ؟

حل . مساحت سطح یک کره به شعاع R عبارت است از $S = 4\pi R^2$ ، و شعاع زمین تقریباً 3960 میل است . اگر نمو ΔS مساحت سطح آن را با دیفرانسیل dS در $R = 3960$ تخمین بزنیم ، به دست می‌آوریم

$$\Delta S \approx dS = d(4\pi R^2) = 8\pi R \, \Delta R = 8\pi(3960) \cdot \frac{1}{5280}$$ میل مربع

زیرا هر میل 5280 فوت است . با محاسبه درمی‌یابیم که $\Delta S \approx 18.85$ sq mi . برای مقایسه ، مساحت جزیرهٔ مانهاتان تقریباً 22 sq mi است .

در مثال ۶ می‌توان دقت تقریب $\Delta S \approx dS$ را فوراً تعیین کرد ، زیرا محاسبهٔ دقیق ΔS بسیار آسان است . در واقع ،

$$\Delta S = 4\pi(R + \Delta R)^2 - 4\pi R^2 = 8\pi R \, \Delta R + 4\pi(\Delta R)^2,$$

درنتیجه ،

$$\Delta S - dS = 4\pi(\Delta R)^2 = 4\pi\left(\frac{1}{5280}\right)^2 < \frac{1}{2} \times 10^{-6} \text{ sq mi.}$$

مثال ۷. اگر شعاع کرهٔ زمین 1 اینچ کم شود ، حجم آن چقدر کاهش می‌یابد؟

حل. حجم یک توپ کروی به شعاع R مساوی است با $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. اگر نمو ΔV حجم را با دیفرانسیل dV تخمین بزنیم ، درمی‌یابیم که

$$\Delta V \approx dV = d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2 \,\Delta R$$

$$= -4\pi(3960)^2 \cdot \frac{1}{12(5280)} \approx -3110 \text{ میل مکعب}$$

($\frac{1}{12}$ فوت = 1 اینچ) . میزان کاهش این حجم تقریبا "یک‌میلیونیم حجم فعلی زمین است ، زیرا

$$\frac{4\pi R^2|\Delta R|}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3|\Delta R|}{R} = \frac{3}{3960(12)(5280)} \approx 1.2 \times 10^{-8}$$

مسائل

دیفرانسیلهای زیر را بیابید .

۱. $7x - 11$ ✓

۲. $2x^2 - 3x + 5$ ✓

۳. $x^5 + 6x^3 + x$ ✓

۴. $t^4 - 3t^3 + 2t^2 - 10$ ✓

۵. $5u^6 - \cos u$ ✓

۶. $4\sqrt{v} + 5\sin v$ ✓

۷. $\cos x - \sin x$ ✓

۸. $10x^9 - 9x^{10}$ ✓

دیفرانسیل $df(a) = f'(a)\Delta x$ تابع داده شده را به ازای مقادیر a و Δx بیابید . درهرحالت $df(a)$ را با نمو $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ تا ارقام اعشاری مناسبی مقایسه نمایید .

۹. $f(x) = 2x + 1,\ a = 3,\ \Delta x = 0.001$ ✓

۱۰. $f(x) = x^2,\ a = -\frac{1}{4},\ \Delta x = 1$ ✓

۱۱. $f(x) = x^3 - 1,\ a = -1,\ \Delta x = 0.01$ ✓

۱۲. $f(x) = x^4 + 3x^2,\ a = 2,\ \Delta x = -0.02$ ✓

۱۳. $f(x) = \sqrt{x},\ a = 4,\ \Delta x = -0.1$ ✓

۱۴. $f(x) = \sin x + \cos x,\ a = \Delta x = \pi/6$

با استفاده از تقریب خط مماس (۲) کمیت داده شده را تخمین زده ، و نتیجه را با جواب دقیق تا تعداد اعشاری مناسبی مقایسه نمایید .

۱۵. $(3.1)^2 + (3.1)^3 + (3.1)^4$

۱۶. $\sqrt{35}$

۱۷. $\sqrt{49.6}$ ✓ ۱۸. $\sqrt{611}$ ✓

۱۹. $\sin 28°$ ✓ ۲۰. $\cos 121°$

تقریب داده شده را به ازای $|x|$ کوچک توجیه کنید.

۲۱. $\sin x \approx x$ ۲۲. $\cos x \approx 1$

۲۳. اگر شعاع یک قرص مستدیر به اندازهٔ 5% زیاد شود، درصد افزایش مساحت آن را تخمین بزنید. اگر محیط به اندازهٔ 3% زیاد شود چطور؟

۲۴. فرض کنید محیط کرهٔ زمین 1 فوت افزایش یابد. فاصلهٔ بین سطح زمین " جدید" و سطح زمین " قدیم " را تخمین بزنید.

افزایش شعاع زمین را درصورتی تخمین بزنید که افزایش مساحت زیر را داشته باشیم.

۲۵. جزیرهٔ رود (≈ 1215 sq. mi)

۲۶. اوهایو (≈ 41,220 sq. mi)

۲۷. تگزاس (≈ 267,340 sq. mi)

۲۸. آنتارکتیکا (≈ 5,500,000 sq. mi)

۲۹. فرض کنید $e(\Delta x)$ خطای تقریب خط مماس (۲) باشد؛ یعنی، $e(\Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x$. نشان دهید که

$$\lim_{\Delta x \to 0} e(\Delta x) = 0, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

لذا، وقتی $\Delta x \to 0$، خطای $e(\Delta x)$ نه تنها به صفر نزدیک می‌شود بلکه از Δx " سریعتر " به صفر نزدیک خواهد شد.

۳۰. نشان دهید که تقریب خط مماس (۲) **بهترین تقریب خطی** به $f(a + \Delta x)$ نزدیک a به معنی زیر است: هرگاه $e(\Delta x)$ خطای تقریب خط مماس بوده و $E(\Delta x)$ خطای حاصل از تقریب $f(a + \Delta x)$ به وسیله خط L ماربر نقطهٔ $(a, f(a))$ غیر از خط مماس نزدیک a باشد، آنگاه، به ازای هر $\Delta x \neq 0$ با قدر مطلق به قدر کافی کوچک، یعنی به‌ازای هر Δx در یک همسایگی سفتهٔ صفر، $|e(\Delta x)| < |E(\Delta x)|$.

۳۱. فرض کنید $\tilde{q}$ تقریبی به‌یک‌کمیت با مقدار دقیق q باشد. دراین صورت، خطای $q - \tilde{q}$ تقریب $q \approx \tilde{q}$ را اغلب ***خطای مطلق*** می‌نامند تا از ***خطای نسبی*** تعریف شده با $|(q - \tilde{q})/q|$ متمایز باشد. (خطای نسبی اغلب به صورت درصد بیان می‌شود؛ مثلاً "، خطای نسبی 0.05 خطای نسبی 5% نیز نامیده می‌شود.) بنابر مسئلهٔ ۲۹، خطای مطلق تقریب خط مماس، وقتی $\Delta x \to 0$، سریعتر از Δx به‌صفر نزدیک می‌شود. مثالی بزنید که خطای نسبی تقریب خطای مماس، بدون توجه به اندازهٔ Δx، 100% باشد.

۴.۲ قواعد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت

حال تکنیک مشتقگیری را از سر گرفته، محاسبهٔ مشتق حاصل‌ضرب، متقابل، و خارج‌قسمت توابع را محاسبه می‌کنیم. مطلب را با حاصل‌ضرب آغاز می‌کنیم. ممکن است شباهت با حدود ما را گمراه کرده مشتق حاصل‌ضرب دو تابع را حاصل‌ضرب مشتقات عوامل بنویسیم، اما این را می‌توان باتوجه‌به‌عدم تساوی $D_x(1 \cdot x) = D_x x = 1$ با $(D_x 1)(D_x x) = 0 \cdot 1 = 0$ فوراً رد کرد. قضیهٔ زیر راه صحیح محاسبهٔ مشتق حاصل‌ضرب را به ما می‌دهد.

قضیهٔ ۳ (قاعدهٔ حاصل‌ضرب). *هرگاه توابع f و g در x مشتقپذیر باشند، آنگاه حاصل ضرب fg نیز چنین است، و*

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} = f'g + fg'. \qquad (۱)$$

برهان. در اینجا پریم مشتقگیری نسبت به x را نشان می‌دهد، و گاهی به خاطر اختصار شناسهٔ توابع را حذف می‌کنیم (این کار معمول است). طبق تعریف،

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{u\to x}\frac{f(u)g(u) - f(x)g(x)}{u - x},$$

که در آن x ثابت گرفته می‌شود. صورت $f(u)g(u) - f(x)g(x)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(u)g(u) - f(x)g(u) + f(x)g(u) - f(x)g(x),$$

که در آن جملهٔ $f(x)g(u)$ کم و زیاد شده است! با این کار می‌توان نوشت

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{u\to x}\left[\frac{f(u)g(u) - f(x)g(u)}{u - x} + \frac{f(x)g(u) - f(x)g(x)}{u - x}\right]$$

$$= \lim_{u\to x}\frac{f(u) - f(x)}{u - x}g(u) + \lim_{u\to x}f(x)\frac{g(u) - g(x)}{u - x},$$

که طبق خواستهٔ ما در آخرین مرحله *خارج‌قسمتهای تفاضلی* f و g ظاهر شده‌اند. باادامهٔ محاسبات به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{u\to x}\frac{f(u) - f(x)}{u - x}\lim_{u\to x}g(u) + \lim_{u\to x}f(x)\lim_{u\to x}\frac{g(u) - g(x)}{u - x} \qquad (۲)$$

$$= f'(x)\lim_{u\to x}g(u) + f(x)g'(x),$$

که در آن از تعاریف $f'(x)$ و $g'(x)$ و ثابت بودن $f(x)$ استفاده می‌کنیم. اما g طبق فرض

در x مشتقپذیر است؛ و لذا، طبق قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۱۹۳، در x پیوسته می‌باشد؛ درنتیجه،

$$\lim_{u \to x} g(u) = g(x). \qquad (۳)$$

با گذاردن (۳) در (۲) نتیجهٔ مطلوب (۱) به دست می‌آید.

لذا، مشتق حاصل‌ضرب دو تابع مشتقپذیر مشتق تابع اول در تابع دوم به‌علاوهٔ تابع اول در مشتق تابع دوم می‌باشد.

نتیجه. هرگاه توابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ **همه در** x **مشتقپذیر باشند، آنگاه حاصل‌ضرب** $f_1 f_2 \ldots f_n$ **نیز چنین است و**

$$\frac{d}{dx}(f_1 f_2 \cdots f_n) = \frac{df_1}{dx} f_2 \cdots f_n + f_1 \frac{df_2}{dx} f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} \frac{df_n}{dx}$$
$$= f'_1 f_2 \cdots f_n + f_1 f'_2 f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f'_n.$$

برهان. قضیه را چند بار به کار می‌بریم. مثلاً،

$$\frac{d}{dx}(fgh) = \frac{d(fg)}{dx} h + fg \frac{dh}{dx} = \left(\frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx}\right) h + fg \frac{dh}{dx}$$
$$= \frac{df}{dx} gh + f \frac{dg}{dx} h + fg \frac{dh}{dx},$$

یا، معادلاً،

$$(fgh)' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

مثال ۱. از $(2x-1)(x^2-6x+3)$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب،

$$\frac{d}{dx}[(2x-1)(x^2-6x+3)] = \frac{d(2x-1)}{dx}(x^2-6x+3) + (2x-1)\frac{d(x^2-6x+3)}{dx}$$
$$= 2(x^2-6x+3) + (2x-1)(2x-6) = 6x^2 - 26x + 12.$$

راه دیگر این است که ابتدا ضرب کرده سپس مشتق بگیریم:

$$\frac{d}{dx}[(2x-1)(x^2-6x+3)] = \frac{d}{dx}(2x^3 - 13x^2 + 12x - 3) = 6x^2 - 26x + 12.$$

مثال ۲ . از $x^2 \sin x$ مشتق بگیرید .

حل . هیچ راهی جز قاعدهٔ حاصل‌ضرب وجود ندارد :

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin x) = \frac{d(x^2)}{dx} \sin x + x^2 \frac{d \sin x}{dx} = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

مثال ۳ . از $\sqrt{x} \sin x \cos x$ مشتق بگیرید .

حل . با استفاده از نتیجه ، داریم

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \sin x \cos x) = \frac{d\sqrt{x}}{dx} \sin x \cos x + \sqrt{x} \frac{d \sin x}{dx} \cos x + \sqrt{x} \sin x \frac{d \cos x}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos^2 x - \sqrt{x} \sin^2 x.$$

توجه کنید که این را می‌توان به کمک فرمولهای (۱۴) و ('۱۴) ، صفحهٔ ۹۶ ، به صورت ساده‌تر زیر نوشت :

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \sin x \cos x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x,$$

قضیهٔ ۴ (مشتق متقابل یک‌تابع) . *هرگاه تابع g در x مشتق‌پذیر باشد ، آنگاه متقابل g نیز چنین است و*

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g} = -\frac{1}{g^2}\frac{dg}{dx} = -\frac{g'}{g^2},$$

مشروط بر اینکه $g(x) \neq 0$.

برهان . به کمک فرمول (۳) داریم

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g} = \lim_{u \to x} \frac{\frac{1}{g(u)} - \frac{1}{g(x)}}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{g(x) - g(u)}{g(u)g(x)(u - x)}$$

$$= -\lim_{u \to x} \frac{1}{g(u)g(x)} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}$$

$$= -\frac{1}{g(x)} \lim_{u \to x} \frac{1}{g(u)} \lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} = -\frac{1}{g^2(x)} g'(x),$$

چون طبق فرض $g(x) \neq 0$ ، لازم نیست از صفر بودن $g(u)$ در هیچ مخرجی نگران باشیم (قاعدهٔ (دو) ، صفحهٔ ۱۲۴، را به یاد آورید) .

مثال ۴ . از $1/(x^2+1)$ را مشتق بگیرید .

حل . بنابر قضیهٔ ۴ ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{(x^2+1)^2}\frac{d}{dx}(x^2+1) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

مثال ۵ . از $1/(\sin x + \cos x)$ مشتق بگیرید .

حل . بنابر همان قضیه ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x)$$

$$= -\frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

مشتقگیری از توانهای منفی . حال می‌توانیم از متقابل x^n ،که در آن n عدد صحیح مثبتی است ، مشتق بگیریم . مجددا" ،طبق قضیهٔ ۴ ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{1}{x^{2n}}\frac{d}{dx}x^n = -\frac{1}{x^{2n}}nx^{n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

مشروط براینکه $x \neq 0$. این رابطه را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = -nx^{-n-1} \qquad (۴)$$

اما (۴) از تعویض n با $-n$ در فرمول

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \qquad (۵)$$

که از قبل بر ما معلوم است ، به دست می‌آید . در واقع ، ما فقط‌از (۵) بــه ازای $n > 0$ برای اثبات (۴) استفاده کرده‌ایم لذا ، می‌بینیم که فرمول مشتقگیری اساسی (۵) برای اعداد صحیح منفی نیز برقرار است . این فرمول ، دست کم به‌طور صوری ، به ازای $n = 0$ نیز برقرار است ، زیرا هرگاه $x \neq 0$ ، آنگاه $x^0 \equiv 1$ ؛ درنتیجــه ، $D_x x^0 = D_x 1 = 0$ ،

حال آنکه فرمول (۵) نتیجه می‌دهد که $D_x x^0 = 0x^{-1} = 0$. لذا، فرمول (۵) به ازای هر عدد صحیح، مثبت، منفی، یا صفر، برقرار است.

مثال ۶. با دو بار استفاده از فرمول (۵)، داریم

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=\frac{d}{dx}(x^{-1}+x^{-3}) = -1x^{-2}-3x^{-4} = -\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}$$

قضیهٔ ۵ (قاعدهٔ خارج‌قسمت). *هرگاه توابع f و g در x مشتقپذیر باشند، آنگاه خارج قسمت f/g نیز چنین است و*

$$\frac{d}{dx}\frac{f}{g}=\frac{\dfrac{df}{dx}g-f\dfrac{dg}{dx}}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2},$$

مشروط براینکه $g(x) \neq 0$.

برهان. ابتدا از قاعدهٔ حاصل‌ضرب و سپس قاعدهٔ مشتقگیری از متقابل یک تابع استفاده می‌کنیم، داریم

$$\frac{d}{dx}\frac{f}{g}=\frac{d}{dx}\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)=f'\cdot\frac{1}{g}+f\cdot\frac{-g'}{g^2}=\frac{f'}{g}-\frac{fg'}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

مثال ۷. از $2x/(1-x^2)$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ خارج قسمت،

$$\frac{d}{dx}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\dfrac{d(2x)}{dx}(1-x^2)-2x\dfrac{d(1-x^2)}{dx}}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2},$$

مشروط براینکه $x \neq \pm 1$.

مثال ۸. از $(x^3+1)/(x^2-x-2)$ مشتق بگیرید.

حل . پیش از مشتقگیری فکر می‌کنیم! شاید تابع را بتوان ساده کرد . می‌بینیم که صورت و مخرج عامل مشترک $x + 1$ دارند . در واقع ،

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x^2-x+1}{x-2} = x+1+\frac{3}{x-2},$$

که درآخرین مرحله ، با استفاده‌از تقسیم متوالی ، $x^2 - x + 1$ را بر $x - 2$ تقسیم می‌کنیم (جزئیات را شرح دهید) . حال با مشتقگیری خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \frac{d}{dx}(x+1) + \frac{d}{dx}\frac{3}{x-2} = 1 - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}.$$

در اینجا فرض کرده‌ایم $x \neq -1, 2$. اگراین‌حذف مقدماتی‌صورت‌نگیرد ، به جواب بسیار پیچیده‌تری می‌رسیم که در آن $(x + 1)^2$ عامل مشترک غیرقابل تشخیص صورت و مخرج می‌باشد .

مشتقگیری از توابع مثلثاتی . در قاعدهٔ (هفت) ، صفحهٔ ۱۷۹ ، نشان دادیم که

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x. \tag{۶}$$

حال برای مشتق چهار تابع مثلثاتی دیگر فرمول به‌دست‌می‌آوریم . مشتق $\tan x$ با استفاده از قاعدهٔ خارج‌قسمت ، و مشتقات $\cot x$ ، $\sec x$ ، و $\csc x$ بااستفاده ازقاعدهٔ مشتقگیری از متقابل یک تابع (قضیهٔ ۴) به دست می‌آیند . محاسبات سرراست بوده و به صورت زیر جریان می‌یابند .

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\dfrac{d\sin x}{dx}\cos x - \sin x\dfrac{d\cos x}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\tan x} = -\frac{1}{\tan^2 x}\frac{d}{dx}\tan x = -\frac{1}{\tan^2 x}\sec^2 x$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{\cos^2 x}\frac{d}{dx}\cos x = -\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)$$

$$= \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x,$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}\frac{d}{dx}\sin x = -\frac{1}{\sin^2 x}\cos x$$

$$= -\frac{1}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x.$$

لذا، داریم

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \tag{۷}$$

و

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x. \tag{۸}$$

فرمولهای (۷) و (۸) از فرمولهای (۶) پیچیده‌ترند، ولی اینها را نیز باید حفظ کرد.

مثال ۹. از $(\tan x)/x$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ خارج‌قسمت و فرمول (۷)،

$$\frac{d}{dx}\frac{\tan x}{x} = \frac{\dfrac{d\tan x}{dx}x - \tan x\dfrac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}.$$

مثال ۱۰. از $\sec^2 x$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ خارج قسمت و فرمول (۸)،

$$\frac{d}{dx}\sec^2 x = \frac{d}{dx}(\sec x \sec x) = \frac{d\sec x}{dx}\sec x + \sec x\frac{d\sec x}{dx}$$

$$= 2\sec x\frac{d\sec x}{dx} = 2\sec^2 x \tan x.$$

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱. $3x^{-2} - 5x^{-3}$

۲. $6x^{-4} + 5x^{-5} + 4x^{-6}$

۳. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

۴. $\frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x^5} + 100$

۵. $(1 + x^2)(2 - x^2)$

۶. $(1 + 4x^2)(1 + 2x^2)$

۷. $(1 - x^2)(1 + x^3)$

۸. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

۹. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

۱۰. $(1 - x^{99})(1 + x^{99})$

۱۱. $(2 - x^3)(1 + x^{-2})$

۱۲. $(2 + x^2)(1 - x^{-3})$

۱۳. $(1 - x^{-5})^2$

۱۴. $(1 + x + x^{-1})(1 + x - x^{-1})$

۱۵. $(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)$

۱۶. $(1 - x)(1 + x + x^2)(1 + x^3)$

۱۷. $\frac{1}{1 + x}$

۱۸. $\frac{1 - x}{1 + x}$

۱۹. $\frac{x^2}{1 + x^2}$

۲۰. $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

۲۱. $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

۲۲. $\frac{x^2 + 5x}{x^3 - 3}$

۲۳. $\frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

۲۴. $\frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

۲۵. $\frac{t^4 - 1}{t^2 - 3t + 2}$

۲۶. $\frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$

۲۷. $\frac{1 - \sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}}$

۲۸. $u^2 \cos u$

۲۹. $\frac{\sin v}{v}$

۳۰. $\frac{\tan v}{\sqrt{v}}$

۳۱. $\sqrt{w} \cot w$

۳۲. $w^3 \sec w$

۳۳. $2x \csc x$

۳۴. $x^2 \sin^2 x$

۳۵. $x \sin x \tan x$

۳۶. $\frac{1}{1 + \sin x}$

۳۷. $\frac{1}{1 - \cos x}$

۳۸. $\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$

۳۹. $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

۴۰. $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

۴۱. $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

۴۲. $\dfrac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$

دیفرانسیل عبارات زیر را بیابید.

۴۳. $x^{-2}+x^{-1}+7$

۴۴. $\dfrac{1}{1 - x}$

۴۵. $\dfrac{x}{1 + x}$

۴۶. $x \tan x$

۴۷. $\sqrt{x} \sin x$

۴۸. $\dfrac{x}{\sin x}$

۴۹. $\dfrac{x}{\cos x}$

۵۰. $\csc^2 x$

۵۱. با کمی تلاش نشان دهید که

$$\frac{d}{dx}\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 1.$$

۵۲. قواعد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت زیر برای دیفرانسیلها را که شبیه قواعد مشتقها هستند اثبات نمایید:

$$d(fg) = g\, df + f\, dg, \qquad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\, df - f\, dg}{g^2}$$

۵.۲ قاعدهٔ زنجیره‌ای

هیچیک از قواعد مشتقگیری که تاکنون ثابت شده‌اند طرز مشتقگیری از توابع مرکب نظیر $\sqrt{x^2 + 1}$ یا $\sin(\sin x)$ را به‌ما نمی‌گوید. لذا، اینک به‌اثبات قاعدهٔ دیگری می‌پردازیم که مشتق تابع مرکب را برحسب مشتقات توابع مؤلفهٔ آن بیان می‌کند. قاعده، که به‌**قاعدهٔ زنجیره‌ای** موسوم است، به قدر کافی ساده است ولی اثباتش کمی پیچیده می‌باشد. فرض کنیم f و g دو تابع باشند به‌طوری که f در x و g در $f(x)$، یعنی مقدار f در x، مشتقپذیر باشد. بزودی نشان می‌دهیم که تابع مرکب $g(f(x))$ نیز در x مشتقپذیر بوده و دارای مشتق

$$\frac{d}{dx}\, g(f(x)) = g'(f(x))f'(x) \qquad (1)$$

می‌باشد، که در آن پریم مشتق نسبت به شناسهٔ تابع را نشان می‌دهد. مثلاً، هرگاه

$f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، آنـگاه $g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$. بـه علاوه ، f به‌ازای هر x مشتقپذیر است حال آنکه g به ازای هر $x > 0$ و درنتیجه به ازای هر مقدار از f زیرا $x^2 + 1 \geq 1$ مشتقپذیر می‌باشد . در این حالت $g'(x) = 1/2\sqrt{x}$ و $f'(x) = 2x$ ؛ درنتیجه، قاعدهٔ زنجیره‌ای (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \tag{۲}$$

و به ازای هر x معتبر است .

اگر دو متغیر مستقل $y = f(x)$ و $z = g(y) = g(f(x))$ را وارد کار کنیم ، ساختارفرمول (۱) روشنتر می‌شود ، زیرا در این صورت (۱) را می‌توان به شکل سادهٔ زیر نوشت :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{۳}$$

به عنوان مثال ، هرگاه $y = x^2 + 1$ و $z = \sqrt{y}$ ، آنـگاه $z = \sqrt{y} = \sqrt{x^2 + 1}$ ورابطهٔ (۳) می‌گوید که

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{d\sqrt{y}}{dy}\frac{d(x^2+1)}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)2x = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

که با رابطهٔ (۲) سازگار است . فرمول (۳) ، با وجود شکل الـهام‌بخش خود ، قضیه‌ای در حساب دیفرانسیل است‌که نیاز به برهان داشته و یک‌اتحاد جبری بدیهی نیست . به‌عبارت دیگر ، حذف dy هـا در طرف راست (۳) نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر تا راهی‌برای اثبات آن .

قضیهٔ ۶ (قاعدهٔ زنجیره‌ای) . *فرض‌کنیم f در x و g در $f(x)$ مشتقپذیر باشد . در این صورت ، تابع مرکب $g \circ f$ در x مشتقپذیر است و مشتقش از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :*

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{۱'}$$

برهان (اختیاری) . چون g در $y = f(x)$ مشتقپذیر است ، داریم

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y),$$

یا ، معادلاً ،

$$\frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y) + \varepsilon(\Delta y), \tag{۴}$$

که در آن

$$\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$$

(نتیجهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۳۱، را به یاد آورید) . با ضرب (۴) در Δy ، درمی‌یابیم که

$$g(y + \Delta y) - g(y) = [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)]\, \Delta y. \qquad (۴')$$

مهم است توجه کنیم که اگرچه (۴) با فرض $\Delta y \neq 0$ نوشته شده است ، فرمول (۴') حاصل از (۴) به‌ازای $\Delta y \neq 0$ حتی درصورت $\Delta y = 0$ نیز درست‌است ،زیرا نمو $g(y + \Delta y) - g(y)$ صرف نظر از انتخاب $\varepsilon(0)$ ، به ازای $\Delta y = 0$ صفر است . تا بحال $\varepsilon(\Delta y)$ فقط به ازای $\Delta y \neq 0$ تعریف شده است ، ولی اکنون قلمرو $\varepsilon(\Delta y)$ را با فرض $\varepsilon(0) = 0$ وسیع ساخته $\varepsilon(\Delta y)$ را در $\Delta y = 0$ **پیوسته** می‌سازیم .

حال (۴') را بر Δx ، یعنی‌نمومتغیر مستقل ،تقسیم‌کرده و حد آن را وقتی $\Delta x \to 0$ می‌گیریم . این کار نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)] \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad (۵)$$

که در آن

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (۶)$$

نمو متغیر مستقل y است . به‌علاوه ، چون f در x مشتق‌پذیر است و لذا در x پیوسته است (قضیهٔ ۲ ،صفحهٔ ۱۹۳ ،را به‌یاد آورید) ، $\Delta x \to 0$ ایجاب می‌کند که $\Delta y \to 0$ ؛ درنتیجه،

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \qquad (۷)$$

این امر که $\varepsilon(0) = 0$ و درنتیجه $\varepsilon(\Delta y)$ در $\Delta y = 0$ پیوسته‌است در این نتیجه‌گیری اهمیت دارد ، زیرا برقراری $\Delta y \neq 0$ را نمی‌توان تضمین کرد (به یاد آورید که Δy دلخواه‌نیست بلکه با مقدار Δx معین می‌شود) . از روابط (۵) تا (۷) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

یا ، معادلاً ،

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = g'(f(x))f'(x), \qquad (۸)$$

زیرا $y = f(x)$ و $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. حال برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای (۱) یا (۱') کامل است ، زیرا حد (۸) چیزی جز مشتق تابع مرکب $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ نیست .

بحث غیرصوری قاعدهٔ زنجیره‌ای . برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای فقط به یک دلیل پیچیده‌است: باید فکرمان حول این امر دور بزند که $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ممکن است حتی اگر $\Delta x \neq 0$ مساوی صفر باشد که مشکل مخرجهای صفر را خواهیم داشت . اگر این نمی‌بود " مشکل $\Delta y = 0$ " ، برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای کاملا " ساده بود . در واقع ، می‌توانستیم بنویسیم

$$\Delta z = g(y + \Delta y) - g(y)$$

و به صورت زیر استدلال می‌کردیم .تابع f در x مشتق‌پذیر ، و درنتیجه در x پیوسته ، است لذا ، $\Delta x \to 0$ ایجاب می‌کند که $\Delta y \to 0$ ؛ درنتیجه ،

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{۹}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

که قاعدهٔ زنجیره‌ای به شکل (۳) است . این استدلال بصیرتی از برهان قضیهٔ ۶ به ما می‌دهد ، ولی " مشکل $\Delta y = 0$ " را حل نمی‌کند .

تبصره . برهان سریع (۹) قاعدهٔ زنجیره‌ای با آنکه از نظر تکنیکی نقص دارد ولی برای مقاصد عملی کافی است . نکته آن است که یک تابع بندرت آنقدر مغشوش است که " مشکل $\Delta y = 0$ " (مثال داده شده در مسئلهٔ ۶۵) را عملا " پدید آورد .

مثال ۱ . فرض کنیم یک میلهٔ فلزی به طول L به ازای هر درجهٔ افزایش دمای سلسیوس T خود 2 میلیمتر افزایش یابد؛ درنتیجه ،

$$\frac{dL}{dT} = 2 \text{ mm/°C}.$$

میله را در کوره گذارده و طوری حرارت می‌دهیم که دمایش به میزان $3°$ بر دقیقه افزایش یابد؛ یعنی ،

$$\frac{dT}{dt} = 3°/\text{min},$$

که در آن t زمان است . سرعت افزایش طول میله چقدر است ؟

حل . عقل سلیم به ما می‌گوید که چون T هر دقیقه $3°$ افزایش دارد و نیز L به ازای هر

درجهٔ افزایش T به اندازه 2mm زیـاد می‌شود ، پس L باید به میـزان $3 \cdot 2 = 6$ mm بر دقیقه افزایش داشته باشد . قاعدهٔ زنجیره‌ای همین را به‌طور فشرده‌تر بیان می‌کند :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dT}\frac{dT}{dt} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ mm/min.}$$

فرض کنیم c یک ثابت باشد . طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{d}{dx} f(cx) = f'(cx)\frac{d}{dx} cx,$$

که بی‌درنگ فرمول مشتقگیری مهم زیر را نتیجه می‌دهد :

$$\frac{d}{dx} f(cx) = cf'(cx). \tag{۱۰}$$

دقت کنید (۱۰) با فرمول

$$\frac{d}{dx}\, cf(x) = cf'(x),$$

که در آن تابع به‌جای شناسه‌اش در c ضرب شده ، اشتباه نشود .

مثال ۲ . از $\sin 2x$ مشتق بگیرید .

حل . بنابر فرمول (۱۰) به ازای $f(x) = \sin x$ ، $f'(x) = \cos x$ ، $c = 2$ ،

$$\frac{d}{dx} \sin 2x = 2 \cos 2x.$$

به‌طور معادل ، می‌توان قاعدهٔ زنجیره‌ای را مستقیما ، به‌ازای $2x$ به عنوان تابع "داخلی"، به کار برد .

مثال ۳ . از $(1 + 5x)^{10}$ مشتق بگیرید .

حل . می‌نویسیم $y = 1 + 5x$ و $z = y^{10}$ و از قاعـدهٔ زنجیره‌ای به شکل (۳) استفاده می‌کنیم . این نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dx}(1 + 5x)^{10} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 10y^9 \cdot 5 = 50(1 + 5x)^9.$$

به توان ده رسانیدن $1 + 5x$ و مشتقگیری از چند جمله‌ای نتیجه هیچگاه سرگـرم‌کننـده

نخواهد بود .

مثال ۴ . از $1/(x^2+2)^3$ مشتق بگیرید .

حل . این بار اختیار می‌کنیم $y = x^2 + 2$ و $z = y^{-3}$. در این صورت ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(x^2+2)^3} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (-3y^{-4})(2x) = -\frac{6x}{(x^2+2)^4}.$$

مثال ۵ . از $(x+\sqrt{x})^2$ مشتق بگیرید .

حل . بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x})^2 = 2(x+\sqrt{x})\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x}) = 2(x+\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= 2x + 3\sqrt{x} + 1,$$

که در آن مشتق تابع " داخلی " $(\cdots)^2$ را در $x+\sqrt{x}$ حساب کرده و سپس نتیجه را در مشتق تابع " داخلی " $x+\sqrt{x}$ ضرب می‌کنیم . البته ، از متغیرهای " میانی " (مانند y و z در دو مثال پیش) نیز می‌توان استفاده کرد ، ولی همینکه بر قاعدهٔ زنجیره‌ای مسلط شدید این کار زائد است یا اینکه می‌توان آن را ذهنی انجام داد .

مثال ۶ . از $\cos(2x^3-1)$ مشتق بگیرید .

حل . با اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای ، داریم

$$\frac{d}{dx}\cos(2x^3-1) = -\sin(2x^3-1)\frac{d}{dx}(2x^3-1) = -6x^2\sin(2x^3-1).$$

مثال ۷ . از $\sin(\sin x)$ مشتق بگیرید .

حل . قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dx}\sin(\sin x) = \cos(\sin x)\frac{d}{dx}\sin x = \cos(\sin x)\cos x.$$

فرض کنیم $h(g(f(x))) = (h \circ g \circ f)(x)$ ترکیب سه تابع f ، g ، و h باشد . در این صورت ، با فرض مشتقپذیری لازم و اعمال دوبار قاعدهٔ زنجیره‌ای متوالیا" ، خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dx} h(g(f(x))) = h'(g(f(x)))\frac{d}{dx}g(f(x)) = h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x).$$

به بیان نادقیق ، پرانتزها را در هر لحظه از خارج به داخل " برمی‌داریم " و از هر تابع مشتق می‌گیریم .

مثال ۸ . از $(1 + \tan\sqrt{x})^2$ مشتق بگیرید .

حل . تابع $(1 + \tan\sqrt{x})^2$ به‌شکل $h(g(f(x)))$ است‌که‌درآن $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = 1 + \tan x$ و $h(x) = x^2$. با دوبار استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(1 + \tan\sqrt{x})^2 &= 2(1 + \tan\sqrt{x})\frac{d}{dx}(1 + \tan\sqrt{x})\\ &= 2(1 + \tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x}\\ &= 2(1 + \tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(1 + \tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

مثال ۹ . به‌ازای تابع $y = f(x)$ ، مشتق y^n را درصورتی بیابید که n عددی صحیح‌باشد .

حل . بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{d(y^n)}{dx} = \frac{d(y^n)}{dy}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}\frac{dy}{dx},$$

یا ، معادلا" ،

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}y',$$

که در آن y' مشتق y نسبت به x است . برای آنکه مطمئن شوید این فرمول بسیار فشرده را فهمیده‌اید ، آن را به‌طور کامل بنویسید :

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x).$$

مشتقگیری از توانهای گویا . قبلا" نشان دادیم که فرمول

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad (۱۱)$$

به ازای هر عدد صحیح n معتبر است . حال به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای نشان می‌دهیم که (۱۱) درصورتی که n **عدد گویای** دلخواهی باشد برقرار است . مطلب را با محاسبهٔ مشتق $\sqrt[n]{x}$ ، که در آن n عدد صحیح مثبتی است ، مستقیما" از تعریف آغاز می‌کنیم :

$$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \lim_{u\to x}\frac{\sqrt[n]{u}-\sqrt[n]{x}}{u-x}.$$

این را می‌توان با فرض $y = \sqrt[n]{x}$ و $v = \sqrt[n]{u}$ به آسانی حساب کرد . در این صورت ، بنابر پیوستگی $\sqrt[n]{x}$ ، $u \to x$ ایجاب می‌کند که $v \to y$ ؛ و درنتیجه ،

$$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \lim_{v\to y}\frac{v-y}{v^n-y^n} = \lim_{v\to y}\frac{1}{\dfrac{v^n-y^n}{v-y}} = \frac{1}{\lim\limits_{v\to y}\dfrac{v^n-y^n}{v-y}}.$$

اما حد موجود در مخرج چیزی جز مشتق y^n نسبت به y نیست . بنابراین ،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}y^n} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{y}{ny^n}, \qquad (۱۲)$$

یا ، معادلا" ،

$$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}. \qquad (۱۲')$$

اگر n زوج باشد ، فرمول (۱۲') فقط به ازای $x > 0$ معتبر است ، ولی اگر n فرد باشد ، به ازای هر $x \neq 0$ برقرار خواهد بود (چرا؟) .

حال فرض کنیم r عددی گویا باشد ؛ درنتیجه ، $r = m/n$ ، که‌درآن m و n صحیح‌اند. می‌توان فرض کرد $n > 0$ و m/n به صورت تحویل‌ناپذیر باشد . با نوشتن

$$z = x^r = x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m = y^m$$

و اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای ، به کمک (۱۲) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}x^r = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = my^{m-1}\frac{y}{ny^n} = \frac{m}{n}\frac{y^m}{y^n},$$

بنابراین ،

$$\frac{d}{dx}x^r = \frac{m}{n}\frac{(\sqrt[n]{x})^m}{(\sqrt[n]{x})^n} = \frac{m}{n}\frac{x^{m/n}}{x} = \frac{m}{n}x^{(m/n)-1},$$

درنتیجه، مآلاً داریم

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}. \tag{۱۳}$$

این تعمیم مطلوب فرمول (۱۱) به نمای گویای دلخواه است. اگر $x > 0$، فرمول (۱۳) همواره برقرار است، ولی به ازای مقادیری از r، این فرمول برای $x < 0$ یا $x \leq 0$ نیز برقرار می‌باشد (بیشتر توضیح دهید).

مثال ۱۰. از $x^{2/3} + x^{3/4}$ مشتق بگیرید.

حل. از فرمول (۱۳) داریم

$$\frac{d}{dx}(x^{2/3} + x^{3/4}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} + \frac{3}{4}x^{(3/4)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{3}{4}x^{-1/4}.$$

مثال ۱۱. از $(1 - x^2)^{-1/5}$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای و فرمول (۱۳)،

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2)^{-1/5} = -\frac{1}{5}(1 - x^2)^{-6/5}\frac{d}{dx}(1 - x^2) = \frac{2}{5}x(1 - x^2)^{-6/5}$$

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱. $(x^2 - 2x + 1)^2$

۲. $(x^2 + 1)^3$

۳. $(2x + 3)^4$

۴. $(x^3 + 1)^5$

۵. $(1 - 3x^2)^6$

۶. $(x^2 + x - 1)^7$

۷. $(x + 1)^3(x - 1)^4$

۸. $(1 - x)(1 - x^2)^2$

۹. $(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$

۱۰. $\dfrac{x^2}{(x + 1)^2}$

۱۱. $\dfrac{(1 - x)^2}{(1 + x)^3}$

۱۲. $\left(\dfrac{1 - 2x}{1 + 2x}\right)^2$

۱۳. $\dfrac{(x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2}$

۱۴. $\dfrac{x}{(1 - x)^2(1 + x)^2}$

۱۵. $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{10}$

۱۶. $x\sqrt{1+x^2}$

۱۷. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

۱۸. $\sqrt{x+\sqrt{x}}$

۱۹. $x^{3/2}-x^{4/3}+1$

۲۰. $9x^{10/9}-10x^{9/10}$

۲۱. $x^{0.99}+x^{-0.99}$

۲۲. $(s^2+s+2)^{7/11}$

۲۳. $\sqrt[3]{t}+\sqrt[4]{t}+\sqrt[5]{t}$

۲۴. $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{\sqrt{u}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{u}}$

۲۵. $\sqrt[3]{v^2}-\dfrac{3}{\sqrt{v}}$

۲۶. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$

۲۷. $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$

۲۸. $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}$

۲۹. $\sin^2 x+\tan^2 x$

۳۰. $\sin^3 x+\cos^3 x$

۳۱. $(1+\sin 2x)^3$

۳۲. $\frac{1}{3}\tan^3 x+\cot 3x$

۳۳. $3\cos 2x+2\sec 3x$

۳۴. $(2-\cos x)^{-2}$

۳۵. $x\sin(1/x)$

۳۶. $x^2\cos(1/x)$

۳۷. $\sqrt{1+\sin u}$

۳۸. $\sqrt{\dfrac{1+\cos v}{1-\sin v}}$

۳۹. $\cos w^3$

۴۰. $(1+\tan x)^{2/3}$

۴۱. $\cos(\cos x)$

۴۲. $\sin(\tan x)$

۴۳. $\sin(\sin(\sin x))$

۴۴. $\sin(\cos x^2)$

دیفرانسیل عبارات زیر را بیابید.

۴۵. $(x^4-2)^3$

۴۶. $\sqrt{1-x^2}$

۴۷. $x^{3/5}+x^{5/3}$

۴۸. $\sin(1/x^2)$

۴۹. $\cos\sqrt{x}$

۵۰. $\sin(\cos x)$

۵۱. $\tan u^2$

۵۲. $\tan(\cot v)$

۵۳. $(\sec w)^{2/3}$

✓ ۵۴ . $f'(0)$ را درصورتی بیابید که $f(x) = (2x+3)^{100}$.

✓ ۵۵ . $f'(1)$ را درصورتی بیابید که $f(x) = (1+x^{-2})^{50}$.

۵۶ . هر یک از فرمولهای زاویهٔ مضاعف $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ را از دیگری با مشتقگیری نتیجه بگیرید .

۵۷ . با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، فرمول $D_x(1/g) = -g'/g^2$ برای مشتق متقابل تابع g را ثابت کنید (قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۲۰۷) .

۵۸ . نشان دهید مشتقگیری جفتی را تغییر می‌دهد؛ یعنی ، مشتق یک تابع زوج‌فرد و مشتق یک تابع فرد زوج است .

۵۹ . نشان دهید که مشتقگیری‌تناوب را حفظ می‌کند؛ یعنی ، مشتق یک تابع متناوب متناوب با همان دورهٔ تناوب است .

مماس بر منحنی داده شده را بیابید .

۶۰ . $y = \sqrt{x^2+1}$ در $(1, \sqrt{2})$

۶۱ . $y = \sqrt[3]{x+1}$ در $(7, 2)$

۶۲ . $y = \cos(\sin x)$ در $((n+\frac{1}{2})\pi, \cos 1)$ ، کـه در آن n صحیح و دلخواه است .

قائم به منحنی داده شده را بیابید .

۶۳ . $y = \sqrt{x^3+1}$ در $(0, 1)$

۶۴ . $y = x^{3/2}$ در $(4, 8)$

۶۵ . فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{، اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{، اگر } x = 0 \end{cases}$$

تحقیق کنید که مشتق $f'(0)$ موجـود است . نشان دهید که f در $x = 0$ دارای "مشکل $\Delta y = 0$ " اسـت . به عبارت دیگر ، نشان دهید که هر همسایگی $x = 0$ شامـل نقاطی چون $x \neq 0$ است که به ازای آنها نمو $\Delta y = f(x) - f(0)$ صفر می‌باشد .

۶۶ . نشان دهید که عبارت دیفرانسیل یک تابع ، چه شناسه‌اش متغیر مستقل باشد یا نه ، یکی است . به‌طور دقیقتر ، نشان دهید هرگاه $z = g(y)$ که در آن $y = f(x)$ ، آنگاه ، حتی اگر y متغیری وابسته باشد ، $dz = g'(y)dy$.

۶.۲ مشتقات مراتب بالاتر

گوییم تابع $f(x)$ **بر بازهٔ I مشتقپذیر است** اگر در هر نقطهٔ I دارای مشتق $f'(x)$ باشد .
فرض کنیم $f(x)$ بر بازهٔ باز I مشتقپذیر بوده و $f'(x)$ خود بر I مشتقپذیر با مشتق

$$D_x f'(x)$$

باشد . در این صورت ، تابع $D_x f'(x)$ **مشتق دوم** $f(x)$ نام دارد ، و با $f''(x)$ نموده‌وخوانده می‌شود : " اف زگوند x"یا با $f^{(2)}(x)$ نشان داده می‌شود . به همین نحو ، اگر $f''(x)$ بر I مشتقپذیر با مشتق

$$D_x f''(x)$$

باشد ، $D_x f''(x)$ **مشتق سوم** $f(x)$ نامیده و با $f'''(x)$ یا$f^{(3)}(x)$ نموده می‌شود . پس از n بار مشتقگیری از تابع اصلی $f(x)$ ، **مشتق مرتبه‌ٔ n** تابع $f(x)$ ، یا **مشتق n م** $f(x)$ ، به‌دست می‌آید که با $f^{(n)}(x)$ نموده شده و به‌طور بازگشتی با

$$f^{(n)}(x) = D_x f^{(n-1)}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

تعریف می‌شود ، که در آن فرض است که$f^{(n-1)}(x)$ از مرتبه‌ٔ $n-1$ موجود و بر I مشتقپذیر است . برای آنکه فرمول به ازای $n = 1$ نیز برقرار باشد ، طبق تعریف می‌نویسیم

$$f^{(0)}(x) = f(x),$$

یعنی ، " مشتق صفرم " یک تابع خود تابع است . در نوشتن مشتقات استفاده‌ٔ بیشتراز سه پریم مرسوم نیست .

مثال ۱ . تابع

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

بر هر بازه‌ٔ باز I که شامل نقطه‌ٔ $x = 0$ نیست مشتقپذیر است . مشتق

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

نیز بر I مشتقپذیر است ؛ و درنتیجه ، $f(x)$ بر I دارای مشتق دوم

$$f''(x) = D_x f'(x) = D_x\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$$

می‌باشد . چون $f''(x)$ خود بر I مشتقپذیر است ، $f(x)$ بر I دارای مشتق سوم

$$f'''(x) = D_x f''(x) = D_x\left(\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{6}{x^4}$$

است ، و به همین ترتیب تا آخر (ر.ک. مسئله‌ٔ ۱۰) .

$f^{(n)}(x)$ برحسب نماد d به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

در صورت نمای n به علامت d وصل شده است ولی در مخرج به متغیر مستقل x متصل شده است. عبارت d^n/dx^n را باید موجودی واحد تلقی کرد و مشتقگیری n گانه (یعنی، n بار مشتقگیری) تابع نوشته شده بعداز آن نامید. به همین نحو، $d^nf(x)/dx^n$ را باید طریقهٔ دیگری برای نوشتن مشتق n م $f^{(n)}(x)$ گرفت بی‌آنکه به علایم مختلف عبارت معانی جداگانه داد. مشتقات مراتب بالاتر متغیر وابسته به نحو طبیعی تعریف می‌شوند. لذا ،اگر $y = f(x)$ داریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x), \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

گاهی از علامت D_x^n به معنی d^n/dx^n استفاده خواهد شد.

مثال ۲. هرگاه $y = x^4$ ، آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}4x^3 = 12x^2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}12x^2 = 24x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}24x = 24, \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}24 = 0,$$

و تمام مشتقات از مرتبهٔ $n > 5$ نیز صفرند. توجه کنید که مشتق چهارم x^4 مساوی $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ است. به‌طور کلی، فرض کنیم $y = x^n$. در این صورت،

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \ldots,$$

$$\frac{d^ky}{dx^k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!,$$

که در آن $n!$ نمایش n **فاکتوریل** است یعنی حاصل‌ضرب n عدد صحیح مثبت اولیه $(1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \ldots)$. لذا، هر یک از n مشتقگیری اول درجهٔ x^n را یکی پایین می‌آورد تا آنکه ثابت $n!$ به‌دست آید، و تمام مشتقات مراتب بالاتر از n متحد صفر می‌باشند.

مثال ۳. از مثال قبل معلوم می‌شود که مشتق n م چند جمله‌ای

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (a_n \neq 0)$$

از درجهٔ n مساوی است با

$$P^{(n)}(x) = n!a_n,$$

و $0 \equiv \cdots \equiv P^{(n+2)}(x) \equiv P^{(n+1)}(x)$.

مثال ۴. مشتقات مراتب دوم و سوم $f(x)g(x)$ را بیابید .

حل. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب ،

$$(fg)' = f'g + fg',$$

که در آن شناسه‌ها به‌خاطر سادگی حذف شده‌اند . لذا ، اگر دوبار دیگر از قاعدهٔ حاصل ضرب استفاده کنیم ،

$$(fg)'' = \frac{d}{dx}(f'g + fg') = \frac{d}{dx}f'g + \frac{d}{dx}fg' \tag{۲}$$

$$= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') = f''g + 2f'g' + fg''.$$

به همین نحو ،

$$(fg)''' = \frac{d}{dx}(f''g + 2f'g' + fg'') = \frac{d}{dx}f''g + 2\frac{d}{dx}f'g' + \frac{d}{dx}fg'' \tag{۳}$$

$$= (f'''g + f''g') + 2(f''g' + f'g'') + (f'g'' + fg''')$$
$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.$$

تبصره. فرمول کلی برای مشتق n م حاصل ضرب $f(x)g(x)$ در مسئلهٔ ۳۵، صفحهٔ ۳۶۶ ، داده شده است . این فرمول توضیح می‌دهد که چرا ضرایب $1, 2, 1$ در فرمول (۲) و ضرایب $1, 3, 3, 1$ در فرمول (۳) همان ضرایب در فرمولهای جبری آشنای $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ و $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ می‌باشند .

قانون دوم حرکت نیوتن. ذره‌ای به جرم m درنظر می‌گیریم که در امتداد خطی مستقیم حرکت می‌کند ، و فرض کنیم موضع ذره در لحظهٔ t ، که از مبداء مناسبی سنجیده‌می‌شود ، $s = s(t)$ باشد . در اینجا از علامت s برای نمایش تابع و متغیر وابسته استفاده می‌کنیم که معمولا" برای احتراز از نماد اضافی صورت می‌گیرد . فرض کنیم نیروی F که عموما" متغیر است بر ذره وارد شود . در این صورت ، **قانون دوم حرکت نیوتن** می‌گوید

$$F = ma, \tag{۴}$$

که در آن $a = a(t)$ شتاب ذره می‌باشد . همانند درصفحهٔ ۱۷۳ ، a مشتق سرعت $v = v(t)$ ذره نسبت به زمان است :

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

اما v خود مشتق موضع $s = s(t)$ ذره نسبت به زمان تعریف شده است:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

بنابراین،

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \tag{۵}$$

یعنی، شتاب مشتق دوم موضع ذره نسبت‌به زمان‌است. با گذاردن (۵) در (۴)، به‌دست می‌آوریم

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F. \tag{۶}$$

معادلات دیفرانسیل. هر معادله مانند (۶)، شامل دست کم یک‌مشتق از یک تابع واحتمالاً خود تابع، یک ***معادلهٔ دیفرانسیل*** نام دارد. منظور از **مرتبهٔ** یک معادلهٔ دیفرانسیل یعنی مرتبهٔ بالاترین مشتق‌آمده در معادله. لذا، قانون دوم نیوتن $F = ma$ در واقع یک‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ‌دوم با‌نتایج‌فیزیکی سیارات است. البته، شکل‌دقیق معادله‌به‌ماهیت نیروی F وابسته‌است. مثلاً "، $F = 0$ اگر ذره "آزاد" باشد به این معنی که نیرویی برآن‌اثرنکند، $F = -ks$ $(k > 0)$ اگر بر ذره نیروی جاذبی متناسب با فاصله‌اش تا مبداء اثر کند، و از این قبیل. این مطلب مهم در بخش ۷.۴ دنبال خواهد شد.

مثال ۵. تحقیق کنید که تابع $y = \sin x$ در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$y'' + y = 0 \tag{۷}$$

صدق می‌کند.

حل. برقراری‌معادلهٔ (۷) به ازای $y = \sin x$ فوراً از $y' = \cos x$ و $y'' = -\sin x$ نتیجه می‌شود. به عنوان تمرین، نشان دهید که (۷) به‌وسیلهٔ $y = \cos x$ و هر تابع به شکل $y = a \sin x + b \cos x$، که در آن a و b ثابتهای دلخواهی هستند، نیز برقرار است.

مثال ۶. تحقیق‌کنیدکه‌تابع $y = (x-1)/(x+1)$ در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $2y'^2 = (y-1)y''$ صدق می‌کند.

حل. با تقسیم صورت $x - 1$ بر مخرج $x + 1$، به دست می‌آوریم

$$y = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

سپس، با دوبار مشتقگیری از y به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای، خواهیم داشت

$$y' = \frac{(-2)(-1)}{(x+1)^2}\frac{d}{dx}(x+1) = \frac{2}{(x+1)^2},$$

$$y'' = \frac{2(-2)}{(x+1)^3}\frac{d}{dx}(x+1) = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

(فرض کنیم $x \neq -1$) . بنابراین ،

$$(y-1)y'' = \left[-\frac{2}{x+1}\right]\left[-\frac{4}{(x+1)^3}\right] = \frac{8}{(x+1)^4}$$

$$= 2\left[\frac{2}{(x+1)^2}\right]^2 = 2y'^2,$$

که همان مطلوب ما می‌باشد .

مسائل

مشتقات دوم و سوم y'' و y''' را درصورتی بیابید که

۱. $y = 5x^{10} + 10x^5 + 1$

۲. $y = (1 + x^2)^3$

۳. $y = x/(1 + x)$

۴. $y = (1 + x^{1/2})^2$

۵. $y = x \sin x$

۶. $y = x^2 \cos x$

۷. $y = \sin x^2$

۸. $y = \tan x$

۹. $y = \sec x$

۱۰. نشان دهید که به‌ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ،

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \qquad (x \neq 0)$$

فرض کنید $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$. با کمترین سعی ، کمیات زیر را بیابید .

۱۱. $y^{(6)}$ ۲۸۸۰.

۱۲. $y^{(7)}$

نشان دهید که

۱۳. $$\frac{d^8}{dx^8}\frac{x^2}{x-1} = \frac{8!}{(x-1)^9}$$

۱۴. $$\frac{d^6}{dx^6}\sin^2 x = 32 \cos 2x$$

۱۵. $$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x(1-x)} = n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

۱۶. فرض کنید $y = \sin x$. نشان دهید به ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$،

$$y^{(4n)} = \sin x, \qquad y^{(4n+1)} = \cos x,$$
$$y^{(4n+2)} = -\sin x, \qquad y^{(4n+3)} = -\cos x$$

۱۷. به ازای چه ثابتهای a، b، و c تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & ، \quad x \le 1 \text{ اگر} \\ ax^2 + bx + c & ، \quad x > 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

در $x = 1$ مشتق دوم دارد؟

۱۸. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ، \quad x \le 0 \text{ اگر} \\ x^4 & ، \quad x > 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

$f'(x)$، $f''(x)$، و $f'''(x)$ را بیابید. نشان دهید که $f^{(4)}(0)$ وجود ندارد.

۱۹. نشان دهید تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & ، \quad x \neq 0 \text{ اگر} \\ 0 & ، \quad x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

بر $(-\infty, \infty)$ مشتقپذیر است ولی در $x = 0$ مشتق دوم ندارد.

۲۰. تحقیق کنید که تابع $y = \sqrt{1 - x^2}$ در معادلهٔ دیفرانسیل $yy' + x = 0$ صدق می‌کند.

۲۱. تحقیق‌کنیدکه تابع $y = \sqrt{2x - x^2}$ درمعادلهٔ دیفرانسیل $y^3y'' + 1 = 0$ صدق می‌کند.

۲۲. فرض کنید $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n$، که در آن n عدد صحیح دلخواهی است.
تحقیق کنید که y در معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - n^2y = 0$$

صدق می‌کند.

۷۰۲ مشتقگیری ضمنی

معادلات بی‌شماری وجود دارند شامل دو متغیر x و y که بعضی از آنها به آسانی نسبت به y و برحسب متغیر x حل می‌شوند. به عنوان مثال، اگر

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad (۱)$$

می‌توان دو جواب یافت که y را به صورت تابع پیوسته‌ای از x بیان می‌کنند؛ یعنی،

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad (۲)$$

و

$$y = -\sqrt{1 - x^2}. \qquad (۲')$$

با اینحال، در مورد معادلهٔ

$$x^2 - xy + y^3 = 1,$$

یافتن فرمول صریحی که y را برحسب x بیان کند آسان نیست (باید معادلهٔ مکعبی را نسبت به y حل کنیم)، و در معادلهٔ

$$xy + \sin y + x^2 = 1$$

این امر ناممکن است. معهذا، برای‌هریک‌از‌دومعادلهٔ‌اخیر‌تابعی‌چون $y = f(x)$ وجود دارد که در معادلهٔ داده شده، دست کم به ازای مقادیری از x، صدق می‌کند (این را می‌توان به کمک قضیهٔ مقدار میانی نشان داد)، اگرچه نمی‌توان فرمول صریحی برای تابع یافت یا اینکه ترجیح می‌دهیم این کار صورت نگیرد.

توابع ضمنی. تابع $y = f(x)$ تعریف شده به این صورت، یعنی با معادله‌ای از دو متغیر x و y، یک **تابع ضمنی** نام دارد. شرایط‌وجود توابع ضمنی در آخر بخش ۵.۱۳ داده شده است. در اینجا فرض است که اغلب از معادله‌ای از x و y برای **تعریف** y به عنوان تابعی از x استفاده می‌کنیم حتی وقتی نتوان معادله را نسبت به y به صورت عبارت صریحی‌از x حل کرد. عجب آنکه همواره می‌توان مشتق $y' = dy/dx$ را **به‌طور ضمنی**، یعنی بدون‌حل نسبت به y و برحسب x، حساب کرد (با اینحال، ر.ک. نکات مذکور پس از مثال ۱). چرا که اگر از معادلهٔ داده شده نسبت به x مشتق بگیریم (صرفاً y را تابعی از x تصور کنیم)، همواره معادلهٔ حاصل را می‌توان به آسانی نسبت به y' حل کرد. این طرز یافتن y' **مشتقگیری ضمنی** نام دارد. توجه می‌کنیم که، به‌خاطر قاعدهٔ زنجیره‌ای، مشتقگیری از تابع y نسبت به x همواره عامل y' را حاصل می‌دهد. لذا، مثل مثال ۹، صفحهٔ ۲۱۹،

$$\frac{d}{dx} y^n = \frac{d(y^n)}{dy}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}y', \qquad (۳)$$

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d\sin y}{dy}\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx} = y'\cos y,$$

و غیره.

مثال ۱. نشان دهید که مشتقگیری ضمنی از معادلهٔ (۱) همان عبارت برای y' به‌دست می‌آید که مشتقگیری (صریح) معمولی از فرمول (۲) یا (۲') حاصل می‌دهد.

حل. با مشتقگیری از طرفین (۱) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}1,$$

یا، به کمک (۳)،

$$2x+2yy'=0.$$

این معادله به آسانی نسبت به y' حل شده و نتیجه می‌دهد

$$y'=-\frac{x}{y}. \tag{۴}$$

در اینجا می‌توان توقف کرد، یا با گذاردن (۲) و (۲') در (۴) به دست آورد

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{۵}$$

و

$$y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{۵'}$$

از آن سو، مشتقگیری صریح از (۲) و (۲') به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx}(1-x^2)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

که با (۵) سازگار است، و

$$\frac{d}{dx}(-\sqrt{1-x^2})=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx}(1-x^2)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

که با (۵') سازگار می‌باشد.

روش مشتقگیری ضمنی را نمی‌توان کورکورانه به‌کار برد، زیرا حتی در حالاتی که y به‌عنوان تابعی از x موجود نیست جوابی صوری برای y' به‌ما می‌دهد. مثلا "بی‌توجه به مقدار x، مقداری از y که در معادلهٔ $x^2+y^2=-1$ صدق کند وجود ندارد، ولی مشتقگیری ضمنی از این معادله همان جواب (۴) مثل حالت معادلهٔ $x^2+y^2=1$ را به ما می‌دهد. همچنین، توجه کنید که وقتی پس از مشتقگیری ضمنی از معادله‌ای شامل x و y حاصل را نسبت به y' حل می‌کنیم، جواب عموما" عبارتی شامل هر دو متغیر x و y است.

مثال ۲. مشتق (۴) را در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ حساب کنید.

حل . با گذاردن $x = \frac{1}{2}$ در (۱) ، معادلهٔ

$$y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

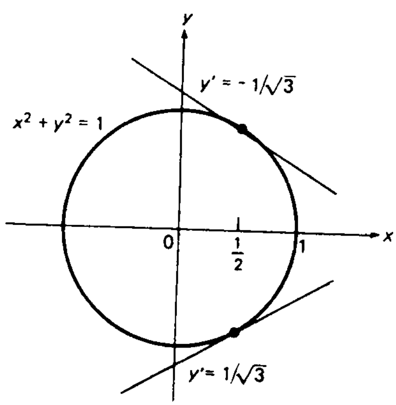
به دست می‌آید که دارای دو جواب $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ است . با استفاده از (۴) ، درمی‌یابیم که مقادیر نظیر y' عبارتنداز

$$y'\Big|_{x=\frac{1}{2},\, y=-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

و

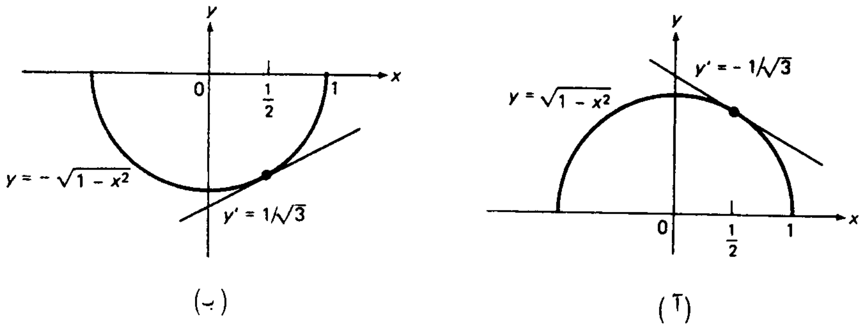
$$y'\Big|_{x=\frac{1}{2},\, y=\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

در اینجا $y'|_{x=x_0,\, y=y_0}$ مقدار y' نظیر به $x = x_0, y = y_0$ است (ما اغلب این نوع‌خط قائم را مفید خواهیم یافت) . چرا در اینجا دو مقدار مختلف y' را یافته‌ایم ؟ فقط به‌این خاطر که نمودار (۱) ، یعنی دایره به شعاع 1 و مرکز مبداء ، دو نقطهٔ متفاوت بامختص x یکسان $\frac{1}{2}$ دارد ، و همانطور که شکل ۱۹ نشان داده ، شیب مماسهای دایره در این نقاط



شکل ۱۹

متفاوتند . به عبارت دیگر ، یک مقدار از شیب y' مربوط به نیمدایرهٔ بالایی (۲) است که نمودارش در شکل ۲۰ (آ) رسم شده است ، و مقدار دیگر y' مربوط به نیمدایرهٔ پایینی (۲') است که نمودارش در شکل ۲۰ (ب) نموده شده است . طبیعی است که اگر در (۵) و (۵') قرار دهیم $x = \frac{1}{2}$ ، همین دو مقدار برای y' به دست می‌آیند .



شکل ۲۰

مثال ۳. به فرض آنکه

$$x^2 - xy + y^3 = 1, \qquad (۶)$$

y' را در $x = 1$ حساب کنید .

حل . با مشتقگیری ضمنی داریم

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^3) = \frac{d}{dx}1,$$

یا ، به کمک (۳) ،

$$2x - y - xy' + 3y^2y' = 0,$$

توجه کنید که ، بنابر قاعدهٔ حاصلضرب ، $(xy)' = y + xy'$. با حل این نسبت به y' ، معلوم می‌شود که

$$y' = \frac{2x - y}{x - 3y^2}, \qquad (۷)$$

و ، با گذاردن $x = 1$ در (۶) ، معادلهٔ

$$1 - y + y^3 = 1,$$

یا

$$y^3 = y$$

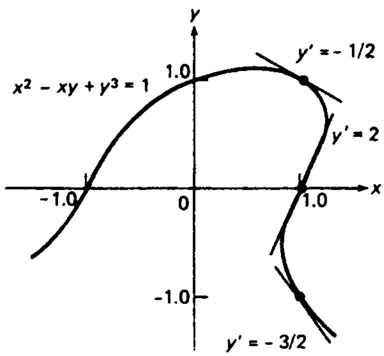
به دست می‌آید ، که دارای سه جواب $y = 0$ و $y = \pm 1$ می‌باشد . مقادیر نظیر y' حاصل از (۷) عبارتنداز

$$y'|_{x=1,\, y=0} = \frac{2(1) - 0}{1 - 3(0)^2} = 2,$$

$$y'|_{x=1,\, y=1} = \frac{2(1)-1}{1-3(1)^2} = -\frac{1}{2},$$

$$y'|_{x=1,\, y=-1} = \frac{2(1)+1}{1-3(-1)^2} = -\frac{3}{2}.$$

شکل ۲۱ معنی هندسی این سه مقدار y' را نشان می‌دهد.



شکل ۲۱

مثال ۴. با استفاده از مشتقگیری ضمنی نشان دهید

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}, \tag{۸}$$

که در آن r عددی گویا است.

حل. ما قبلاً (۸) را در بخش ۶.۲ به روشی دیگر ثابت کردیم. فرض کنیم $y = x^{m/n}$ در این صورت،

$$y^n = (x^{m/n})^n = x^m,$$

و، با مشتقگیری نسبت به x و استفاده از (۳)، به دست می‌آوریم

$$ny^{n-1}y' = mx^{m-1}.$$

پس نتیجه می‌شود

$$y' = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{(x^{m/n})^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{x^{m-(m/n)}} = \frac{m}{n}x^{(m/n)-1},$$

که با (۸) معادل است. در اینجا روش مشتقگیری ضمنی نتایج زیادی به بار می‌آورد.

همانطور که مثال بعد نشان‌می‌دهد ، مشتقگیری ضمنی اغلب کار یافتن مشتقات‌مراتب بالاتر را ساده می‌کند .

مثال ۵ . به فرض آنکه

$$x^2 + y^2 = 25, \tag{۹}$$

مقادیر y'' و y''' را در نقطهٔ $(3, 4)$ بیابید .

حل . با مشتقگیری ضمنی از (۹) نسبت به x خواهیم داشت

$$2x + 2yy' = 0, \tag{۱۰}$$

و لذا ، مثل مثال ۱ ،

$$y' = -\frac{x}{y},$$

درنتیجه ، بخصوص ،

$$y'|_{x=3,\, y=4} = -\frac{3}{4}. \tag{۱۱}$$

اگر رابطهٔ (۱۰) را بر 2 تقسیم کرده و مجدداً مشتق بگیریم ، به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}(x + yy') = 1 + y'^2 + yy'' = 0, \tag{۱۲}$$

یا

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{y}.$$

لذا ، به کمک (۱۱) داریم

$$y''|_{x=3,\, y=4} = -\frac{1 + \frac{9}{16}}{4} = -\frac{25}{64}. \tag{۱۳}$$

مشتقگیری ضمنی دیگر ، این بار از معادلهٔ (۱۲) ، نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dx}(1 + y'^2 + yy'') = 2y'y'' + y'y'' + yy''' = 3y'y'' + yy''' = 0,$$

یا

$$y''' = -\frac{3y'y''}{y}.$$

اگر از (۱۱) و (۱۳) برای محاسبهٔ y''' در نقطهٔ $(3,4)$ استفاده کنیم، درمی‌یابیم که

$$y'''|_{x=3,\, y=4} = -\frac{3(-\frac{3}{4})(-\frac{25}{64})}{4} = -\frac{225}{1024}.$$

سعی کنید این مشتقات مراتب بالاتر را با مشتقگیری صریح از $y=\sqrt{25-x^2}$ حساب کنید و ببینید چقدر بیشتر کار می‌برد.

مسائل

با استفاده از مشتقگیری ضمنی، y' را درصورتی بیابید که x و y در معادلهٔ داده شده صدق کنند.

۱. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

۲. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$

۳. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$

۴. $x^3+y^3=3xy$

۵. $(xy)^3=3(x+y)$

۶. $x^3+x^2y+xy^2+y^3=1$

۷. $x^{2/3}+y^{-2/3}=8$

۸. $y^2=\frac{1}{x+y}$

۹. $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=2$

۱۰. $\frac{1+xy}{x+y}=10$

۱۱. $\sin x+\cos y=0$

۱۲. $y=\sin(x+y)$

۱۳. $\cos xy = x$

۱۴. $y\tan y = x^2$

۱۵. در معادلهٔ $x^2+y^2=r^2$ فرض کنید x تابعی از y گرفته شود. با استفاده از مشتقگیری ضمنی، dx/dy (نه dy/dx) را محاسبه نمایید. سپس نشان دهید که مماس بر دایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ در نقاط $(\pm r,0)$ قائم است.

۱۶. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، نشان دهید که مماس در هر نقطهٔ P از دایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ بر شعاع واصل از مبداء به P عمود است.

۱۷. معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ را رسم کنید. y' را با مشتقگیری ضمنی بیابید. معادله را نسبت به y به عنوان تابعی از x حل کرده، سپس y' را با مشتقگیری معمولی بیابید. $y'|_{x=4}$ را به هر دو روش حساب کنید.

مماس بر نمودار معادلات زیر را بیابید.

۱۸. $y^2+xy-5=0$ در $(4,-5)$

۱۹. $y^3 - y^2 - 4x + x^2 = 0$ در $(2, 2)$ ✓

۲۰. $y^4 - 2x^2y^3 - 27 = 0$ در $(-1, 3)$ ✓

فرض کنید $x^2 - xy + y^2 = 1$. با استفاده از مشتقگیری ضمنی ، سه مشتق اول y', y'', y''' را در هر نقطهٔ زیر حساب کنید .

۲۱. $x = 0$ ✓ ۲۲. $x = 1$ ✓ ۲۳. $x = -1$ ✓

نقاطی از نمودار معادلهٔ

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

را بیابید که مماس در آنها به شیب دادهٔ شدهٔ زیر باشد .

۲۴. $0°$ ۲۵. $90°$ ۲۶. $45°$ ۲۷. $135°$

۲۸. تغییر x به $x-$ در معادلهٔ (۶) معادلهٔ $x^2 + xy + y^3 = 1$ را به دست می‌دهد ، که نمودارش انعکاس نمودار شکل ۲۱ نسبت به محور y است . با استفاده از مشتقگیری ضمنی ، چهار مشتق اول $y', y'', y''', y^{(4)}$ در $x = 1$ را حساب کنید .

۲۹. استفادهٔ کورکورانه از مشتقگیری ضمنی در معادلهٔ $x^4 + y^4 = x^2y^2$ به فرمول

$$y' = \frac{2x^3 - xy^2}{x^2y - 2y^3}$$

منجر می‌شود . چرا این نتیجه بی‌معنی است ؟

۲.۸ میزانهای مرتبط

ردهٔ مهمی از مسائل وجود دارد که در آنها میزان تغییر کمیتی ، که معمولاً " نسبت به زمان است ، داده شده و از ما میزان تغییر کمیت مرتبط دیگری خواسته می‌شود . روش حل مسائل ***میزانهای مرتبط*** شباهت زیادی به تکنیک مشتقگیری ضمنی دارد ، ولی در اینجا دو متغیر وابسته وجود دارند .

مثال ۱ . یک بالون کروی به میزان یکدهم فوت مکعب بر ثانیه (به‌طور فشرده‌تر ، $0.1\ \mathrm{ft^3/sec}$) هوا از دست می‌دهد . سرعت کاهش شعاع بالون وقتی قطرش $6\ \mathrm{ft}$ است چقدر می‌باشد ؟

حل . فرض کنیم R شعاع و V حجم بالون باشد . در این صورت ،

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (۱)$$

چون اندازهٔ بالون تغییر می‌کند ، V و R هر دو تابع زمان t هستند . این امر را می‌توان

با نوشتن $V = V(t),\ R = R(t)$ بیان کرد، ولی بهتر است فقط به یاد داشته باشیم که V و R تابع زمانند. با مشتقگیری از طرفین (۱) نسبت به t به دست می‌آوریم

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3R^2\frac{dR}{dt}\right) = 4\pi R^2\frac{dR}{dt}.$$

حال این معادله را نسبت به dR/dt حل کرده، به دست می‌آوریم

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dV}{dt}. \qquad (۲)$$

این مرحله یک مرحلهٔ کلیدی است، زیرا dR/dt ، یعنی میزان تغییر مجهول شعاع بالون، را برحسب dV/dt ، یعنی میزان تغییر **معلوم** حجم آن، بیان کرده‌ایم. در واقع، فرض است که حجم بالون به میزان $0.1\ \text{ft}^3/\text{sec}$ کاهش می‌یابد (هوا از دست می‌دهد)، بدین معنی که dV/dt دارای مقدار ثابت $-0.1\ \text{ft}^3/\text{sec}$ می‌باشد. با گذاردن این dV/dt در (۲)، معلوم می‌شود که

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{0.1}{4\pi R^2}. \qquad (۳)$$

وقتی قطر بالون 6 ft است، شعاع آن 3 ft می‌باشد. در این لحظه فرمول (۳) نتیجه می‌دهد که

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{0.1}{4\pi(3)^2} = -\frac{1}{360\pi} \approx -0.00088\ \text{ft/sec}.$$

چون این عدد خیلی کوچک است، آن را به اینچ بر دقیقه تبدیل می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{360\pi}\frac{\cancel{\text{ft}}}{\cancel{\text{sec}}}\frac{12\ \text{in}}{\cancel{\text{ft}}}\frac{60\ \cancel{\text{sec}}}{\text{min}} = -\frac{12(60)}{360\pi}\frac{\text{in}}{\text{min}},$$

که در آن واحدهای سنجش را به طریقی که در فیزیک مقدماتی آموخته‌ایم حذف می‌کنیم. بنابراین،

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2}{\pi} \approx -0.64\ \text{in/min},$$

یعنی، شعاع R به میزانی تقریباً 0.64 in/min کاهش می‌یابد، که برای این بالون بزرگ نشتی جزئی می‌باشد. توجه کنید که dR/dt خود تابعی از شعاع است. در واقع، همانطور که رابطهٔ ۳ نشان می‌دهد، هرقدر بالون کوچکتر باشد $|dR/dt|$ بزرگتر است.

مثال ۲. در مثال قبل، سرعت کاهش مساحت بالون وقتی شعاعش 4 ft باشد چقدر است؟

حل. مساحت یک کره به شعاع R مساوی است با

$$S = 4\pi R^2.$$

بنابراین، پس از مشتقگیری نسبت به زمان،

$$\frac{dS}{dt} = 4\pi\left(2R\,\frac{dR}{dt}\right) = 8\pi R\,\frac{dR}{dt}. \tag{۴}$$

این میزان تغییر مساحت بالون برحسب میزان تغییر شعاعش را بیان می‌کند، ولی این همان چیزی که می‌خواهیم نیست. با اینحال، رابطهٔ مطلوب بین dS/dt و کمیت دادهٔ شدهٔ $dV/dt = -0.1\ \text{ft}^3/\text{sec}$ را می‌توان به آسانی با گذاردن (۲) در (۴) به‌دست آورد:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{8\pi R}{4\pi R^2}\,\frac{dV}{dt} = \frac{2}{R}\,\frac{dV}{dt} = -\frac{0.2}{R}.$$

از این رابطه وقتی شعاع بالون 4 ft است نتیجه می‌شود که

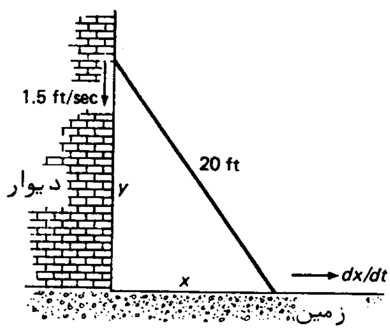
$$\frac{dS}{dt} = -\frac{0.2}{4} = -0.05\ \text{ft}^2/\text{sec},$$

یا، معادلاً،

$$\frac{dS}{dt} = -0.05(12)^2 = -7.2\ \text{in}^2/\text{sec},$$

یعنی، مساحت بالون به میزان 7.2 اینچ مربع برثانیه کاهش می‌یابد.

مثال ۳. نردبانی به طول 20 ft به دیوار تکیه دارد. فرض کنید سر نردبان به‌میزان ثابت 1.5 ft/sec بـه پایین سر بخورد. سرعت حرکت پای نردبان وقتی سرش در فاصلهٔ 16 ft از زمین است چقدر است؟



شکل ۲۲

حل . نردبان را پاره‌خط مستقیمی تجسم کرده ، مختصات قائم را مثل شکل ۲۲ معرفی می‌کنیم، که در آن x فاصلهٔ بین دیوار و پای نردبان بوده و y ارتفاع سر نردبان می‌باشد . بنا بر قضیهٔ فیثاغورس،

$$x^2 + y^2 = 20^2 = 400. \qquad (۵)$$

چون موضع نردبان تغییر می‌کند ، هر دوی x و y توابعی از زمان t اند ، مطلبی که می‌توان با نوشتن $x = x(t), y = y(t)$ بر آن تأکید کرد . برای یافتن dx/dt ، از طرفین (۵) نسبت به t مشتق گرفته معادلهٔ

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

را به دست می‌آوریم ، که می‌توان آن را نسبت به dx/dt حل کرد . نتیجه عبارت است از

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}. \qquad (۶)$$

بنا بر صورت مسئله ، سر نردبان به‌میزان ثابت 1.5 ft/sec به‌پایین سر می‌خورد . لذا ، مختص y به میزان 1.5 ft/sec کاهش می‌یابد ، بدین معنی که dy/dt مساوی -1.5 ft/sec می‌باشد . با گذاردن این مقدار dy/dt در (۶) ، به دست می‌آوریم

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1.5y}{x}. \qquad (۷)$$

با حل (۵) نسبت به x و برحسب y ، داریم $x = \sqrt{400 - y^2}$. لذا ، وقتی $y = 16$ ، یعنی وقتی سر نردبان در فاصلهٔ 16 ft از زمین است ، $x = \sqrt{400 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ ؛ درنتیجه ، پای نردبان در فاصلهٔ 12 ft از دیوار می‌باشد . باگذاردن این مقادیر x و y در (۷) ، معلوم می‌شود که

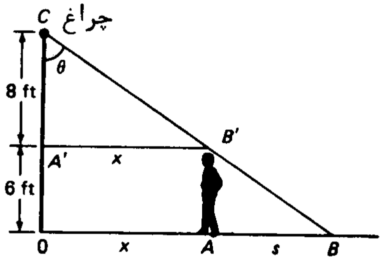
$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1.5)(16)}{12} = 2 \text{ ft/sec.}$$

لذا ، در لحظه‌ای که سر نردبان در فاصلهٔ 16 ft از زمین است ، پای نردبان به میزان 2 ft/sec از دیوار دور می‌شود .

مثال ۴ . مردی با قد 6 ft و با تندی 4 ft/sec به سوی یک چراغ خیابان که در 14 ft بالای زمین نصب شده است حرکت می‌کند . سرعت کاهش طول سایهٔ مرد چقدر است ؟

حل . فرض کنیم x فاصلهٔ مرد تا پای تیر بوده و s طول سایهٔ آن مثل شکل ۲۳ باشد (در

مثال بعدی، زاویهٔ θ نقشی ایفا خواهد کرد). مثلثهای ABB' و $A'B'C$ زوایای مساوی دارند؛



شکل ۲۳

و درنتیجه، باهم متشابه‌اند. از اینرو، نسبتهای اضلاع نظیر مساویند. بخصوص،

$$\frac{|AB|}{|AB'|} = \frac{|A'B'|}{|A'C|},$$

یعنی،

$$\frac{s}{6} = \frac{x}{8},$$

یا، معادلاً،

$$s = \frac{3}{4}x. \qquad (۸)$$

معادلهٔ (۸) طول سایهٔ مرد را برحسب فاصله‌اش تا تیر بیان می‌کند، که همان مطلوب ما می‌باشد.

حال از طرفین (۸) نسبت به زمان t مشتق می‌گیریم، داریم

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{4}\frac{dx}{dt}. \qquad (۹)$$

بنابرصورت مسئله، مرد باتندی 4 ft/sec به‌سوی تیر قدم می‌زند؛ یعنی، $dx/dt = -4$ ft/sec با گذاردن این مقدار در (۹)، به دست می‌آوریم

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{4}(-4) = -3 \text{ ft/sec}.$$

لذا، طول سایهٔ مرد به‌میزان ثابت 3 ft/sec، بی‌توجه به فاصله‌اش تا تیر، کاهش می‌یابد.

مثال ۵. در مسئلهٔ قبل، فرض کنیم θ زاویهٔ بین سایهٔ مرد در سرش باشد؛ این زاویهٔ

بین تیر چراغ برق و یک‌شعاع نورانی از چراغ به‌سروی‌نیزمی‌باشد . سرعت تغییر θ وقتی مرد در فاصلهٔ 12 ft از تیر است چقدر است ؟

حل . باتوجه به شکل ۲۳ ، می‌بینیم که

$$x = 8 \tan \theta.$$

با مشتقگیری از طرفین این معادله نسبت به زمان t ، به دست می‌آوریم

$$\frac{dx}{dt} = 8 \frac{d \tan \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 8 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}. \qquad (۱۰)$$

با حل معادلهٔ (۱۰) نسبت به $d\theta/dt$ ، یعنی کمیتی که سعی می‌کنیم آن را برحسب داده‌های مسئله بیان کنیم ، به دست می‌آوریم

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2 \theta}{8} \frac{dx}{dt}.$$

به‌علاوه ، از شکل واضح است که

$$\cos \theta = \frac{|A'C|}{|B'C|} = \frac{8}{\sqrt{8^2 + x^2}}.$$

از تلفیق دو معادلهٔ اخیر خواهیم داشت

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{8}{64 + x^2} \frac{dx}{dt}, \qquad (۱۱)$$

درنتیجه ، توانستیم $d\theta/dt$ را کاملا "برحسب داده‌ها" ، یعنی $dx/dt = -4$ ft/sec و $x = 12$ ، بیان داریم . با گذاردن این مقادیر در (۱۱) ، درمی‌یابیم که

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{8(4)}{64 + 12^2} = -\frac{2}{13} \approx -0.154 \text{ rad/sec}.$$

جواب به رادیان برثانیه است ، زیرا ضمن استفاده از فرمول $D_\theta \tan \theta = \sec^2 \theta$ برای مشتقگیری از $\tan \theta$ تلویحا" فرض کرده‌ایم θ به رادیان است . البته ، به محض یافتن جواب می‌توان آن را به درجه تبدیل کرد . در واقع ،

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2}{13} \frac{180}{\pi} \approx -8.8°/\text{sec},$$

یعنی ، زاویهٔ سایهٔ مرد در سرش به میزان تقریبی 8.8 درجه برثانیه کاهش می‌یابد . از فرمول (۱۱) معلوم می‌شود که در این مسئله ، برخلاف مسئلهٔ قبل ، جواب به فاصلهٔ مرد تا تیر چراغ برق بستگی دارد .

چگونه مسائل میزانهای مرتبط را حل کنیم . روند گام به گام زیر شما را در حل مسائل

میزانهای مرتبط یاری خواهد کرد .

۱ . متغیرهای مرتبط را نامگذاری کرده ، حروفی را اختیار می‌کنیم که معنی واقعی متغیرهارا بدهد . حروف اول انتخاب شایسته‌ای است ، مانند V برای حجم ، L برای طول ، و T برای دما (t بـه‌زمان اختصاص داده شده است) .

۲ . معادلهٔای شامل متغیرهای مرتبط می‌نویسیم . این مرحله را اغلب می‌توان با رسم شکلی مناسب ساده کرد ، و شما باید در رسم اشکال " به قدر کافی " مناسب ، یعنی اشکالـی‌کـه ویژگیهای اساسی یک مسئله را بدون پیرایهٔ زیاد نشان دهد ، مهارت کسب کنید .

۳ . از طرفین معادله نسبت به متغیر **مستقل** مشتق می‌گیریم . این متغیر که نوعا " (ولی نه همیشه) زمان t است ، یکی از متغیرهای مرتبط نیست ؛ و لذا ، می‌توان انتظار داشت کـه قاعدهٔ زنجیره‌ای لازم باشد .

۴ . معادلهٔ دیفرانسیل میزان تغییر مطلوب را حل کرده ، سپس (ولی نه قبلا " !) حل را با جانشانی داده‌های عددی آمده در صورت مسئله ، به انضمام میزان تغییر معلوم و مقادیر داده یا محاسبه شدهٔ متغیرها ، کامل می‌کنیم .

مسائل

۱ . نقطهٔ $P = (x, y)$ در ربع اول از مبداء در امتداد منحنی $y = x^3/48$ طوری حرکت می‌کند که dx/dt ثابت‌است . چه‌مختص ، x یا y ، سریعتر افزایش می‌یابد ؟ (جواب‌به‌اندازهٔ x بستگی دارد .)

۲ . شعاع موج مستدیر حاصل از انداختن سنگی در یک استخر به میزان (متـر بـر ثانیه) 3 m/sec پخش می‌شود . وقتی موج به قطر 10 m است ، سرعت افزایش مساحت محصور به موج چقدر است ؟

۳ . طول یک مستطیل به میزان (سانتیمتر برثانیه) 3 cm/sec کاهش یافته و عرضش‌به‌میزان 2 cm/sec افزایش می‌یابد . در لحظه‌ای معین مستطیل به طول 50 cm و عرض 20 cm است . آیا مساحت مستطیل صعودی است یا نزولی و سرعت آن چقدر است ؟

۴ . هـوا بـه میزان $10\ ft^3/min$ به داخل یک بالون کروی بزرگ وارد می‌شود . سرعـت افزایش شعاع بالون وقتی قطرش 4 ft باشد چقدر است ؟ سرعت افزایش مساحـت آن در همین لحظه چقدر است ؟

۵ . حجم یک بالون در لحظه‌ای که مساحتش به میزان $5\ ft^2/sec$ در حال افزایش است بـه میزان $15\ ft^3/sec$ زیاد می‌شود . شعاع آن چقدر است ؟ سرعت افزایش شعاع‌آن در این لحظه چقدر است ؟

۶. حجم یک گلولهٔ نفتالین درحال‌تبخیر به‌میزانی متناسب با مساحتش کاهش‌می‌یابد. نشان دهید این ایجاب می‌کند که شعاع گلوله به میزان ثابت کاهش یابد .

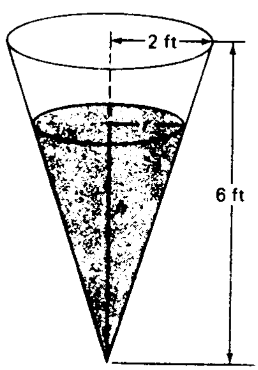
۷. دو کشتی A و B از نقطهٔ P در امتداد مسیرهایی عمود برهم از یکدیگر دور می‌شوند کشتی A با تندی 15 گره و کشتی B با تندی 20 گره حرکت می‌کند . فرض کنید در یک لحظه A در فاصلهٔ 5 گره دریایی از P و B در فاصلهٔ 10 گره دریایی از P باشد . یک ساعت بعد سرعت دور شدن کشتیها از هم چقدر است؟ (یک گره دریایی بر ساعت = یک گره .)

۸. مایعی به میزان $8\ \mathrm{cm^3/sec}$ در یک ظرف استوانه‌ای به شعاع 2 cm ریخته می‌شود . با چه سرعتی سطح مایع بالا می‌آید؟

۹. یک سر طنابی به‌یک‌قاشق 3 ft پایین اسکله بسته شده‌است . سر دیگر که به‌چرخ‌چاهی در کنار اسکله وصل شده به میزان 1 ft/sec کشیده می‌شود . سرعت نزدیک‌شدن قایق به اسکله در فاصلهٔ 4 ft از آن چقدر است؟ سرعت تغییر زاویهٔ بین طناب و سطح آب در این لحظه چقدر است؟

۱۰. اتومبیلی در یک‌جاده باسرعت 60 mph مستقیما " از زیر یک بالون که‌باسرعت 10 mph بالا می‌رود می‌گذرد . فرض کنید در لحظهٔ عبور اتومبیل بالون در ارتفاع 1 میلی باشد . 1 دقیقه بعد ، سرعت‌افزایش فاصلهٔ بین‌اتومبیل و بالون چقدر است؟ سرعت تغییر زاویهٔ بین جاده و خط‌واصل بین اتومبیل و بالون در این لحظه چقدر است؟

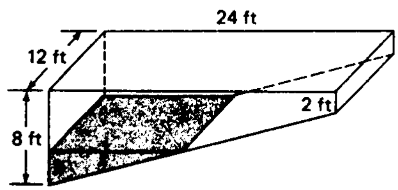
۱۱. آب به‌میزان $720\ \mathrm{in^3/min}$ وارد یک‌مخزن به شکل مخروط مستدیر قائم وارون به‌ارتفاع 6 ft و شعاع 2 ft در بالا می‌شود (ر.ک. شکل ۲۴ ، که در آن بشکه‌تاعمق h پر شده و سطح مایع به شعاع r می‌باشد) . سرعت بالاآمدن سطح آب وقتی یکهشتم بشکه پر



شکل ۲۴

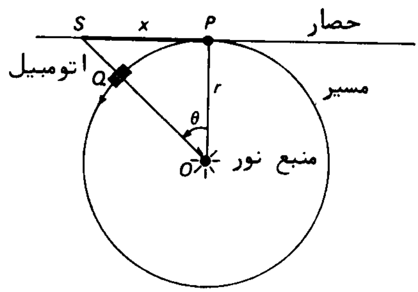
شده ، یکدوم آن پر شده چقدر است ؟ چقدر طول می‌کشد تا بشکه پر شود ؟ آیا پاسخ آخرین سئوال نیاز به حساب دیفرانسیل و انتگرال دارد ؟ (حجم یک‌مخروط‌مستدیر قائم به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r عبارت است از $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.)

۱۲ . یک استخر به عرض 12 ft ، طول 24 ft ، عمق 2 ft در انتهای کم عمق ، و عمق 8 ft در انتهای گود به‌میزان 16 ft³/min از آب پر می‌شود (ر.ک . شکل ۲۵ ، که در آن استخر تا عمق h پر شده است) . سرعت بالا آمدن آب وقتی آب در انتهای کم عمق به‌عمق 1 ft باشد چقدر است ؟ وقتی عمق آب در انتهای گود 2 ft باشد چقدر است ؟ نیم ساعت پس از شروع به پرشدن چقدر است ؟



شکل ۲۵

۱۳ . یک اتومبیل مسابقه با سرعت (کیلومتر بر ساعت) 150 km/hr حول یک‌مسیر مستدیر در حرکت است . فرض کنید منبع نوری در مرکز O مسیر و یک حصار مماس برمسیر در نقطهٔ P وجود داشته باشند (ر.ک. شکل ۲۶ ، که در آن مسیر به شعاع r بوده و



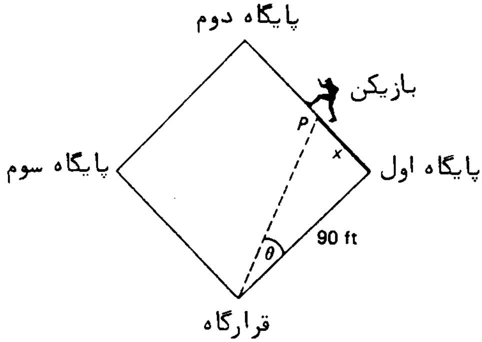
شکل ۲۶

اتومبیل ، در نقطهٔ Q ، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند) . سرعت حرکت سایهٔ اتومبیل (نقطهٔ S در شکل) روی حصار وقتی یکهشتم دور از P را پیموده چقدر است ؟

۱۴ . عکاسی از یک مسابقه فیلمبرداری می‌کند . فرض کنید فاصلهٔ عمودی وی از مسیر در

خط پایان 40 ft بوده ، و دوربین برای آنکه روی برنده وقتی در فاصلهٔ 30 ft ازخط پایان است ثابت بماند باید به میزان 18 درجه بر ثانیه بچرخد . سرعت برنده در این لحظه چقدر است ؟ (فرض کنید مسیر خط راست باشد .)

۱۵ . یک بازیکن بیس‌بال در مدت 3.6 ثانیه از پایگاه اول به پایگاه دوم می‌دود (ر . ک . شکل ۲۷ ، که در آن بازیکن در فاصلهٔ x از پایگاه اول است) .



شکل ۲۷

سرعت تغییر زاویهٔ بین خط پایگاه اول و خط قرارگاه تا بازیکن وقتی در نیمه‌راه بین پایگاه اول و دوم است چقدر است ؟ (فرض کنید تندی بازیکن ثابت باشد .)

۱۶ . سر یک نردبان که به دیواری تکیه دارد با سرعت 3 in/sec پایین می‌آید . وقتی پای نردبان در فاصلهٔ 6 ft از دیوار است ، سرعت دورشدن آن از دیوار 4 in/sec می‌باشد. طول نردبان چقدر است ؟

در مسئله نردبان مثال ۳ ،

۱۷ . سرعت پای نردبان وقتی در فاصلهٔ 10 ft از دیوار است چقدر می‌باشد ؟

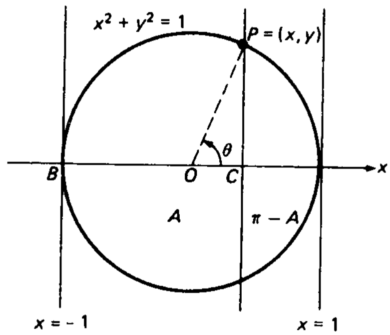
۱۸ . سرعت تغییر زاویهٔ بین نردبان و زمین وقتی پای نردبان در فاصلهٔ 8 ft از دیوار است چقدر است ؟

۱۹ . **شتاب پای نردبان** درلحظه‌ای‌که سرش در فاصلهٔ 12 ft از زمین است چقدرمی‌باشد ؟ چه وقت سر نردبان به زمین می‌رسد ؟

۲۰ . از یک ماده میله‌ای به‌طول L و مکعبی به حجم V ساخته‌می‌شود . ***ضریب انبساط خطی*** ماده α است ، بدین‌معنی‌که وقتی میله گرم شود ، طولش طبق فرمول $\alpha = (1/L)(dL/dT)$ تغییر می‌کند ، که در آن T دماست . ***ضریب انبساط حجمی*** ماده β است ، بدین‌معنی که وقتی مکعب گرم می‌شود ، حجمش طبق فرمول $\beta = (1/V)(dV/dT)$ تغییر می‌کند .

نشان دهید که $\beta = 3\alpha$.

۲۱. خط مستقیمی‌که موازی محور y از وضع $x = -1$ به وضع $x = 1$ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند، دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ را قطع کرده و آن را به قطعهٔ چپ به مساحت A و قطعهٔ راست به مساحت $\pi - A$ تقسیم می‌کند (ر.ک. شکل ۲۸). سرعت افزایش A وقتی خط در وضع $x = \frac{1}{2}$ است چقدر می‌باشد؟



شکل ۲۸

راهنمایی. A را برحسب زاویهٔ θ شکل بیان کنید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

سرعت و شتاب متوسط و لحظه‌ای

چگالی متوسط و دقیق

تعریف مشتق

مشتقگیری و مشتقپذیری

خارج قسمت تفاضلی و نموها

خطوط مماس و قائم بر یک منحنی

مشتقات یکطرفه و مماسها

پیوستگی یک تابع مشتقپذیر

تقریب خط مماس و دیفرانسیلها

نماد لایب‌نیتز برای مشتقات

قواعد حاصلضرب و خارج‌قسمت

قاعدهٔ زنجیره‌ای

مشتقات مراتب بالاتر

مشتقگیری ضمنی

میزانهای مرتبط

قواعد و فرمولهای اساسی مشتقگیری

تابع	مشتق
f	(تعریف) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
f	(تعریف معادل) $f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$
(ثابت) c	0
cf	cf'
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
(n صحیح) x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
(r گویا) x^r	rx^{r-1} (این قاعده شامل پنج قاعدهٔ فوق است)
$f+g$	$f'+g'$
$f-g$	$f'-g'$
fg	$f'g + fg'$ (قاعدهٔ حاصلضرب)
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$ (قاعدهٔ خارجقسمت)
$z = z(y)$ ، که در آن $y = y(x)$	$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ (قاعدهٔ زنجیرهای)
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$

$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

مسائل تکمیلی

۱. شخصی که در بالای یک صخره ایستاده هفت تیر می‌کشد و شلیک می‌کند. گلوله با سرعت فرار $v_0 = 480$ به پایین شلیک شده و درست نیم ثانیه بعد به زمین می‌خورد. ارتفاع صخره چقدر است؟

۲. اتومبیلی که باسرعت v_0 mph در حرکت است ناگاه ترمز می‌کند. فرض کنید حرکت بعدی آن طبق $s = v_0 t - \frac{1}{2}kt^2$ $(k > 0)$ صورت گیرد. ثابت k را تعبیر کرده و مقدار آن را درصورتی بیابید که $v_0 = 60$ mph و اتومبیل پس از 5.5 sec توقف کامل کند. اتومبیل چه مسافتی را پیش از توقف می‌پیماید؟ نشان دهید که فاصلهٔ پیموده شده پس از ترمز با مربع تندی v_0 آن متناسب است.

فرض کنید a ، b ، c ، و d ثابتهای دلخواهی باشند. از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۳. $ax + \dfrac{b}{x}$

۴. $(x-a)(x-b)$

۵. $x(x-a)(x-b)$

۶. $(x-a)(x-b)(x-c)$

۷. $\dfrac{x-a}{x+a}$

۸. $\dfrac{x-a}{x+b}$

۹. $\dfrac{x+a}{x-b}$

۱۰. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

۱۱. $\dfrac{x^2-a}{x^2-b}$

۱۲. $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$

۱۳. $\sqrt{x^2+a^2}$

۱۴. $\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

۱۵. $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

۱۶. $\sin^2(ax+b)$

۱۷. $\cos(ax^2+bx+c)$

در صفحهٔ ۱۸۶ دو تعریف "فارغ از حساب دیفرانسیل و انتگرال" (و درنتیجه، ناسازگار) از خط مماس بر یک دایره در نقطهٔ p داده شده است.

۱۸. یک منحنی غیر از دایره بیابید که برای آن تعریف (دو) درست و تعریف (یک)

نادرست باشد.

۱۹. یک منحنی غیر از دایره بیابید که برای آن تعریف (یک) درست باشد.

معادلهٔ مماس بر منحنیهای زیر را بیابید.

۲۰. $y = 1/x$ در $(2, \frac{1}{2})$

۲۱. $y = 1/x$ در $(-1, -1)$

۲۲. $y = 1/x^2$ در $(-\frac{1}{2}, 4)$

۲۳. $y = \tan x$ در $(0, 0)$

۲۴. $y = \csc x$ در $(\pi/4, \sqrt{2})$

۲۵. $y = 8/(x^2 + 4)$ در $(2, 1)$

معادلهٔ قائم به منحنیهای زیر را بیابید.

۲۶. $y = 1/x$ در $(-\frac{1}{2}, -2)$

۲۷. $y = 1/x^2$ در $(2, \frac{1}{4})$

۲۸. $y = \cot x$ در $(\pi/2, 0)$

۲۹. $y = \sec x$ در $(-\pi/4, \sqrt{2})$

۳۰. منحنی $y = 1/x$ مماسی دارد که از $(0, 1)$ می‌گذرد. آن را بیابید.

۳۱. زاویهٔ بین منحنیهای $y = 1/x^2$ و $y = 1/x$ در نقطهٔ $(1, 1)$ را بیابید.

۳۲. نشان دهید که قطعه‌ای از مماس بر منحنی $y = 1/x$ که توسط محورهای مختصات جدا می‌شود در نقطهٔ تماس نصف می‌شود.

۳۳. نمودار منحنی $y = |x - 1| - |x| + |x + 1|$ را رسم کنید. مماسهای یکطرفه درگوشه‌های منحنی را بیابید.

۳۴. آیا تابع $|x|^2$ در $x = 0$ مشتقپذیر است؟

۳۵. آیا مشتق یک تابع گویا همیشه تابعی گویاست؟

دیفرانسیل $df(a) = f'(a)\Delta x$ تابع داده شده را به ازای مقادیر a و Δx ذکر شده بیابید. در هر حالت $df(a)$ را با نمو $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ تا تعداد ارقام اعشاری مناسبی مقایسه نمایید.

۳۶. $f(x) = 1/x,\ a = 5,\ \Delta x = -0.1$

۳۷. $f(x) = (1 + x)/(1 - x),\ a = 0,\ \Delta x = 0.1$

۳۸. $f(x) = 1/\sqrt{x},\ a = 9,\ \Delta x = 0.5$

۳۹. $f(x) = \sec x,\ a = \pi/3,\ \Delta x = \pi/60$

۴۰. با استفاده از تقریب خط مماس، نشان دهید که به ازای $|x|$ کوچک،

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\sqrt[n]{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

با استفاده از تقریب خط مماس، کمیت داده شده را تخمین زده و نتیجه را با جواب دقیق تا تعداد ارقام اعشاری مناسب مقایسه نمایید.

۴۱. $(2.9)^{-2}$ ۴۲. $\sqrt[3]{26}$ ۴۳. $(8.6)^{2/3}$

۴۴. $\csc 32^\circ$ ۴۵. $\tan 63^\circ$ ۴۶. $1/\sqrt{4.1}$

۴۷. $\sec 1^\circ$ ۴۸. $(82)^{-1/4}$ ۴۹. $\sqrt[4]{17}$

۵۰. $\cot 43^\circ$ ۵۱. $(7.8)^{-1/3}$ ۵۲. $(0.9)^{0.9}$

۵۳. $f(x) = (x-4)(x-3)^2(x-2)^3$ را به ازای $x = 4.001$ تخمین بزنید.

۵۴. با استفاده از قاعدهٔ حاصلضرب، برهان دیگری برای فرمول $D_x x^n = nx^{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ بیاورید.

تابع $y = f(x)$ را چنان بیابید که

۵۵. $y' = (x+1)^3$ ۵۶. $y' = x(x^2+1)^3$

۵۷. $y' = x^3(x^4+1)^3$ ۵۸. $y' = x^2(x^3+1)^2$

راهنمایی. قاعدهٔ زنجیره‌ای را به یاد آورید.

تابع $y = f(x)$ را طوری بیابید که

۵۹. $y'' = x$ ۶۰. $y'' = x^2$ ۶۱. $y'' = x^3$

۶۲. $y''' = 1$ ۶۳. $y''' = x$ ۶۴. $y''' = x^2$

راهنمایی. به یاد داشته باشید که هر مشتقگیری از یک توان x نما را یکی پایین‌می‌آورد.

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۶۵. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})}$ ۶۶. $\tan(\sec x^2)$

۶۷. $\sqrt{\sin(\tan\sqrt{x})}$ ۶۸. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

۶۹. $\sin(\cos(\sin x^2))$ ۷۰. $\sin(\cos(\tan(\cot x)))$

۷۱. فرض کنید $p(x) = f(x)g(x)$ و $f'(x)g'(x) = c$، که در آن c ثابت بوده و مشتقات سوم f''' و g''' وجود دارند. نشان دهید که

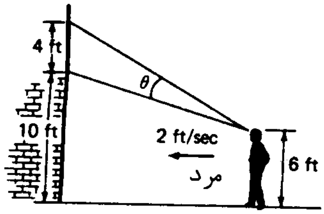
$$\frac{p'''(x)}{p(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{g'''(x)}{g(x)}.$$

۷۲. مماس و قائم به نمودار معادلهٔ $y^6 + y^5 - xy + 2 = 0$ در نقطهٔ $(4, 1)$ را بیابید.

مردی به قد 6 ft با تندی 2 ft/sec به جانب یک ساختمان روان است و چشم از یک‌پنجره به طول 4 ft که در 10 ft ی زمین است بر نمی‌دارد. فرض کنید θ زاویهٔ دید مرد از پنجره باشد (ر.ک. شکل ۲۹. از اندازهٔ سر مرد صرف‌نظر می‌شود).

۷۳. سرعت تغییر θ وقتی فاصلهٔ مرد تا ساختمان 16 ft، 8 ft، یا 4 ft می‌باشد چقدر

است ؟



شکل ۲۹

۷۴. در چه فاصله از ساختمان زاویهٔ θ ، که ابتدا صعودی است ، شروع به نزول می‌کند ؟

۷۵. نشان دهید که منحنی $y = \sin x$ دارای بی‌نهایت مماس متمایز ماربر مبداء است .

نشان دهید که نقاط تماس و نقاط تقاطع خط $y = x$ و نمودار $y = \tan x$ مختص x یکسان دارند .

کاربردهای دیگر مشتقگیری ۳

در سه بخش اول این فصل چند تکنیک قویتر حساب دیفرانسیل را عرضه می‌کنیم که به ما توان تحلیل رفتار توابع و رسم نمودار آنها را می‌دهد. در سه بخش بعد حدودی را بررسی می‌کنیم که مستلزم " نزدیک‌شدن به بی‌نهایت " اند و روش موٴثر **قاعدهٴ هوپیتال**[1] را برای محاسبهٴ حدود به کمک مشتقگیری معرفی خواهیم کرد. در بخش ۷.۳ از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای حل مسائل عملی بسیاری از **بهینه‌سازی** استفاده کرده، و در بخش ۸.۳، که اختیاری است، توان حساب دیفرانسیل و انتگرال را در مسائل تجارت و اقتصاد نشان خواهیم داد.

۱.۳ قضیهٴ مقدار میانگین

فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای بر بازهٴ بستهٴ $I = [a, b]$ بوده، و تفاضل $f(b) - f(a)$ بین مقادیر f در نقاط انتهایی I را درنظرمی‌گیریم. اگر $f'(a)$ موجود باشد، می‌توان بااستفاده از $f'(a)$ تفاضل $f(b) - f(a)$ را بانوشتن

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b - a) \tag{1}$$

تخمین زد، که درآن تقریب در صورتی مناسب است که $b - a$ کوچک باشد. درواقع، این همان تقریب خط مماس (۲)، صفحهٴ ۱۹۸، است که درآن Δx با $b - a$ عوض شده است. در واقع، همانطور که لحظه‌ای دیگر نشان می‌دهیم، تقریب (۱) را می‌توان با فرمول دقیق

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{1'}$$

عوض کرد، که درآن f' در نقطهٴ مناسب c بین a و b به جای نقطهٴ انتهایی a حساب

---

1. *L'Hospital*

می‌شود .(دراینجا فرض می‌کنیم f در هر نقطه بین a و b مشتقپذیر بوده ، و انتخاب c به تابع f بستگی داشته باشد .) این نتیجه ، که به قضیهٔ مقدار میانگین معروف است ، کاربردهای زیادی در حساب دیفرانسیل وانتگرال دارد .

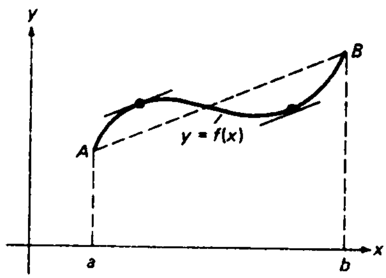
برای تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین ، معادلهٔ (۱) را به شکل

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (۲)$$

نوشته ،و می بینیم که طرف‌راست (۲) شیب وتر واصل بین نقاط انتهایی $A = (a, f(a))$ و $B = (b, f(b))$ منحنی

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b) \qquad (۳)$$

است . لذا ، قضیهٔ مقدار میانگین می‌گوید که مماس بر منحنی (۳) در نقطه‌ای از منحنی غیراز نقاط انتهایی موازی وتر AB است . این امر در شکل ۱ نشان داده شده است ، که در آن منحنی دو مماس موازی AB دارد .



تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین

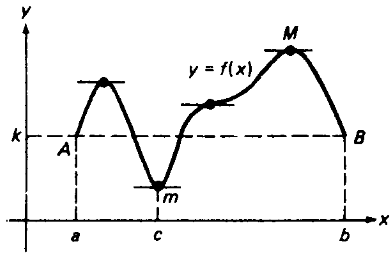
شکل ۱

قضیهٔ رل . اگر $f(a) = f(b)$ ، نقاط انتهایی منحنی (۳) مختص y یکسان داشته و وتر AB واصل بین نقاط انتهایی *افقی* است . در این حالت قضیهٔ مقدار میانگین به **قضیهٔ رل** تحویل می‌شود[۱] ، که می‌گوید مماس بر منحنی در نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی افقی است ، یا معادلا" ، f' در نقطه‌ای مانند c بین a و b مساوی 0 است . این وضع نسبتا" ساده‌تر

---

۱ . به افتخار میشل رل Michel Rolle (1652–1719) عضو فرهنگستان فرانسه که ابتدا از مخالفین حساب دیفرانسیل و انتگرال بود و بالاخره به کوشش یکی از همکارانش اعتبار آن را پذیرفت .

در شکل ۲ نموده شده است ، که در آن منحنی در چهار نقطه مماس افقی دارد . این امر که مختصات y دو نقطه از این چهارنقطه مساوی ماکزیمم M و مینیمم m تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ اند تصادفی نیست (ر.ک. برهان قضیهٔ ۱) .



تعبیر هندسی قضیهٔ رل

شکل ۲

ابتدا قضیهٔ رل را ثابت کرده ، و سپس قضیهٔ مقدار میانگین را ثابت خواهیم کرد .

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ رل) . *فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $I = [a, b]$ پیوسته و بربازهٔ باز (a, b) ، یعنی در هر نقطهٔ درونی I ، مشتقپذیر باشد . همچنین ، $f(a) = f(b) = k$. در این صورت ، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به‌طوری که $f'(c) = 0$.*

برهان . بنابر قضیهٔ مقدار اکستریم (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۹) ، f دارای ماکزیمم M ومینیمم m بر I است . واضح است که $m \le k \le M$ ، زیرا k مقداری است که f بر I (در نقاط a و b)می‌گیرد . هرگاه $m = k = M$، آنگاه f به تابع ثابت $f(x) \equiv k$ تحویل می شودکه مشتقش در هر نقطهٔ (a, b) مساوی 0 است ، و قضیه به اثبات می‌رسد . در غیر این صورت ، داریم $m < k$ یا $k < M$ (یا هر دو) ، ولی در هر حالت f در هر نقطهٔ درونی I ، یعنی در نقطه‌ای مانند c از (a, b) ، دست‌کم یکی از مقادیر اکستریم خود را می‌گیرد . طبق فرض ،

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

در c وجود دارد . همچنین ، این حد همان مقدار $f'(c)$ وقتی $x \to c^+$ و $x \to c^-$ را داراست (قضیهٔ ۱۲ ، صفحهٔ ۱۴۸) . به‌طور صریح ، فرض کنیم $f(c) = m$ ؛ درنتیجه ، به ازای هر x در I ، $f(c) \le f(x)$ یا معادلاً $f(x) - f(c) \ge 0$. در این صورت ، خارج‌قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad (۴)$$

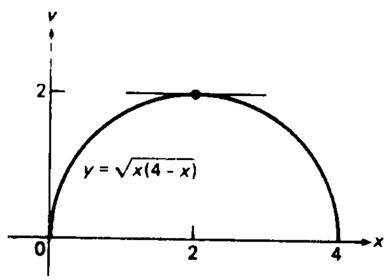
به ازای $x > c$ ($x - c > 0$) نامنفی و به ازای $x < c$ ($x - c < 0$) نامثبت است. از اینرو بنابر قاعده‌ٔ (سه)، صفحه‌ٔ ۱۲۴ (که در مورد حدود یکطرفه نیز به‌کار می‌رود)، حد خارج قسمت (۴) وقتی $x \to c^+$ نمی‌تواند منفی باشد، وهمچنین حد (۴) وقتی $x \to c^-$ نمی‌تواند مثبت باشد. پس نتیجه می‌شود که $f'(c)$ نمی‌تواند مثبت یا منفی باشد. تنها می‌ماند حالتی که $f'(c) = 0$. حالت $f(c) = M$ اصولاً به همین نحو بررسی می‌شود.

تبصره. واضح است که مثبت یا منفی نبودن $f'(c)$، که $f'(c) = 0$ را ایجاب می‌کند، به برقراری $f(c) \le f(x)$ به ازای هر x در بازه‌ٔ I بستگی نداشته بلکه فقط به برقراری آن به ازای هر x در یک همسایگی نقطه‌ٔ c وابسته است.

مثال ۱. تابع

$$f(x) = \sqrt{x(4-x)},$$

که در شکل ۳ رسم شده، فقط بر بازه‌ٔ بسته‌ٔ $[0, 4]$ تعریف شده است، زیرا عبارت زیر رادیکال خارج این بازه منفی است. چون f در تمام یک همسایگی نقطه‌ٔ انتهایی $x = 0$



شکل ۳

یا $x = 4$ تعریف نشده است، در هیچیک از این نقاط مشتقپذیر نیست. در واقع، حتی مشتقات یکطرفه‌ٔ $f'_+(0)$ و $f'_-(4)$ وجود ندارند (چرا؟). با اینحال، f از راست در $x = 0$ و از چپ در $x = 4$ پیوسته بوده، و در هر نقطه‌ٔ درونی $[0, 4]$ دارای مشتق

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(4-x)}} \frac{d}{dx}[x(4-x)] = \frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}} \qquad (۵)$$

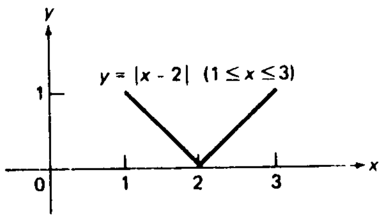
است؛ درنتیجه، f بر بازه‌ٔ بسته‌ٔ $[0, 4]$ پیوسته و بر بازه‌ٔ باز $(0, 4)$ مشتقپذیر است. به علاوه، f مقدار 0 را در نقاط انتهایی $x = 0$ و $x = 4$ می‌گیرد. لذا، طبق قضیه‌ٔ رل، f' باید در نقطه‌ای بین $x = 0$ و $x = 4$ مساوی 0 باشد. از رابطه‌ٔ (۵) و نمودار f، که در

واقع نیمدایره‌ای به شعاع 2 و مرکز $(2,0)$ است، معلوم می‌شود که این در $x=2$ صورت می‌گیرد.

مثال ۲. تابع

$$f(x)=|x-2| \qquad (1\leq x\leq 3)$$

که در شکل ۴ رسم شده، بر $[1,3]$ پیوسته است، و در $x=1$ و $x=3$ مقدار 1 را می‌گیرد. با اینحال نقطه‌ای مانند c در $(1,3)$ وجوددارد که $f'(c)=0$. این قضیهٔ رل رانقض‌نمی‌کند،



شکل ۴

چون یکی از شرایط قضیه برقرار نیست. در واقع، f در $x=2$ مشتقپذیر نیست، زیرا نمودار f در نقطهٔ $(2,0)$ گوشه دارد.

مثال ۳. نشان دهید که معادلهٔ مکعبی

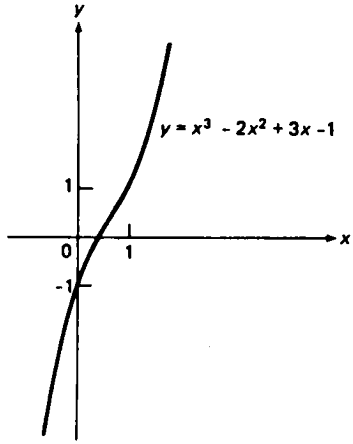
$$x^3-2x^2+3x-1=0 \tag{۶}$$

ریشه‌ای حقیقی دارد ولی نه بیش از یکی.

حل. با نوشتن $f(x)=x^3-2x^2+3x-1$ داریم $f(1)=1$ ، $f(0)=-1$. لذا، طبق قضیهٔ مقدار میانی (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۴)، f مقدار 0 را در نقطهٔ r_1 بین 0 و 1 می‌گیرد (در واقع، $r_1\approx 0.43$). این یک ریشهٔ معادلهٔ (۶) است. هرگاه ریشهٔ دیگر r_2 وجود می‌داشت، آنگاه $f(r_1)=f(r_2)=0$؛ درنتیجه، به‌خاطر قضیهٔ رل، f' مقدار 0 را در نقطه‌ای بین r_1 و r_2 می‌گرفت. اما این غیرممکن است، زیرا به ازای هر x،

$$f'(x)=3x^2-4x+3=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\geq\frac{5}{3}$$

درنتیجه، f' هرگز مساوی 0 نیست. لذا، r_1 تنها ریشهٔ معادلهٔ (۶) می‌باشد. این از روی شکل یعنی منحنی $y=f(x)$ رسم شده در شکل ۵ فقط قطع x است. در واقع، می‌توان



شکل ۵

با استفاده از آزمونی (قضیهٔ ۷ ، صفحهٔ ۲۶۹) که در بخش بعد ثابت شده نشان داد که f بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است .

برهان قضیهٔ مقدار میانگین. حال که قضیهٔ رل در دست است ،قضیهٔ مقدار میانگین به آسانی ثابت می‌شود .

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ مقدار میانگین) .فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده‌و بر بازهٔ باز (a, b) مشتقپذیر باشد. در این صورت ، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به طوری که

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (۷)$$

برهان. تابع جدید

$$g(x) = f(x) - kx$$

را معرفی می‌کنیم ،که درآن k ثابت است . k را طوری می‌گیریم‌که g در نقاط انتهایی بازهٔ $[a, b]$ مقدارً یکسان بگیرد . به عبارت دیگر، شرط می‌کنیم که k در معادلهٔ

$$g(a) = f(a) - ka = f(b) - kb = g(b)$$

صدق نماید . با حل آن نسبت به k ، به دست می‌آوریم

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

با این k ، تابع g در تمام شرایط قضیهٔ رل صدق می‌کند؛ و درنتیجه، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به‌طوری که

$$g'(c) = f'(c) - k = 0.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

که با (۷) معادل است.

فرض کنیم به‌جای $a < b$ که در قضیهٔ ۲ و فرمول (۷) تلویحا" فرض شده داشته‌باشیم $b < a$ ، و نیز f بر $[b, a]$ پیوسته و بر (b, a) مشتقپذیر باشد. در این صورت، به‌جای (۷) داریم

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b) \qquad (۷')$$

که در آن c نقطه‌ای از (b, a) است. با ضرب طرفین (۷') در $1-$ به (۷) باز می‌گردیم. لذا، اگر بگوییم c بین a و b قرار دارد، قضیهٔ مقدار میانگین را همیشه می‌توان به شکل (۷) به کار برد، زیرا این نوع بیان شرط بر c در هر دو حالت $a < b$ و $b < a$ قابل‌اعمال است.

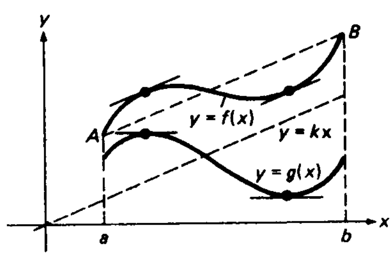
برای تعبیر هندسی تابع $g(x)$ معرفی شده در برهان قضیهٔ مقدار میانگین، فرض‌کنیم منحنی

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

بالای نمودار

$$y = kx = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x$$

واقع باشد، که خطی است ماربر مبداء و موازی وتر AB واصل بین نقاط انتهایی منحنی. اگر kx مثبت باشد، هر نقطهٔ $(x, g(x))$ از نمودار g به فاصلهٔ kx زیر نقطهٔ نظیر $(x, f(x))$ از منحنی f قرار دارد. مثلا"، در شکل ۶، منحنی بالایی نمودار تابع f در شکل ۱ بوده،



شکل ۶

و منحنی پایینی نمودار تابع g نظیر این تابع f می‌باشد. توجه کنید که هروقت مماس بر نمودار f موازی AB باشد، مماس بر نمودار g در نقطه‌ای با همان مختص x موازی است.

مثال ۴. نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع $f(x) = x^2$ را پیدا کنید.

حل. در اینجا $f'(x) = 2x$ و فرمول (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$b^2 - a^2 = 2c(b - a).$$

با حل آن نسبت به c، به دست می‌آوریم

$$c = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{b + a}{2}.$$

لذا، در این حالت خاص، c نقطهٔ میانی بازه با نقاط انتهایی a و b، بی‌توجه به انتخاب a و b، است.

مثال ۵. نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع $f(x) = 1/x$ در صورت $a = 4$ و $b = 9$ و نیز در صورت $a = -1$ و $b = -4$ را بیابید.

حل. این بار $f'(x) = -1/x^2$ و فرمول (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{b - a}{c^2}.$$

با حل آن نسبت به c به دست می‌آوریم $c^2 = ab$. یا معادلاً $c = \pm\sqrt{ab}$ که برای واقع بودن c بین a و b علامت به‌علاوه را در صورت مثبت بودن a و b و علامت منها را در صورت منفی بودن a و b اختیار می‌کنیم. لذا، $c = \sqrt{4(9)} = 6$ اگر $a = 4$ و $b = 9$ ولی $c = -\sqrt{(-1)(-4)} = -2$ اگر $a = -1$ و $b = -4$. توجه کنید که قضیهٔ مقدار میانگین در صورت مختلف‌العلامه بودن a و b به کار نمی‌رود، زیرا در این صورت نقطهٔ $x = 0$ که $f(x) = 1/x$ در آن تعریف نشده بین a و b قرار دارد.

ما از قبل می‌دانیم که مشتق تابع ثابت متحد صفر است؛ یعنی، هرگاه $f(x) \equiv$ ثابت، آنگاه $f'(x) \equiv 0$. حال، به عنوان کاربردی از قضیهٔ مقدار میانگین، عکس‌مطلب را ثابت می‌کنیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم $f'(x) \equiv 0$ ایجاب می‌کند که $f(x) \equiv$ ثابت اگر و فقط اگر قلمرو f بازه باشد.

قضیهٔ ۳ (ثابت بودن یک تابع با مشتق صفر) . *فرض کنیم تابع f بر بازهٔ I مشتقپذیر بوده و f' در هر نقطه از I صفر باشد. در این صورت، f بر I ثابت است؛ یعنی، f در تمام نقاط I مقدار یکسان میگیرد.*

برهان. نقطهٔ a از I را ثابت گرفته، و فرض کنیم x نقطهٔ دیگری از I باشد. در این صورت، بسته به‌اینکه $x > a$ یا $x < a$ ، $[a, x]$ یا $[x, a]$ زیر بازه‌ای از I است، و f بر این زیر بازه مشتقپذیر (و درنتیجه، پیوسته) می‌باشد. لذا، طبق قضیهٔ مقدار میانگین،

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a), \tag{۸}$$

که در آن c بین a و x قرار دارد. اما $f'(c) = 0$ ، زیرا c متعلق به I است؛ و لذا، $f(x) - f(a) = 0$ یا معادلاً $f(x) = f(a)$. چون x نقطهٔ دلخواهی از I است، نتیجه می‌شود که به ازای هر x در I ، $f(x) = f(a)$ ؛ یعنی، f بر I ثابت می‌باشد.

مثال ۶. تابع

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \\ -1 & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

ثابت نیست، ولی مشتقش در هر نقطه که f تعریف شده باشد صفر است. این امر قضیهٔ ۳ را نقض نمی‌کند، زیرا قلمرو f بازه نبوده بلکه جفت بازهٔ ازهم جدای $(0, \infty)$ و $(-\infty, 0)$ می‌باشد. در این حالت، فقط می‌توان فرمول (۸) را به کار برد که نقاط a و x متعلق به یکی از بازه‌های $(0, \infty)$ یا $(-\infty, 0)$ باشند. پس نتیجه می‌شود که f بر هر بازهٔ جداگانه ثابت است، ولواینکه f بر $(0, \infty)$ مقدار 1 را می‌گیرد که بامقدار f بر $(-\infty, 0)$ که -1 است متفاوت می‌باشد.

قضیهٔ مقدار میانگین کشی (اختیاری). بالاخره یک گام جلو رفته و قضیهٔ مقدار میانگین مفیدی را که مستلزم دو تابع است ثابت می‌کنیم که به ریاضیدان بزرگ فرانسوی، آگوستن کشی[1] (۱۸۵۷ – ۱۷۸۹)، منسوب می‌باشد. برای کاربردهای قضیهٔ مقدار میانگین کشی، ر.ک. بخشهای ۳.۶ و ۹.۸.

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ مقدار میانگین کشی) . *فرض کنیم توابع f و g بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$*

1. Augustin Cauchy

پیوسته بوده و بر بازهٔ باز (a, b) مشتق داشته باشند. همچنین، g' در هر نقطهٔ (a, b) ناصفر باشد. در این صورت، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به طوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (۹)$$

برهان. هرگاه $g(a)=g(b)$، آنگاه، طبق قضیهٔ رل، به ازای c ای در (a, b)، $g'(c)=0$، که با فرض متناقض است. بنابراین، $g(a)\neq g(b)$؛ درنتیجه، طرف چپ (۹) تعریف شده است. بقیهٔ برهان به موازات برهان قضیهٔ مقدار میانگین، که قضیهٔ ۴ به‌ازای $g(x)=x$ به آن تحویل می‌شود، پیش می‌رود. تابع جدید

$$h(x)=f(x)-kg(x)$$

که در آن k ثابت است را معرفی‌کرده، k را طوری می‌گیریم که h در هر دو نقطهٔ انتهایی بازهٔ $[a, b]$ مقدار یکسان بگیرد. به عبارت دیگر، شرط می‌کنیم k در معادلهٔ زیر صدق نماید:

$$h(a)=f(a)-kg(a)=f(b)-kg(b)=h(b).$$

با حل نسبت به k به دست می‌آوریم

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

با این k، تابع h در تمام شرایط قضیهٔ رل صدق می‌کند؛ و درنتیجه، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به‌طوری که

$$h'(c)=f'(c)-kg'(c)=0.$$

پس نتیجه می‌شود

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

که با (۹) معادل است.

مثال ۷. نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین کشی برای توابع $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$ را در صورتی بیابید که $a=0$ و $b=\pi/2$.

حل. در اینجا $f'(x)=-\sin x$ و $g'(x)=\cos x$؛ درنتیجه، بخصوص g' در هر نقطه از $(0, \pi/2)$ ناصفر است. طرف چپ (۹) مساوی است با

$$\frac{\cos(\pi/2) - \cos 0}{\sin(\pi/2) - \sin 0} = \frac{0-1}{1-0} = -1,$$

و طرف راست برابر است با

$$\frac{-\sin c}{\cos c} = -\tan c.$$

لذا، فرمول (۹) به صورت $\tan c = 1$ درمی‌آید. با حل آن نسبت به c و تحت شرط $0 < c < \pi/2$، فوراً معلوم می‌شود که $c = \pi/4$.

مسائل

نقطهٔ c صادق در قضیهٔ رل (درنتیجه، $f'(c) = 0$) را درصورتی بیابید که

۱. $f(x) = x^2 - 3x + 5, a = 1, b = 2$

۲. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 5, a = -1, b = 1$

۳. $f(x) = 1/(x^2 + 1), a = -2, b = 2$

۴. $f(x) = x^{1/2} + (1 - x)^{1/2}, a = 0, b = 1$

۵. $f(x) = x^{1/2}(2 - x)^{1/3}, a = 0, b = 2$

۶. $f(x) = (3 - x)^{4/3}, a = 2, b = 4$

۷. $f(x) = \sin 2x, a = \pi, b = 3\pi/2$

۸. $f(x) = \sec x, a = -1.5, b = 1.5$

۹. تابع $f(x) = 1 - x^{2/3}$ بر $[-1, 1]$ پیوسته بوده و در $x = \pm 1$ مساوی 0 است. نشان دهید که نقطه‌ای مانند c در $(-1, 1)$ وجود دارد که $f'(c) = 0$. چرا این قضیهٔ رل را نقض نمی‌کند؟ تابع را رسم کنید.

۱۰. قضیهٔ رل را برای تابع $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ تحقیق کنید. به عبارت دیگر، نشان دهید که f' در نقطه‌ای از بازهٔ $(1, 2)$ و در نقطه‌ای از بازهٔ $(2, 3)$ مساوی 0 است.

با استفاده از قضیهٔ رل نشان دهید که

۱۱. معادلهٔ $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ریشهٔ حقیقی منحصر به فرد دارد.

۱۲. معادلهٔ $x^8 + x - 1 = 0$ فقط دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۳. معادلهٔ $x^5 - 5x + 1 = 0$ فقط سه ریشهٔ حقیقی دارد.

نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین (۷) را درصورتی بیابید که

۱۴. $f(x) = x^2 + x + 1, a = 1, b = 2$

۱۵. $f(x) = x^3 - 1, a = 0, b = 3$

۱۶. $f(x) = \dfrac{1}{2-x}, \ a = 1, b = 0$

۱۷. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, \ a = 2, b = 3$

۱۸. $f(x) = \sqrt{x}, a = 9, b = 25$

۱۹. $f(x) = x^{1/3}, a = 8, b = 0$

۲۰. $f(x) = x^{4/3}, a = -8, b = -1$

۲۱. $f(x) = \sin x, a = 0, b = \pi/2$

۲۲. تعبیر " سینماتیک " زیرا از قضیهٔ مقدار میانگین را توجیه کنید : هرگاه‌ترنی‌فاصلهٔ بین دو ایستگاه را باسرعت‌متوسط v_{av} طی کند ،آنگاه لحظه‌ای وجود دارد که سرعت لحظه‌ای آن درست مساوی v_{av} است .

۲۳. نشان دهیدکه‌نامساوی $|\sin a - \sin b| \le |a - b|$ به‌ازای‌اعداد دلخواه a و b برقراراست .

۲۴. نشان دهید که نامساوی $|\tan a - \tan b| \le 4|a - b|$ بــه ازای اعداد دلخواه a و b در بازهٔ $[-\pi/3, \pi/3]$ برقرار است .

۲۵. تابع f با بی‌نهایت مقدار مختلف را طوری مثال بزنید که مشتقش بر قلمرو f متحد صفر باشد .

۲۶. اشتباه " برهان " زیر از قضیهٔ مقدار میانگین کشی را بیابید : با دو بار بــه کــار بردن قضیهٔ مقدار میانگین معمولی ، داریم

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \qquad g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

لذا ، از تقسیم معادلهٔ اول بر معادلهٔ دوم به دست می‌آوریم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین کشی (۹) را درصورتی بیابید که

۲۷. $f(x) = x^3, g(x) = x^2 + 2x, a = -1, b = 2$

۲۸. $f(x) = x^2, g(x) = 1/x, a = -2, b = -1$

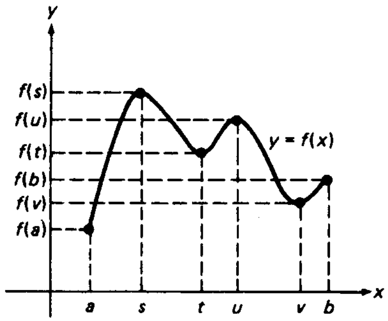
۲۹. $f(x) = 1/x, g(x) = 1/x^2, a = 1, b = 2$

۳۰. $f(x) = \sin x, g(x) = \tan x, a = 0, b = \pi/4$

۳.۲ اکسترممهای موضعی و توابع یکنوا

شکل ۷ منحنیی‌را نشان‌می‌دهد که نمودار تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ است . واضح

است که f بر $[a, b]$ ماکزیممی مساوی $f(s)$ در نقطهٔ اوج منحنی ، یعنی $(s, f(s))$ ، ومینیممی بر $[a, b]$ برابر $f(a)$ در نقطهٔ حضیض منحنی ، یعنی $(a, f(a))$ که در اینجا یک نقطهٔ انتهایی منحنی است ، می‌گیرد . اما نکته‌ای در رفتار منحنی در نقاط $(t, f(t))$ ، $(u, f(u))$ و $(v, f(v))$ نیز وجود دارد . در واقع ، گرچه $(u, f(u))$ از $(s, f(s))$ بالاتر نیست ، از تمام نقاط " مجاور " منحنی بالاتر است ، به‌علاوه ، گرچه $(t, f(t))$ از $(a, f(a))$ پایین‌تر نیست ، از تمام نقاط مجاور منحنی پایین‌تر است ، و همین امر در مورد نقطهٔ $(v, f(v))$ صادق است.



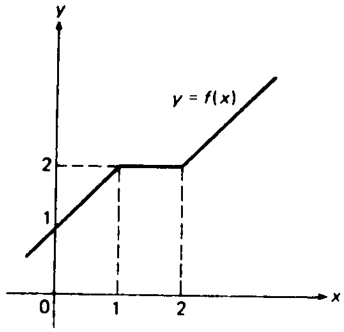
شکل ۷

لذا ، منحنی شکل ۷ شش نقطهٔ خاص دارد ، " نقاط اوج " $(s, f(s))$ و $(u, f(u))$ ، " نقاط حضیض " $(t, f(t))$ و $(v, f(v))$ ، و نقاط انتهایی $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$. (نقاط انتهایی همواره به توجه خاص نیاز دارند .)

تعریف اکسترممهای موضعی . حال این مفاهیم کیفی را دقیقتر می‌سازیم . به ازای تابع f و عدد c که می‌توان آن را نقطه‌ای بر خط حقیقی گرفت ، فرض می‌کنیم به ازای هر x به قدر کافی نزدیک c ، یعنی به ازای هر x در همسایگی از c ، $f(c) \geq f(x)$ (فرض است که f در هر نقطهٔ این همسایگی تعریف شده‌است) . در این صورت گوییم f در c ***ماکزیمم موضعی*** دارد و مساوی عدد $f(c)$ است . ماکزیمم موضعی را ***اکید*** نامیم اگر به ازای تمام x های به‌قدر کافی نزدیک c ولی مخالف آن ، یعنی به ازای جمیع x های واقع در همسایگی **سفته‌ای** از c $f(c) > f(x)$ (با $>$ به جای $\geq$) . به همین نحو ، هرگاه به ازای جمیع x های واقع در یک همسایگی c ، $f(c) \leq f(x)$ ، آنگاه گوییم f در c ***مینیمم موضعی*** دارد و مساوی عدد $f(c)$ است ، و مینیمم موضعی را ***اکید*** نامیم اگر به‌ازای جمیع x های واقع در همسایگی سفته‌ای از c ، $f(c) < f(x)$ (با $<$ به جای $\leq$) . واژهٔ ***اکسترمم موضعی*** یعنی ماکزیمم یا مینیمم موضعی . در بعضی کتب اکسترممهای موضعی را اکسترممهای " نسبی " نامیده‌اند .

مثال ۱. تابع f با نمودار شکل ۷ دارای چهار اکسترمم موضعی است، ماکزیممهای موضعی اکید $f(s)$ و $f(u)$ در نقاط s و u، و مینیممهای موضعی اکید $f(t)$ و $f(v)$ در نقاط t و v. این تابع در نقاط انتهایی a و b بازهٔ تعریف $I = [a, b]$ اکسترمم موضعی *ندارد*، صرفاً به‌این دلیل که تعریف اکسترمم موضعی مستلزم مقایسهٔ مقدار f در نقطهٔ c با مقادیر f **برطرفین** c است و یک چنین مقایسه فقط در یک نقطهٔ درونی مانند c از I امکان‌پذیر است.

مثال ۲. تابع قطعه‌قطعه‌خطی f با نمودار شکل ۸ دارای ماکزیمم موضعی در $x = 1$ و مینیمم موضعی در $x = 2$ بوده، و در هر نقطهٔ بازهٔ $(1, 2)$ که بر آن f ثابت است ماکزیمم و مینیمم موضعی دارد. تمام این اکسترممهای موضعی مساوی 2 اند و هیچیک اکید نمی‌باشند.



شکل ۸

اکسترممهای موضعی در برابر اکسترممهای مطلق. مطمئن شوید که تمایز بین اکسترممهای موضعی که هم‌اکنون تعریف شد و اکسترممهای یک تابع بر یک *بازه* که در صفحهٔ ۱۵۶ تعریف شده را فهمیده‌اید. از حالا به بعد هروقت امکان ابهام برود، مفهوم دوم اکسترمم **مطلق** نامیده خواهد شد. مثلاً، مینیمم مطلق تابع f بر بازهٔ I، که در نقطهٔ c در I گرفته شده، عدد $m = f(c)$ است که باید از مقادیر f در *تمام* نقاط I نابیشتر باشد، و برای آنکه m مینیمم موضعی باشد کافی است از مقادیر f در تمام نقاط یک همسایگی از c، مهم نیست چقدر کوچک، نابیشتر باشد.

هرگاه f تابعی با قلمرو بازهٔ I باشد، آنگاه اکسترمم مطلق f که در یک نقطهٔ **درونی** گرفته شده خود بخود یک اکسترمم موضعی f است. (ما قبلاً دیدیم که f نمی‌تواند در یک نقطهٔ انتهایی I اکسترمم موضعی داشته باشد.) مثلاً، فرض کنیم f بر I در نقطهٔ درونی c ماکزیمم مطلق داشته باشد. در این صورت، به ازای هر x در I، $f(c) \geq f(x)$؛ ولذا، مسلماً به ازای هر x در هر همسایگی c آنقدر کوچک که مشمول I است، $f(c) \geq f(x)$

بنابر قضیهٔ مقدار اکستریم (ر.ک. صفحهٔ۱۵۹) ، تابع پیوستهٔ f بر بازهٔ بستهٔ کراندار اکسترممهای مطلق دارد. حال قاعدهٔ مفیدی برای یافتن *این* اکسترممها عرضه می‌کنیم.

قضیهٔ ۵ (آزمون برای اکسترممهای مطلق). *فرض کنیم f بر بازهٔ بسته و کراندار $[a, b]$ پیوسته بوده و f در نقاط $c_1, c_2, \ldots, c_n$ از بازهٔ باز (a, b) و فقط در این نقاط اکسترممهای موضعی داشته باشد. در این صورت، ماکزیمم اعداد*

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n), f(b)$$

ماکزیمم مطلق f بر $[a, b]$ ، و مینیمم این اعداد مینیمم مطلق f بر $[a, b]$ می‌باشد.

برهان. اگر اکسترمم مطلق f در یک نقطهٔ درونی $[a, b]$ رخ دهد، آن را می‌توان بین اکسترممهای موضعی $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$ یافت. اما ممکن است در یک نقطهٔ انتهایی $[a, b]$ رخ دهد؛ و درنتیجه، این n مقدار f باید با $f(a)$ و $f(b)$ مقایسه شوند.

مثال ۳. همانطور که قبلاً" در مثال ۱ گفته شد، تابع f با نمودار شکل ۷ در نقاط s ، t ، u و v اکسترمم موضعی دارد. از شکل معلوم می‌شود که ماکزیمم اعداد

$$f(a), f(s), f(t), f(u), f(v), f(b)$$

مساوی $f(s)$ و مینیمم آنها $f(a)$ است. از اینرو، ماکزیمم (مطلق) f بر $[a, b]$ مساوی $M = f(s)$ است، که در نقطهٔ درونی s گرفته می‌شود، و مینیمم (مطلق) f بر $[a, b]$ مساوی $m = f(a)$ است، که در نقطهٔ انتهایی a گرفته شده است. چون می‌گوییم " بر $[a, b]$ "، واژهٔ *مطلق* در اینجا زاید است؛ و لذا، در پرانتز گذارده شده است.

حال به روشی اصولی برای یافتن اکسترممهای موضعی تابع داده شدهٔ f نیاز داریم. فرض می‌کنیم f بر *بازهٔ* I پیوسته و مشتقپذیر باشد احتمالاً " به استثنای چند نقطه که f در *آنها* پیوسته ولی مشتق *ناپذیر* است. هرگاه f در c اکسترمم موضعی داشته باشد، آنگاه هم اکنون نشان می‌دهیم که این در رفتار مشتق f در c منعکس شده است.

قضیهٔ ۶ (شرط لازم برای اکسترمم موضعی). *هرگاه f در نقطهٔ c اکسترمم موضعی داشته باشد، آنگاه $f'(c)$ یا وجود ندارد یا موجود و مساوی صفر است.*

برهان. برای مشخص بودن وضع، فرض کنیم f در c مینیمم موضعی داشته باشد؛ درنتیجه

به ازای هر x در همسایگی c ، $f(c) \leq f(x)$ ؛ یعنی ، به ازای $\delta > 0$ ای ،

$$f(x) - f(c) \geq 0 \qquad (|x - c| < \delta) \tag{۱}$$

یا $f'(c)$ موجود نیست ، که در این صورت چیزی برای اثبات وجود ندارد ، یا

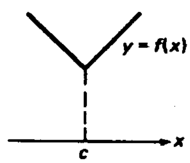
$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{۲}$$

موجود است . اما ، به‌خاطر (۱) ، خارج‌قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

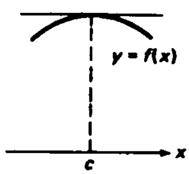
نامنفی است اگر $c < x < c + \delta$ و نامثبت است اگر $c - \delta < x < c$. لذا ، بنا بر برهان قضیهٔ رل (ر.ک. تبصرهٔ صفحهٔ ۲۵۶) حد (۲) ، یعنی $f'(c)$ ، نمی‌تواند منفی یا مثبت باشد . تنها حالتی که مانده $f'(c) = 0$ است . حالتی که f در c ماکزیمم موضعی دارد به همین نحو سامان خواهد یافت .

قضیهٔ ۶ در تعبیر هندسی می‌گوید هرگاه تابع f در نقطهٔ c اکسترمم موضعی داشته باشد ، آنگاه ، در صورت عدم وجود $f'(c)$ ، نمودار f در نقطهٔ $P = (c, f(c))$ مماس‌ندارد یا ، در صورت $f'(c) = 0$ ، نمودار f در P مماس *افقی* دارد . این دو حالت در شکلهای ۹ (آ) و ۹ (ب) نموده شده‌اند ، که دو تابع هر یک با اکسترمم موضعی (اکید) در c را نشان می‌دهند .



مینیمم موضعی :
$f'(c)$ وجود ندارد .

(آ)



ماکزیمم موضعی :
$f'(c) = 0$

(ب)

شکل ۹

نقاط بحرانی . نقطهٔ c در قلمرو تابع f یک **نقطهٔ بحرانی** f نام دارد اگر $f'(c)$ موجود نباشد یا مساوی‌صفر باشد . بنابرقضیه ۶ ،هرگاه f در c اکسترمم موضعی داشته باشد ، آنگاه c یک نقطهٔ بحرانی f است . از آن‌سو ، و این برای درک نظریهٔ اکسترممها است ، اگر c یک نقطهٔ بحرانی f باشد ، تابع f ممکن است در c اکسترمم موضعی **نداشته** باشد . این امر در شکلهای ۱۰ (آ) و ۱۰ (ب) نموده شده است ، که دو تابع را نشان می‌دهند که c

نقطهٔ بحرانی آنها بوده ولی هیچیک در c اکسترمم موضعی ندارد .

بدون اکسترمم : $f'(c)$ وجود ندارد

(آ)

بدون اکسترمم : $f'(c) = 0$

(ب)

شکل ۱۰

آزمون یکنوایی . لذا ، آنچه واقعاً" می‌خواهیم شرایطی بر f است که آن را *واجد* داشتن اکسترمم موضعی درنقطهٔ c نماید . به زبان منطق ،اینها شرایط *کافی* برای اکسترمم موضعی، در مقابل شرط *لازم* داده شده در قضیهٔ ۶ ، می‌باشند . این شرایط به شکل دو آزمون برای اکسترمم موضعی عرضه می‌شوند (قضایای ۸ و ۹ زیر) . به عنوان ابزاری برای اثبات این آزمونها ، ابتدا قضیهٔ زیر را ، که در جای خود اهمیت بسیار دارد ، ثابت می‌کنیم که شرایط یکنوایی یک تابع را به ما می‌دهد . گوییم تابع f بر بازهٔ I **یکنواست** اگر f بر I صعودی یا نزولی باشد ، و **یکنوایی** خاصیت یکنوا بودن می‌باشد .

قضیهٔ ۷ (آزمون یکنوایی) . *فرض کنیم f بر بازهٔ I پیوسته بوده ، و f' در هر نقطهٔ درونی I موجود و دارای یک‌علامت باشد . در این صورت ، (یک) f بر I صعودی است اگر f' در هر نقطهٔ درونی I مثبت باشد؛ (دو) f بر I نزولی است اگر f' در هر نقطهٔ درونی I منفی باشد .*

برهان . فرض کنیم f' در هر نقطهٔ درونی I مثبت بوده ، و a و b دو نقطهٔ دلخواه‌از I باشند به‌طوری که $a < b$. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین ، به ازای نقطه‌ای مانند c بین a و b

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

واضح است که c یک نقطهٔ درونی I است؛ درنتیجه ، $f'(c) > 0$. لذا ، $f'(c)(b - a)$ که حاصلضرب دو عدد مثبت‌است مثبت می‌باشد . اما در این صورت $f(b) - f(a)$ نیز مثبت است . به عبارت‌دیگر ، به ازای هر جفت نقطه مانند a و b در I که $a < b$ ، $f(a) < f(b)$. لذا ، f بر I صعودی است ، و قسمت (یک) ثابت می‌شود . برهان (دو) اساساً "همین‌است

و به عنوان تمرین گذارده می‌شود .

نتایج قضیهٔ ۷ نسبت به رفتار f' در نقاط انتهایی I (درصورتی که I شامل یک یا هر دو نقطهٔ انتهایی خود باشد) بی‌اعتنایند ، و در واقع ممکن است f' در یک نقطهٔ انتهایی I مقدار 0 را بگیرد ، یا حتی موجود نباشد . همچنین ، اگر I باز باشد ،هر نقطهٔ I یک نقطهٔ درونی‌است ،و کلمهٔ " درونی " را می‌توان در سه‌جای صورت قضیه‌حذف‌کرد .

مثال ۴ . در مثال ۱ ، صفحهٔ ۱۵۵، حکم شد که تابع

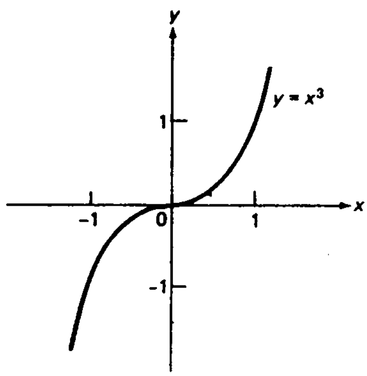
$$f(x) = 2x^5 + 2x^2 + x - 3$$

بر $(0, 1)$ صعودی است . حال با استفاده از آزمون یکنوایی ، می‌بینیم که این فوراً " از مثبت بودن

$$f'(x) = 10x^4 + 4x + 1$$

بر $(0, 1)$ نتیجه می‌شود .

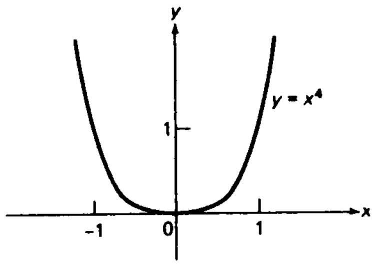
مثال ۵ . به ازای تابع $f(x) = x^3$ داریم $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ، که در آن تساوی فقط وقتی برقرار است که $x = 0$. لذا ، f' در هر نقطهٔ درونی بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[0, \infty)$ مثبت است. پس از آزمون یکنوایی نتیجه می‌شود که f بر هر دو بازه صعودی است؛ و درنتیجه ، همانطور که از نمودار f در شکل ۱۱ واضح است ، f بر تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ صعودی است .



شکل ۱۱

مثال ۶ . به ازای تابع $f(x) = x^4$ داریم $f'(x) = 4x^3$ ؛ درنتیجه ، $f'(x) > 0$ اگر $x > 0$ و

$f'(x)<0$ اگر $x<0$ ، حال آنکه $f'(0)=0$. لذا ، f' در هر نقطهٔ درونی بازهٔ $[0,\infty)$ مثبت و در هر نقطهٔ درونی بازهٔ $(-\infty,0]$ منفی است. این بار آزمون یکنوایی به ما می‌گوید که f بر $[0,\infty)$ صعودی و بر $(-\infty,0]$ نزولی است، و این از نمودار f در شکل ۱۲ واضح می‌باشد.



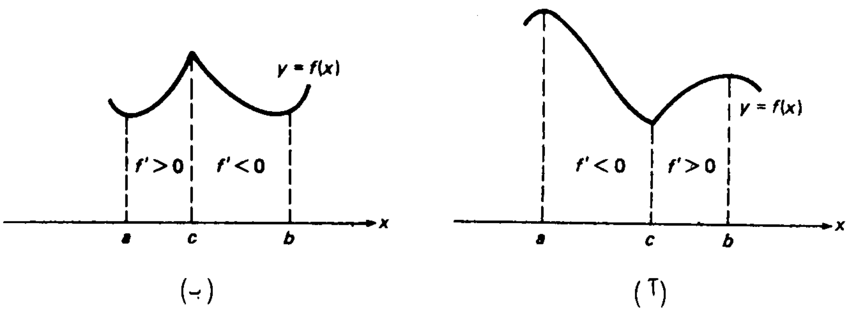
شکل ۱۲

آزمونهای مشتق اول و دوم. حال در وضعی هستیم که می‌توانیم آزمونهای اکسترمم موضعی که قول داده بودیم را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۸ (آزمون مشتق اول برای اکسترمم موضعی). *فرض کنیم c یک نقطهٔ بحرانی f بوده، و f' در c تغییر علامت دهد؛ یعنی، f' بر بازهٔ (a,c) چپ c یک علامت و بر بازهٔ (c,b) راست c علامتی دیگر داشته باشد. در این صورت، f در c اکسترمم موضعی اکید خواهد داشت. اکسترمم مینیمم است اگر f' از منها به به‌علاوه تغییر علامت دهد، و ماکزیمم است اگر f از به‌علاوه به منها تغییر علامت دهد.*

برهان. چیزی در باب مشتقپذیری f در خود نقطهٔ c گفته نشده است، و $f'(c)$ ممکن است (با آنکه همواره f در c پیوسته گرفته می‌شود) موجود نباشد. فرض کنیم f' در c از منها به به‌علاوه تغییر علامت یابد. در این صورت، f' بر بازه‌ای چون (a,c) منفی و بر بازه‌ای چون (c,b) مثبت است. از آزمون یکنوایی معلوم می‌شود که f بر $(a,c]$ نزولی و بر $[c,b)$ صعودی است، که در اینجا می‌توان نقطهٔ انتهایی c را در هر دو بازه گنجانید. پس در این صورت f در c مینیمم موضعی اکید دارد، زیرا به ازای هر نقطه در همسایگی سفتهٔ c ، $f(c)<f(x)$ [ر.ک. شکل ۱۳ (آ)]. به همین نحو، هرگاه f' در c از به‌علاوه به منها تغییر علامت دهد، آنگاه f بر $(a,c]$ صعودی و بر $[c,b)$ نزولی است؛ درنتیجه، f در c ماکزیمم موضعی اکید دارد [ر.ک. شکل ۱۳ (ب)]. در هر دو شکل در نقطهٔ $(c,f(c))$ گوشه

کشیده‌ایم تا مجددا" بر امکان عدم وجود $f'(c)$ تأکید کرده باشیم .



شکل ۱۳

قضیهٔ ۹ (آزمون مشتق دوم برای یک اکسترمم موضعی) .*فرض کنیم c یک نقطهٔ بحرانی f بوده ، و $f''(c)$ موجود و ناصفر باشد . در این صورت ، f در c اکسترمم موضعی اکید دارد . اکسترمم مینیمم است اگر $f''(c) > 0$ و ماکزیمم است اگر $f''(c) < 0$.*

برهان . طبق تعریف ،

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}, \tag{۳}$$

درنتیجه ، $f''(c)$ فقط وقتی می‌تواند موجود باشد که مشتق اول ، یعنی $f'(x)$ ، در همسایگی c وجود داشته باشد . بخصوص ، $f'(c)$ موجود و مساوی 0 است ، زیرا c یک نقطهٔ بحرانی است . لذا ، (۳) به

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}$$

تحویل می‌گردد . اگر $f''(c) > 0$ ، همسایگی سفته‌ای‌از c وجوددارد که درآن $f'(x)/(x - c)$ مثبت است ، و در این همسایگی سفته علامت $f'(x)$ همان علامت $x - c$ می‌باشد . لذا ، f' در c از منها به به‌علاوه تغییر علامت می‌دهد ؛ درنتیجه ، بنا برآزمون مشتق اول (قضیهٔ ۸) ، f در c مینیمم موضعی اکید دارد . حالت $f''(c) < 0$ به‌همین نحو بحث شده ، وبه ماکزیمم موضعی اکید منجر می‌شود .

اگر در نقطهٔ بحرانی c ، $f''(c) = 0$ ، آزمون مشتق دوم بی‌حاصل است . در واقع ، فرض کنیم

$$f(x) = x^3, \qquad g(x) = x^4.$$

در این صورت، با محاسبهٔ مشتقات دوم، به دست می‌آوریم

$$f''(x) = 6x, \qquad g''(x) = 12x^2,$$

درنتیجه،

$$f''(0) = 0, \qquad g''(0) = 0.$$

اما f در $x = 0$ اکسترمم ندارد، زیرا، همانطورکه در مثال ۵ نشان دادیم، f بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است، درحالی‌که g در $x = 0$ مینیمم موضعی (و مطلق) اکید دارد، زیرا $g(0) = 0$ و، به ازای هر $x \neq 0$، $g(x) = x^4 > 0$. لذا، این امر که مشتق دوم یک تابع در نقطهٔ بحرانی c مساوی صفر است به ما اجازهٔ تصمیم‌گیری در اینکه در c اکسترمم موضعی دارد نمی‌دهد.

مثال ۷. اکسترممهای موضعی تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \tag{۴}$$

را بیابید.

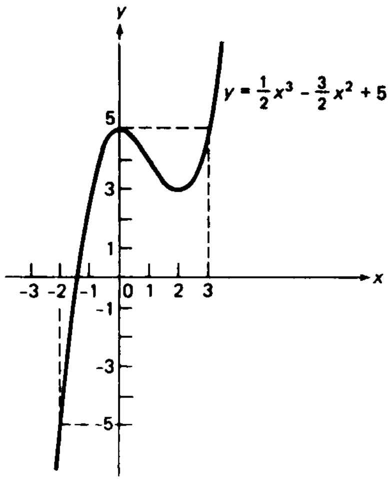
حل. در اینجا f به ازای هر x مشتقپذیر است، و تنها نقاط بحرانی f نقاطی هستند که در آنها

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x = \frac{3}{2}x(x-2) \tag{۴'}$$

مساوی صفر است؛ یعنی، نقاط $x = 0$ و $x = 2$. مشتقگیری دیگر نتیجه می‌دهد $f''(x) = 3x - 3$ درنتیجه، $f''(0) = -3 < 0$ و $f''(2) = 3 > 0$. لذا، طبق آزمون مشتق دوم، f در $x = 0$ ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی $f(0) = 5$، و مینیمم موضعی اکیدی در $x = 2$ برابر $f(2) = 3$ دارد. آزمون مشتق اول به همین نتیجه ختم می‌شود، زیرا (۴') نشان می‌دهد که f' در $x = 0$ از به علاوه به منها و در $x = 2$ از منها به به‌علاوه تغییر علامت می‌دهد. همچنین، بنابر آزمون یکنوایی، f بر بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[2, \infty)$ صعودی و بر بازهٔ $[0, 2]$ نزولی می‌باشد. حال می‌توان با استفاده از این اطلاعات، و به کمک ماشین حساب، نمودار تابع f را رسم کرد (ر.ک. شکل ۱۴).

مثال ۸. اکسترممهای مطلق تابع (۴) بر بازهٔ $I = [-2, 3]$ را بیابید.

حل. بنابر آزمون اکسترممهای مطلق (قضیهٔ ۵)، کافی است اعداد



شکل ۱۴

$$f(-2) = -5, \qquad f(0) = 5, \qquad f(2) = 3, \qquad f(3) = 5,$$

یعنی اکسترممهای‌موضعی f در نقاط درونی I و مقادیر f در نقاط انتهایی I ، را باهم مقایسه کنیم . بزرگترین این اعداد ، یعنی 5 ، ماکزیمم مطلق f بر I است که‌در نقطهٔ درونی $x = 0$ و نقطهٔ انتهایی‌راست $x = 3$ گرفته می‌شود ، حال آنکه کوچکترین آنها ، یعنی -5 ، مینیمم مطلق است که‌در نقطهٔ انتهایی چپ $x = -2$ گرفته می‌شود (شکل ۱۴ را مجدداً" بررسی کنید) .

مثال ۹ . اکسترممهای موضعی تابع $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ را بیابید .

حل . مجدداً" ، f به ازای هر x مشتقپذیر است ، و تنها نقاط بحرانی f نقاطی هستند که در آنها

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x \\ &= 4(\sin^2 x - \cos^2 x)\sin x\cos x = -4\cos 2x\sin x\cos x \end{aligned}$$

مساوی صفر است . اینها عبارتند از $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ که درآنها $\sin x = 0$ ، و نقاط $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ که در آنها $\cos x = 0$ ، و نقاط $x = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \ldots$ که در آنها $\cos 2x = 0$. مشتقگیری دیگر نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x + 12\cos^2 x\sin^2 x - 4\cos^4 x \\ &= 24\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x - 4\cos^4 x, \end{aligned}$$

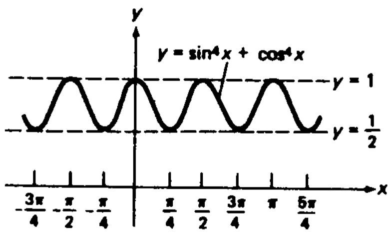
لذا،

$$f''(x) = 24(0) - 4(0) - 4(1) = -4 \quad \text{،} \quad \text{اگر } x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$
$$f''(x) = 24(0) - 4(1) - 4(0) = -4 \quad \text{،} \quad \text{اگر } x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$$

و

$$f''(x) = 24\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \quad \text{،} \quad \text{اگر } x = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \ldots$$

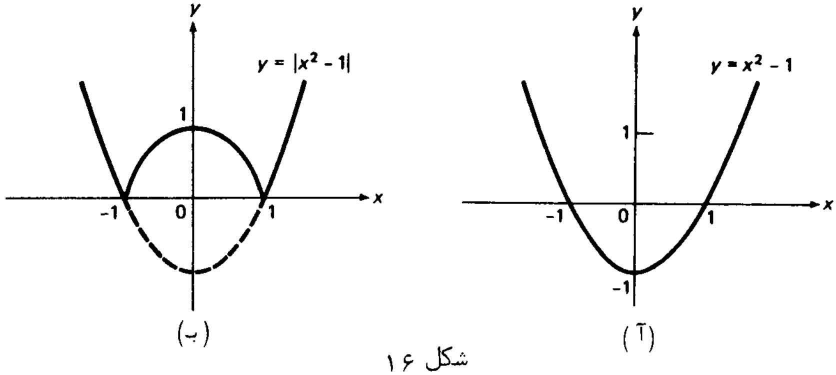
پس، طبق آزمون مشتق دوم، f در نقاط $x = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm 3\pi/2, \pm 2\pi, \ldots$ ماکزیمم موضعی‌اکید ودر نقاط $x = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \ldots$ مینیمم موضعی اکید دارد. تحقیق کنید که ماکزیممها همه مساوی 1 هستند و مینیممها همه مساوی $\frac{1}{2}$. نمودار f، که بخشی از آن در شکل ۱۵ نموده شده، متناوب با دورهٔ تناوب $\pi/2$ است. توجه کنید که بی‌نهایت اکسترمم وجود دارند، و این به‌خاطر تناوب انتظارش می‌رفت.



شکل ۱۵

مثال ۱۰. اکسترممهای موضعی تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را بیابید.

حل. اگر تابع $x^2 - 1$ داخل علامت قدرمطلق را رسم کنیم، سهمی شکل ۱۶ (آ) به دست می‌آید. با قدرمطلق گرفتن از $x^2 - 1$ تابع f به دست می‌آید، و منعکس قسمتی از سهمی‌را



شکل ۱۶

موجب می‌شود که زیر محور x است [منحنی منقطع در شکل ۱۶ (ب)] . لذا، نمودار f منحنی توپر شکل ۱۶ (ب) است. این منحنی، به‌خاطر انعکاس، در نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ گوشه دارد. لذا، f در $x = 1$ و $x = -1$ مشتقپذیر است؛ و درنتیجه، در $x = 1$ و $x = -1$ نقاط بحرانی دارد. چون f به ازای هر $x \neq \pm 1$ مشتقپذیر است، نقاط بحرانی دیگر f فقط به ازای مقادیری از x رخ می‌دهند که f' مقدار 0 بگیرد. به آسانی معلوم می‌شود که این فقط در $x = 0$ رخ می‌دهد. در واقع،

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{، اگر } x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{، اگر } -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{، اگر } x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ -2x & \text{، اگر } -1 < x < 1 \end{cases}$$

درنتیجه، $f'(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$. به‌علاوه، f' در $x = 0$ از به‌علاوه به منها تغییر علامت می‌دهد، زیرا $f'(x) > 0$ اگر $-1 < x < 0$ و $f'(x) < 0$ اگر $0 < x < 1$. لذا، طبق آزمون مشتق اول، f در $x = 0$ ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی $f(0) = 1$ دارد. آزمون مشتق دوم به همین نتیجه منجر می‌شود، زیرا $f''(0) = -2$. در نقاط بحرانی دیگر $x = 1$ و $x = -1$، f مینیممهای موضعی اکیدی مساوی $f(\pm 1) = 0$ دارد و این فوراً " از اینکه $f(\pm 1) = 0$ و $f(x) > 0$ به ازای $x \neq \pm 1$ نتیجه می‌شود. به عنوان تمرین، نشان دهید که این مینیممها را می‌توان با آزمون مشتق اول نیز به‌دست‌آورد. آیا تابع f بر $(-\infty, \infty)$ اکسترمم مطلق دارد؛ و اگر چنین است، کجا؟

مسائل

با بررسی تمام نقاط بحرانی، اکسترممهای موضعی تابع داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است؟ نزولی است؟ تابع را رسم کنید.

۱. $f(x) = |x + 1| - 1$

۲. $f(x) = x^2 - 2x$ ✓

۳. $f(x) = 3x - x^3$ ✓

۴. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ ✓

۵. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ ✓

۶. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ✓

۷. $f(x) = \frac{8}{x^2 + x + 2}$

۸. $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$

۹. $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

۱۰. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

۱۱. $f(x) = \cos x + \sin x$

۱۲. $f(x) = x + \sin x$

اکسترممهای مطلق تابع داده شده بر بازهٔ ذکر شده را بیابید.

۱۳. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ بر $[-3, 10]$

۱۴. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ بر $[0, 1]$

۱۵. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ بر $[-10, 10]$

۱۶. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ بر $[0, 2]$

۱۷. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ بر $[0.01, 100]$

۱۸. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ بر $[-1, 1]$

۱۹. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ بر $[-1, 0]$

۲۰. $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ بر $[-2, 1]$

۲۱. $f(x) = 4 \sin x + 2 \cos 2x$ بر $[0, \pi]$

۲۲. $f(x) = \cos^2 x + 2 \sin^2 x$ بر $[\pi/4, 3\pi/4]$

۲۳. $f(x) = \sin x^2$ بر $[1, 2]$

۲۴. $f(x) = \sin(\sin x)$ بر $[0, 2\pi]$

۲۵. نشان دهید هرگاه $f(x)$ تابع زوجی با ماکزیمم (مینیمم) موضعی در $x = c$ باشد، آنگاه $f(x)$ در $x = -c$ نیز ماکزیمم (مینیمم) موضعی دارد. این نتیجه در کدام مسئلهٔ ۱ تا ۱۲ به کار می‌رود؟

۲۶. نشان دهید هرگاه $f(x)$ تابع فردی با ماکزیمم (مینیمم) موضعی در $x = c$ باشد، آنگاه $f(x)$ در نقطهٔ $x = -c$ مینیمم (ماکزیمم) موضعی می‌باشد. این نتیجه در کدام مسئلهٔ ۱ تا ۱۲ به کار می‌رود؟

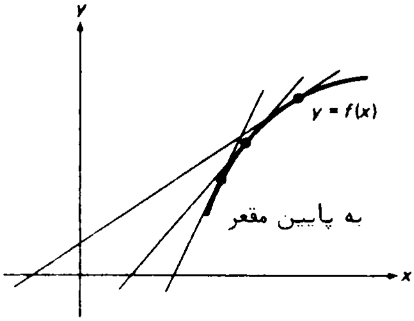
۲۷. چه مقداری از c ماکزیمم تابع $f(x) = |x^2 + c|$ بر بازهٔ $[-1, 1]$ را مینیمم می‌کند؟

۲۸. فرض کنید f بر بازهٔ I پیوسته بوده، و f در دو نقطهٔ s و t از I ماکزیمم موضعی اکید داشته باشد. نشان دهید f باید در نقطه‌ای بین s و t مینیمم موضعی (نه لزوماً" اکید) داشته باشد.

۳.۳ تقعر و نقاط عطف

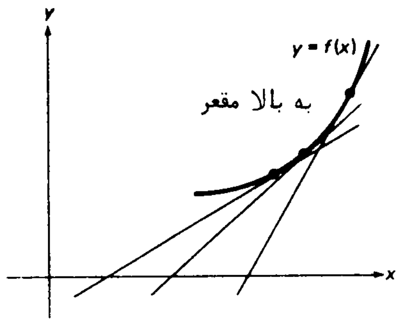
توابع مقعر. فرض کنیم تابع f بر بازهٔ I مشتقپذیر بوده، و مشتق f' بر I یکنوا باشد. گوییم f بر I به *بالا* **مقعر** است اگر f' بر I صعودی باشد، و بر I **به پایین مقعر** است اگر f' بر I نزولی باشد. مفهوم تقعر تعبیر هندسی ساده دارد. چون $f'(x)$ شیب منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ متغیر $P = (x, f(x))$ است، یعنی شیب خط مماس بر منحنی در P،

منحنی روی I به بالا خم می‌شود [ر.ک. شکل ۱۷ (آ)] اگر f' بر I صعودی باشد، و به پایین خم می‌شود [ر.ک. شکل ۱۷ (ب)] اگر f' بر I نزولی باشد. لذا، می‌توان گفت که بخشی از منحنی که روی I است " آب را نگه می‌دارد " اگر f به بالا مقعر باشد، ولی " آب را می‌ریزد " اگر f روی I به پایین مقعر باشد. همچنین، از شکلها چنین برمی‌آید که بخشی از منحنی که روی I واقع است بالای هر خط مماس خود قرار دارد اگر f بر I به بالا مقعر باشد، و پایین هر خط مماس خود قرار دارد اگر f بر I به پایین مقعر باشد، و به آسانی معلوم می‌شود که این امر صحت دارد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۵).



f' نزولی

(ب)



f' صعودی

(آ)

شکل ۱۷

با استفاده از آزمون یکنوایی (قضیهٔ ۷) ، شرایطی برای به بالا یا به پایین مقعر بودن یک تابع به دست می‌آوریم .

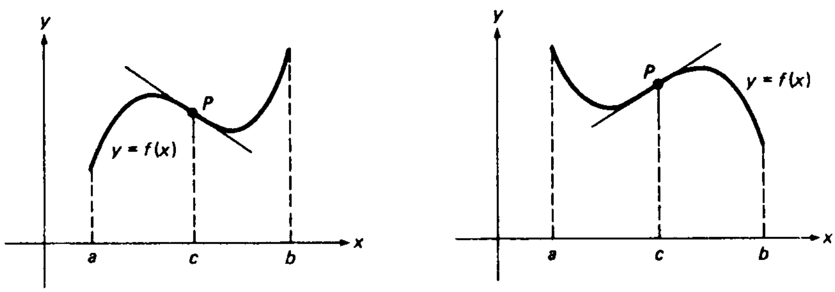
قضیهٔ ۱۰ (آزمون تقعر) . ***فرض کنیم f دارای مشتق پیوستهٔ f' بر بازهٔ I بوده، و f'' در هر نقطهٔ درونی I موجود و متحدالعلامه باشد. در این صورت، (یک) f بر I به بالا مقعر است اگر f'' در هر نقطهٔ درونی I مثبت باشد؛ (دو) f بر I به پایین مقعر است اگر f'' در هر نقطهٔ درونی I منفی باشد.***

برهان. ضمن توجه به تعریف تقعر به بالا و پایین، قضیهٔ ۷ را در مورد مشتق f' به جای خود تابع f به کار برید.

قضیهٔ ۱۰ از رفتار f'' در نقاط انتهایی I (اگر بازهٔ I شامل یکی یا هر دو نقطهٔ

انتهایی خود باشد) چیزی نمی‌گوید؛ و در واقع، f'' ممکن است مقدار 0 را گرفته یا حتی در یک نقطهٔ انتهایی I وجود نداشته باشد. همچنین، اگر I باز باشد، هر نقطه از I یک نقطهٔ درونی I است، و لغت " درونی " را می‌توان، درست مثل قضیهٔ ۷، در سه جای صورت قضیه حذف کرد.

تعریف نقطهٔ عطف. گوییم تابع f در c **نقطهٔ عطف** دارد اگر f در c تقعر خود را تغییر دهد. این یعنی بازه‌ای مانند $L = (a, c]$ در چپ c و بازه‌ای چون $R = [c, b)$ در راست c وجود دارند به‌طوری‌که f بر L به بالا مقعر است‌و بر R به‌پایین مقعر[ر.ک. شکل۱۸ (آ)]، یا بر L به پایین مقعر است و بر R به بالا مقعر [ر.ک. شکل۱۸ (ب)]. در اینجا فرض است که $f'(c)$ وجود دارد. همچنین، ممکن است $f'(c)$ موجود نباشد، مثل



هر منحنی در P نقطهٔ عطف دارد.

(آ) (ب)

شکل ۱۸

مثال ۳ زیر. دراین‌حالت L و R را بازه‌های باز (a, c) و (c, b)، با حذف نقطهٔ انتهایی c، گرفته و فرض می‌کنیم مثل همیشه f در c پیوسته باشد. لذا، f در c نقطهٔ عطف دارد اگر و فقط اگر f' بر L صعودی و بر R نزولی باشد، یا بر L نزولی و بر R صعودی باشد. فوراً " معلوم می‌شود که **هرگاه f در c نقطهٔ عطف داشته و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه f' در c اکسترمم موضعی اکید دارد**. در واقع، f' در c ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر f' بر L صعودی و بر R نزولی باشد، و در c مینیمم موضعی اکید دارد اگر f' بر L نزولی و بر R صعودی باشد.

اگر تابع f در c نقطهٔ عطف داشته باشد، گوییم منحنی $y = f(x)$ نیز یک نقطهٔ عطف در $P = (c, f(c))$ دارد. هرگاه منحنی در P مماس داشته باشد، آنگاه، همانطورکه

شکل ۱۸ (آ) و ۱۸ (ب) نشان داده‌اند، منحنی از یک طرف مماس به طرف دیگر در P می‌رود (ر.ک. شکل ۲۵). گاهی مماس در یک نقطهٔ عطف را **مماس عطفی** می‌نامند.

مثال ۱. در تابع $f(x) = x^3$، که درشکل ۱۱، صفحهٔ ۲۷۰، رسم شده، داریم $f'(x) = 3x^2$ و $f''(x) = 6x$. بنابراین، $f''(x) < 0$ اگر $x < 0$ و $f''(x) > 0$ اگر $x > 0$. لذا، طبق آزمون تقعر، f بر $[0, \infty)$ به بالا مقعر و بر $(-\infty, 0]$ به پایین مقعر بوده و در $x = 0$ یک نقطهٔ عطف دارد.

مثال ۲. در تابع $f(x) = x^4$، که درشکل ۱۲، صفحهٔ ۲۷۱ رسم شده، داریم $f'(x) = 4x^3$ و $f''(x) = 12x^2$. لذا، به ازای هر x، $f''(x) \geq 0$، که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $x = 0$. این بار تقعر به ما می‌گوید که f بر هر دو بازهٔ $(-\infty, 0]$ و $[0, \infty)$، ودر نتیجه بر تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$، به بالا مقعر است. چون تقعر f هرگز تغییرنمی‌کند، f نقطهٔ عطف ندارد.

مثال ۳. هرگاه $f(x) = x^{1/3}$، آنگاه، به‌ازای هر $x \neq 0$، $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ و $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ ولی $f'(0)$ و $f''(0)$ وجود ندارند. درواقع، حد معرف $f'(0)$، یعنی

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0^{1/3}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{-2/3}$$

وجود ندارد، زیرا $x^{-2/3}$ در هر همسایگی سفتهٔ نقطهٔ $x = 0$ بی‌کران است، و عدم وجود مشتق اول $f'(0)$ عدم وجود مشتق دوم

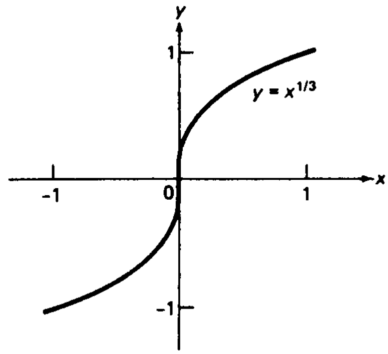
$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$$

را ایجاب می‌کند. با بررسی علامت $f''(x)$ به ازای $x \neq 0$، درمی‌یابیم که $f''(x) > 0$ اگر $x < 0$ و $f''(x) < 0$ اگر $x > 0$. در اینجا از این استفاده می‌کنیم که

$$x^{-5/3} = \frac{1}{(x^{1/3})^5} \qquad (x \neq 0)$$

همان علامت $x^{1/3}$ را دارد که این خود با x هم‌علامت است. پس از آزمون تقعر نتیجه می‌شود که f بر $(-\infty, 0)$ به بالا و بر $(0, \infty)$ به پایین مقعر است و در $x = 0$ نقطهٔ عطف دارد، و این از نمودار f در شکل ۱۹ مشهود می‌باشد. ظاهراً" نمودار در مبداء مماس **قائم** دارد، و در صفحهٔ ۳۰۸ خواهیم دید چرا این مطلب درست است. توجه کنید که نمی‌توان نقطهٔ انتهایی

$x = 0$ را در بازه‌های تقعر $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ گنجاند، زیرا $f'(0)$ وجود ندارد.

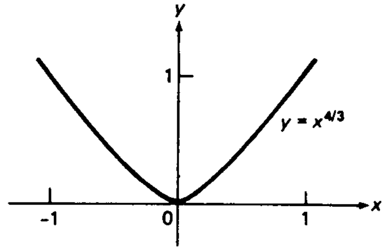


شکل ۱۹

مثال ۴. هرگاه $f(x) = x^{4/3}$، آنگاه به ازای هر x، $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$ و به ازای هر $x \neq 0$، $f''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3}$، ولی $f''(0)$ وجود ندارد، زیرا دراینجا حد

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\frac{x^{1/3} - 0^{1/3}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{3}x^{-2/3}$$

معرف $f''(0)$ در هرهمسایگی سفته‌ٔ $x = 0$ بی‌کران است. با بررسی علامت مشتق دوم در می‌یابیم که به‌ازای هر $x \neq 0$، $f''(x) > 0$. لذا، همانطور که شکل ۲۰ نشان می‌دهد، طبق آزمون تقعر، f بر هر دو بازه‌ٔ $(-\infty, 0]$ و $[0, \infty)$، و درنتیجه بر تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$، به بالا مقعر است. علی‌رغم عدم وجود $f''(0)$، چرا در اینجا نمی‌توان نقطه‌ٔ انتهایی $x = 0$ را در بازه‌های تقعر $(-\infty, 0]$ و $[0, \infty)$ گنجانید؟



شکل ۲۰

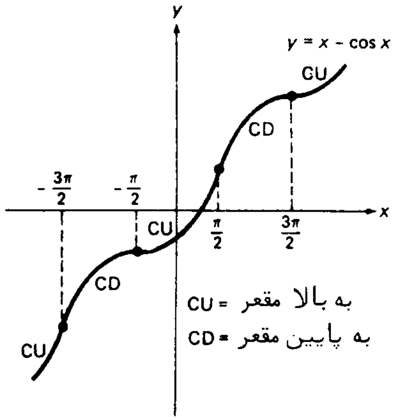
مثال ۵. هرگاه $f(x) = x - \cos x$، آنگاه به ازای هر x، $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$، که در آن $f'(x) = 0$ اگر و فقط اگر

$$x = (2n - \tfrac{1}{2})\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

لذا ، طبق آزمون یکنوایی ، f بر هر بازهٔ $[(2n-\frac{1}{2})\pi, (2n+\frac{3}{2})\pi]$ ، و درنتیجه‌برتمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ ، صعودی است ؛ بخصوص ، f دارای اکسترمم موضعی است . با بررسی مشتق دوم $f''(x) = \cos x$ ، درمی‌یابیم که f'' در نقاط

$$x = (n+\tfrac{1}{2})\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

مقدار صفر داشته و در هر یک از این نقاط تغییر علامت می‌دهد ، از به‌علاوه به منها اگر n زوج باشد و از منها به به‌علاوه اگر n فرد باشد . از آزمون تقعر نتیجه می‌شودکه f برهربازهٔ $[(n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi]$ با n زوج به بالا مقعر و بر هر چنین بازه با n فرد به‌پایین مقعر است و هر نقطهٔ (۱) یک نقطهٔ عطف می‌باشد . تمام این نکات از نمودار f که درشکل ۲۱ رسم شده مشهود است .



شکل ۲۱

آزمونهایی برای نقاط عطف . همانطور که قواعد زیر نشان می‌دهند ، نظریهٔ توابع مقعر و نقاط عطف کاملا" شبیه نظریهٔ توابع یکنوا و اکسترممهای موضعی است .

(یک) ***هرگاه f در c نقطهٔ عطف داشته باشد ، $f''(c)$ یا وجود ندارد یا موجود ومساوی‌صفر است ؛ یعنی ، c نقطهٔ بحرانی f' است . این شرط کافی برای نقطهٔ عطف*** نتیجهٔ فوری شرط لازم برای اکسترمم موضعی است (قضیهٔ ۶ ، صفحهٔ ۲۶۷) ، که دقیقا" مشابه آن می‌باشد . در واقع ، هرگاه f در c نقطهٔ عطف داشته و $f'(c)$ موجود باشد ، آنگاه f' در c اکسترمم موضعی دارد (ر.ک. صفحهٔ ۲۷۹) ؛ درنتیجه ، $f''(c)$ وجود ندارد یا $f''(c) = 0$ ، حال آنکه هرگاه $f'(c)$ موجود نباشد ، آنگاه $f''(c)$ نیز وجود ندارد ، زیرا حد

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

معرف $f''(c)$ مستلزم $f'(c)$ می‌باشد.

(دو) **هرگاه c نقطهٔ بحرانی f' بوده و f'' در c تغییر علامت دهد، آنگاه f در c نقطهٔ عطف دارد.** در اینجا وجود f'' دست‌کم در همسایگی سفته‌ای از c فرض است. **آزمون مشتق دوم برای نقطهٔ عطف** مشابه دقیق آزمون مشتق اول برای اکسترمم موضعی است (قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۲۷۱)، و فوراً از آزمون تقعر نتیجه می‌شود. در واقع، ما قبلاً از این آزمون مشتق دوم درحل مثالهای ۱، ۳، و ۵ به‌طور تلویحی استفاده کرده‌ایم.

(سه) **هرگاه $f''(c) = 0$ و $f'''(c)$ موجود و ناصفر باشد، آنگاه f در c نقطهٔ عطف دارد.** این **آزمون مشتق سوم برای نقطهٔ عطف** دقیقاً شبیه آزمون مشتق دوم برای اکسترمم موضعی (قضیهٔ ۹، صفحه ۲۷۲) بوده و اساساً به همان نحو ثابت می‌شود، به صورت زیر.

اختیاری. چون مشتق سوم

$$f'''(c) = \lim_{x\to c}\frac{f''(x) - f''(c)}{x - c} = \lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{x - c}$$

موجود است، $f''(x)$ در همسایگی c باید وجود داشته باشد. اگر $f'''(c) > 0$، همسایگی سفته‌ای از c وجود دارد که در آن $f''(x)$ با $x - c$ همعلامت است، ولی اگر $f'''(c) < 0$، همسایگی سفته‌ای از c وجوددارد که در آن $f''(x)$ با $x - c$ مختلف‌العلامه می‌باشد. درهر حالت f'' در c تغییر علامت‌می‌دهد؛ و لذا، طبق آزمون مشتق‌دوم، f در c نقطهٔ عطف دارد.

باید تأکید کنیم که فقط نقاط بحرانی f' نامزد نقاط بحرانی f اند، همانطور که فقط نقاط بحرانی تابع f نامزد اکسترمم موضعی f می‌باشند، و ممکن است f در یک نقطهٔ بحرانی f' نقطهٔ عطف نداشته باشد.

مثال ۶. در مثال ۱، $f''(x) = 6x$ صفر است اگر و فقط اگر $x = 0$. لذا، طبق قاعدهٔ (یک)، $x = 0$ تنها نامزد برای نقطهٔ عطف بودن f می‌باشد. چون $f'''(x) = 6 \neq 0$، از آزمون مشتق سوم (سه) نتیجه می‌شود که $x = 0$ یک نقطهٔ عطف f است، واین قبلاً با استدلالی معادل آزمون مشتق دوم (دو) نشان داده شده است.

مثال ۷. در مثال ۳ مشتق دوم f جز در $x = 0$، که وجود ندارد، ناصفر است. لذا، طبق قاعدهٔ (یک)، $x = 0$ تنها نامزد نقطهٔ عطف f می‌باشد. نقطهٔ عطف f بودن $x = 0$

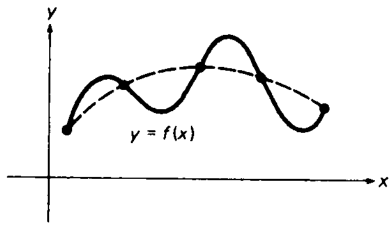
نتیجه‌ای است از آزمون مشتق دوم ، زیرا همانطور که قبلا" گفتیم ، f'' در $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد .

مثال ۸ . در مثال ۵ ، $f''(x) = \cos x$ در نقاط $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ (n عدد صحیح دلخواهی است) صفر و در سایر نقاط ناصفر است . از اینرو ، باز طبق قاعدهٔ (یک) ، این نقاط تنها نامزدهای نقاط عطف f اند ، و در واقع آزمون مشتق سوم نشان می‌دهد که واقعا" نقاط عطف‌اند زیرا ، به ازای هر عدد صحیح n ،

$$f'''((n + \tfrac{1}{2})\pi) = -\sin((n + \tfrac{1}{2})\pi) = (-1)^{n+1} \neq 0$$

البته ، ما قبلا" با استدلالی که در آن از آزمون مشتق دوم مکرر استفاده می‌شد به این نتیجه رسیده‌ایم .

رسم منحنی . تا بحال باید روشن شده باشد که اطلاعات در باب چند مشتق اول تابع f ارزش زیادی در رسم نمودار f ، یعنی در رسم منحنی $y = f(x)$ ، دارد . مسلم است‌که‌هیچ ایدهٔ روشنی از رفتار یک تابع بدون (دست کم) تعیین تمام نقاط اکسترمم وعطف حاصل نمی‌شود . شکل ۲۲ نشان می‌دهد که اگر بخواهیم نمودار f را بدون این کار رسم کنیم ،چه



خطر " اتصال نقاط به یکدیگر "

شکل ۲۲

مشکلی پیش می‌آید . منحنی توپر نمودار واقعی f است ،و منحنی منقطع نتیجهٔ گمراه‌کنندهٔ رسم یک منحنی هموار مار بر نقاط " بد انتخاب شده "ای از نمودار f می‌باشد .

در جدول زیر تمام تکنیکهای رسم منحنی که اینک در اختیار ماست ذکر شده‌اند . درایهٔ اول در هر سطر خاصیتی‌است‌از تابع پیوستهٔ f یا مشتقاتش ، و درایهٔ دوم نتیجه‌ای از این خاصیت می‌باشد .

هرگاه:	آنگاه:
f در c اکسترمم موضعی داشته باشد	f در c نقطهٔ بحرانی دارد؛ یعنی، $f'(c)$ وجود ندارد یا $f'(c)=0$ (**شرط لازم برای اکسترمم موضعی**)
f بر بازهٔ I پیوسته و f' در هر نقطهٔ درونی I مثبت (منفی) باشد	f بر I صعودی (نزولی) است (**آزمون یکنوایی**)
f در c نقطهٔ بحرانی داشته و f' در c از منها به بعلاوه تغییر علامت دهد یا $f''(c) > 0$	f در c مینیمم موضعی اکید دارد (آزمونهای مشتق اول و دوم برای **اکسترمم موضعی**)
f در c نقطهٔ بحرانی داشته و f' در c از بعلاوه به منها تغییر علامت دهد یا $f''(c) < 0$	f در c ماکزیمم موضعی اکید دارد (آزمونهای مشتق اول و دوم برای **اکسترمم موضعی**)
f' بر بازهٔ I صعودی (نزولی) باشد	f بر I به بالا (پایین) مقعر است (**تعریف**)
f' بر بازهٔ I پیوسته بوده و f'' در هر نقطهٔ درونی مثبت (منفی) باشد	f بر I به بالا (پایین) مقعر است (**آزمون تقعر**)
f تقعر خود را در c تغییر دهد	f در c نقطهٔ عطف دارد (**تعریف**)
f در c نقطهٔ عطف داشته باشد	f' در c نقطهٔ بحرانی دارد؛ یعنی، $f''(c)$ وجود ندارد یا $f''(c)=0$ (**شرط لازم برای نقطهٔ عطف در c**)
f' در c نقطهٔ بحرانی داشته، و f'' در c تغییر علامت دهد یا $f'''(c) \neq 0$	f در c نقطهٔ عطف دارد (**آزمونهای مشتق دوم و سوم برای نقطهٔ عطف**)

در رسم منحنی $y = f(x)$ تقارنهای ممکن را جستجو کنید (ممکن است تقارنی درکار نباشد). اگر f تابع زوجی باشد، منحنی نسبت به محور y متقارن است، حال آنکه اگر f فرد باشد، منحنی نسبت به مبداء متقارن است، ولی همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، حالات دیگری نیز وجود دارند. همچنین، سعی کنید **قطعهای** x منحنی را (در صورت وجود) بیابید؛ یعنی، مختصات x نقاطی که منحنی در آنها محور x را قطع می‌کند. تعیین دقیق قطعهای x ممکن است مشکل باشد، زیرا مستلزم حل معادلهٔ $f(x) = 0$ است، و ممکن است یک تکنیک تقریبی مانند روش تنصیف (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۴) به کار آید.

مثال ۹. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، تابع

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 \qquad (۲)$$

را بررسی کرده و نمودار آن را رسم نمایید.

حل. با تجزیهٔ ۲ به دست می‌آوریم

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4x + 4) = 2x^2(x-2)^2,$$

و این نشان می‌دهد که منحنی $y = f(x)$ دارای دو قطع x، 0 و 2 است. تابع f نه زوج است نه فرد؛ درنتیجه، منحنی تقارنی نسبت به محور y یا مبداء ندارد، ولی نوع دیگری

تقارن دارد که لحظه‌ای دیگر معلوم می‌شود. با سه بار مشتقگیری از f به دست می‌آید

$$f'(x) = 8x^3 - 24x^2 + 16x = 8x(x^2 - 3x + 2) = 8x(x-1)(x-2),$$

$$f''(x) = 24x^2 - 48x + 16 = 24\left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right),$$

$$f'''(x) = 48x - 48.$$

اگر $f'(x)$ را مساوی صفر قرار دهیم، درمی‌یابیم که f سه نقطهٔ بحرانی $x = 0, 1, 2$ دارد. با محاسبهٔ f'' دراین‌نقاط، معلوم می‌شودکه $f''(0) = 16 > 0, f''(1) = -8 < 0, f''(2) = 16 > 0$. لذا، f در $x = 0$ و $x = 2$ مینیمم موضعی اکیدی مساوی $f(0) = f(2) = 0$ (دومینیمم مساویند)، و در $x = 1$ ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی $f(1) = 2$ دارد. بامساوی صفر قرار دادن $f''(x)$، معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^2 - 2x + \frac{2}{3} = (x-1)^2 - \frac{1}{3} = 0$$

با جوابهای

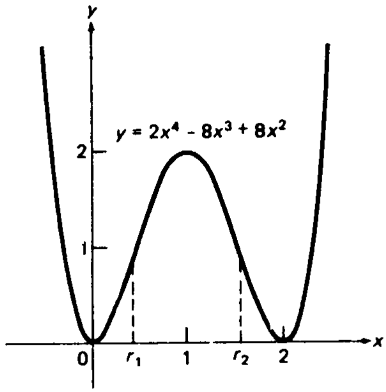
$$r_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.42, \qquad r_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1.58$$

به دست می‌آید. نقاط r_1 و r_2 نامزد نقاط عطف f اند؛ و درواقع، نقاط عطف می‌باشند، زیرا $f'''(r_1) = -16\sqrt{3} \neq 0$ و $f'''(r_2) = 16\sqrt{3} \neq 0$.

با نگاه دقیقتری به‌مشتقات‌اول و دوم f' و f'' باید نکات‌بیشتری‌در باب f آموخت. از فرمول $f'(x) = 8x(x-1)(x-2)$ معلوم می‌شود که $f'(x) < 0$ اگر $x < 0$، $f'(x) > 0$ اگر $0 < x < 1$، $f'(x) < 0$ اگر $1 < x < 2$، $f'(x) > 0$ اگر $x > 2$. لذا، f بر بازه‌های $[0, 1]$ و $[2, \infty)$ صعودی‌و بر بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[1, 2]$ نزولی‌است. همچنین، با نوشتن $f''(x) = 24(x - r_1)(x - r_2)$، معلـوم می‌شود که $f''(x) > 0$ اگر $x < r_1$، $f''(x) < 0$ اگر $r_1 < x < r_2$، $f''(x) > 0$ اگر $x > r_2$. لذا، f بر بازه‌هـای $(-\infty, r_1]$ و $[r_2, \infty)$ به بالا مقعر، و بر بازهٔ $[r_1, r_2]$ به پایین مقعر می‌باشد.

حال، با استفاده از این اطلاعات، می‌توان تابع (۲) را رسم کرد. منحنی‌حاصل‌در شکل ۲۳ نموده شده است. با استفاده از ماشین حساب، چند نقطه از منحنی رسم شده‌اند، ولی فقط به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال است که می‌توان مطمئن شد که نقاط درست به هم وصل شده‌اند و هیچ ویژگی مهمی از منحنـی $y = f(x)$ نادیده گرفته نشده است. بخصوص، این بدان خاطر است‌که مطمئن‌شده باشیم که نقاط منحنی نظیر به نقاط اکسترمم و عطف تابع f رسم شده‌اند. از نمودار معلوم می‌شود که منحنی نسبت به خط قائم $x = 1$

متقارن است. اگر توجه می‌کردیم که تابع $f(x) = 2x^2(2-x)^2$ در اتحاد $f(1-x) \equiv f(1+x)$ که به آسانی تحقیق می‌شود صدق می‌کند، این امر را می‌شد پیش‌بینی کرد.



شکل ۲۳

مسائل

تمام نقاط عطف تابع داده شده را بیابید.

۱. $f(x) = \sin x$ ✓
۲. $f(x) = \cos x$ ✓
۳. $f(x) = \cot x$ ✓
۴. $f(x) = \tan x$ ✓
۵. $f(x) = \sec x$ ✓
۶. $f(x) = \csc x$ ✓
۷. $f(x) = \tan x + \cot x$ ✓
۸. $f(x) = x + \sin x$

۹. نشان دهید که آزمون مشتق سوم برای نقطهٔ عطف در صورت صفر بودن مشتق سوم بی‌حاصل است.

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است؟ نزولی است؟ به بالا مقعر است؟ به پایین مقعر است؟ تابع را رسم کنید.

۱۰. $f(x) = x^{2/3}$ ✓
۱۱. $f(x) = x^{5/3}$ ✓
۱۲. $f(x) = 2 + x - x^2$ ✓
۱۳. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ ✓
۱۴. $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ ✓
۱۵. $f(x) = 4x^2 - 2x^4$ ✓
۱۶. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ ✓
۱۷. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+3}$ ✓
۱۸. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

۱۹. نشان دهید که تابع $f(x) = x^2 + ax + b$، بی‌توجه به مقادیر a و b، نقطهٔ عطف

ندارد. آیا این مطلب در مورد تابع $g(x) = x^4 + ax + b$ نیز درست است؟

۲۰. نشان دهید که تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$، بی‌توجه به مقادیر a، b، و c، همواره نقطهٔ عطف دارد. f به ازای چه مقداری از a در $x = 1$ نقطهٔ عطف دارد؟

۲۱. نشان دهید که تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$، بی‌توجه به مقادیر c و d، نقطهٔ عطف ندارد اگر $3a^2 \leq 8b$ و دو نقطهٔ عطف دارد اگر $3a^2 > 8b$.

۲۲. نقطهٔ عطف تابع $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ کجاست؟

۲۳. به ازای چه مقادیری از a و b، نقطهٔ $(1, 3)$ نقطهٔ عطف منحنی $y = ax^3 + bx^2$ است؟

۲۴. نشان دهید که سه نقطهٔ عطف نمودار تابع مسئلهٔ ۱۸ بر خط واحدی قرار دارند. این خط چیست؟

۲۵. فرض کنید f بر بازهٔ باز $I = (a, b)$ مشتق‌پذیر بوده، و c نقطه‌ای از I باشد. دراین صورت، مماس بر منحنی $y = f(x)$ در $P = (c, f(c))$ خط $y = t(x) = f'(c)(x - c) + f(c)$ بوده، و تفاضل بین مختص y منحنی $y = f(x)$ و مختص y خط $y = t(x)$، به‌عنوان تابعی از x، مساوی است با

$$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$

نشان دهید هرگاه f بر I به بالا (پایین) مقعر باشد، آنگاه g بر I مثبت (منفی) است جز در c که در آن g دارای مقدار 0 است؛ درنتیجه، منحنی $y = f(x)$ بالای (پایین) مماسش در دو طرف نقطهٔ P قرار دارد. نشان دهید هرگاه منحنی در P مماس عطفی داشته باشد، آنگاه g در c تغییر علامت می‌دهد؛ درنتیجه، منحنی از یک طرف مماس خود به طرف دیگر در P می‌رود.

۴.۳ حدود مستلزم بی‌نهایت؛ صور مبهم

نمودار تابع

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

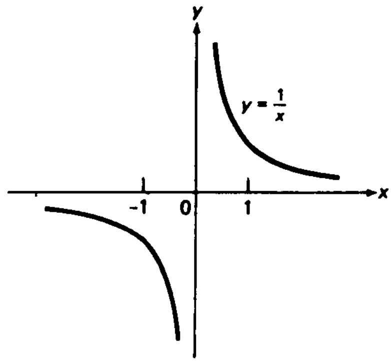
در شکل ۲۴ نموده شده است. با بررسی نمودار معلوم می‌شود که f از خواص حدی جالبی برخوردار است که هنوز مورد بحث قرار نگرفته‌اند:

(یک) وقتی x مقادیر کوچک (مثبت یا منفی) اختیار کند، y مقادیر بزرگ با همان علامت خواهد گرفت؛

(دو) وقتی x مقادیر بزرگ (مثبت یا منفی) اختیار کند، y مقادیر کوچک (با همان

علامت) خواهد گرفت.

البتد، در اینجا منظور از عدد منفی کوچک یا بزرگ عددی است منفی با قدر مطلق کوچک یا بزرگ.



شکل ۲۴

این خواص f رفتار حدی خاصی را بیان می‌کنندکه‌در آن بزرگی و کوچکی نقشی بــر عهده دارد. چطور زبان حدود را تعدیل کنیم که حالاتی از این نوع را دربرگیرد؟ خیلی ساده است. اگر متغیری، مثلاً "x"، مقادیر مثبت بزرگ اختیار کند، گوییم x به *(به‌علاوه)* **بی‌نهایت نزدیک می‌شود** و می‌نویسیم $x \to \infty$، حال آنکه اگر x مقادیر منفی بزرگ‌اختیار کند، گوییم x **به‌منهای بی‌نهایت نزدیک‌می‌شود** و می‌نویسیم $x \to -\infty$. این با استفاده از علایم ∞ و$-\infty$ در نوشتن بازه‌های نامتناهی سازگار است. بار دیگر تأکید می‌کنیم که ∞ و$-\infty$ عدد **نیستند**.

حدود نامتناهی در مقابل حدود در بی‌نهایت. حال می‌توان خواص (یک) و (دو) تابع $y=1/x$ را فشرده‌تر بیان کرده، حدود (یک) را به صورت

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty, \tag{1}$$

و حدود (دو) را به صورت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0, \tag{2}$$

یا، حتی فشرده‌تر، به صورت

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \tag{2'}$$

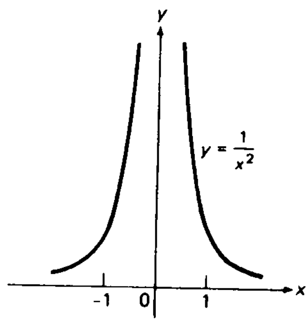
نوشت . در (۱) حدود نامتناهی و در (۲) حدود در بی‌نهایت داریم . این باحدودی که تابحال درنظر گرفته‌ایم ، که همه متناهی‌اند ، یعنی

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

که در آنها a و L عددند و علایم ∞ و $-\infty$ نیستند فرق دارد .

حدود (۱) یکطرفه‌اند ، ولی حدود نامتناهی می‌توانند دوطرفه نیز باشند . مثلاً ، شکل ۲۵ نشان می‌دهد که

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



شکل ۲۵

واضح است‌که وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to \infty$ اگر وفقط اگروقتی $x \to a^+$ و $x \to a^-$ ، $f(x) \to \infty$ و همین امر در صورت تعویض ∞ با $-\infty$ درست است . همچنین ، می‌توان حدود نامتناهی در بی‌نهایت داشت . مثلاً ، از شکلهای ۱۹ و ۲۰ ، صفحهٔ ۲۸۱ ، معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/3} = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{1/3} = -\infty$$

و

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{4/3} = \infty.$$

این نکات را می‌توان با تعدیل زبان ε, δ که در آن علایمی غیر از ε و δ ، یعنی C و A ، برای اعدادی که نوعاً " بزرگ هستند به کار روند دقیق ساخت : با این کار ازکوچکی مربوط به ε و δ پرهیز می‌شود . مثلاً ، وقتی $x \to a^+$ ، $f(x) \to \infty$ یعنی به ازای‌هر $C > 0$ (مهم نیست چقدر بزرگ) ، می‌توان $\delta > 0$ ای (به قدر کافی کوچک) یافت به‌طوری که هروقت $a < x < a + \delta$ ، $f(x) > C$. به همین نحو ، وقتی $x \to \infty$ ، $f(x) \to -\infty$ یعنی به ازای هر $C > 0$ (مهم نیست چقدر بزرگ) ، می‌توان $A > 0$ ای (به قدر کافی

بزرگ) یافت به‌طوری که هر وقت $x > A$ ، $f(x) < -C$ ؛ در اینجا فرض است که f بر بازه‌ای نامتناهی‌از نوع (c, ∞) تعریف‌شده‌است . یا ، به‌عنوان مثالی دیگر ،وقتی $x \to -\infty$ ، $f(x) \to L$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ (مهم نیست چقدر کوچک) ، می‌توان $A > 0$ ای (به قدر کافی بزرگ) یافت به‌طوری که هر وقت $x < -A$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، که در اینجا فرض است که f بر بازه‌ای‌نامتناهی ازنوع $(-\infty, c)$ تعریف شده است . وقتی با این‌تعاریف خو گرفتید ، می‌توانید عبارت داخل پرانتزها را حذف کنید .

مثال ۱ . فرمولهای حدی (۱) را دقیقاً ثابت کنید .

حل . به ازای $C > 0$ داده شده ، قرار می‌دهیم $\delta = 1/C$. اگر $0 < x < \delta$ ، داریم

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = C,$$

حال آنکه اگر $-\delta < x < 0$ ، بنابر قاعدهٔ تقابل در نامساویها (قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۱۳) ،

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{-\delta} = -C.$$

اما این با (۱) به " زبان C, δ " معادل است .

مثال ۲ . فرض‌کنید n عدد صحیح مثبتی باشد . نشان دهید که

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \\ -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \end{cases} \tag{۳}$$

حل . به‌ازای $C > 0$ ی دلخواه ،قرارمی‌دهیم $\delta = \sqrt[n]{1/C}$ و ابتدا فرض‌می‌کنیم $0 < x < \delta$ پس $0 < x^n < \delta^n$ ؛ و لذا ،

$$\frac{1}{x^n} > \frac{1}{\delta^n} = C. \tag{۴}$$

حال فرض کنیم $-\delta < x < 0$. پس اگر n زوج باشد ، $0 < x^n < \delta^n$ ، و مجدداً " نامساوی (۴) به دست می‌آید ، حال آنکه اگر n فرد باشد ، $-\delta^n < x^n < 0$ ، و در عوض خواهیم داشت

$$\frac{1}{x^n} < \frac{1}{-\delta^n} = -C \tag{۴'}$$

و بدین وسیله برهان (۳) در زبان C, δ کامل می‌شود. توجه کنید که اگر $n = 1$ ، (۳) به (۱) تحویل خواهد شد.

مثال ۳. نشان دهید

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \tag{۵}$$

که در آن n عدد صحیح مثبتی است.

حل. به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، فرض کنید $A = \sqrt[n]{1/\varepsilon}$. پس اگر $x > A$ یا $x < -A$ ، یعنی $|x| > A$ ، داریم

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| = \frac{1}{|x|^n} < \frac{1}{A^n} = \varepsilon,$$

و حد (۵) را این بار به " زبان ε, A " ثابت کرده‌ایم. توجه کنید که اگر $n = 1$ ، (۵) به (۲') تحویل می‌شود.

مثال ۴. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبتی باشند. نشان دهید که

$$\lim_{x \to \infty} x^{m/n} = \infty. \tag{۶}$$

حل. برای آنکه $x^{m/n}$ از $C > 0$ داده شده تجاوز کند، $x > A = C^{n/m}$ را اختیار می‌کنیم، زیرا در این صورت $x^{m/n} > A^{m/n} = C$. این حد (۶) را به " زبان C, A " ثابت می‌کند.

مثال ۵. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبتی باشند به‌طوری‌که n فرد و m/n تحویل‌ناپذیر باشد. نشان دهید که

$$\lim_{x \to -\infty} x^{m/n} = \begin{cases} \infty \text{ ، اگر } m \text{ زوج باشد} \\ -\infty \text{ ، اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases} \tag{۶'}$$

حل. یک برهان غیرصوری کفایت می‌کند. چون n فرد است، $x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$ به ازای x منفی تعریف شده است. اگر x مقادیر منفی بدلخواه بزرگ بگیرد، $\sqrt[n]{x}$ نیز چنین می‌کند. لذا، $x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$ به ازای m زوج مقادیر مثبت بدلخواه بزرگ می‌گیرد و، به ازای m فرد،

مقادیر منفی بدلخواه بزرگ خواهد گرفت.

مثلاً ، به کمک فرمولهای (۶) و (۶′) ،

$$\lim_{x\to\infty} x^{5/6} = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{3/7} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{4/7} = \infty,$$

ولی

$$\lim_{x\to-\infty} x^{5/6}$$

بی معنی است.

اعمال برحدود در بی‌نهایت. قضایای حاکم بر اعمال جبری حدود معمولی ، که در صفحهٔ ۱۳۰خلاصه شده اند ، برای حدود در بی‌نهایت برقرار می‌مانند. لذا ، هرگاه

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = M, \tag{۷}$$

آنگاه

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M, \tag{۸}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = LM, \tag{۹}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \qquad (M \neq 0), \tag{۱۰}$$

و همین فرمولها در صورت تعویض ∞ با $-\infty$ برقرارند. برهانها اساساً همان برهانهای حدود معمولی‌اند.

اختیاری. مثلاً ، برهان (۸) مشابه دقیق برهان قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۱۳۱ ، است و به صورت زیر پیش می‌رود. به‌خاطر (۷) ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان عددی مانند $A_f > 0$ یافت به طوری که هر وقت $x > A_f$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ و عددی چون $A_g > 0$ یافت به‌طوری که هروقت $x > A_g$ ، $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. لذا ، طبق نامساوی مثلثی ، هر وقت $x > A = \max\{A_f, A_g\}$ یعنی هروقت x از A_f و A_g تجاوز کند ،

$$|f(x) \pm g(x) - (L \pm M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ولی این دقیقاً یعنی (۸) به زبان ε, A .

مثال ۶. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)}$ را حساب کنید.

حل.ابتدا صورت و مخرج را بر x^3 تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)}=\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x+4}{x}\,\frac{2x^2+1}{x^2}}=\frac{1}{\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

این کمک بزرگی است ، چون عبارت طرف راست شامل توابع $1/x$ و $1/x^2$ است که قبلاً "در مثال ۳ دیدیم که هر دو وقتی $x\to\infty$ به 0 نزدیک می‌شوند . حال با استفاده از فرمولهای (۸) تا (۱۰) ، حد وقتی $x\to\infty$ می‌گیریم . نتیجه عبارت است از

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x^2}\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1+4\cdot 0=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=2+0=2.$$

پس نشان داده‌ایم که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3+8x^2+x+4}=\frac{1}{2}.$$

همین نتیجه را می‌توان با استدلال صوریتر زیر به دست آورد : از چهار جملهٔ موجود در مخرج $2x^3+8x^2+x+4$ ، جملهٔ $2x^3$ در صورت بزرگ‌بودن x بیشترین سهم رادارد . بنابراین ، می‌توان نوشت

$$\frac{x^3}{2x^3+8x^2+x+4}\approx\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2},$$

که در آن تقریب با بزرگ شدن x بهتر می‌شود .

اعمال بر حدود نامتناهی . قواعد محاسبه باحدودنامتناهی ،به‌خلاف حدود در بی‌نهایت،

از نوع متفاوتی هستند. مثلاً، هرگاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty. \tag{11}$$

به‌طور غیرصوری، فرض‌کنیم وقتی $x \to a$، $f(x)$ به حدی نزدیک شود. در این صورت، اگر وقتی $x \to a$، $g(x)$ مقادیر مثبت بدلخواه بزرگ اختیار کند، $f(x) + g(x)$ نیز چنین می‌کند. این مسلماً درست است، زیرا مجموع یک عدد مثبت بسیار بزرگ وعددی نزدیک عدد L باید عدد مثبت بسیار بزرگی باشد.

اختیاری. اگر برهان دقیقی‌لازم باشد به‌صورت زیر است. چون‌وقتی $x \to a$، $f(x) \to L$، عددی مانند k (نه لزوماً مثبت) و عدد مثبتی چون δ_f وجود دارند به‌طوری‌که‌هروقت $0 < |x - a| < \delta_f$، $f(x) > k$. همچنین، از اینکه وقتی $x \to a$، $g(x) \to \infty$ معلوم می‌شود که به ازای هر $C > 0$ عدد مثبتی مانند δ_g وجود دارد به‌طوری که هر وقت $0 < |x - a| < \delta_g$، $g(x) > C - k$. دراین‌صورت، هروقت $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$، $f(x) + g(x) > k + (C - k) = C$، و (۱۱) به زبان C, δ ثابت شده است.

با نماد اختصاری، هم‌اکنون نشان دادیم که هرگاه $f(x) \to L$ و $g(x) \to \infty$، آنگاه $f(x) + g(x) \to \infty$ (عبارت "وقتی $x \to a$" در سه جا حذف شده است). به‌همین‌نحو به آسانی معلوم می‌شودکه هرگاه $f(x) \to L$ و $g(x) \to -\infty$، آنگاه $f(x) + g(x) \to -\infty$ درواقع، می‌توان این قاعده و قاعدهٔ قبل را در یک قاعده آورد:

(یک) هرگاه $f(x) \to L$ و $g(x) \to \pm\infty$، آنگاه $f(x) + g(x) \to \pm\infty$، با این فرض‌که در دو مورد $\pm$ فقط یک‌علامت، به‌علاوه یا منها، باید اختیار شود (به‌طورکلی، اگر علامت $\pm$ یا $\mp$ در دو یا چند جا ظاهر شوند، می‌پذیریم که در همه‌جا علامت بالا یا علامت‌پایین را اختیار کنیم). یک قاعدهٔ مربوطه عبارت است از

(یکَ) هرگاه $f(x) \to \pm\infty$ و $g(x) \to \pm\infty$، آنگاه $f(x) + g(x) \to \pm\infty$، که آن را می‌توان به‌طور غیرصوری به‌این نحو ثابت‌کرد که مجموع دو عدد مثبت بدلخواه بزرگ‌عدد مثبت بدلخواه بزرگی است، ولی مجموع دو عدد منفی بدلخواه بزرگ عدد منفی بدلخواه بزرگی می‌باشد.

حال با ادامهٔ این کار می‌توان قواعد دیگری برای حدود نامتناهی به دست آورد.

در قواعد (چهار) و (چهار') نماد $g(x) \to 0^+$ یعنی وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ و $g(x)$ به ازای هر x در همسایگی سفته‌ای از a مثبت است ، حال آنکه $g(x) \to 0^-$ یعنی وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ و $g(x)$ به ازای جمیع x های همسایگی سفته‌ای از a منفی می‌باشد .

(دو) هرگاه $f(x) \to L \neq 0$ و $g(x) \to \pm\infty$ ، آنگاه $f(x)g(x) \to \pm\infty$ اگر $L > 0$ ، در حالی که $f(x)g(x) \to \mp\infty$ اگر $L < 0$ ؛

(دو') هرگاه $f(x) \to \pm\infty$ و $g(x) \to \pm\infty$ ، آنگاه $f(x)g(x) \to \pm\infty$ اگر $f(x) \to \infty$ در حالی که $f(x)g(x) \to \mp\infty$ اگر $f(x) \to -\infty$ ؛

(سه) هرگاه $f(x) \to L$ و $g(x) \to \pm\infty$ ، آنگاه $f(x)/g(x) \to 0$ ؛

(چهار) هرگاه $f(x) \to L \neq 0$ و $g(x) \to 0^\pm$ ، آنگاه $f(x)/g(x) \to \pm\infty$ اگر $L > 0$ درحالی که $f(x)/g(x) \to \mp\infty$ اگر $L < 0$ ؛

(چهار') هرگاه $f(x) \to \pm\infty$ و $g(x) \to 0^\pm$ ، آنگاه $f(x)/g(x) \to \pm\infty$ اگر $f(x) \to \infty$ در حالی که $f(x)/g(x) \to \mp\infty$ اگر $f(x) \to -\infty$.

مثلاً ، جان مطلب در قاعدهٔ (چهار) این است که حاصل تقسیم یک عدد ناصفر بر یک عدد کوچک همعلامت با آن عدد مثبت بزرگی است ، ولی حاصل تقسیم هر عدد ناصفر بر یک عدد کوچک مختلف‌العلامه با آن عدد منفی بزرگی می‌باشد . مطمئن شوید که درک شهودی مشابهی از این قواعد به دست آورده‌اید .

در قواعد فوق فرض است که وقتی $x \to a$ ، توابع $f(x)$ و $g(x)$ به حدودشان ، متناهی یا نامتناهی ، نزدیک‌می‌شوند ، ولی تمام قواعد درصورتی که $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ یاحتی $x \to \infty$ یا $x \to -\infty$ برقرار می‌مانند . در یک‌حد وقتی $x \to a^+$ ، نماد $g(x) \to 0^+$ یعنی $g(x) \to 0$ و $g(x)$ به ازای جمیع x های بازه‌ای چون $(a, a+\delta)$ مثبت است ، و در یک حد وقتی $x \to \infty$ ، نماد $g(x) \to 0^-$ یعنی $g(x) \to 0$ و $g(x)$ در بازه‌ای چون (c, ∞) منفی می‌باشد ، و از این قبیل .

مثال ۷. چون وقتی $x \to 0^+$ ، $\cos x \to 1$ و $1/x \to \infty$ ، اعمال قاعدهٔ (یک) نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\cos x + \frac{1}{x}\right) = \infty.$$

مثال ۸. چون طبق مثال ۴ وقتی $x \to \infty$ ، $x^{2/3} \to \infty$ و $x^{5/3} \to \infty$ ، از قاعدهٔ (یکَ) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty}(x^{2/3}+x^{5/3})=\infty,$$

و سپس از قاعدهٔ (سه) داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{2/3}+x^{5/3}}=0.$$

مثال ۹. چون وقتی $x\to 0^-$ ، $(\sin x)/x\to 1$ و $1/x\to-\infty$ ، قاعدهٔ (دو) نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2}=-\infty.$$

چگونه قاعدهٔ (چهار) همین نتیجه را فوراً می‌دهد؟

صور مبهم $0/0$ ، $0\cdot\infty$ ، ∞/∞ ، و $\infty-\infty$. باآنکه قواعد (یک) تا (چهار) مطالب زیادی از رفتار حدود نامتناهی به ما می‌گویند، هنوز چندحالتی وجود دارند که چیزی‌در باب آنها گفته‌نشده‌است. به‌طور مشخص، قاعدهٔ (یک') شامل $f(x)\to\infty$ و $g(x)\to-\infty$ (یا $f(x)\to-\infty$ و $g(x)\to\infty$) نمی‌شود، قاعدهٔ (دو) شامل $f(x)\to 0$ و $g(x)\to\pm\infty$ نمی‌شود، قاعدهٔ (سه) شامل $f(x)\to\infty$ و $g(x)\to\pm\infty$ (یا $f(x)\to-\infty$ و $g(x)\to\pm\infty$) نمی‌شود، و قاعدهٔ (چهار) شامل $f(x)\to 0$ و $g(x)\to 0^\pm$ نخواهد شد. این چهار حالت را به ترتیب با صور مبهم $\infty-\infty$ ، $0\cdot\infty$ ، ∞/∞ ، و $0/0$ نشان می‌دهیم[1]. هر صورت مبهم اختصاری است برای حدی که هر مقدار (به انضمام ∞ یا $-\infty$) دارد یا حتی وجود ندارد. واژهٔ مبهم همان معنی صورت مبهم را داشته، و منظور از رفع ابهام یعنی یافتن حد نظیر به ابهام (در صورت وجود) می‌باشد.

صورت مبهم $0/0$ اختصاری است برای

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

که در آن وقتی $x\to a$ (به جای $x\to a$ ممکن است $x\to a^+$ ، $x\to a^-$ ، $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ داشته باشیم)، $f(x)\to 0$ و $g(x)\to 0$. ما قبلاً حدود بسیاری از این نوع را بررسی کرده‌ایم، و بخصوص محاسبهٔ هر مشتق

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

---

۱. عبارات 0^0 ، ∞^0 ، و 1^∞ نیز صور مبهم‌اند، و در بخش ۶.۵ درنظر گرفته خواهند شد.

یعنی رفع ابهام $0/0$ ، زیرا صورت و مخرج خارج قسمت تفاضلی سمت راست هر دو با $x \to a$ به 0 نزدیک می‌شوند و، در واقع، به ازای $x = a$ برابر 0 اند. با انتخاب $f(x) = Lx$ و $g(x) = x$ ، داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} L = L,$$

درحالی که انتخاب $f(x) = \pm x$ و $g(x) = x^3$ نتیجه می‌دهد

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\pm 1}{x^2} = \pm\infty.$$

به‌علاوه، هرگاه $f(x) = x\sin(1/x)$ و $g(x) = x$ ، آنگاه، بنابر مثال ۱۰، صفحهٔ ۱۲۷،

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

وجود ندارد. اما در هر سه حالت وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to 0$ و $g(x) \to 0$. لذا، حد نظیر به ابهام $0/0$ را می‌توان هر عدد، ازجمله ∞ یا $-\infty$، گرفت یا حتی ممکن است موجود نباشد. همین امر در مورد ابهامهای $0\cdot\infty$ و ∞/∞ درست است، زیرا عبارت $f(x)/g(x)$ ، که وقتی $x \to a$ ، به $0/0$ تحویل می‌شود، را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$f(x)\frac{1}{g(x)}$$

که به $0\cdot\infty$ تحویل می‌شود، یا به شکل

$$\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

نوشت که به ∞/∞ تحویل می‌شود (بنابر قاعدهٔ (چهار)، اگر تابعی به صفر نزدیک‌شود، متقابلش به بی‌نهایت نزدیک خواهد شد). مثلاً، از

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\pi x\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{1/\pi x} = \pi$$

معلوم می‌شود که π مقدار ممکنی از حد نظیر به هر صورت مبهم $0/0$ ، $0\cdot\infty$ ، و ∞/∞ است.

صورت مبهم $\infty - \infty$ اختصاری است برای

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)],$$

که در آن وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to \infty$ و $g(x) \to \infty$. با اختیار $f(x) = L + (1/x^2)$ و

$g(x) = 1/x^2$ ، داریم

$$\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 0} L = L,$$

حال آنکه انتخاب $f(x) = 2/x^2$ و $g(x) = 1/x^2$ نتیجه می‌دهد

$$\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$$

(به همین نحو، اگر $f(x) = 1/x^2$ و $g(x) = 2/x^2$ ، وقتی $x \to 0$ خواهیم داشت $f(x) - g(x) \to -\infty$) . به‌علاوه، هرگاه $f(x) = \sin(1/x) + 1/x^2$ و $g(x) = 1/x^2$ ، آنگاه

$$\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

وجود ندارد . اما در هر سه حالت وقتی $x \to 0$ ، $f(x) \to \infty$ و $g(x) \to \infty$. لذا، حد نظیر به ابهام $\infty - \infty$ می‌تواند هر مقدار از جمله ∞ یا $\infty-$ را بگیرد یا حتی وجود نداشته باشد .

مثال ۱۰ . $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x})$ را حساب کنید .

حل . به آسانی معلوم می‌شود که وقتی $x \to \infty$ ، $\sqrt{x^2+2x} \to \infty$ و $\sqrt{x^2-2x} \to \infty$. لذا، در محاسبهٔ این حد، از صورت $\infty - \infty$ رفع ابهام می‌کنیم . برای خلاص شدن از اختلاف بین ریشه‌های دوم ، عبارت داده شده را در مجموع ریشه‌های دوم ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم . به‌طور مفصل ،

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x} &= \frac{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} \\
&= \frac{x^2+2x-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} \\
&= \frac{4x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}} \\
&= \frac{4x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}} + x\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}},
\end{aligned}$$

که در مرحلهٔ پیش‌از آخرین مرحله می‌توان x را مثبت‌گرفت (زیـرا $x \to \infty$)؛ درنتیجه، $\sqrt{x^2} = x$. بنابراین،

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{4}{1+1} = 2.$$

به عنوان تمرین، با استفاده از این امر که اگر $x < 0$ ، $\sqrt{x^2} = -x$ نشان دهید که اگر به‌جای $x \to \infty$ داشته باشیم $x \to -\infty$ ، حد به جای 2 مساوی -2 خواهد بود.

مسائل

حد داده شده را حساب کنید (ممکن است مساوی ∞ یا $-\infty$ باشد).

۱. $\lim_{x\to\infty} x^{5/3}$

۲. $\lim_{x\to 0^+} x^{-3/4}$

۳. $\lim_{x\to -\infty} x^{11/7}$

۴. $\lim_{x\to 0^-} x^{-7/11}$

۵. $\lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x^2-4}$

۶. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x^2-9}$

۷. $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+9}{x^2-9}$

۸. $\lim_{x\to -1^+} \frac{6}{x^3+1}$

۹. $\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x^3-1}$

۱۰. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}}$

۱۱. $\lim_{x\to -\infty} \frac{10}{x^3+2}$

۱۲. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x^{2/3}}$

۱۳. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^2}$

۱۴. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}$

۱۵. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x^{1.1}}$

۱۶. $\lim_{x\to\infty} \frac{3-x}{2+x}$

۱۷. $\lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{1-x^2}$

۱۸. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{1+x}$

۱۹. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-2}$

۲۰. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$

۲۱. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$

۲۲. هرگاه $f(x) = (x-1)/(x+2)$ ، آنگاه وقتی $x \to \pm\infty$ ، $f(x) \to 1$. تمام x هـایی را بیابید که $|f(x) - 1| < 0.01$.

۲۳. هرگاه $f(x) = x/(x-3)$ ،آنگاه‌وقتی $x \to 3^+$ ، $f(x) \to \infty$ ونیزوقتی $x \to 3^-$ ، $f(x) \to -\infty$ تمام x هایی را بیابید که $f(x) > 1000$ ونیزتمام x هایی‌رابیابیدکه $f(x) < -1000$.

حد داده شده را محاسبه کنید، هر یک به صورت مبـهم $0 \cdot \infty$ است.

۲۴. $\lim_{x\to\infty} x^{-1/2}(x^{1/4} - 1)$

۲۵. $\lim_{x\to\infty} x^{-2/3}(1 - x^{2/3})$

۲۶. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/2}(1+x^{-3/4})$

۲۷. $\lim\limits_{x\to 0^-} x^{1/3}(4+x^{-2/3})$

۲۸. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$

۲۹. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\csc x$

۳۰. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{\csc x}$

۳۱. هر تابع کراندار بر بازه‌ای از نوع (c, ∞) را *نزدیک* ∞ *کراندار* می‌نامیم، و هر تابع کراندار بر بازه‌ای از نوع $(-\infty, c)$ را *نزدیک* $-\infty$ *کراندار* می‌نامیم. نشان دهید هرگاه $f(x)$ نزدیک ∞ کراندار بوده و وقتی $x\to\infty$، $g(x)\to 0$، آنگاه وقتی $x\to\infty$، $f(x)g(x)\to 0$، و همین امر در صورت تعویض ∞ با $-\infty$ درست است.

حد داده شده را (در صورت وجود) به کمک مسئلهٔ ۳۱ حساب کنید.

۳۲. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$

۳۳. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

۳۴. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

۳۵. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x+\cos x}{x^{1/3}}$

۳۶. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x^2}{x}$

۳۷. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

۳۸. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{x}$

۳۹. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{\cos x}}{x}$

۴۰. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\tan x}{x}$

حد داده شده را حساب کنید، هرکدام به صورت مبهم $\infty-\infty$ می‌باشد.

۴۱. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\sqrt{x^2-x+1})$

۴۲. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x)$

۴۳. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$

۴۴. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

۴۵. $\lim\limits_{x\to\infty} (x\sqrt{x^2+1}-x^2)$

۴۶. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$

۴۷. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$

۴۸. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$

۳ . ۵ مجانبها و مماسهای قائم

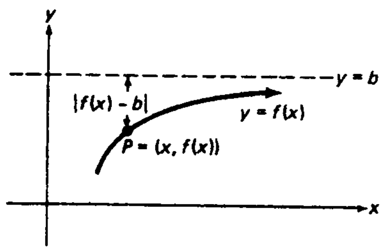
مجانبهای افقی . فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای بوده و

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b, \tag{۱}$$

که در آن b متناهی است . با نوشتن (۱) به شکل معادل

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - b| = 0,$$

معلوم می‌شود که $|f(x) - b|$ فاصلهٔ خط افقی $y = b$ و نقطهٔ متغیر $P = (x, f(x))$ برنمودار تابع f است (ر.ک. شکل ۲۶) . لذا ، وقتی $x \to \infty$ ، نقطهٔ P به خط $y = b$ نزدیک



خط $y = b$ یک مجانب افقی است .

شکل ۲۶

می‌شود . به‌طورکلی ، اگر وقتی فاصلهٔ $P = (x, f(x))$ تا مبداء به بی‌نهایت نزدیک می‌شود نقطهٔ P به خط مستقیم L نزدیک گردد ، گوییم L یک **مجانب** f است ، یا نمودار f **به‌طور مجانبی** به L نزدیک می‌شود . (برای به کار بردن این تعریف باید نمودار f دست کم در یک جهت " به بی‌نهایت برود " ، که البته همیشه این‌طور نیست .) لذا ، هم‌اکنون نشان داده‌ایم که اگر (۱) برقرار باشد ، f خط $y = b$ را به عنوان **مجانب افقی** دارد .

اساساً " همین استدلال نشان می‌دهد که هرگاه

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = c, \tag{۱'}$$

که در آن c متناهی است ، آنگاه f خط $y = c$ را به عنوان مجانب افقی دارد . توجه کنید که در حالتی که هر دوی (۱) و (۱') برقرار باشند ، f در صورت $b \neq c$ دومجانب افقی متمایز و در صورت $b = c$ فقط یک مجانب افقی خواهد داشت . تابع f نمی‌تواند بیش‌ازدو مجانب افقی داشته باشد ، زیرا وقتی نقطهٔ $P = (x, f(x))$ از مبداء دور شود ، نمی‌تواند بدلخواه به بیش از دو خط افقی نزدیک شود ، یکی وقتی به راست حرکت می‌کند $(x \to \infty)$

و دیگری وقتی به چپ حرکت می‌کند($x \to -\infty$) . همچنین، اگر f مجانب افقی داشته باشد، دست‌کم یکی‌از فرمولهای (۱) و (۱') باید برقرار باشد . لذا، در جستجوی مجانب افقی تابع f (در صورت وجود) ، کافی است رفتار حدی f را وقتی $x \to \pm\infty$ بررسی کنیم .

مثال ۱ . هرگاه

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

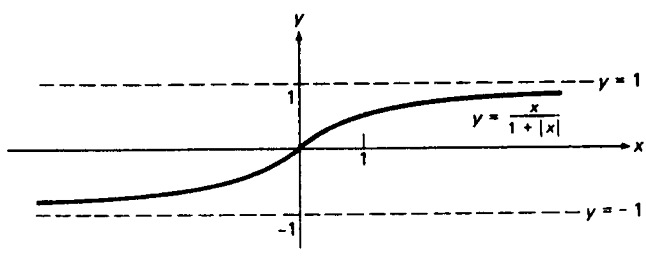
آنگاه

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 + |x|} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1,$$

زیرا $|x| = x$ اگر $x > 0$ ، درحالی که

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 + |x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -1,$$

زیرا $|x| = -x$ اگر $x < 0$. لذا، f هر دو خط $y = 1$ و $y = -1$ را به عنوان مجانب افقی دارد . این ،همراه با فرد و صعودی‌بودن f بر $(-\infty, \infty)$ که به‌آسانی تحقیق می‌شود ، نمودار " S شکل " f را به دست می‌دهد که در شکل ۲۷ نموده شده است .



شکل ۲۷

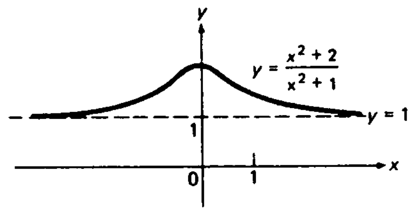
مثال ۲ . هرگاه

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1},$$

آنگاه

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

لذا ، در این حالت ، f فقط یک مجانب افقی دارد ، یعنی خط $y = 1$ ، و این در شکل ۲۸ نموده شده است .



شکل ۲۸

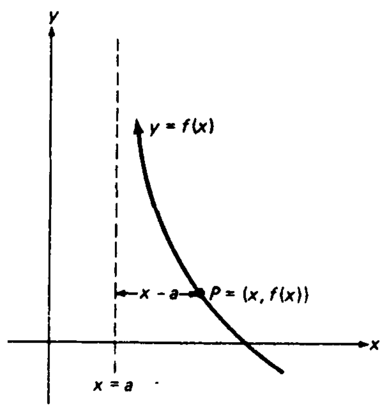
مجانبهای قائم . حال فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای باشد به‌طوری که

$$\lim_{x-a\to 0^+} f(x) = \infty \quad (\text{یا } -\infty) \qquad (۲)$$

با نوشتن (۲) به شکل معادل

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad (\text{یا } -\infty),$$

معلوم می‌شود که $x - a$ فاصلهٔ بین خط قائم $x = a$ و نقطهٔ متغیر $P = (x, f(x))$ واقع بر نمودار f است (ر.ک. شکل ۲۹) . از اینرو ، وقتی $x \to a^+$ ، نقطهٔ P به خط $x = a$



خط $x = a$ یک مجانب قائم است .

شکل ۲۹

نزدیک و از مبداء در جهت رو به بالا یا رو به پایین دور می‌شود . لذا ، اگر (۲) برقرار باشد ، تابع f خط $x = a$ را به عنوان **مجانب قائم** دارد ، و نمودار f به این مجانب از

راست نزدیک می‌شود . اساسا" همین استدلال نشان می‌دهد که هرگاه

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \ (\text{یا } -\infty), \qquad (۲')$$

آنگاه f مجددا" خط $x = a$ را به عنوان مجانب قائم دارد ، ولی اکنون نمودار f از چپ به مجانب نزدیک می‌شود . با آنکه تابع f می‌تواند حداکثر دو مجانب افقی داشته باشد ، می‌تواند هر تعداد مجانب قائم داشته‌باشد (ر.ک. مثال ۴ و مسئلهٔ ۱) . همچنین، هرگاه f مجانب قائمی با قطع x ، a داشته باشد ، آنگاه دست‌کم یکی از فرمولهای (۲) و (۲') باید برقرار باشد ، و اگر هر دو برقرار باشند ، نمودار f از **دوطرف** به مجانب نزدیک می‌شود . لذا ، در جستجوی مجانبهای قائم ، می‌توان توجه را به نقاطی (در صورت‌وجود) داد که در آنها f به بی‌نهایت (∞ یا $-\infty$) نزدیک می‌شود .

مثال ۳ . هرگاه

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1},$$

آنگاه

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

اما

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2},$$

و ، به کمک جانشانی $t = x - 1$ ،

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x-1} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{1}{t} = \pm\infty,$$

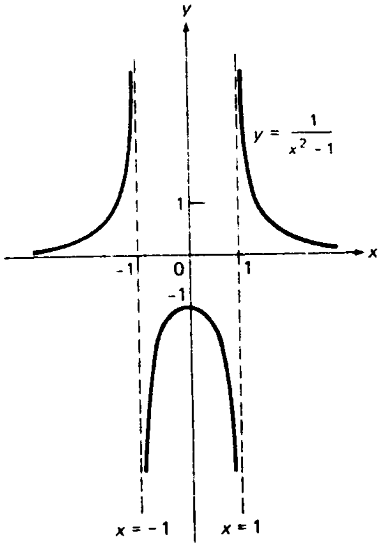
لذا ، طبق قاعدهٔ (دو) ، صفحهٔ ۲۹۶ ،

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty,$$

و اساسا" به همین طریق می‌توان نشان داد که

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = \infty$$

(جزئیات را شرح دهید) . لذا ، f ، خطوط $x = 1$ و $x = -1$ را به عنوان مجانبهای‌قائم دارد و ، همانطور که شکل ۳۰ نشان داده ، نمودار f از دو طرف به این مجانبها نزدیک



شکل ۳۰

می‌شود . مجانب قائم دیگری وجود ندارد ، زیرا 1 و 1 − تنها نقاطی هستند که f در آنها به بی‌نهایت نزدیک می‌شود . بهرحال ، خط $y = 0$ (محور x) یک مجانب افقی f است. این فورا" از

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

نتیجه می‌شود .

همانطور که مثال آخر نشان می‌دهد ، یک تابع گویا (از حیث قدرمطلق) درست در نقاطی به بی‌نهایت نزدیک می‌شود که مخرجش را صفر می‌کنند . در اینجا فرض‌است‌که تابع **تحویل‌ناپذیر** است ، بدین معنی که صورت و مخرج عامل مشترکی ندارند . مثلا "، تابع $(x + 1)/(x^2 - 1)$ وقتی $x \to 1^+$ به ∞ و وقتی $x \to 1^-$ به $-\infty$ نزدیک می‌شود ، ولی وقتی $x \to -1^+$ و $x \to -1^-$ ، حدی متناهی خواهد داشت ، زیرا

$$\lim_{x \to -1^\pm} \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^\pm} \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to -1^\pm} \frac{1}{x - 1} = -\frac{1}{2}.$$

مثال ۴ . با بررسی نمودار توابع $\tan x$ و $\cot x$ (ر . ک . شکل ۲۴ ، صفحه ۱۰۴)، معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to 0^+} \cot x = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \cot x = -\infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \tan x = \infty.$$

به‌طورکلی ، به ازای هر عدد صحیح $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ،

$$\lim_{x\to n\pi^+} \cot x = \infty, \qquad \lim_{x\to n\pi^-} \cot x = -\infty,$$
$$\lim_{x\to (n+\frac{1}{2})\pi^+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to (n+\frac{1}{2})\pi^-} \tan x = \infty$$

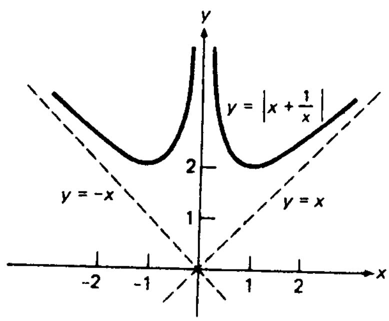
لذا ، هر خط $x = n\pi$ یک مجانب قائم $\cot x$ است ، ولی هر خط $x = (n+\frac{1}{2})\pi$ یک‌مجانب قائم $\tan x$ می‌باشد . لذا ، هر تابع $\tan x$ و $\cot x$ بی‌نهایت مجانب قائم خواهد داشت .

همچنین ، ممکن است یک تابع مجانب *مایل* داشته باشد ؛ یعنی ، مجانبی که نه افقی باشد نه قائم .

مثال ۵. تابع

$$f(x) = \left|x + \frac{1}{x}\right|,$$

که در شکل ۳۱ رسم شده ، هر دو خط $y = \pm x$ را به عنوان مجانب مایل دارد . این مطلب



خطوط $y = \pm x$ مجانبهای مایل‌اند .

شکل ۳۱

از این امر که وقتی $x \to \pm\infty$ ، $f(x) - |x|$ کوچک می‌شود واضح است ، زیرا وقتی $x \to \pm\infty$ ، $1/x \to 0$ ، اما آن را می‌توان به‌طور صوری نیز ثابت کرد (ر.ک. مسئلهٔ ۱۳) . توجه کنید که f محور y را نیز به عنوان مجانب قائم دارد ، زیرا وقتی $x \to 0$ ، $f(x) \to \infty$.

مشتقات نامتناهی و مماسهای قائم . بالاخره ، فرض‌کنیم مشتق تابع f در a نامتناهی باشد ، بدین معنی که

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$$

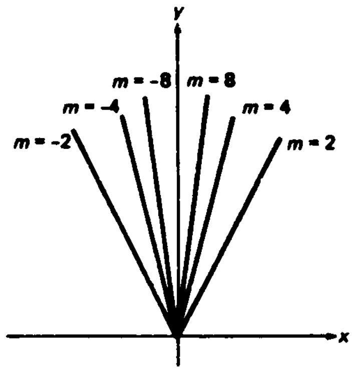
یا

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty.$$

در این صورت ، تابع

$$m(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

وقتی $x\to a$ ، به ∞ یا $-\infty$ نزدیک می‌شود . اما $m(x)$ شیب خط قاطع ماربر نقطهٔ ثابت $P=(a,f(a))$ و نقطهٔ متغیر $Q=(x,f(x))$ منحنی $y=f(x)$ است ، و وقتی شیب یک خط مقادیر بزرگ مثبت یا منفی بگیرد ، خط به وضعیت قائم نزدیک می‌شود (ر.ک. شکل ۳۲).



خطوط با شیب m بزرگ

شکل ۳۲

باتوجه به این نکات ، در حالت $f'(a)=\infty$ یا $f'(a)=-\infty$ ، خط قائم $x=a$ را (خط) مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ P تعریف می‌کنیم . در نوشتن دو فرمول اخیر نمی‌گوییم ∞ و $-\infty$ عددند ، که نیستند ، بلکه فقط می‌گوییم وقتی $x\to a$ ، $m(x)$ به بی‌نهایت (به‌علاوه یا منها) نزدیک می‌شود .

بر حسب مشتقات یکطرفه ، $f'(a)=\infty$ معادل $f'_+(a)=f'_-(a)=\infty$ و $f'(a)=-\infty$ معادل $f'_+(a)=f'_-(a)=-\infty$ است . همچنین ، ممکن است مشتقات یکطرفه نامتناهی ولی

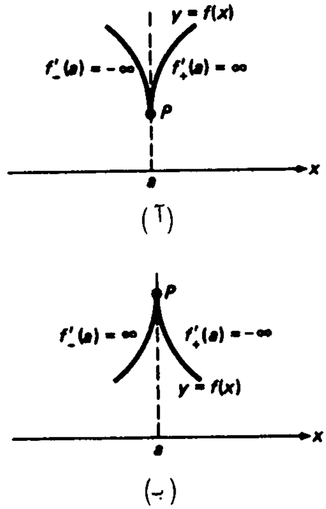
نامساوی باشند ، بدین معنی که

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} m(x) = \infty, \qquad f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} m(x) = -\infty, \tag{۳}$$

یا

$$f'_+(a) = -\infty, \qquad f'_-(a) = \infty. \tag{۳'}$$

در این صورت ، مماس در P را خط قائم $x = a$ تعریف می‌کنیم ، ولی ، همانطور که شکل ۳۳ (آ) برای حالت (۳) و شکل ۳۳ (ب) برای حالت (۳) نشان می‌دهد ، منحنـــی $y = f(x)$



شکل ۳۳

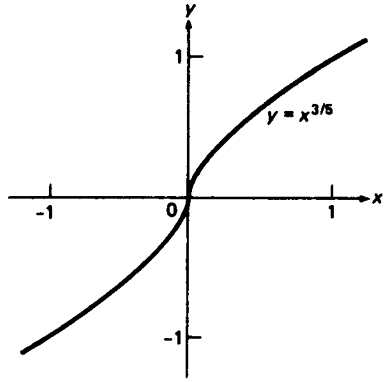
در P نقطهٔ تیز یا **نقطهٔ بازگشت** دارد .

مثال ۶ . رفتار منحنی $y = f(x) = x^{3/5}$ را در مبداء مورد بررسی قرار دهید .

حل . با استفاده از قاعدهٔ (چهار) ، صفحهٔ ۲۹۶ ، و اینکه وقتـــی $x \to 0$ ، $x^{2/5} \to 0^+$ مشتق f در $x = 0$ را حساب می‌کنیم :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3/5} - 0^{3/5}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/5}} = \infty.$$

لذا ، $f'_+(0) = f'_-(0) = \infty$ ، و منحنی $y = x^{3/5}$ در مبداء مماس قائم ولی بدون نقطهٔ بازگشت دارد (ر.ک. شکل ۳۴) .



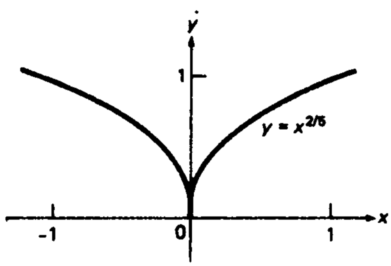
شکل ۳۴

مثال ۷. رفتار منحنی $y = f(x) = x^{2/5}$ را در مبداء بررسی کنید.

حل. با استفاده از همان قاعده و اینکه وقتی $x \to 0^{\pm}$ ، $x^{3/5} \to 0^{\pm}$ ، مشتقات یکطرفهٔ f در $x = 0$ را حساب می‌کنیم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2/5} - 0^{2/5}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{3/5}} = \infty, \qquad f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{3/5}} = -\infty.$$

چون $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ نامتناهی و نامساویند، منحنی $y = x^{2/5}$ در مبداء مماس قائم و نقطهٔ بازگشت خواهد داشت (ر.ک. شکل ۳۵).



شکل ۳۵

تشابه نزدیکی بین نقاط بازگشت و گوشه وجود دارد، نقاط گوشه نظیر حالتی هستند که $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ متناهی ولی نامساویند (ر.ک. صفحهٔ ۱۹۱)، یا وقتی که یکی از مشتقات $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نامتناهی و دیگری متناهی است. اما، با آنکه یک منحنی در نقطهٔ بازگشت مماس قائم دارد، در گوشه مماس ندارد. این تفاوت را چطور توضیح می‌دهید؟

هرگاه منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ دارای مماس قائم T باشد، آنگاه قائم N به منحنی در P ، که خط ماربر P عمود بر T تعریف می‌شود ، خط افقی $y = f(a)$ می‌باشد .

مثال ۸ . مماس T و قائم N به منحنی

$$y = f(x) = (x-1)^{1/3} + 2$$

در نقطهٔ $P = (1, 2)$ را بیابید .

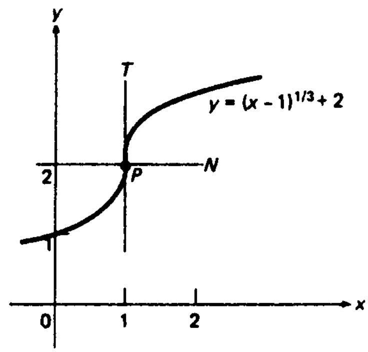
حل . مشتق f را در $x = 1$ حساب می‌کنیم ، داریم

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{[(x-1)^{1/3} + 2] - 2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^{1/3}}{x-1},$$

درنتیجه ، پس از جانشانی $t = x - 1$ و توجه به این امر که وقتی $t \to 0$ ، $t^{2/3} \to 0^+$ ،

$$f'(1) = \lim_{t \to 0} \frac{t^{1/3}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^{2/3}} = \infty$$

از اینرو ، همانطور که شکل ۳۶ نشان داده ، مماس T بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ P خط قائم $x = 1$ بوده (نقطهٔ بازگشت وجود ندارد) ، و قائم N در P خط افقی $y = f(1) = 2$ می‌باشد .



شکل ۳۶

به یاد آورید که گفتیم تابع f در نقطهٔ x **مشتقپذیر** است اگر f در x دارای مشتق $f'(x)$ باشد . این تعریف در صفحهٔ ۱۷۵ ، پیش از آنکه مفهوم مشتق نامتناهی واردکارشود، ارائه شد . حال تأکید می‌کنیم که در تعریف مشتقپذیری $f'(x)$ باید **متناهی** باشد . لـذا ، مشتقات نامتناهی در تعریف‌پیشین " وجود " ندارند . بخصوص، هرگاه تابع f در c مشتق

نامتناهی داشته باشد ، آنگاه c یک نقطهٔ بحرانی c است (ر.ک. صفحهٔ ۲۶۸) .

مسائل

۱ . تابع f را طوری مثال بزنید که دقیقاً n مجانب قائم داشته باشد .

تمام مجانبهای (افقی و قائم) تابع داده شده را یافته ، و نمودار آن را رسم نمایید .

۲ . $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

۳ . $f(x) = \dfrac{x-4}{2x+4}$

۴ . $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

۵ . $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

۶ . $f(x) = \dfrac{1+|x|}{x}$

۷ . $f(x) = \dfrac{4-x^2}{4+x^2}$

۸ . $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

۹ . $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

۱۰ . $f(x) = \dfrac{3\cos x}{x+1}$

۱۱ . تابع

$$f(x) = \frac{1}{x^7 + 128}$$

درست دو مجانب دارد . این مجانبها چیستند ؟

۱۲ . تابع

$$f(x) = \frac{1}{x^8 - 256}$$

درست سه مجانب دارد . این مجانبها چیستند ؟

۱۳ . نشان دهید که خط

$$y = mx + b \quad (m \neq 0)$$

مجانب مایل تابع $y=f(x)$ است اگر و فقط اگر دست‌کم یکی از شرایط

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - b] = 0 \tag{یک}$$

یا

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx - b] = 0 \tag{دو}$$

برقرار باشد . نشان دهید که (یک) با

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx], \tag{یک'}$$

معادل است ، درحالی که (دو) با

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] \qquad (\text{دو}')$$

معادل می‌باشد . ماکزیمم تعداد مجانبهای مایلی که یک تابع می‌تواند داشته باشد چقدر است ؟

به کمک مسئلهٔ ۱۳ ، تمام مجانبهای (مایل ، افقی ، و قائم) تابع داده شده را یافته ، و نمودار آن را رسم نمایید .

۱۴ . $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x}$

۱۵ . $f(x) = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$

۱۶ . $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

۱۷ . $f(x) = \dfrac{2x^2}{1 + |x|}$

۱۸ . $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

۱۹ . $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

نشان دهید که

۲۰ . چند جمله‌ای $P(x)$ با درجهٔ بزرگتر از 1 مجانب ندارد .

۲۱ . تابع $f(x) = x + \sin x$ مجانب ندارد .

۲۲ . اگر r عدد گویای مثبتی باشد ، تابع $f(x) = x^r$ مجانب ندارد مگر $r = 1$.

مماس T و قائم N به منحنی داده شده در نقطهٔ P را بیابید . آیا در P نقطهٔ بازگشت وجود دارد ؟

۲۳ . $y = (x - 1)^{3/5}, P = (1, 0)$

۲۴ . $y = (x + 1)^{2/3} + 1, P = (-1, 1)$

۲۵ . $y = \sqrt{|x - 3|} - 1, P = (3, -1)$

۲۶ . $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x} + 3, P = (2, 3)$

۲۷ . در چه نقاطی منحنی $y = \sqrt[3]{\cos x}$ مماس قائم دارد ؟ آیا این نقاط نقطهٔ بازگشت‌اند ؟

۶.۳ قاعدهٔ هوپیتال

حال ، با استفاده از مشتقگیری ، تکنیک توانایی برای رفع ابهام به دست می‌آوریم که اغلب با آن می‌توان محاسبات عادی را به‌کار برد . با صورت مبهم $0/0$ شروع می‌کنیم ، ولی بعداً حدود نامتناهی را وارد کرده به صور مبهم ∞/∞ ، $0 \cdot \infty$ ، و $\infty - \infty$ نیز می‌پردازیم .

قضیهٔ ۱۱ (قاعدهٔ هوپیتال برای $0/0$)[1]. هرگاه
(یک) f و g بر (a, b) مشتقپذیر باشند،
(دو) g' در هر نقطهٔ (a, b) ناصفر باشد،
(سه) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ ،

و نیز

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

برهان *(اختیاری)*. هرگاه f و g از راست در a پیوسته باشند، آنگاه بهخاطر (سه) $f(a) = g(a) = 0$ ، اما در غیر این صورت، طبق تعریف قرار میدهیم $f(a) = g(a) = 0$. پس f و g بر هر بازهٔ $[a, x]$ که $a < x < b$ پیوستهاند (چرا؟). بنابر قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۲۶۱ (قضیهٔ مقدار میانگین کشی)،

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

که در آن $a < c < x$. اما $x \to a^+$ ایجاب میکند که $c \to a^+$؛ و درنتیجه،

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

بهخاطر سادگی، قاعدهٔ هوپیتال را برای حالت $x \to a^+$ ثابت کردیم، ولی اساساً" همین استدلال نشان میدهد که برای $x \to a^-$ و بازهٔ (b, a) ، $b < a$ ، بهجای (a, b) برقرار است. قاعدهٔ هوپیتال برای $x \to a$ ، در صورت تغییر مختصری در مفروضات، نیز برقرار است. بهطور مشخص، هرگاه
(یک') f و g در همسایگی سفتهٔ D از نقطهٔ a مشتقپذیر باشند،

---

۱. در واقع، توسط جان برنولی (John Bernoulli ،1667–1748) کشف و در عوض حقوق به مارکی هوپیتال (Marquis de l'Hospital 1661–1704) ، مؤلف اولین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، داده شد.

(دو') g' در هر نقطهٔ D ناصفر باشد،

(سه') $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

و نیز

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

البته، این صورت قاعدهٔ هوپیتال نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۱۱ و قضیهٔ همتا برای $x \to a^-$ است.

مثال ۱. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\sqrt{x}}$ را حساب کنید.

حل. بنابر قاعدهٔ هوپیتال، داریم

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\tan x}{\frac{d}{dx}\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x}{1/(2\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{\cos^2 x} = \frac{2\sqrt{0}}{\cos^2 0} = 0.$$

مثال ۲. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{۱}$$

حل. بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1-\cos x)}{\frac{d}{dx}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

تبصره. ممکن است اغوا شده و بخواهید خود حد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \tag{۲}$$

را ، به‌جای معلوم بودن ، به کمک قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید ، به این ترتیب که ، بنا بر پیوستگی $\cos x$ ،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}\sin x}{\dfrac{d}{dx}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

اما این استدلال دوری است ، زیرا اگر به عقب نگاه کنید ، می‌بینید که از فرمول (۲) برای اثبات فرمول مشتقگیری $D_x \sin x=\cos x$ استفاده شد!

مثال ۳. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ را حساب کنید .

حل . بنابر قاعدهٔ هوپیتال ،

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}(x-\sin x)}{\dfrac{d}{dx}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6},$$

که در آخرین مرحله از فرمول (۱) استفاده می‌کنیم که خود با قاعدهٔ هوپیتال ثابت شد . این نشان می‌دهد که ممکن است برای محاسبهٔ یک حد چند کاربرد متوالی قاعدهٔ هوپیتال نیاز باشد .

مثال ۴ . تضمینی وجودندارد که قاعدهٔ هوپیتال در رفع ابهام کمکی‌نماید . درواقع ، ممکن است حد

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

موجود نباشد ، حتی اگر حد

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

موجود بوده و بتوان آن را با روشی دیگر به آسانی به دست آورد .

مثلا" ، هرگاه

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\qquad g(x)=x,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

(ر.ک. مثال ۸، صفحهٔ ۱۲۶)، حال آنکه حد

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

وجود ندارد (چرا؟).

قاعده‌ای شبیه قضیهٔ ۱۱ برای استفاده از مشتقگیری در رفع ابهام از صورت ∞/∞ وجود دارد. به‌خاطر سادگی، آن را برای حالت $x\to a^+$ بیان می‌کنیم، ولی این قاعده با همان تغییرات مختصر در مفروضات که قبلاً در رابطه با قضیهٔ ۱۱ ذکر شد برای $x\to a^-$ و $x\to a$ نیز برقرار است. برهان کاملاً تکنیکی است و از اینرو حذف می‌شود؛ این برهان را می‌توان در هر کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت.

قضیهٔ ۱۱' (قاعدهٔ هوپیتال برای ∞/∞). هرگاه

(یک) f و g بر (a, b) مشتقپذیر باشند،

(دو) g' در هر نقطه از (a, b) ناصفر باشد،

(سه) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$،

و نیز

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L,$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

می‌توان نشان داد که اگر شرط (سه) با

$$\lim_{x\to a^+}|f(x)|=\lim_{x\to a^+}|g(x)|=\infty$$

عوض شود، قضیهٔ ۱۱' برقرار می‌ماند، و اگر L با ∞ یا $-\infty$ عوض شود، هر دو قضیهٔ ۱۱ و ۱۱' برقرار خواهند ماند. همچنین، قضایای ۱۱ و ۱۱' را می‌توان به حالت $x\to\infty$ تعمیم

داد به این صورت که جانشانی $x = 1/t$ را انجام داده و ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(-1/t^2)f'(1/t)}{(-1/t^2)g'(1/t)}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

و نتیجهٔ مشابهی برای $x \to -\infty$ نیز برقرار است. در اینجا فرض است که قاعدهٔ هوپیتال را می‌توان در دومین مرحلهٔ محاسبه به‌کار برد، و شرایط (یک) و (دو) قضایای ۱۱ و '۱۱ بر یک بازهٔ نامتناهی از نوع (c, ∞) یا $(-\infty, c)$ برقرارند.

مثال ۵. $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-2}{6x^2-5x+8}$ را حساب کنید.

حل. حد L ابهامی به‌صورت ∞/∞ است. با دوبار استفاده‌از قضیهٔ '۱۱، یعنی دو مشتق‌گیری متوالی از صورت و مخرج، داریم

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(3x^2+4x-2)}{\dfrac{d}{dx}(6x^2-5x+8)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{12x-5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(6x+4)}{\dfrac{d}{dx}(12x-5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

به عنوان تمرین، L را به روش بخش ۴.۳ حساب کنید.

مثال ۶. $L=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ را حساب کنید.

حل. این حد نظیر صورت مبهم $0\cdot\infty$ است، ولی می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cot\dfrac{\pi x}{2}},$$

که نظیر صورت مبهم $0/0$ است. راه قدیم محاسبهٔ L جانشانی $t = 1 - x$ است. در این صورت، پس از تلاشی قابل توجه،

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan\frac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cdot\lim_{t\to 0}\cos\frac{\pi t}{2}=\frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot\cos 0=\frac{2}{\pi}.$$

راه جدید ، مبتنی بر قاعدهٔ هوپیتال ، خیلی آسانتر است :

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(1-x)}{\frac{d}{dx}\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\sin^2\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi}.$$

به‌علاوه ، جانشانی مقدماتی دیگر لازم نیست ، و چیزی جز اتلاف وقت نمی‌باشد .

مثال ۷ . $L=\lim\limits_{x\to\pi/2}(\tan x-\sec x)$ را حساب کنید .

حل . این یک صورت مبهم $\infty-\infty$ است ، که می‌توان باتوجه به

$$L=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1}{\cos x}$$

آن را به صورت $0/0$ درآورد . از قاعدهٔ هوپیتال فوراً به دست می‌آید

$$L=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{d}{dx}(\sin x-1)}{\frac{d}{dx}\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0.$$

یافتن L بدون استفاده از قاعدهٔ هوپیتال نیاز به کار بیشتر و مهارتی قابل توجه دارد

$$L=\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x+1}{\sin x+1}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin^2 x-1}{(\sin x+1)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos^2 x}{(\sin x+1)\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{\sin x+1}=\frac{-0}{1+1}=0.$$

وقتی *از قاعدهٔ هوپیتال استفاده نمی‌شود*. قاعدهٔ هوپیتال مسلما" ابزاری بسیار قوی در محاسبهٔ حدود است. با اینحال، همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، حالات زیادی وجود دارند که قاعدهٔ هوپیتال به دلیلی قابل اعمال نیست.

مثال ۸. $L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+2}$ را محاسبه کنید.

حل. بنابر پیوستگی، فورا" می‌بینیم که

$$L = \frac{\cos 0}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

کاربرد کورکورانهٔ قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌دهد

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\cos x}{\dfrac{d}{dx}(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = -\sin 0 = 0,$$

که *نادرست* است. اما قاعدهٔ هوپیتال در اینجا به کار نمی‌رود. در واقع،

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1, \qquad \lim_{x\to 0} (x+2) = 2,$$

درنتیجه، ما حتی با صورت مبهم سروکار نداریم!

مثال ۹. $L = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x}$ را حساب کنید.

حل. این بار صورت مبهم ∞/∞ داریم، و حد را می‌توان فورا" محاسبه نمود:

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(ر.ک. مسئلهٔ ۳۱، صفحهٔ ۳۰۱). بااستفاده از قاعدهٔ هوپیتال به محاسبهٔ L می‌پردازیم، خواهیم داشت

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(x - \sin x)}{\dfrac{d}{dx}x} = \lim_{x\to\infty} (1 - \cos x).$$

اما حد سمت راست وجود ندارد (چرا؟)؛ و درنتیجه، در اینجا نیز قاعدهٔ هوپیتال به کار نمی‌رود.

مثال ۱۰. حد

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan x}{\sec x} \tag{۳}$$

را محاسبه کنید.

حل. در اینجا صورت مبهم ∞/∞ داریم که می‌توان آن را بدون زحمت حساب کرد، زیرا

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} \cos x = \lim_{x\to\pi/2} \sin x = 1. \tag{۴}$$

L را با قاعدهٔ هوپیتال حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\dfrac{d}{dx}\tan x}{\dfrac{d}{dx}\sec x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec^2 x}{\sec x \tan x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x}{\tan x},$$

که باز به شکل ∞/∞ است. کاربرد دیگری از قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌دهد

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\dfrac{d}{dx}\sec x}{\dfrac{d}{dx}\tan x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan x}{\sec x},$$

و ما به همان جایی برگشته‌ایم که شروع کرده‌بودیم، بن‌بست کاملا هرگاه (۳) را به شکل

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\cot x} \tag{۳'}$$

بنویسیم، که یک صورت مبهم $0/0$ است، آنگاه قاعدهٔ هوپیتال جواب را می‌دهد، زیرا

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\dfrac{d}{dx}\cos x}{\dfrac{d}{dx}\cot x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\sin x}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to\pi/2} \sin^3 x = 1.$$

اما، به‌خاطر (۴)، این راه سختی خواهد بود.

به‌عنوان تمرین، به عقب برگشته و، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، حدود آمده‌در مثالها و مسائل قبل (از بخش ۵.۱ تاکنون) را هرقدر می‌توانید حساب کنید. خواهید دید که استفاده از این قاعده اغلب محاسبات سخت را به یک تمرین عادی برمی‌گرداند.

مسائل

ابهام مربوط به حد داده شده را توصیف کنید. سپس، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، حد را حساب کنید.

۱. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-15x+56}{x^2-3x-28}$

۲. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+3x^2+x+1}{x^2-1}$

۳. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{1/3}-x^{1/2}}{x^{1/4}-x^{1/5}}$

۴. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

۵. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

۶. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{2x+1}$

۷. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

۸. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sin x}$

۹. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

۱۰. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

۱۱. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x$

۱۲. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\tan x}$

۱۳. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sec x-1}{x^3}$

۱۴. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$

۱۵. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\csc x-\dfrac{1}{x}\right)$

۱۶. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

۱۷. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}$

۱۸. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\csc\left(\dfrac{3\pi}{4}+x\right)$

۱۹. فرض کنیم F در همسایگی a مشتقپذیر بوده، و $\lim\limits_{x\to a}F'(x)$ موجود و متناهی باشد. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، نشان دهید که $F'(a)=\lim\limits_{x\to a}F'(x)$.

۲۰. بدون استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین کشی، صورت ساده شدهٔ قاعدهٔ هوپیتال برای $0/0$ که اغلب مفید است را ثابت کنید. فرض کنید

(یک) f و g در a مشتقپذیر بوده و $g'(a)\neq 0$؛

(دو) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$.

در این صورت،

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

صورت مبهمی از 0/0 مثال بزنید که به این روش رفع نشود .

حدود زیر را محاسبه کنید .

۲۱. $\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$ ۲۲. $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

۲۳. از مسئلهٔ ۱۹ (اشتباها "۱") این برداشت می‌شود که $F'(a)$ همواره مساوی $\lim_{x\to a}F'(x)$ است . تابع F را طوری مثال بزنید که F' در همسایگی a تعریف شده باشد ولی $F'(a)\neq\lim_{x\to a}F'(x)$. این را با مسئلهٔ ۱۹ آشتی دهید .

۲۴. با فرض وجود حد در مثال ۳ ، آن را بدون قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید .
راهنمایی . از فرمول $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ استفاده کنید .

۷.۳ مسائل بهینه‌سازی

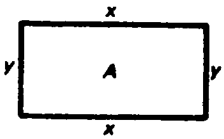
مسائل‌علمی بسیاری وجوددارند که درگیر تعیین **بزرگترین** اندازه ،*کمترین‌بها* ، *کوتاهترین* زمان ، **بیشترین** درآمد ، و غیره می‌باشند . در این نوع مسائل " بهترین " مقدار کمیت متغیری خواسته می‌شود ؛ و درنتیجه ، آنها را ***مسائل بهینه‌سازی*** می‌نامند . بسیاری از آنها را می‌توان به‌کمک ابزارهای ذکرشده در چند بخش اخیر حل کرد ، ولی سایرین‌به‌تکنیکهای پیشرفته‌تری نیاز دارند (که بعضی از آنها در بخشهای ۸.۱۳ و ۹.۱۳ معرفی می‌شوند) .
مسائل این بخش ازخاصیت‌مشترک زیر برخوردارند :
کمیتی که باید بهینه شود را می‌توان به صورت تابعی از یک متغیر بیان کرد که بر بازه‌ای چون I تعریف شده ، و مقدار بهینهٔ کمیت را می‌توان مقدار اکستریمی از تابع بر I گرفت .
مثل همهٔ مسائل به شکل نقلی ، در ترجمه از زبان عرف به ریاضی دقت زیادی لازم است ، و پنالتی ترجمهٔ نامناسب این است که تمام محاسبات چیزی جز اتلاف وقت نخواهد بود . به عبارت دیگر ، به قول متخصصین کامپیوتر " زباله وارد و زباله خارج کرده‌ایم " .

مثالهای زیر ایدهٔ خوبی از طرز حل مسائل بهینه‌سازی به شما می‌دهد . اغلب آنها ماهیت هندسی داشته یا در رابطه با علوم طبیعی‌اند . بهینه‌سازی در تجارت و اقتصاد خود مبحثی است که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت .

مثال ۱ . مزرعه‌داری 800 فوت حصار دارد که می‌خواهد دور یک مزرعهٔ مستطیلی بکشد . بیشترین مساحتی که می‌تواند حصار بکشد چقدر است ؟

حل . فرض کنیم x ، y ، و A طول ، عرض ، و مساحت مزرعه باشند ، مثل شکل ۳۷ ، و L را

طول حصار می‌گیریم . در این صورت ، $L = 2x + 2y$ و $A = xy$ ، و اینکه 800 فوت حصار



شکل ۳۷

داریم را با شرط

$$L = 2(x + y) = 800.$$

بیان می‌کنیم . با حل نسبت به y و برحسب x ، به دست می‌آوریم $y = 400 - x$. با این می‌توان مساحت مزرعه را به صورت تابعی فقط از x بیان کرد . در واقع ،

$$A = xy = x(400 - x) = 400x - x^2. \qquad (1)$$

چون مساحت نامنفی است ، مقادیر مجاز x از 0 تا 400 تغییر می‌کنند . لذا ، مسئله تعیین مقداری از x است که تابع مساحت (۱) ماکزیمم (مطلق) خود بر بازهٔ $I = [0, 400]$ را در آن بگیرید . این ماکزیمم ، که وجودش توسط قضیهٔ مقدار اکستریم تضمین می‌شود (ر. ک . صفحهٔ ۱۵۹) ،باید در یک‌نقطهٔ درونی I گرفته شود ، زیرا $A > 0$ اگر $0 < x < 400$ و $A|_{x=0} = A|_{x=400} = 0$. (نماد $A|_{x=a}$ اختصاری است برای مقدار تابع $A = A(x)$ در $x = a$.) از اینرو، ماکزیمم موضعی بوده و فقط می‌تواند در یک نقطهٔ بحرانی A رخ دهد . چون A به ازای هر x مشتقپذیر است با مشتق

$$\frac{dA}{dx} = 400 - 2x,$$

تنها نقطهٔ‌بحرانی A نقطهٔ $x = 200$ است که در آن dA/dx مساوی صفرمی‌باشد ،و ماکزیمم مساحت A بر بازهٔ I باید در این نقطه صورت گیرد . به‌علاوه ،

$$y|_{x=200} = (400 - x)|_{x=200} = 200.$$

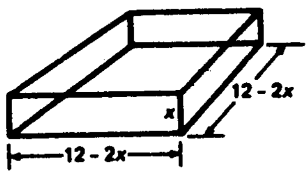
لذا ، مزرعهٔ مستطیلی با بیشترین مساحت محصور به 800 فوت حصار مربعی است به طول ضلع 200 فوت ، و مساحتش مساوی است با

$$A|_{x=200} = (200)^2 = 40,000 \text{ فوت مربع}$$

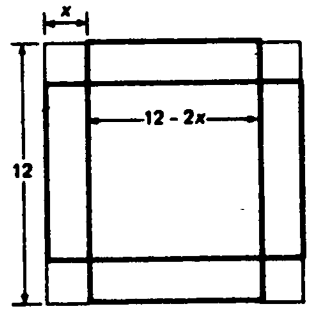
به عنوان تمرین ، از آزمون مشتق اول و دوم استفاده کرده تحقیق کنید A در $x = 200$ ماکزیمم موضعی اکید دارد .

مثال ۲ . یک جعبهٔ مربعی بدون سر از بریدن مربعات کوچکی از چهار گوشهٔ یک‌مربع فلزی

به ضلع 12 اینچ، مطابق شکل ۳۸(آ)، و سپس تاکردن لبه‌ها، مثل شکل ۳۸(ب)، ساخته شده است.



(ب)



(آ)

شکل ۳۸

ماکزیمم حجم جعبه‌ای که به این طریق ساخته می‌شود چقدر است؟

حل. فرض کنیم x طول ضلع هر مربع کوچک باشد. از شکل واضح است که حجم جعبه مساوی است با

$$V = x(12-2x)^2 = 4x(6-x)^2. \qquad (۲)$$

مقادیر مجاز x از 0 تا 6 تغییر می‌کنند، زیرا حجم نامنفی بوده و نمی‌توان مربعهای روی هم افتاده را برید. لذا، مسئله یافتن x ی است که تابع حجم (۲) ماکزیمم (مطلق) خود بر بازهٔ $I=[0,6]$ را در آن بگیرد. این ماکزیمم باید در یک نقطهٔ درونی I رخ دهد، زیرا $V>0$ اگر $0<x<6$ و $V|_{x=0}=V|_{x=6}=0$. لذا، ماکزیمم موضعی است، و فقط می‌تواند در یک نقطهٔ بحرانی V رخ دهد. چون V به ازای هر x مشتقپذیر است، نقاط بحرانی V نقاط $x=2$ و $x=6$ اند که در آنها

$$\frac{dV}{dx} = 4(6-x)^2 - 8x(6-x) = 12(6-x)(2-x)$$

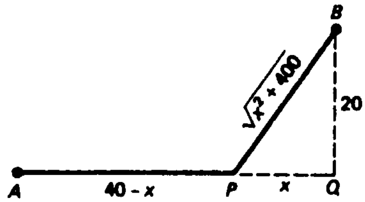
مساوی صفر است. از این دو نقطه فقط $x=2$ نقطهٔ درونی I است؛ درنتیجه، ماکزیمم حجم V بر بازهٔ I باید در $x=2$ گرفته شود. لذا، جعبه با بیشترین حجم در صورتی به دست می‌آید که مربعهای بریده شده از ورقهٔ فلزی به طول 2 اینچ باشند، و حجم آن خواهد بود

$$V|_{x=2} = 4(2)(6-2)^2 = 128 \text{ اینچ مکعب}$$

به عنوان تمرین، از آزمون مشتق اول یا دوم استفاده کرده تحقیق کنید که V در $x=2$

ماکزیمم موضعی اکید دارد.

مثال ۳. ادارهٔ خدمات اجتماعی می‌خواهد جادهٔ جدیدی از شهر A به شهر B احداث کند. شهر A در امتداد یک جادهٔ شرقی غربی متروکه قرار دارد، درحالی که شهر B در 20 میلی شمال این‌جاده و 40 میلی شهر A واقع است (ر.ک. شکل ۳۹). می‌خواهیم جادهٔ جدید از بخشی از جادهٔ قدیم همراه با بخش کاملاً جدیدی تشکیل شود که جادهٔ قدیم



شکل ۳۹

را در نقطه‌ای که باید تعیین شود ترک و مستقیماً به شهر B برود. اگر هزینهٔ ساختن‌بخش اول $300,000 بر میل و هزینهٔ ساختن بخش دوم $600,000 بر میل باشد، چقدر از جادهٔ قدیم باید تعمیر شود تا هزینهٔ جادهٔ دوبخشی جدید مینیمم باشد؟

حل. همانند در شکل، فرض کنیم P نقطه‌ای باشد که جادهٔ قدیم تا آن اختیار می‌شود، Q نقطه‌ای باشد که جادهٔ قدیم جنوب شهر B است، و $|PQ| = x$. در این صورت، هزینهٔ جادهٔ جدید به میلیون دلار عبارت است از

$$C(x) = 0.3|AP| + 0.6|PB| = 0.3(40 - x) + 0.6\sqrt{x^2 + 400}.$$

می‌خواهیم مینیمم (مطلق) تابع هزینهٔ $C(x)$ بر بازهٔ $I = [0, 40]$ را بیابیم، تنها نقطهٔ بحرانی $C(x)$ نقطهٔ x است که در آن

$$\frac{dC(x)}{dx} = -0.3 + 0.6\frac{x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 0,$$

یا معادلاً

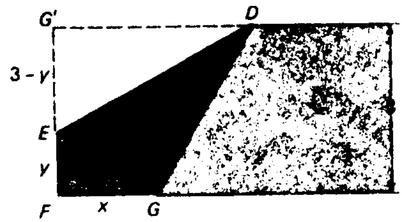
$$\sqrt{x^2 + 400} = 2x,$$

یعنی، $x = 20/\sqrt{3} \approx 11.55$. از مقایسهٔ $C(20/\sqrt{3})$ با مقادیر تابع هزینه در نقاط انتهایی بازهٔ I معلوم می‌شود که

$$C(0) = 24. \qquad C(20/\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3} \approx 22.39, \qquad C(40) = 12\sqrt{5} \approx 26.83.$$

مینیمم این اعداد ، یعنی $C(20/\sqrt{3})$ ، مینیمم $C(x)$ بر I است (قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۲۶۷ ، را به یاد آورید) . لذا ، می‌بینیم که پیش از رفتن به شهر B باید $40 - 11.55 \approx 28.45$ از جادهٔ قدیم اختیار شود . بدین ترتیب ، ادارهٔ خدمات اجتماعی با اختیار جادهٔ L مانند AQB حدود 1.61 میلیون دلار و با انتخاب راه مستقیم AB حدود 4.44 میلیون دلار صرفه‌جویی خواهد کرد .

مثال ۴ . فرض کنید گوشه‌ای از یک نوار مستطیلی کاغذ به عرض 3 اینچ آنقدر برگردانده شود که به ضلع مقابل برسد؛ و بدین ترتیب ، مثلث EFG به مساحت A مثل شکل ۴۰ پدید آید . ماکزیمم مقدار A چقدر است ؟



شکل ۴۰

حل . فرض کنیم ، مثل شکل ، x و y طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ EFG باشند. بنا بر هندسهٔ مقدماتی ،

$$A = \frac{1}{2}xy, \tag{۳}$$

و ما باید به نوعی از ماهیت خاص مسئله استفاده کنیم ، یعنی اینکه EFG مثلث دلخواهی نبوده بلکه از برگرداندن نوار کاغذ به صورت توصیف شده به دست آمده است ، تا یکی از دو متغیر x و y را برحسب دیگری بیان کنیم . این قسمت مشکل مسئله است؛ اگر "راه‌حل" شما را به مقصد نرسانده ناامید نشوید . تسلیم نشوید ، زیرا شهودا " واضح است که معرفتی از x ، y را به‌طور منحصر به فرد معین می‌کند (یک صفحه کاغذ را تا کنید و ببینید) . نکتهٔ اصلی این است که وقتی مثلث DEG تا می‌خورد ، فضای خالی مثلث همنهشت DEG' است . به‌علاوه ، ضلع EG' مثلث اخیر ، که به آسانی معلوم می‌شود که به طول $3 - y$ است (به یاد آورید که عرض نوار 3 است) ، وتر EG مثلث EFG پس از تازدن است . لذا ، طبق قضیهٔ فیثاغورس ،

$$x^2 + y^2 = |EG|^2 = (3 - y)^2 = 9 - 6y + y^2.$$

با حذف y^2 و حل نسبت به y ، فرمول زیر به دست می‌آید :

$$y = \frac{9 - x^2}{6}, \qquad (۴)$$

که y را به عنوان تابعی از x بیان می‌کند .

بقیهٔ کار سرراست است . با گذاردن (۴) در (۳) به دست می‌آوریم

$$A = \frac{9x - x^3}{12},$$

و مسئله به یافتن ماکزیمم (مطلق) مساحت A بر بازهٔ $I = [0, 3]$ تحویل می‌شود . (چرا این بازه ؟) ماکزیمم باید در یک نقطهٔ درونی I صورت گیرد ، زیرا $A > 0$ اگر $0 < x < 3$ و $A|_{x=0} = A|_{x=3} = 0$. از اینرو ، مقدار x که A را ماکزیمم می‌کند یک نقطهٔ بحرانی A است . چون A به ازای هر x مشتقپذیر است ، نقاط بحرانی A نقاط $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ می‌باشند که در آنها

$$\frac{dA}{dx} = \frac{9 - 3x^2}{12} = \frac{3 - x^2}{4}$$

مساوی صفر است ، ولی فقط $x = \sqrt{3}$ یک نقطهٔ درونی I می‌باشد . لذا ، مقدار ماکزیمم A عبارت است از

$$A|_{x=\sqrt{3}} = \frac{9x - x^3}{12}\bigg|_{x=\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ اینچ مربع}$$

به عنوان تمرین ، نشان دهید که اگر $x = \sqrt{3}$ ، قسمت تا خوردهٔ DEG و مثلث EFG مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای هستند با زوایای حادهٔ $30°$ و $60°$.

یک ابزار مفید برای بهینه‌سازی . پیش از چند مثال ، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که اغلب در حل مسائل بهینه‌سازی مفید واقع می‌شود .

قضیهٔ ۱۲ (قضیهٔ مقدار اکستریم برای توابعی که به بی‌نهایت نزدیک می‌شوند) . *فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ باز $I = (a, b)$ باشد که $a = -\infty$ و $b = \infty$ نیز مجاز است. در این صورت ، f بر I مینیمم دارد اگر*

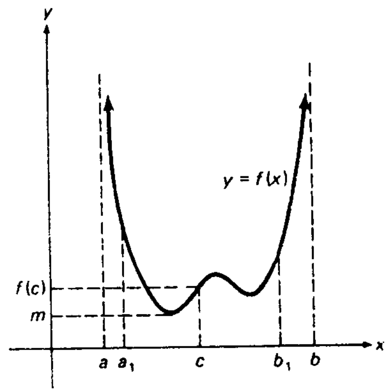
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = \infty, \qquad (۵)$$

و بر I ماکزیمم دارد اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty \tag{5'}$$

(اگر $a = -\infty$ ، $x \to a^+$ را به $x \to -\infty$ و اگر $b = \infty$ ، $x \to b^-$ را به $x \to \infty$ تغییر دهید).

برهان (اختیاری). فقط (۵) را ثابت می‌کنیم ، زیرا حالات دیگر به همین نحو ثابت می‌شوند . فرض‌کنیم c نقطه‌ای در (a, b) باشد. در این صورت ، به‌خاطر (۵) ، نقاطی مانند a_1 و b_1 وجود دارند به‌طوری که $a < a_1 < c < b_1 < b$ و هر وقت $a < x < a_1$ و $b_1 < x < b$ ، $f(x) > f(c)$ (ر.ک. شکل ۴۱) . فرض کنیم m مینیمم f بر بازهٔ بستهٔ



شکل ۴۱

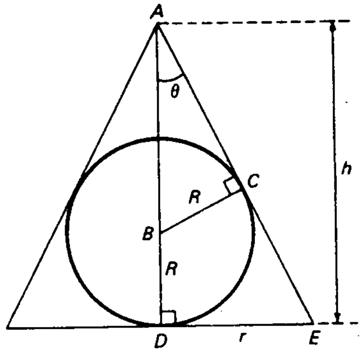
کراندار $[a_1, b_1]$ باشد ؛ وجود m توسط قضیهٔ ۱۵ ، صفحهٔ ۱۶۰، تضمین می‌شود (قضیهٔ مقدار اکستریم معمولی) . پس m مینیمم f بر (a, b) نیز هست . در واقع ، بنابر معنی m ، به ازای هر x در $[a_1, b_1]$ ، $f(x) \geq m$ ، حال آنکه بنابر انتخاب a_1 و a_2 ، به ازای هر x در (a, a_1) و (b_1, b) ، $f(x) > f(c) \geq m$.

طبیعی است‌که اگر (۵) برقرار باشد ، f ماکزیمم ندارد و اگر (۵') برقرار باشد ، مینیمم ندارد . قضیهٔ ۱۲ نقشی در حل امثلهٔ زیر دارد .

مثال ۵ . حجم کوچکترین مخروط مستدیر قائم محیط بر یک کره به شعاع R را بیابید .

حل . یک مخروط مستدیر قائم به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h دارای حجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ است و

ما ابتدا باید یکی‌از دو متغیر r و h را برحسب‌دیگری بیان کنیم . چون مخروط برکره محیط است ، شکل ۴۲ را خواهیم داشت ، که در آن مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADE و ACB درزاویهٔ



شکل ۴۲

θ که مساوی نصف زاویهٔ رأس مخروط است مشترکند . پس نتیجه می‌شود که

$$\tan\theta = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{r}{h}, \qquad \sin\theta = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{R}{h-R}. \tag{۶}$$

ولی

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}, \tag{۷}$$

و از تلفیق (۶) و (۷) خواهیم داشت

$$\frac{r^2}{h^2} = \frac{R^2/(h-R)^2}{1-[R^2/(h-R)^2]} = \frac{R^2}{(h-R)^2-R^2} = \frac{R^2}{h^2-2Rh},$$

یا معادلاً

$$r^2 = \frac{R^2h^2}{h^2-2Rh} = \frac{R^2h}{h-2R},$$

که r^2 را به صورت تابعی از h بیان می‌کند . بنابراین ،

$$V = V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h^2}{h-2R}, \tag{۸}$$

که در آن $2R < h < \infty$ (چرا این بازه؟)

حال مسئله به‌یافتن مینیمم (مطلق) V بر بازهٔ نامتناهی باز $I = (2R, \infty)$ تحویل می‌شود . از (۸) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{h\to 2R^+} V(h) = \infty, \qquad \lim_{h\to\infty} V(h) = \infty.$$

لذا، طبق قضیهٔ ۱۲، مینیمم وجود دارد، ودریک‌نقطهٔ‌بحرانی V صورت می‌گیرد، زیرا یک مینیمم موضعی است (هر نقطه از بازهٔ باز I یک نقطهٔ درونی است). چون V بر I مشتقپذیر است، با مشتق

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2},$$

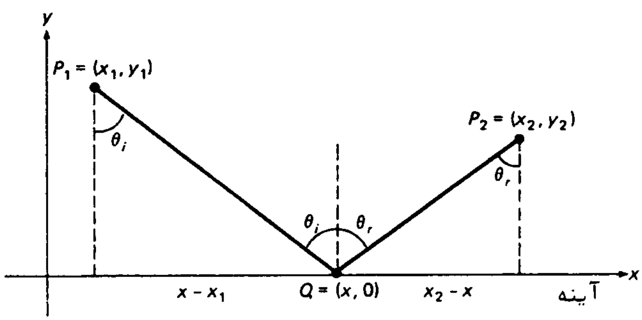
تنها نقطهٔ بحرانی V نقطهٔ $h = 4R$ است که در آن $dV/dh = 0$؛ درنتیجه، مینیمم حجم V بر بازهٔ I باید در $h = 4R$ صورت‌گیرد. لذا، کوچکترین حجم یک مخروط که قابل‌محیط شدن بر یک کره به شعاع R است مساوی است با

$$V|_{h=4R} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{16R^2}{4R-2R} = \frac{8}{3}\pi R^3.$$

با تعجب می‌بینیم که این درست دوبرابر حجم کرهٔ محاطی است.

مثال ۶. فرض کنیم P_1 و P_2 دو نقطه در یک طرف آینهٔ مسطحی بوده، و تمام مسیرهای P_1QP_2 ای را درنظرمی‌گیریم که‌از دو پاره‌خط P_1Q و QP_2 تشکیل شده‌اند که Q یک نقطهٔ دلخواه از آینه می‌باشد. بنابر قانون نور معروف به *اصل فرما*[1]، مسیر یک شعاع نورانی صادر شده از P_1 و منعکس شده به‌وسیلهٔ آینه تا نقطهٔ P_2 مسیری است که در کمترین زمان پیموده می‌شود. این مسیر را پیدا کنید.

حل. یک دستگاه مختصات دکارتی اختیار می‌کنیم که محور x در امتداد آینه است. نقاط P_1، Q، و P_2 را طبق شکل ۴۳ مختص‌دار می‌کنیم. فرض کنیم v سرعت نور درهوا باشد.



شکل ۴۳

1. *Fermat*

در این صورت، زمان لازم برای آنکه شعاع نور مسیر P_1QP_2 را بپیماید مساوی است با $T = L/v$، که در آن L طول کل P_1QP_2 است. لذا، اصل فرما خواستار مینیمم‌سازی تابع

$$T = T(x) = \frac{1}{v}(|P_1Q| + |QP_2|) = \frac{1}{v}[\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}] \tag{۹}$$

می‌شود، که در آن x طول نقطهٔ Q است. با مشتقگیری از T نسبت به x و مساوی صفر قرار دادن نتیجه، به دست می‌آید

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x - x_1}{v\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{x - x_2}{v\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}} = 0,$$

که ایجاب می‌کند که

$$\frac{x - x_1}{|P_1Q|} = \frac{x_2 - x}{|QP_2|}. \tag{۱۰}$$

این امر که T عملاً " مینیمم خود را بر $(-\infty, \infty)$ در نقطهٔ x معین شده به‌وسیلهٔ (۱۰) می‌گیرد نتیجه‌ای است از قضیهٔ ۱۲، زیرا T فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و وقتی $x \to \pm\infty$، $T \to \infty$. توجه کنید که، به‌خاطر ثابت بودن سرعت v، مینیمم‌سازی زمان T معادل مینیمم‌سازی طول L است.

حال فرض کنیم θ_i *زاویهٔ تابش*، یعنی زاویهٔ بین شعاع تابش P_1Q و عمود برآینه، بوده، و θ_r *زاویهٔ انعکاس*، یعنی زاویهٔ بین‌شعاع منعکس‌شدهٔ QP_2 و عمود بر آینه، باشد. از شکل واضح است که (۱۰) معادل

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r$$

بوده که به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که

$$\theta_i = \theta_r,$$

نتیجه‌ای که به **قانون *انعکاس*** معروف است. با الفاظ، زاویهٔ تابش مساوی‌زاویهٔ انعکاس است.

مثال ۷. فرض کنیم P_1 و P_2 دو نقطه در دو طرف یک سطح مسطح بین دو محیط، مثلاً "هوا و آب"، باشند. با استفاده از اصل فرما، مسیری را بیابید که شعاع نور خارج شده از P_1 پس از انعکاس از سطح مشترک تا P_2 می‌رود.

حل. به موازات حل مثال ۶، مختصات شکل ۴۴ را اختیار می‌کنیم.

فرض کنیم سرعت نور در محیط اول v_1 و در محیط دوم v_2 باشد. در این صورت، به جای (۹) داریم

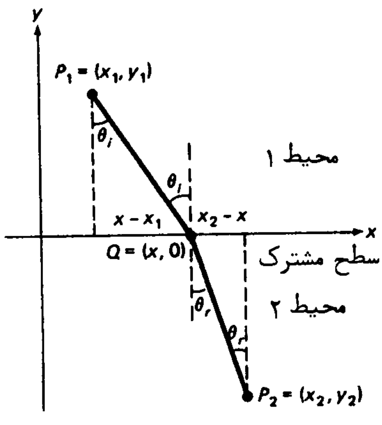
$$T = T(x) = \frac{|P_1Q|}{v_1} + \frac{|QP_2|}{v_2} = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}}{v_2}. \qquad (9')$$

با مساوی صفر قرار دادن dT/dx فورا" به شرط

$$\frac{x - x_1}{v_1|P_1Q|} = \frac{x_2 - x}{v_2|QP_2|} \qquad (10')$$

می‌رسیم که به‌خاطر عوامل v_1 و v_2 در مخرج با (۱۰) فرق دارد. باتوجه به‌شکل، می‌بینیم که (′۱۰) معادل است با

$$\frac{\sin \theta_i}{v_1} = \frac{\sin \theta_r}{v_2}, \qquad (11)$$



شکل ۴۴

که در آن θ_i باز زاویهٔ تابش است ولی θ_r زاویهٔ تفرق، یعنی زاویهٔ بین شعاع تفرق‌وعمود بر سطح مشترک، می‌باشد. فرمول (۱۱) *قانون مشهور تفرق*، که‌به‌*قانون اسنل*[1] نیزمعروف است، در نور از اهمیت زیادی برخوردار است. این قانون اغلب به‌شکل زیرنوشته می‌شود:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = \text{ثابت}$$

تبصره. در دو مثال پیش تلویحا" فرض شده است که نقاط P_1 ، Q ، وP_2 در یک

1. *Snell*

صفحه‌اند ، و صریحا " فرض شده‌است‌که مسیرهای‌جزئی P_1Q و QP_2 مستقیم‌الخط می‌باشند . این فرضها توجیه‌شده‌اند ، زیرا در غیراین‌صورت‌نور برای‌رفتن از P_1 تا P_2 زمان‌**طولانی‌تری** می‌خواهد (چرا؟) .

مثال ۸ . کوتاهترین فاصلهٔ بین نقطهٔ $P = (2, 0)$ و منحنی $y = \sqrt{x}$ را بیابید .

حل . فرض کنیم $L = |PQ|$ فاصلهٔ P تا نقطهٔ متغیر $Q = (x, \sqrt{x})$ از منحنی $y = \sqrt{x}$ باشد . در این صورت ، $L = L(x)$ تابعی از x است ، و

$$L^2 = |PQ|^2 = (x - 2)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 = x^2 - 3x + 4.$$

چون L مثبت است ، L در نقطهٔ c مینیمم دارد اگر و فقط اگر L^2 در c مینیمم داشته باشد (بیشتر توضیح دهید) . تنها نقطهٔ بحرانی L^2 در نقطهٔ $x = \frac{3}{2}$ است که در آن

$$\frac{d}{dx} L^2 = \frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 4) = 2x - 3 = 0.$$

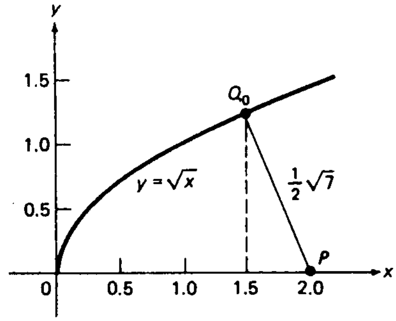
همچنین ، از اینکه $d^2(L^2)/dx^2 \equiv 2 > 0$ ، از آزمون مشتق دوم نتیجه می‌شود که L^2 در $x = \frac{3}{2}$ مینیمم موضعی اکید دارد . بنابراین ، L در $x = \frac{3}{2}$ نیز مینیمم موضعی اکیدی مساوی

$$L\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 4} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{7} \approx 1.32$$

خواهد داشت . ما در جستجوی مینیمم (مطلق) L بر $I = [0, \infty)$ هستیم ، بازه‌ای که منحنی $y = \sqrt{x}$ بر آن تعریف شده است . چون $L(0) = 2 > L(\frac{3}{2})$ و وقتی $x \to \infty$ ، $L \to \infty$ ، (بنابر استدلالی که در اثبات قضیهٔ ۱۲ به کار رفت) این مینیمم وجود دارد و در یک نقطهٔ درونی I گرفته می‌شود . از اینرو ، مینیمم L بر I با مینیمم موضعی L در $x = \frac{3}{2}$ یکی است ، و کوتاهترین فاصلهٔ بین P و منحنی $y = \sqrt{x}$ مساوی $L(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ می‌باشد . این فاصلهٔ بین P و Q_0 (یعنی ، نقطه‌ای از منحنی با مختص x ، $\frac{3}{2}$) می‌باشد (ر . ک . شکل ۴۵) . به عنوان تمرین ، نشان دهید که پاره‌خط PQ_0 بر مماس بر منحنی در Q_0 عمود است .

طرز حل مسائل بهینه‌سازی . روند گام به گام زیر شما را در حل مسائل بهینه‌سازی یاری می‌دهد .

۱ . کمیتی را که باید ماکزیمم یا مینیمم شود شناسایی کرده و آن را با حرف مناسبی ، که بهتر است یادآور معنی آن باشد ، نشان دهید . این متغیر **وابسته** است ، و هدف شما



شکل ۴۵

این است که مآلا " آن را به صورت تابعی از یک متغیر مستقل بیان کنید .

۲ . کمیات دیگری که درمسئله نقش دارند شناسایی کرده و آنها را نیز با حروف مناسبی نمایش دهید. یافتن این کمیات مستلزم آزمایشهایی است ، و باید انتظار اشتباهاتی را داشته باشید ، زیرا هر کس اشتباه می‌کند .

۳ . فرمولهایی را جستجو کنید که کمیات کمکی انتخاب شده در مرحلهٔ ۲ را به هم و به متغیر وابستهٔ اختیار شده در مرحلهٔ ۱ ربط دهد . کشف این‌گونه فرمولها معمولا " با رسم شکل ساده می‌شود .

۴ . یکی ازکمیات کمکی را به عنوان متغیر مستقل انتخاب و دیگران را حذف کنید. حال باید فرمولی داشته باشید که کمیتی که باید بهینه شود را به صورت تابعی چون f از متغیر مستقل بیان کند که بر بازه‌ای چون I تعریف شده است . بازهٔ I ممکن است شامل نقاط انتهایی باشد یا نباشد ، و I ممکن است به خاطر محدودیتهای ناشی از مفهوم واقعی مسئله از قلمرو طبیعی f کوچکتر باشد .

۵ . قسمت مشکل مسئله پشت سر گذارده شده است ، و بقیهٔ آن نسبتا " آسان است . شما در جستجوی ماکزیمم یا مینیمم تابع f بر بازه‌ای چون I هستید ، و این اکسترمم مطلق را می‌توان به کمک نظریهٔ مذکور در بخش ۲.۳ به دست آورد . بخصوص ، از مشتقگیری استفاده کرده نقاط بحرانی f ، یعنی نقاطی که در آن f' صفر است یا وجود ندارد ، را بیابید ، زیرا f ممکن است در این نقاط اکسترمم موضعی داشته باشد . ممکن است بخواهید با استفاده از آزمون اول یا دوم ثابت کنید f در یک نقطهٔ بحرانی عملا " اکسترمم *دارد* ، و مشخص کنید که اکسترمم ماکزیمم یا مینیمم است . ممکن است مقایسهٔ مقادیر تابع f در نقاط بحرانی با مقادیر f در نقاط انتهایی f به صورت توصیف شده در قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۲۶۷ ، لازم باشد . اگر f در

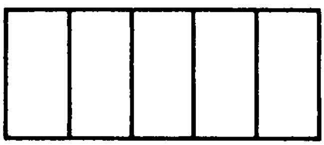
نقاط انتهایی I به بی‌نهایت نزدیک شود، استفاده از قضیهٔ ۱۲، صفحهٔ ۳۲۸، ممکن است مفید باشد.

۶. یادتان باشد که در پاسخ به سئوالات مطرح شده در صورت مسئله، جواب نهایی خود را از ریاضی به فارسی برگردانید.

مسائل

۱. مثل مثال ۱، مزرعه‌داری 800 ft حصار دارد که دور یک مزرعهٔ مستطیلی بکشد، ولی این بار یک طرف مزرعه امتداد مستقیم ساحل رودخانه‌ای است. با این فرض که ساحل رودخانه حصار نمی‌خواهد، بیشترین مساحتی که مزرعه‌دار می‌تواند حصار بکشد چقدر است؟

۲. مزرعه‌داری 600 ft حصار دارد که می‌خواهد دور پنج قطعهٔ مستطیلی مساوی مانند شکل ۴۶ را حصار بکشد. به ازای چه ابعادی مساحت کل محصور شده ماکزیمم است؟



شکل ۴۶

اگر یکی از خطوط مرزی مشترک در تمام قطعات در امتداد ساحل مستقیم رودخانه‌ای قرار داشته و به حصاری برای آن نیاز نباشد، جواب چه تغییری خواهد کرد؟

۳. مستطیلی به مساحت A بیابید که کوچکترین محیط را داشته باشد.

۴. ماکزیمم مجموع دو عدد (نه لزوماً مثبت) که حاصل ضربشان عدد معلوم c است چقدر است؟ مینیمم آنها چقدر است؟

۵. ماکزیمم حاصل ضرب دو عدد که مجموعشان عدد داده شدهٔ c است چقدر است؟ مینیمم آنها چقدر است؟

۶. ماکزیمم حاصل‌ضرب دو عدد که *تفاضل* آنها عدد داده شدهٔ c است چقدر است؟ مینیمم آنها چقدر است؟

۷. یک صورت غذا به مساحت کل 100 sq in با حاشیهٔ 2-in در بالا و پایین و 1-in در طرفین چاپ شده است. این صورت با چه ابعادی بیشترین مساحت را دارد؟

۸. بیشترین حجم یک جعبهٔ مستطیلی بدون در را بیابید که از بریدن مربعات کوچک از چهارگوشهٔ یک ورقهٔ فلزی مستطیلی 8 in. × 15 in و تا کردن لبه‌ها ساخته می‌شود.

بزرگترین مساحت مستطیل محاط شده در هر یک از اشکال زیر را بیابید.

۹. یک دایره به شعاع R

۱۰. یک نیمدایره به شعاع R که یک ضلع مستطیل روی قطر آن است.

۱۱. یک مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ b و ساق به طول s که یک ضلع مستطیل بر قاعدهٔ مثلث قرار دارد.

۱۲. مقاومت یک تیر با مقطع عرضی مستطیلی با حاصلضرب عرض در مربع ارتفاعش متناسب است. فرض کنید یک تیر چوبی از یک الوار مستدیر بریده شده باشد. به ازای چه نسبتی از ارتفاع به عرض مقاومت آن ماکزیمم است؟

۱۳. بیشترین مساحت یک ذوزنقه که سه ضلع ناموازی آن به طول s اند چقدر است؟ طول ضلع چهارم وقتی مساحت ماکزیمم است چیست؟

۱۴. در بین تمام مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که مجموع طول وتر و یک ضلعشان عدد ثابت معلوم c است کدام بیشترین مساحت را دارد؟

۱۵. فرض کنید BPC یک مثلث محاطی در یک دایره بوده، و ضلع BC با مماس بر دایره در P، یعنی رأس مقابل به BC، موازی باشد. به ازای چه BC ای مساحت BPC ماکزیمم است؟

۱۶. به ازای چه نسبتی از ارتفاع به شعاع یک چلیک روغن استوانه‌ای با حجم معلوم، مساحت کل چلیک مینیمم است؟

۱۷. حجم ماکزیمم یک فنجان با مساحت معلوم S به شکل یک استوانهٔ مستدیر قائم بدون سر چقدر است؟

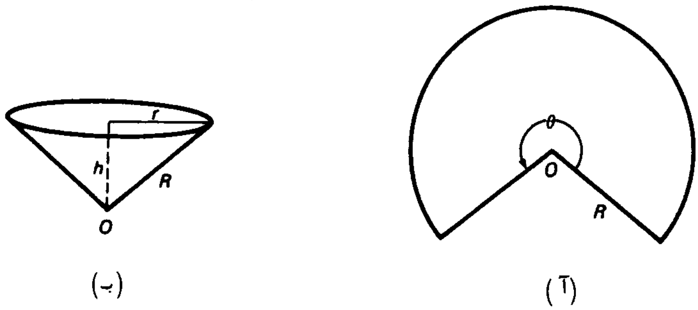
مینیمم مساحت آن به ازای حجم معلوم V چقدر است؟ رابطهٔ بین این دو مسئله را بیابید.

۱۸. بیشترین حجم یک مخروط مستدیر قائم با ارتفاع مایل s را بیابید.

۱۹. در بین تمام استوانه‌های مستدیر قائم حاصل از دوران یک مستطیل با محیط P حول یکی از اضلاعش استوانه با حجم ماکزیمم را بیابید.

۲۰. چه مثلث متساوی‌الساقینی با محیط P در دوران حول قاعده‌اش بیشترین حجم را تولید می‌کند؟

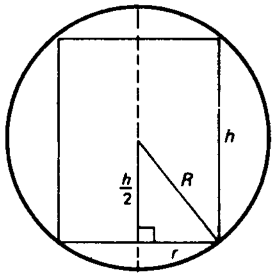
۲۱. یک فنجان مخروطی با بریدن یک قطاع مستدیر مرکزی به زاویهٔ θ از یک قرص کاغذی (ر.ک. شکل ۴۷ (آ)، که در آن قرص به شعاع R است) و چسباندن لبه‌های مستقیم قطاع به هم (ر.ک. شکل ۴۷ (ب)، که در آن فنجان به ارتفاع h بوده و سرش به شعاع r می‌باشد) ساخته شده است. فنجان به ازای چه مقداری از θ بیشترین حجم



شکل ۴۷

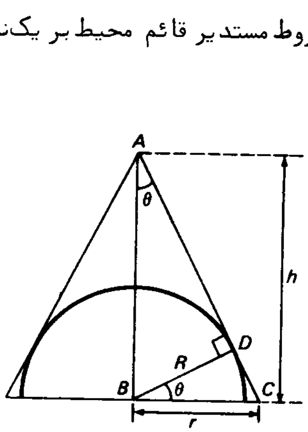
را دارد؟

۲۲. بیشترین حجم یک استوانهٔ مستدیر قائم محاط در یک کره به شعاع R را بیابید (ر. ک. شکل ۴۸).



شکل ۴۸

۲۳. کوچکترین حجم یک‌مخروط مستدیر قائم محیط بر یک‌نیمکره به شعاع R را بیابید (ر. ک. شکل ۴۹).



شکل ۴۹

۲۴. کوتاهترین فاصلهٔ بین نقطهٔ $(4, 1)$ و سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ را بیابید.

۲۵. بزرگترین فاصلهٔ قائم بین منحنیهای $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ بر بازهٔ $0 \le x \le 1$ را بیابید.

۲۶. فرض کنید تابع f بر $(-\infty, \infty)$ مشتقپذیر باشد. نشان دهید که کوتاهترین فاصله تا منحنی $y = f(x)$ از نقطهٔ ثابت $P = (a, b)$ غیرواقع بر منحنی در امتداد خط قائم به منحنی می‌باشد. این نتیجه را در مسئلهٔ ۲۴ تحقیق کنید.

۲۷. در مثال ۳ فرض کنید هزینهٔ ساختن بخش دوم جاده $500,000 بر میل باشد. حال چه مقدار از جادهٔ قدیم باید اختیار شود؟

۲۸. در مثال ۳ هزینهٔ ساختن تمام جادهٔ جدید چقدر باید پایین باشد تا ادارهٔ خدمات اجتماعی طرح ساختن یک جادهٔ دو بخشی را لغو کرده و جادهٔ مستقیم AB را ترجیح دهد؟ آیا ساختن جادهٔ L شکل AQB معنی دارد؟

۲۹. دو کشتی A و B در مسیرهای متعامدی به سمت نقطهٔ P روانند. کشتی A به سرعت 12 گره بوده و در آغاز در فاصلهٔ 25 میل دریایی از P قرار دارد، حال آنکه کشتی B به سرعت 16 گره بوده و در آغاز در فاصلهٔ 20 میل دریایی از P واقع است. چه وقت کشتیها بیش از همه به هم نزدیکند؟ نزدیکترین فاصله چقدر است؟

۳۰. دو نقطهٔ $P_1 = (0, 3)$ و $P_2 = (4, 5)$ داده شده‌اند. نقطهٔ Q بر محور x را طوری بیابید که مجموع فواصل $|P_1Q|$ و $|QP_2|$ مینیمم باشد. این را به مثال ۶ ربط دهید.

جزیره‌ای در 4 میلی یک ساحل مستقیم قرار دارد. در پایین جاده و در 5 میلی نقطه‌ای از ساحل که به جزیره نزدیکترین است مغازه‌ای وجود دارد. یک ساکن جزیره به طور منظم به مغازه سر می‌زند و در این راه از یک قایق پارودار استفاده کرده و بقیهٔ راه را پیاده می‌رود. سرعت راه رفتن این شخص 5 mph بوده و با سرعت متوسط 3 mph پارو می‌زند.

۳۱. در چه نقطه از ساحل پیاده شود تا در کمترین زمان به مغازه برسد؟

۳۲. فرض کنید دریا آرام باشد به‌طوری‌که بتواند با سرعت 4 mph پارو بزند. این مسیرروی را چگونه تغییر می‌دهد؟

۳۳. فرض کنید هدفش به جای مینیمم ساختن زمان رسیدن به مغازه، مینیمم سازی انرژی مصرف شده باشد، وفرض کنید انرژی صرف شده در دریا برای‌طی‌مسافتی دوبرابر انرژی مصرف شده در خشکی برای طی همان فاصله باشد. در چه‌فاصله از مغازه باید از قایق پیاده شود؟

۳۴. مماس بر منحنی $y = x^2 - 1$ را طوری‌بیابید که از ربع چهارم مثلثی باکمترین‌مساحت جدا کند. مساحت مینیمم چقدر است؟

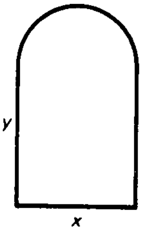
۳۵. نقطهٔ $P = (a, b)$ در ربع اول داده شده است. خطی ماربر P بیابید که از ربع اول

مثلثی به مساحت مینیمم جدا کند. این مساحت مینیمم چقدر است؟

۳۶. روشنایی یک منبع نور با قدرت منبع نسبت‌مستقیم و با مربع فاصلهٔ بین منبع‌وجسم روشن شده نسبت عکس دارد. روشنایی را در نقطهٔ متغیری‌ازخط‌واصل بین‌دو منبع نور به فاصلهٔ d از هم، که یکی k برابر از دیگری قویتر است، درنظر بگیرید. نشان دهید که در نقطه با ضعیفترین روشنایی، منبع قویتر $\sqrt[3]{k}$ برابر بیشتر ازمنبع‌ضعیفتر روشنایی تولید می‌کند.

۳۷. سیمی به طول L به دو قطعه بریده شده است. سپس یک قطعه به دایره‌ای به شعاع r و دیگری به مربعی به طول ضلع s تبدیل شده است. کوچکترین مساحت کل محصور به دو قطعه چقدر است؟ این مساحت چطور به دست می‌آید؟

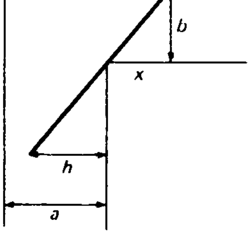
۳۸. پنجره‌ای به شکل مستطیلی است به قاعدهٔ x و ارتفاع y که در بالای آن نیمدایره‌ای به قطر x قرار گرفته است (ر.ک. شکل ۵۰).



شکل ۵۰

اگر محیط پنجره p باشد، ابعاد پنجره‌ای را بیابید که بیشترین نور از آن بگذرد.

۳۹. یک تیر سخت به طول L روی غلطکی در یک راهرو به عرض a به‌راهرودیگربه‌عرض b و عمود براولی‌حرکت می‌کند (ر.ک. شکل ۵۱). طول‌بلندترین‌تیری‌که می‌تواندبدون‌اشکال



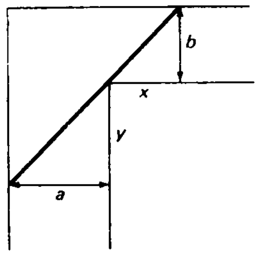
شکل ۵۱

از زاویهٔ قاعده عبور کند را بیابید. از عرض تیر صرف نظر کرده و فرض کنید تیر

همواره افقی باشد.

راهنمایی. فرض کنید x و h فواصل نموده شده در شکل باشند. h را به صورت تابعی از x بیان کرده، و نشان دهید که ماکزیمم h مساوی $(L^{2/3} - b^{2/3})^{3/2}$ است.

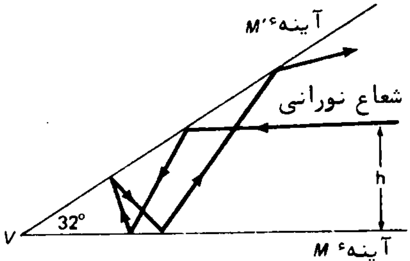
۴۰. در مسئلهٔ ۳۹ نشان دهید که طویلترین تیری که می‌تواند بپیچد کوتاهترین تیری است که با هر دو دیوار خارجی و نقطهٔ مشترک دیوارهای داخلی راهروها (به شکل ۵۲) تماس می‌یابد. با معلوم گرفتن این امر، مسئله را به صورت دیگر حل کنید.



شکل ۵۲

۴۱. ساختن زیر برای یافتن شعاع انعکاس QP_2 و نقطهٔ انعکاس Q در مثال ۶ را توجیه کنید. فرض کنید P'_2 نقش نقطهٔ P_2 در آینه، یعنی منعکس P_2 نسبت به محور x، بوده و پاره‌خط $P_1P'_2$ را رسم کنید. در این صورت، Q نقطه‌ای است که در آن $P_1P'_2$ محور x را قطع می‌کند، و QP_2 منعکس پاره‌خط QP'_2 نسبت به محور x است.

۴۲. فرض کنید یک شعاع نورانی موازی آینهٔ مسطح M و در فاصلهٔ h از M وارد یک گوه به زاویهٔ رأس 32 می‌شود که از M و آینهٔ مسطح دیگر M' که در لبه‌ای با M مشترک است تشکیل شده است (ر.ک. شکل ۵۳).



شکل ۵۳

نشان دهید که h نزدیکترین فاصلهٔ شعاع چندبار انعکاس تا رأس V گوه، یعنی لبهٔ

مشترک آینه‌ها ، است . آیا این نتیجه به اندازهٔ زاویهٔ رأس بستگی دارد؟شعاع‌وقتی به V از همیشه نزدیکتر است چند بار منعکس شده است؟ تعداد کل انعکاسهای شعاع چندبارانعکاس قبل از ترک گوه چند است؟

راهنمایی . از قانون انعکاس چندبار استفاده کنید .

۸.۳ کاربردها در تجارت و اقتصاد (اختیاری)

مفهوم حاشیه . لغت " حاشیه " مکرر در تجارت و اقتصاد ، و در عباراتی چون هزینهٔ حاشیه‌ای ، درآمد حاشیه‌ای ، سود حاشیه‌ای ، و غیره ظاهر می‌شود . لغت اول درهرعبارت همیشه یک تابع است ،و کلمهٔ *حاشیه* گرفتن میزان تغییر تابع داده‌شده نسبت به شناسه‌اش را می‌طلبد . لذا ، برای یافتن یک کمیت حاشیه‌ای باید عمل ریاضی مشتقگیری‌راانجام داد . واژهٔ " متوسط " ، که در نظریهٔ اقتصاد به‌کار می‌رود ، نیز یک عمل ریاضی را می‌طلبدوآن تقسیم تابع پیش از واژه به متغیر مستقل می‌باشد ، اما این را می‌توان بدون اطلاع ازحساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داد .

مثلا" ، هزینهٔ‌کل تولیدکمیت q از یک کالا تابعی است از q به نام *تابع هزینه* (*کل*) که با $C(q)$ نموده می‌شود . مشتق این تابع ، یعنی

$$C'(q) = \frac{dC(q)}{dq}, \tag{۱}$$

هزینهٔ *حاشیه‌ای* نام دارد و با $\mathrm{MC}(q)$ نموده می‌شود . در اینجا از قرارداد متعارفی در نظریهٔ اقتصاد پیروی کرده و بعضی از توابع را باحروفی مانند MC برای هزینهٔ حاشیه‌ای، AR برای درآمد متوسط ، و غیره نشان می‌دهیم . این جفت حروف را حاصل‌ضرب نگیریدا با این نماد ، (۱) به شکل زیر درمی‌آید :

$$\mathrm{AC}(q) = \frac{C(q)}{q}. \tag{۱'}$$

به همین نحو ، هزینهٔ متوسط تولید کمیت q از کالای مورد نظر عبارت است از

$$\mathrm{MC}(q) = \frac{dC(q)}{dq}.$$

در نوشتن $C(q)$ تلویحا" فرض می‌کنیم $C(q)$ به ازای جمیع اعداد حقیقی $q \geq 0$ تعریف شده‌است(خروجی ذاتا "نامنفی‌است)،واین فقط به ازای‌اعدادصحیح $q = 0, 1, 2, \ldots$ نیست . مسلما" این فرض برای روغن یا نمک مناسب است ، ولی برای کالاهایی که" در هر لحظه یکی می‌آید" اگر خروجی زیاد بوده و ما زیاد وسواس نداشته باشیم نیز معنی دارد .

لذا ، اگر جواب یک مسئلهٔ تولید " ساختن 31.5 TV در روز " باشد ، می‌توان 63 دستگاه را در 2 روز ساخت ، یا اینکه 31 یا 32 دستگاه در روز بسازیم .

تحت این شرایط ، تصور هزینهٔ حاشیه‌ای ، در سطح تولید معلوم q ، به عنوان هزینهٔ اضافی تولید یک واحد بیشتر ، درآمد حاشیه‌ای به عنوان درآمد اضافی حاصل از فروش یک واحد بیشتر ، و غیره تعاریف مناسبی خواهند بود . لذا ، مثلا " ، از تقریب مشتق آمده در ($1'$) با خارج قسمت تفاضلی خواهیم داشت

$$\text{MC}(q) = C'(q) \approx \frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q}, \tag{۲}$$

که در آن تقریب درصورتی مناسب است که Δq " به قدر کافی کوچک " باشد . طبق رسم این مبحث ، فرض می‌کنیم $\Delta q = 1$ به قدر کافی کوچک منظور شود . در این صورت ، اگر در (۲) قرار دهیم $\Delta q = 1$ ، با تقریب مناسبی خواهیم داشت

$$\text{MC}(q) = C(q+1) - C(q). \tag{۲'}$$

به عبارت دیگر ، هزینهٔ حاشیه‌ای در هر سطح تولید هزینهٔ اضافی تولید واحد بعدی خروجی می‌باشد .

مثال ۱ . کمپانی روز بارانی در می‌یابد که برای تولید q کیت از مجموعه بازی "سگ‌وگربه" که هر کیت شامل 100 بازی است

$$C(q) = 9720 + 500q - 1.5q^2 + 0.005q^3 \tag{۳}$$

دلارهزینه‌برمی‌دارد . هزینه‌های‌حاشیه‌ای‌ومتوسط نظیر را بیابید . جملهٔ ثابت در عبارت $C(q)$ را تعبیر کنید . رفتار هزینهٔ حاشیه‌ای را به‌عنوان تابعی از خروجی q تحلیل‌نمایید .

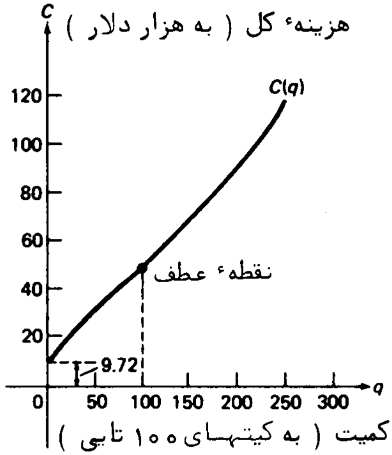
حل . شکل ۵۴ نمودار تابع هزینهٔ $C(q)$ را نشان می‌دهد . برای هزینهٔ حاشیه‌ای داریم

$$\text{MC}(q) = \frac{dC(q)}{dq} = 500 - 3q + 0.015q^2, \tag{۴}$$

و برای هزینهٔ متوسط

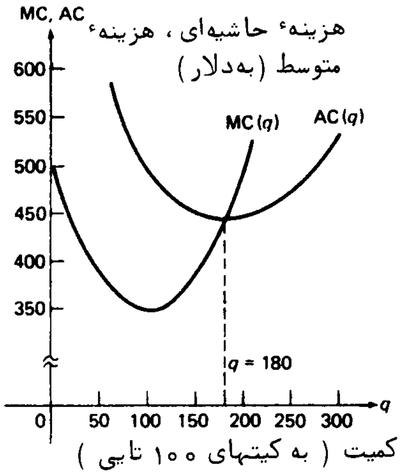
$$\text{AC}(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{9720}{q} + 500 - 1.5q + 0.005q^2. \tag{۵}$$

این دو تابع باهم در شکل ۵۵ رسم شده‌اند . جملهٔ ثابت 9720 در فرمول (۳) برای هزینهٔ کل میزان *سرانه* یعنی هزینه‌های ثابت تولید (کارخانه ، وسایل ، بیمه ، و غیره) ، را نمایش می‌دهد . این هزینه‌ها حتی در غیاب تولید نیز وجود دارند ؛ و لذا ، سرانه



شکل ۵۴

مساوی است با $C(0)$. چون مشتق یک ثابت صفر است ، هزینهٔ *حاشیه‌ای از سرانه مستقل می‌باشد* . همانطور که از فرمول (۵) دیده می‌شود ، این در مورد هزینهٔ متوسط درست نیست .



شکل ۵۵

با نوشتن عبارت (۴) برای هزینهٔ حاشیه‌ای به شکل

$$MC(q) = 0.015(q - 100)^2 + 350, \qquad (4')$$

معلوم می‌شود که $MC(q)$ به ازای هر $q \geq 0$ مثبت است ؛ و در واقع ، مقدار مینیمم خود 350

را در $q = 100$ می‌گیرد . اگر $\mathrm{MC}(q) > 0$ را نمی‌داشتیم ، مدل ما دارای نقص‌می‌شد، زیرا معنی اقتصادی هزینهٔ حاشیه‌ای آن را ذاتا" مثبت می‌کند . همچنین ، ملاحظه می‌شود که

$$\frac{d}{dq}\,\mathrm{MC}(q) = 0.03(q - 100),$$

درنتیجه ، اگر $q < 100$ ، $D_q\,\mathrm{MC}(q) < 0$ ، حال آنکه اگر $q > 100$ ، $D_q\,\mathrm{MC}(q) > 0$ پس نتیجه‌می‌شودکه $\mathrm{MC}(q)$ تابعی‌نزولی از خروجی برای‌سطوح‌تولید متوسط است($q < 100$)، اما مآلا" برای سطوح تولید بالاتر($q > 100$) تابعی صعودی خواهد شد . این یک پدیدهٔ نوعی است ، زیرا تولید بالا ابتدا ذخیره می‌دهد (" اقتصاد مقیاس") ، ولی مآلا" ، همین طور که برای سطوح بالاتر فشاری می‌آید ، به‌وسیلهٔ عوامل دیگر (مثلا" ، ظرفیت ناکافی کارخانه)کاهش‌می‌یابد .چون $\mathrm{MC}(q) > 0$ ، هزینه کل $C(q)$ تابعی صعودی‌می‌شود، حال آنکه تغییرعلامت $D_q\,\mathrm{MC}(q)$ در $q = 100$ به نقطهٔ عطف $C(q)$ در $q = 100$ منجر می‌شود (ر.ک. شکل ۵۴) .

مثال ۲ . مینیمم هزینهٔ متوسط تولید کیت بازی در مثال پیش‌را بیابید . نشان دهید که منحنیهای هزینهٔ حاشیه‌ای و متوسط درنقطهٔ نظیر به مینیمم هزینهٔ متوسط متقاطع‌اند . آیا این یک تصادف است؟

حل. با مساوی صفر گرفتن مشتق تابع (۵) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dq}\,\mathrm{AC}(q) = -\frac{9720}{q^2} - 1.5 + 0.01q = 0,$$

یا معادلا"

$$q^3 - 150q^2 = (q - 150)q^2 = 972{,}000 = 30(180)^2. \qquad (۶)$$

پس نتیجه می‌شود که $q = 180$ ریشهٔ معادلهٔ مکعبی (۶) است . در واقع ، $q = 180$ تنها ریشهٔ حقیقی است ، زیرا (۶) با

$$q^3 - 150q^2 - 972{,}000 = (q - 180)(q^2 + 30q + 5400) = 0$$

معادل است ، و عامل درجهٔ دوم همواره مثبت می‌باشد (چرا؟) . با محاسبهٔ مشتق دوم $\mathrm{AC}(q)$ معلوم می‌شود که

$$\frac{d^2}{dq^2}\,\mathrm{AC}(q) = \frac{19{,}440}{q^3} + 0.01 > 0 \qquad (q > 0).$$

بنابراین ، $\mathrm{AC}(q)$ در $q = 180$ مینیمم موضعی اکید دارد ، و به‌علاوه منحنی‌هزینهٔ‌متوسط

به بالا مقعر است. چون وقتی $q \to 0^+$ و $q \to \infty$ ، $AC(q) \to \infty$ ، این مینیمم موضعی مینیمم مطلق $AC(q)$ بر $(0, \infty)$ نیز هست. باگذاردن $q = 180$ در (۴) و (۵) بنتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} MC(180) &= 500 - 3(180) + 0.015(180)^2 \\ &= 500 - 540 + 486 = 446, \\ AC(180) &= \frac{9720}{180} + 500 - 1.5(180) + 0.005(180)^2 \\ &= 54 + 500 - 270 + 162 = 446. \end{aligned}$$

لذا، مینیمم هزینهٔ متوسط تولید کیت‌بازی \$446 بر کیت 100 بازی یا \$4.46 بر بازی‌است. برقراری $MC(180) = AC(180)$ ، که منحنیهای‌هزینهٔ حاشیه‌ای ومتوسط‌را در نقطهٔ‌نظیر به مینیمم هزینهٔ متوسط متقاطع می‌سازد (ر.ک. شکل ۵۵)، تصادفی نیست. در واقع،

$$\frac{d}{dq}AC(q) = \frac{d}{dq}\frac{C(q)}{q} = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2},$$

و چون مینیمم هزینهٔ متوسط یک نقطهٔ بحرانی $AC(q)$ است، باید ریشه‌ای از معادلهٔ $C'(q)q - C(q) = 0$ باشد، که با

$$MC(q) = C'(q) = \frac{C(q)}{q} = AC(q)$$

معادل است.

در دو مثال پیش، فعالیت اقتصادی کمپانی روزبارانی را از دیدگاه هزینهٔ تولید کیت بازی جدیدش " سگ و گربه " تحلیل کردیم. در مثالهای زیر مصرف‌کننده (خریدار) تولید را وارد صحنه می‌کنیم.

مثال ۳. از تحلیل بازاری شرکت روزبارانی معلوم می‌شود که تعداد کیتهای " سگ و گربه " ای که عمده فروشان وقتی بهای بازی p دلار بر کیت بوده سفارش داده‌اند از فرمول

$$q = 600 - 0.4p \qquad (۷)$$

به دست می‌آید. درآمدهای کل، حاشیه‌ای، و متوسط شرکت را بیابید. درآمدکل ماکزیمم چقدر است، و در چه سطح تولید و بها صورت می‌گیرد؟

حل. معنی‌اقتصادی *تابع‌تقاضای‌خطی* (۷) این‌است‌که‌دربهای $p = \$1500$ بر کیت (\$15 بر بازی) هیچ بازیی سفارش داده نمی‌شود، ولی به ازای هر \$100 کاهش در بهای یک کیت،

40 کیت بیشتر سفارش داده می‌شود . درآمد کل کمپانی ، یعنی $R(q)$ ، مساوی است با

$$R(q) = pq,$$

که در آن p بها و q میزان فروخته شده در این بها است . برای بیان $R(q)$ به عنوان فقط تابعی از q ، ابتدا (۷) را نسبت به p و برحسب q حل کرده به دست می‌آوریم

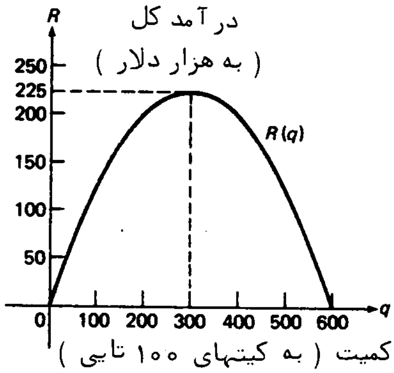
$$p = 1500 - 2.5q. \tag{۷'}$$

در این صورت ، داریم

$$R(q) = pq = (1500 - 2.5q)q = 1500q - 2.5q^2. \tag{۸}$$

نمودار این تابع در شکل ۵۶ نموده شده است . توجه کنید که $R(q)$ نامنفی است؛ ودرنتیجه از نظر اقتصادی فقط بر بازهٔ $[0, 600]$ معنی دارد . برای درآمد حاشیه‌ای داریم

$$\mathrm{MR}(q) = \frac{dR(q)}{dq} = 1500 - 5q,$$



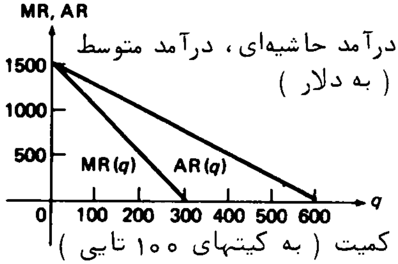
شکل ۵۶

و برای درآمد متوسط داریم

$$\mathrm{AR}(q) = \frac{R(q)}{q} = 1500 - 2.5q.$$

این دو تابع در شکل ۵۷ رسم شده‌اند . توجه کنید که منحنی درآمد متوسط(خطی مستقیم) با منحنی (۷') یکی است . این بدان خاطر است که $R(q) = pq$ با $R(q)/q = p$ معادل است. منحنی درآمد حاشیه‌ای خط مستقیمی است که شیبش دوبرابر قرینهٔ شیب منحنی درآمد متوسط بوده و همان نقطهٔ اشتراک $(0, 1500)$ را با محور قائم دارد . با کامل کردن مربع در (۸) معلوم می‌شود که

$$R(q) = -2.5(q - 300)^2 + 225{,}000,$$



شکل ۵۷

که از آن فورا" می‌بینیم که ماکزیمم $R(q)$ بربازهٔ $[0, 600]$ درنقطهٔ $q = 300$ صورت می‌گیرد (ر.ک. شکل ۵۶) . درآمد کل ماکزیمم نظیر عبارت است از $R(300) = \$225,000$ و بـــا فروش 300 کیت " سگ و گربه " به بهای $\$750 = 1500 - 2.5(300)$ بر کیت ($\$7.50$ بربازی) به دست می‌آید .

حال برای ادامهٔ تحلیل آغاز شده در مثالهای ۱ تا ۳ گام اصلی را برداشته و فرض می‌کنیم کمپانی روزبارانی ، مانند هر کسب و کار خوب ، طوری عمل می‌کند که سود (کل) خود را ماکزیمم سازد . البته ، سود کمپانی ، یعنی $P(q)$ ، تفاضل بین درآمد کل و هزینهٔ کل آن است؛ یعنی ،

$$P(q) = R(q) - C(q). \tag{۹}$$

مثال ۴ . سود ماکزیممی که کمپانی روزبارانی می‌تواند از فروش بازی " سگ و گربه " به دست آورد چقدر است و درچه سطح تولیدی صورت می‌گیرد ؟

حل . با گذاردن (۳) و (۸) در (۹) ، تابع زیر به دست می‌آید :

$$\begin{aligned} P(q) &= (1500q - 2.5q^2) - (9720 + 500q - 1.5q^2 + 0.005q^3) \\ &= -9720 + 1000q - q^2 - 0.005q^3, \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که مشتقش مساوی است با

$$\frac{dP(q)}{dq} = 1000 - 2q - 0.015q^2.$$

اگر $dP(q)/dq$ را مساوی صفر قرار دهیم ، می‌بینیم که نقاط بحرانی $P(q)$ در معادلهٔ درجهٔ دوم

$$0.015q^2 + 2q - 1000 = 0$$

صدق می‌کند . ریشه‌های این معادله عبارتنداز

$$q = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(0.015)(1000)}}{2(0.015)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 15}}{0.015}$$

(ر.ک. مسئلهٔ ۴۹، صفحهٔ ۴۳) . چون ریشهٔ منفی معنی اقتصادی ندارد ، آن را حذف کرده به دست می‌آوریم

$$q = \frac{-1 + 4}{0.015} = \frac{3}{0.015} = 200.$$

سود نظیر به این مقدار q عبارت است از

$$\begin{aligned} P(200) &= -9720 + 1000(200) - (200)^2 - 0.005(200)^3 \\ &= -9720 + 200{,}000 - 40{,}000 - 40{,}000 = \$110{,}280. \end{aligned}$$

این باید ماکزیمم مطلق $P(q)$ بر بازهٔ $[0, \infty)$ باشد ، زیرا $P(0) = -9720 < 0$ و وقتی $q \to \infty$ ، $P(q) \to -\infty$ (بیشتر توضیح دهید) . لذا ، سیاست سودسازی‌ماکزیمم کمپانی تولید200کیت(20,000)بازی"سگ‌وگربه "است‌که‌هرکیت‌به‌بهای $p = 1500 - 2.5(200) = \$1000$ ($10 بر بازی) فروخته شود . توجه کنید که خروجیی که سود را ماکزیمم می‌کند($q = 200$) با آنکه هزینهٔ متوسط‌را مینیمم می‌کند ($q = 180$) یا آنکه درآمد کل را ماکزیمم می‌کند ($q = 300$) فرق دارد . در واقع ، کمپانی در سطح تولیدی که هزینهٔ متوسط را مینیمم می‌کندسود کمتری می‌برد ($108,720) ، و در سطحی‌که درآمد کل را ماکزیمم می‌سازد سود بسیار کمتری را خواهد برد ($65,280) .

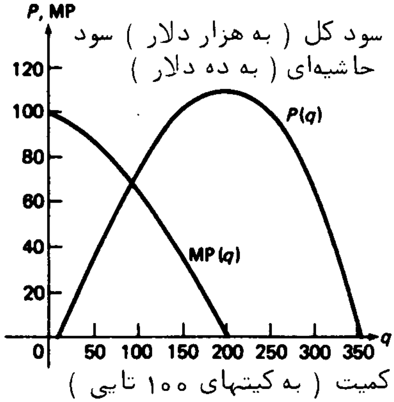
خلاصه کنیم ، در سطحی که سود ماکزیمم است ($q = 200$) کمپانی روزبارانی مبلغ $C(200) = \$89{,}720$ برای تولید 20,000 بازی " سگ و گربه " صرف می‌کند ، که هر یک را به بهای $10 می‌فروشد تا درآمد کل $200,000 به‌دست‌آوردوسودجالب $110,280 را ببرد . " شمای سوددهی " در هر سطح تولید در نمودار تابع $P(q)$ متجلی است که در شکل ۵۸ نموده شده است .

سطح تولید q_0 که سود کل را ماکزیمم می‌کند یک نقطهٔ بحرانی $P(q)$ است ؛ درنتیجه، **سود حاشیه‌ای**

$$\text{MP}(q) = \frac{dP(q)}{dq} = \frac{dR(q)}{dq} - \frac{dC(q)}{dq} = \text{MR}(q) - \text{MC}(q) \qquad (۱۱)$$

در $q = q_0$ مساوی 0 است . این معقول است ، زیرا اگر سود حاصل از فروش یک واحدبیشتر صفر باشد ، تولید بیشتر کالا مفهومی نخواهد داشت . چون $\text{MP}(q_0) = 0$ ، از (۱۱) معلوم‌می‌شودکه $\text{MR}(q_0) = \text{MC}(q_0)$. این نیز معقول است ، زیرا اگر فروش یک‌واحد دیگرکالا

پولی بیشتر از هزینهٔ صرف شده برای آن به ما ندهد، امکان سود بیشتر وجود نخواهد داشت. با اینحال، تنها شرط $\mathbf{MR(q_0) = MC(q_0)}$ نمی‌تواند تضمین کند که تولید q_0 سود را ماکزیمم سازد (ر.ک. مسئلهٔ ۱۹).



شکل ۵۸

مثال ۵. برای سود کل (۱۰) سود حاشیه‌ای زیر را داریم:

$$\mathbf{MP}(q) = 1000 - 2q - 0.015q^2,$$

که قبلاً در طول حل مثال ۴ محاسبه شد. شکل ۵۸ نمودار این تابع را همراه با تابع سود کلی $P(q)$ که مشتق آن‌است نشان‌می‌دهد. از شکل واضح‌است که ماکزیمم $P(q)$ در $q = 200$ است؛ و درنتیجه، $\mathbf{MP(200) = 0}$.

مفهوم الاستیسیته. در خاتمه، مفهوم *الاستیسیته* را معرفی می‌کنیم که در تجارت و اقتصاد دارای اهمیت است. البته، منظور از مشتق تابع $y = f(x)$ نسبت به x یعنی کمیت

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y \text{ تغییر در }}{x \text{ تغییر در }} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

فرض‌کنید تغییرات Δx و Δy را با تغییرات نسبی $\Delta x/x$ و $\Delta y/y$ عوض‌کرده باشیم. دراین صورت، کمیت مشابه زیر به دست می‌آید:

$$e_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y \text{ تغییر نسبی در }}{x \text{ تغییر نسبی در }} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y}{y}}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx},$$

به نام *الاستیسیتهٔ* تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ x. الاستیسیته، به عنوان سنجشی از " تغییر

y ناشی از تغییر x " ، دارای این ویژگی است که از واحدهای سنجش x و y مستقل است . در واقع ، در تشکیل نسبتهای $\Delta x/x$ و $\Delta y/y$ واحدها حذف شده و بدین وسیله الاستیسیته را (برخلاف خود مشتق) کمیتی " بدون بعد " می‌سازد . این در بعضی از مسائل‌تجارت که در آنها مثلا " y مقدار یک کالای مورد تقاضا به بهای x است بسیار مناسب می‌باشد . در این صورت ، تغییر واحدهای سنجش x مثلا " از دلار به پزوس، یا واحدهای سنجش y از یکی به دیگری، مقدار الاستیسیتهٔ e_{yx} را بلاتغییر می‌گذارد .

فرض‌کنیم تقاضا برای کالای تولید شده توسط یک شرکت انحصارگر[1] با تابع $q = q(p)$ توصیف شود ، که در آن q کمیت مورد تقاضا به بهای p است . مثلا " ، طبق فرمول (۷) ، تقاضا برای بازی " سگ و گربه " تولید شده به‌وسیلهٔ کمپانی روزبارانی (مثالهای ۱ تا ۵) تابع خطی $q = 600 - 0.4p$ می‌باشد . در این صورت ، کمیت

$$e_D = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \qquad (۱۳)$$

الاستیسیتهٔ تقاضا به بهای p نام دارد . علامت منها در (۱۳) نباید شما را نگران کند . تنها هدف آن مثبت ساختن الاستیسیتهٔ تقاضاست تا با رسم اقتصادی سازگار بوده و این امر را پیش‌بینی کند که یک‌منحنی تقاضا دارای شیب منفی می‌باشد (بهای بالاتر،تقاضای کمتر) . گوییم تقاضا *الاستیک* است اگر $e_D > 1$ و *غیر الاستیک* است اگر $e_D < 1$.

مثال ۶ . فرض‌کنیم تابع تقاضا مثل مثال ۳ عبارت باشد از $q = 600 - 0.4p$. e_D را پیدا نمایید . تقاضا درچه بهایی الاستیک است؟ غیرالاستیک است؟

حل. با استفاده از (۱۳) ، الاستیسیتهٔ تقاضا را حساب می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$e_D = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{0.4p}{600 - 0.4p} = \frac{p}{1500 - p}.$$

لذا ، $e_D > 1$ و تقاضا الاستیک است اگر $p > 750$ ، حال آنکه $e_D < 1$ و تقاضا غیرالاستیک است اگر $p < 750$. (شرایط $p < 1500$ و $p \geq 0$ نیز باید برقرار باشند .) ما قبلا " در مثال ۳ دیدیم که درآمد کل به ازای $p = 750$ ماکزیمم می‌شود . لذا ، می‌بینیم که برای‌ماکزیمم کردن درآمد ، اگر تقاضا الاستیک باشد بها باید کم و اگر غیرالاستیک باشد بها باید زیاد

---

۱ . *یک شرکت در میدان رقابت نمی‌تواند تقاضا را با تعدیل بها اداره کند ، بلکه باید محصول خود را به بهای تقریبا " متداول وارد بازار نماید .*

شود . به‌علاوه ، درآمد اگر بها $p = 750$ باشد ماکزیمم است که به ازای آن الاستیسیته درست مساوی 1 می‌باشد . این نتایج برای هر تابع تقاضای نزولی ، خطی یا غیرخطی ، برقرارند (ر.ک. مسئلهٔ ۲۳) .

معنی اقتصادی همهٔ اینها روشن است : هرگاه تقاضا در بهای داده شده‌ای الاستیک باشد ، آنگاه کاهش بها به افزایش نسبتاً " زیادی در فروش منجر می‌شود ؛ درنتیجه ، درآمد کل که حاصل ضرب بها و کمیت است ، افزایش می‌یابد . از آن سو ، هرگاه تقاضا غیرالاستیک باشد ، افزایش بها به کاهش نسبتاً " کمی در فروش منجر می‌شود ؛ درنتیجه ، درآمد باز افزایش خواهد یافت .

مسائل

۰۱ فرض کنید تابع هزینه خطی باشد ؛ درنتیجه $C(q) = a + bq$ ، که در آن a و b ثابتهای مثبتی هستند . هزینه‌های حاشیه‌ای و متوسط نظیر را بیابید . آیا هزینهٔ متوسط مینیمم وجود دارد ؟

۰۲ آیا تابع هزینهٔ $C(q) = 1000 + 100q - 0.5q^2$ به ازای $q = 50$ ، به ازای $q = 150$ معتبر است ؟ جواب خود را توضیح دهید .

۰۳ فرض کنید هزینهٔ کل شرکتی که q واحد از کالایی را تولید می‌کند $C(q) = 490 + 20q + 0.1q^2$ دلار باشد . هزینه‌های حاشیه‌ای و متوسط نظیر را بیابید . هزینهٔ متوسط مینیمم و سطح تولیدی که در آن صورت می‌گیرد را بیابید . تحقیق کنید که در این سطح تولید $MC(q) = AC(q)$. نشان دهید که در نوشتن $C(q + 1) - C(q) = MC(q)$ به ازای هر سطح تولید $10¢$ خطا صورت می‌گیرد . چرا این خطا بی‌اهمیت است ؟

۰۴ فرض کنید هزینهٔ کل یک شرکت در تولید q واحد از کالایی $C(q) = 3380 + 18q - 0.06q^2 + 0.001q^3$ دلار باشد . هزینه‌های حاشیه‌ای و متوسط نظیر را بیابید . هزینهٔ متوسط مینیمم و سطح تولیدی که در آن صورت می‌گیرد را بیابید . هزینهٔ حاشیه‌ای را با هزینهٔ تولید واحد بعدی در این سطح مقایسه نمایید .

راهنمایی . توجه کنید که

$$q^3 - 30q^2 - 1{,}690{,}000 = (q - 130)(q^2 + 100q + 13{,}000).$$

۰۵ **هزینهٔ متغیر** $VC(q)$ مساوی هزینهٔ کل $C(q)$ منهای هزینهٔ ثابت (سرانه) تعریف می‌شود . برای تابع هزینهٔ مسئلهٔ قبل هزینهٔ متغیر متوسط را بیابید . هزینهٔ متغیر متوسط مینیمم و سطح تولیدی را که در آن صورت می‌گیرد بیابید . تحقیق کنیدکه در

این سطح تولید $MC(q) = AVC(q)$. چرا این باید در حالت کلی درست باشد؟

۶. برای تابع هزینهٔ (۳) کمپانی روزبارانی هزینهٔ متغیر متوسط مینیمم و سطح تولیدی را که در آن صورت می‌گیرد بیابید.

۷. فرض کنید شرکتی دارای تابع هزینهٔ کل مکعبی $C(q) = a + bq + cq^2 + dq^3$ باشد، که در آن a, b, c, d ثابت‌اند، و نیز وقتی مثل مثال ۱ تولید افزایش یابد، هزینهٔ حاشیه‌ای ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. نشان دهید که $a > 0, b > 0, c < 0,$ $d > 0, c^2 < 3bd$. نشان دهید که $C(q)$ در $q_0 = -c/3d$ نقطهٔ عطف دارد.

۸. اگر خطی از مبداء به منحنی هزینهٔ کل مماس کنیم، طول نقطهٔ تماس سطح تولیدی است که هزینهٔ متوسط را مینیمم می‌کند. چرا؟

۹. در مثال ۳، با بیان درآمد به صورت تابعی از بها (به جای کمیت)، بها و کمیتی که درآمد کل را مینیمم می‌کنند بیابید.

۱۰. یک شرکت با سرانهٔ C_0 ، q واحد از کالایی را تولید می‌کند که به بهای ثابت واحدی p دلار می‌فروشد. فرض کنید k دلار صرف تولید هر واحد اضافی شود که $k < p$. شرکت در چه سطح تولیدی مساوی می‌کند، و تعبیر نموداری این **نقطهٔ تساوی** چیست؟

۱۱. فرض کنید تولید یک نوار کاست که (بدون واسطه) **$6.00** فروش می‌رود **$3.50** هزینه بردارد. اگر سرانه **$10,000** باشد، چند نوار باید فروش رود تا مساوی کرده باشیم؟

۱۲. بلیت قایق تفریحی شبانه روی رودخانه که توسط شرکتی اداره می‌شود **$12.50** است، ولی شرکت برای جلب مسافر بیشتر به ازای هر مسافر بیش از 100 تا به هریک **5¢** پس می‌دهد. قایق گنجایش 200 مسافر را دارد. ماکزیمم درآمدی که شرکت انتظار دارد چقدر است؟ اگر تعداد متوسط افرادی که با بلیت کامل سوار قایق می‌شوند از عدد معینی تجاوز کند، شرکت باید تخفیف خود را حذف کند. این عدد چقدر است؟

۱۳. یک دوره‌گرد درمی‌یابد که می‌تواند 200 نوشابه را روزانه به بهای هر یک **50¢** بفروشد، ولی به ازای هر **5¢** ی که از بهای هر نوشابه بکاهد می‌تواند 50 تا بیشتر بفروشد. چه بهایی درآمد کل وی را ماکزیمم می‌کند؟ فرض کنید تولیدکننده هر نوشابه را به **20¢** به وی بفروشد. چه بهایی سود کل وی را ماکزیمم می‌سازد؟ اگر به جای ماکزیمم سازی سود به اشتباه درآمدش را ماکزیمم کند، چقدر پول از دست می‌دهد؟

بهای ماکزیمم‌ساز درآمد کل را درصورتی بیابید که تابع تقاضا به صورت زیر باشد.

۱۴. $q = 1200 - 1.5p$

۱۵. $q = 1600 - 5p$

۱۶. $q = 675 - p^2$

۱۷. $q = \sqrt{1800 - p^2}$

۱۸. $q = 2500 - p^{3/2}$

در هر حالت بازهٔ تقاضای الاستیک$(e_D > 1)$ و بازهٔ تقاضای غیرالاستیک$(e_D < 1)$ رابیابید .

۱۹ . چرا شرط $MR(q_0) = MC(q_0)$ نمی‌تواند تضمین کند که سطح تولید q_0 سود را ماکزیمم می‌کند ؟ نشان‌دهید که اگر در این سطح درآمد حاشیه‌ای آهسته‌تر از هزینهٔ حاشیه‌ای افزایش یابد ، q_0 سود را ماکزیمم خواهد کرد .

۲۰ . نشان دهید که تعریف

$$e_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{درصد تغییر در } y}{\text{درصد تغییر در } x}$$

الاستیسیتهٔ تابع $y = f(x)$ با (۱۲) معادل است .

۲۱ . نشان دهید هرگاه $y = f(x)$ دارای‌الاستیسیتهٔ e_{yx} باشد ،آنگاه $xf(x)$ دارای‌الاستیسیتهٔ $1 + e_{yx}$ است .

۲۲ . تحقیق کنید که $e_{zx} = e_{zy}e_{yx}$ (قانون زنجیره‌ای برای الاستیسیته) .

۲۳ . منحنی تقاضای $q = q(p)$ داده شده است ، که در آن $q(p)$ یک تابع نزولی است . نشان دهید که درآمد کل $R(p) = pq$ در بهایی که الاستیسیتهٔ تقاضای e_D مساوی 1 است ماکزیمم می‌شود . نشان دهید که اگر تقاضا در بهای معلومی الاستیک باشد $(e_D > 1)$ ، کاهش بها درآمد را افزایش می‌دهد ، حال آنکه اگر تقاضا غیرالاستیک باشد $(e_D < 1)$ ، افزایش بها درآمد را افزایش خواهد داد .

اگر شرایط به صورت زیر تعدیل‌شوند ، سود ماکزیمم کمپانی روزبارانی‌مطرح شده درمثالهای ۱تا۶حاصل‌ازفروش‌بازی "سگ‌وگربه"وسطح تولیدی که در آن صورت می‌گیرد را بیابید .

۲۴ . تابع هزینه به جای (۳) عبارت است از $C(q) = 9720 + 500q$

۲۵ . تابع هزینه به جای (۳) عبارت است از $C(q) = 9720 + 500q + 1.5q^2$

۲۶ . تابع تقاضا به جای (۷) عبارت است از $q = 775 - 0.4p$

۲۷ . تابع تقاضا به جای (۷) عبارت است از $q = 900 - p$

۲۸ . رقابت کمپانی را وادار به فروش بازیها به بهای هر یک \$6.50 می‌کند .

۲۹ . یک شرکت در هر هفته q گالن مایع خاص به بهای $C(q) = 2000 + 5q + 0.001q^2$ دلار تولید و به‌بهای‌گالنی \$15 می‌فروشد .دولت‌می‌خواهد بر هر گالن‌مایع r دلار مالیات ببندد ، ضمن اینکه می‌داند شرکت این مالیات را به هزینه‌هایش افزوده و تولید را طوری تعدیل می‌کند که پس از مالیات‌بندی سود ماکزیمم بدهد . بیشترین مالیات‌بر درآمد $T = rq$ دولت چقدر است ، و در چه میزان مالیاتی r صورت می‌گیرد ؟ماکزیمم سود شرکت پس از مالیات بندی چقدر است و در چه سطح تولیدی صورت می‌گیرد ؟

۳۰ . در مسئلهٔ ۲۹ فرض‌کنید شرکت بتواند دولت را متقاعدکند که میزان مالیات‌بردرآمد

زیاد است، و دولت بپذیرد که میزان مالیات را گالنی $1.50 کاهش دهد. نشان دهید که این مالیات بردرآمد را به اندازهٔ 10% کاهش می‌دهد ولی در عین حال سود شرکت را دوبرابر می‌کند.

۳۱. در مسئلهٔ ۲۹ فرض‌کنید شرکت به دولت بقبولاند که مایع مربوطه را بدون مالیات تولید کند و در عوض سالانه $750,000 جهت پروانهٔ کار بپردازد. نشان دهید که این درآمد سالانهٔ دولت را $100,000 افزایش می‌دهد، ولی در عین حالت سود شرکت را بیش از دوبرابر می‌کند.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

قضیهٔ مقدار میانگین و قضیهٔ رل
قضیهٔ مقدار میانگین کشی
ماکزیممها و منیممهای یک تابع
اکسترممهای موضعی در مقابل اکسترممهای مطلق
آزمون برای اکسترممهای مطلق
شرط لازم برای اکسترمم موضعی
نقاط بحرانی
توابع یکنوا و آزمون یکنوایی
آزمونهای مشتق اول و دوم برای اکسترمم موضعی
توابع مقعر و آزمون تقعر
نقاط عطف
آزمونهای دوم و سوم برای یک نقطهٔ عطف
تکنیکهای رسم منحنی
حدود نامتناهی و حدود در بی‌نهایت
صور مبهم $0/0$ ، $0\cdot\infty$ ، ∞/∞ ، و $\infty-\infty$
مجانبهای افقی، قائم، و مایل
مشتقات نامتناهی و مماسهای قائم
قاعدهٔ هوپیتال و صور مختلف آن
مسائل بهینه‌سازی
حاشیه و الاستیسیته در تجارت و اقتصاد

مسائل تکمیلی

۱. نشان دهید هرگاه تابع f بر بازهٔ I شامل نقاط a و $a+\Delta x$ مشتقپذیر باشد، آنگاه نمو f در a را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a + t\,\Delta x)\,\Delta x, \qquad (\text{یک})$$

که در آن $0 < t < 1$.

نقطهٔ t صادق در فرمول (یک) را درصورتی بیابید که

۲. $f(x) = x^2 + x + 1, a = 2, \Delta x = 0.1$

۳. $f(x) = 1/x, a = 1, \Delta x = -0.1$

۴. $f(x) = \sqrt{x}, a = 9, \Delta x = -5$

۵. $f(x) = \sin x, a = 0, \Delta x = 1$

۶. به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{اگر } x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{اگر } x > 1 \end{cases}$$

دو نقطهٔ t صادق در فرمول (یک) را درصورتی بیابید که $a = 0$ ، $\Delta x = 2$.

۷. نشان دهید که قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۲۶۱ (قضیهٔ مقدار میانگین کشی)، که می‌گوید

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a < c < b), \qquad (\text{دو})$$

در صورت تعویض شرط ناصفربودن g' در هر نقطهٔ (a, b) با شرط صفر نبودن همزمان f' و g' در هر نقطهٔ (a, b) و $g(a) \neq g(b)$ برقرار می‌ماند.

نقطهٔ c صادق در فرمول (دو) را درصورتی بیابید که

۸. $f(x) = 2x^3, g(x) = x^2 + 2x, a = -2, b = 2$

۹. $f(x) = \frac{1}{2}x^2, g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$

۱۰. $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x, a = 0, b = 3\pi/2$

توجه کنید که مسئلهٔ ۷ در اینجا نقش دارد، زیرا در هر حالت g' در نقطه‌ای از (a, b) صفر می‌باشد.

۱۱. **قضیهٔ تعمیم یافتهٔ رل** را ثابت کنید: فرض کنید f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده، و f در هر نقطه از بازهٔ باز (a, b) مشتق n م $f^{(n)}(x)$ داشته باشد. همچنین، $n-1$ نقطه مانند $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ وجود داشته باشند که $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$ و $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{n-1}) = f(b)$. در این صورت، نقطه‌ای مانند c در

(a, b) هست به طوری که $f^{(n)}(c) = 0$.

نقطهٔ c صادق در قضیهٔ تعمیم یافتهٔ رل رادرصورتی بیابید که

۱۲. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 14,\ n = 2,\ a = 2,\ x_1 = 3,\ b = 4$

۱۳. $f(x) = \sin x + \cos x,\ n = 3,\ a = -5\pi/4,\ x_1 = -\pi/4,\ x_2 = 3\pi/4,\ b = 7\pi/4$

۱۴. $f(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x - 5,\ n = 4,\ a = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,$
$b = 4$

۱۵. $f(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 29,\ n = 5,\ a = -3,\ x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,$
$b = 3$

۱۶. اکسترممهای مطلق تابع مکعبی $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$ بربازهٔ $[-1, 1]$ را بیابید. همین‌کار را بر $[0, 2]$ و $[1, 3]$ نیز انجام دهید .

۱۷. تابع

$$f(x) = \frac{ax + b}{(x-1)(x-4)}$$

به ازای چه ثابتهای a و b ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی -1 در $x = 2$ دارد ؟

۱۸. با استفاده از اکسترممها نشان دهید که اگر $|x| \le 2$ ، $|3x - x^3| \le 2$.

۱۹. فرض کنید $f(x) = x^r + (1 - x)^r$. با استفاده از اکسترممها نشان دهید که به ازای $0 < r < 1$ ، $1 \le f(x) \le 2^{1-r}$ ، حال آنکه به ازای $r \ge 1$ ، $2^{1-r} \le f(x) \le 1$.

۲۰. اکسترممهای موضعی تابع $f(x) = x^m(1 - x)^n$ را درصورتی بیابید که m و n اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشند .

۲۱. مینیمم تابع $f(x) = \max\{2|x|, |1 + x|\}$ چقدر است ؟

۲۲. تابع $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ دربازهٔ $[0, 2\pi]$ شش نقطهٔ عطف دارد . آنهارا پیداکنید.

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید . تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است ؟ نزولی است ؟ به بالا مقعر است ؟ به پایین مقعر است ؟ اکسترممهای فراگیر ، مجانبها ، مماسهای قائم و نقاط بازگشت را بیابید ، و تابع را رسم نمایید .

۲۳. $f(x) = 2(x - 3)x^{1/2}$

۲۴. $f(x) = 3x(x - 2)^{2/3}$

۲۵. $f(x) = (1 - x)x^{2/3}$

۲۶. $f(x) = 4(x - 1)x^{4/3}$

۲۷. $f(x) = x^{1/2}(2 - x)^{3/2}$

۲۸. $f(x) = x^{1/3}(1 - x)^{2/3}$

حدود زیر را محاسبه کنید .

۲۹. $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$$

۳۰. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

۳۱. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{4\sin^2 (x/2)}\right)$

۳۲. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})$

۳۳. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

۳۴. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x+\sqrt{x}})$

۳۵. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+100}}$

۳۶. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$

حد داده شده را درصورتی حساب کنید که m و n اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشند

۳۷. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$

۳۸. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1}$

۳۹. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$

۴۰. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$

۴۱. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}\right)$

۴۲. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^m+1}{x^n+1}$

راهنمایی. از قاعدهٔ هوپیتال هر جا شد استفاده کنید.

۴۳. مساحت ماکزیمم یک مستطیل به محیط p را بیابید.

۴۴. مساحت ماکزیمم یک مثلث متساوی‌الساقین به طول ساق s را بیابید.

۴۵. مخروط مستدیر قائم با بیشترین حجم و محاط شده در کره چه کسری از حجم کره را دربر دارد؟

۴۶. نتیجهٔ n سنجش از کمیت مجهول x عبارت است از $x_1, x_2, \dots, x_n$. چه مقداری از x تخمین **کمترین مربعات** x است، به این‌معنی که عبارت $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$ را مینیمم می‌سازد؟

چه کسری از ارتفاع به شعاع هزینهٔ ساخت یک قوطی استوانه‌ای با حجم معلوم را مینیمم می‌کند مشروط براینکه قوطی از مادهٔ زیر ساخته شده باشد:

۴۷. سه برابر از مادهٔ به کار رفته در سر و ته قوطی گرانتر باشد؟

۴۸. نصف مادهٔ به کار رفته در سر و ته قوطی قیمت داشته باشد؟

مساحت ماکزیمم مستطیل محاط شده در اشکال زیر را بیابید:

۴۹. یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع a و b که دو ضلع مستطیل بر اضلاع مثلث واقعند.

۵۰. ناحیهٔ محدود به محور x و سهمی $y = 3 - x^2$ که یک ضلع مستطیل بر محور x قرار دارد.

فرض کنید یک بسته را فقط وقتی می‌توان با پست فرستاد که مجموع طول و دور (محیط یک مقطع عرضی) آن از 96 اینچ تجاوز نکند. حجم بزرگترین بستهٔ قابل پستی را بیابید که مقطع عرضی‌اش به یکی از صور زیر باشد:

۵۱. یک مربع

۵۲. یک مستطیل که نسبت اضلاعش 3:2 است

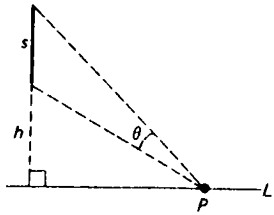
۵۳. یک شش ضلعی منتظم

۵۴. یک دایره

۵۵. در مسائل ۵۱ تا ۵۴ طول بزرگترین بستهٔ قابل پست درهر حالت (و درنتیجه، دور آن) یکی است. این امر را توضیح دهید.

۵۶. نقطهٔ P داخل یک زاویهٔ حاده داده شده است. فرض کنید L خط مستقیمی ماربر P • باشد که زاویه را در مثلثی باکمترین مساحت قطع می‌کند. نشان دهید P نقطهٔ میانی قسمتی از L است که داخل زاویه قرار دارد. نشان دهید که این خاصیت نقطهٔ P در مسئلهٔ ۳۵، صفحهٔ ۳۳۹، را نیز مشخص می‌نماید.

۵۷. پای یک پاره خط به طول s در فاصلهٔ h تا خط مستقیم L قرار دارد که بر راستای پاره‌خط عمود است (ر.ک. شکل ۵۹). به ازای چه نقطهٔ P از خط، زاویهٔ θ روبرو

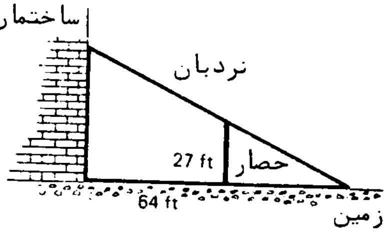


شکل ۵۹

به پاره‌خط در P ماکزیمم است ؟

۵۸. با استفاده از مسئلهٔ قبل ، جواب دیگری به مسئلهٔ ۷۴ ، صفحهٔ ۲۵۲ ، بدهید .

۵۹. یک حصار ایمنی به موازات ساختمان بلند اداره‌ای کشیده شده است . فرض کنید حصار 27 ft ارتفاع و 64 ft از ساختمان فاصله داشته باشد (ر.ک. شکل ۶۰) . مردان آتش‌نشانی می‌خواهند با نردبانی که پایش روی حصار قرار دارد خود را به ساختمان



شکل ۶۰

برسانند . کوتاهترین نردبان چقدر باید باشد که آنها را به ساختمان برساند ؟

۶۰. اگر $C = C(q)$ تابع هزینهٔ کل شرکتی باشد ، کمیت

$$e_C = \frac{q}{C}\frac{dC}{dq}$$

الاستیسیتهٔ هزینه به ازای تولید q نام دارد . نشان دهید هرگاه در سطح تولید معلومی $e_C > 1$ ، آنگاه هزینهٔ حاشیه‌ای (MC) از هزینهٔ متوسط (AC) بیشتر بوده و وقتی تولید افزایش یابد ، AC افزایش می‌یابد ، حال آنکه اگر $e_C < 1$ ، MC از AC کمتر است و AC با افزایش تولید کاهش خواهد یافت .

انتگرالها ۴

وقتی به ایدهٔ شهودی میزان تغییر معنی دقیق می‌دادیم به مفهوم مشتق تابع رسیدیم، و دو فصل اخیر به *حساب دیفرانسیل*، یعنی بررسی مشتقات و کاربردآنها، اختصاص‌داشتند. مفهوم اساسی دیگر حساب دیفرانسیل و انتگرال *انتگرال* یک تابع است که در تلاش برای معنی دقیق دادن به ایدهٔ مساحت یک منحنی با یک یا چند لبهٔ خمیده به وجود می‌آید. مطالعهٔ انتگرالها و کاربرد آنها، که اینک بدان می‌پردازیم، *حساب انتگرال* نام دارد. نتیجهٔ کلیدی این فصل **قضیهٔ** *اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال* است (ر.ک. بخش ۵.۴)، که رابطهٔ عمیق حساب دیفرانسیل را با حساب انتگرال نشان می‌دهد. در واقع، معلوم می‌شود که *انتگرال* تابع f را می‌توان از دو مقدار تابع دیگر F که f **مشتق** آن است به دست آورد. در بخشهای ۶.۴ و ۷.۴ مسائل فیزیکی مستلزم حرکت در امتداد خطی مستقیم را با استفاده از انتگرالها حل خواهیم کرد.

۱.۴ نماد سیگما

مطالعهٔ انتگرالگیری با معرفی نماد فشرده‌ای برای مجموعها خیلی ساده می‌شود. فرض کنیم f تابعی باشد که قلمروش شامل اعداد صحیح مثبت است. در این صورت،

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \tag{1}$$

اختصاری است برای

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n). \tag{2}$$

عملی که ما را از f به مجموع (۱) یا (۲) می‌رساند عمل **جمعبندی** نام دارد، وعلامت $\sum$ (سیگمای بزرگ یونانی) *علامت جمعبندی* نامیده می‌شود. اعداد 1 و n به ترتیب حدود *پایینی* و *بالایی* جمعبندی نام دارند. دراینجا "حد" معنی محاوره‌ای "مرز" را دارد

تا معنی تکنیکی که تا آن حد فرا رفته است . سه نقطه در (۲) یعنی " و غیره تا "، اما اگر $n = 1, 2, 3$ ، صرفا " داریم

$$\sum_{i=1}^{1} f(i) = f(1), \qquad \sum_{i=1}^{2} f(i) = f(1) + f(2), \qquad \sum_{i=1}^{3} f(i) = f(1) + f(2) + f(3).$$

علامت i آمده در (۱) **اندیس جمعبندی** نام دارد ،و یک " اندیس ظاهری" می‌باشد، بدین معنی که هر علامت دیگر به همین خوبی می‌باشد . لذا ،

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{j=1}^{n} f(j) = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{p=1}^{n} f(p),$$

و غیره .

مثال ۱ . $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}$ را حساب کنید .

حل. با بسط مجموع ، یعنی نوشتن آن به‌طور کامل، خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}.$$

گاهی یک مجموع با " جملهٔ صفرم " شروع می‌شود . مثلا " ،

$$\sum_{i=0}^{n} f(i)$$

اختصاری است برای

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

(در اینجا فرض است که قلمرو f علاوه‌بر اعداد صحیح مثبت شامل 0 است) . به‌همین‌نحو ، اگر m از n کمتر باشد ،

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) \tag{۳}$$

یعنی

$$f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n),$$

که در آن تعداد کل جملات مساوی است با $n - m + 1$. اگر $m = n$ ، مجموع (۳) به‌تنها جملهٔ $f(m)$ تحویل می‌شود ، و اگر $m > n$ تعریف نشده است .

مثال ۲ . $\sum_{i=0}^{5} 2^i$ را حساب کنید .

حل. با بسط دادن مجموع خواهیم داشت

$$\sum_{i=0}^{5} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

مثال ۳. $\sum_{n=3}^{6} n!$ را حساب کنید.

حل. مثل صفحهٔ ۲۲۵، علامت $n!$ (n فاکتوریل) عبارت است از حاصل‌ضرب $1 \cdot 2 \cdots (n-1)n$ یعنی n عدد صحیح مثبت اولیه. بنابراین،

$$\sum_{n=3}^{6} n! = 3! + 4! + 5! + 6! = 6 + 24 + 120 + 720 = 870.$$

فرض کنیم

$$\sum_{i=m}^{n} g(i) \qquad (۳')$$

مجموع دیگری به شکل (۳)، شامل تابع دیگر g، باشد. به آسانی معلوم می‌شود که

$$\sum_{i=m}^{n} [af(i) + bg(i)] = a \sum_{i=m}^{n} f(i) + b \sum_{i=m}^{n} g(i), \qquad (۴)$$

که در آن a و b ثابتهای دلخواهی هستند. اثبات مشروح (۴) را به عنوان تمرین می‌گذاریم (مجموعها را بسط، ضربها را انجام، و جملات را تجدید آرایش دهید).

مثال ۴. اگر $S = \sum_{i=1}^{7} 3^i$ و $T = \sum_{i=1}^{7} (6 - 3^{i+1})$، $S + \frac{1}{3} T$ را حساب کنید.

حل. به کمک فرمول (۴) که از راست به چپ خوانده می‌شود، خواهیم داشت

$$S + \frac{1}{3} T = \sum_{i=1}^{7} \left[3^i + \frac{1}{3}(6 - 3^{i+1})\right] = \sum_{i=1}^{7} [3^i + (2 - 3^i)] = \sum_{i=1}^{7} 2 = 14.$$

آخرین مرحله از این نتیجه می‌شود که هرگاه c ثابت باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{\text{جمله } n} = nc.$$

قضیهٔ دوجمله‌ای. آخرین مثال ما نشان می‌دهد که استفاده از نماد سیگما چقدر کار را ساده می‌کند.

مثال ۵. قضیهٔ مشهوری از جبر به‌نام *قضیهٔ دوجمله‌ای* می‌گوید هرگاه n عددصحیح‌مثبتی باشد ، آنگاه توان n ام $a+b$ از بسط زیر برخوردار است :

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$
$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n. \qquad (۵)$$

در اینجا اعداد $\binom{n}{k}$ ، به نام *ضرایب دوجمله‌ای*، با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = 1, \ldots, n-1) \qquad (۶)$$

تعریف می‌شوند . با استفاده از نماد سیگما می‌توان (۵) را به صورت بسیار فشردهٔ

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \qquad (۵')$$

نوشت با این فرض که

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

این نظیر است به استفاده‌ازفرمول (۶) به ازای $k = 0, 1, \ldots, n$ پس از تعریف $0! = 1$. قضیهٔ دوجمله‌ای را می‌توان به کمک روشی به نام *استقرای ریاضی* ثابت کرد . جزئیات در مثال ۳ ضمیمه داده شده است (ر.ک. صفحهٔ ۵۸۰ض) .

برای محاسبهٔ ضرایب دوجمله‌ای، می‌بینیم که

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

و

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k!(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

لذا ، مثلاً ،

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56,$$
$$\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1} = 50\cdot 99 = 4950.$$

مسائل

مجموع داده شده را حساب کنید.

۱. $\sum_{i=3}^{7} i^2$

۲. $\sum_{j=1}^{6} 2^{-j}$

۳. $\sum_{k=0}^{5} (-1)^k 3^k$

۴. $\sum_{m=0}^{8} (m^2 - 1)$

۵. $\sum_{n=2}^{5} n^{n-1}$

۶. $\sum_{i=0}^{10} (2i - 1)$

۷. $\sum_{j=0}^{6} \frac{j-1}{j+2}$

۸. $\sum_{k=2}^{7} \frac{k+1}{k-1}$

۹. $\sum_{m=0}^{5} \sin \frac{m\pi}{3}$

۱۰. $\sum_{n=1}^{9} \cos \frac{n\pi}{4}$

۱۱. نشان دهید که

$$\sum_{i=m}^{n} [f(i+1) - f(i)] = f(n+1) - f(m).$$

هر مجموع شبیه این، که اغلب جملاتش یکدیگر را حذف می‌کنند، توی هم‌رو نام دارد.

با استفاده از مسئلهٔ قبل، مجموع داده شده را حساب کنید.

۱۲. $\sum_{i=0}^{9} (2^{i+1} - 2^i)$

۱۳. $\sum_{j=2}^{15} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)$

۱۴. $\sum_{k=1}^{35} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

مجموع داده شده را با نماد سیگما بنویسید.

۱۵. $2 + 5 + 8 + \cdots + 32$ $\sum_{i=1}^{11} (3i - 1)$

۱۶. $5 - 9 + 13 - 17 + \cdots + 45$

۱۷. $3 + 2 + \frac{5}{3} + \frac{6}{4} + \frac{7}{5} + \frac{8}{6} + \frac{9}{7} + \frac{10}{8}$

۱۸. $\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \cdots - \frac{51}{53}$

آیا فرمول داده شده درست است یا نادرست؟

۱۹. $\sum_{n=3}^{7} n = \sum_{m=4}^{8} (m-1)$

۲۰. $\sum_{i=1}^{50} 1 = 49$

۲۱. $\sum_{k=1}^{n} (1+2k) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k$

۲۲. $\sum_{j=1}^{11} (-1)^{j-1} = 1$

ضریب دوجمله‌ای داده شده را حساب کنید.

۲۳. $\binom{12}{6}$

۲۴. $\binom{14}{5}$

۲۵. $\binom{19}{4}$

۲۶. $\binom{20}{11}$

۲۷. $\binom{31}{29}$

۲۸. $\binom{101}{3}$

عبارات زیر را با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای بسط دهید.

۲۹. $(1+\sqrt{2})^5$

۳۰. $(a+b)^6$

۳۱. $(a-b)^7$

۳۲. $(1+x)^8 - (1-x)^8$

نشان دهید که

۳۳. $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

۳۴. $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

۳۵. قاعدهٔ *لایب‌نیتز*

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

برای مشتق n م حاصل ضرب دو تابع را با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای ثابت کنید

با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز کمیات زیر را حساب کنید.

۳۶. مشتق هشتم $x^3 \cos x$

۳۷. مشتق دهم $x^4 \sin x$

۳۸. اعداد $a_0, a_1, \ldots, a_n$ و $b_0, b_1, \ldots, b_n$ داده شده‌اند. نشان دهید که

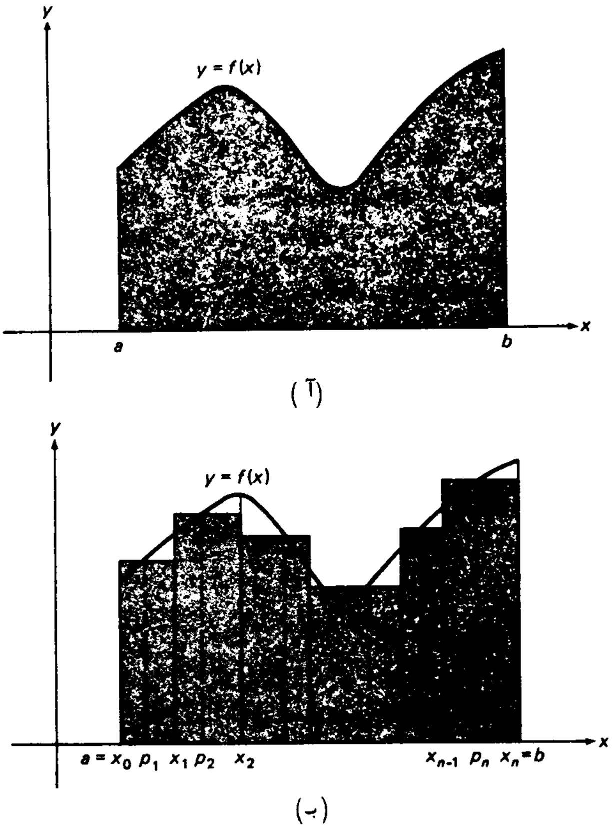
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})b_{i-1} = (a_n b_n - a_0 b_0) - \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_{i-1}).$$

این نتیجه به فرمول جمعبندی جزء به جزء معروف است.

۲۰۴ مساحت تحت یک منحنی و انتگرال معین

نوع حدی که به مفهوم *انتگرال* معین منجر می‌شود گهگاه در مسائل مربوط به جمعبندی تعداد بسیار زیادی از جملات کوچک ظاهر می‌شود. نمونهٔ تمام این گونه مسائل یافتن مساحت تحت یک منحنی است که اینک بدان می‌پردازیم.

فرض‌کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ پیوسته و نامنفی باشد. منظور از **مساحت تحت‌منحنی** $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ یعنی مساحت A ناحیهٔ مسطح R محدود به خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ ، محور x ، و منحنی $y = f(x)$ مثل شکل ۱ (آ). ناحیهٔ R دست کم یک طرف مستقیم دارد (درصورت مثبت بودن f ، سه طرف)، ولی بالای آن خمیده است. لذا، در حین محاسبهٔ مساحت A باید ابتدا منظور ما از A روشن شود. این همان فلسفهٔ یافتن، پس از **تعریف کردن**، مماس بر یک منحنی کلی را دارد (ر.ک. صفحهٔ ۱۸۵)، و مثل مسئلهٔ مماس که به مفهوم مشتق منجر شد، مسئلهٔ مساحت به مفهوم انتگرال ختم می‌شود.



شکل ۱

با دیدی از تعریف مساحت A ، بازهٔ $[a, b]$ را به وسیلهٔ **نقاط تقسیم**

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b \qquad (1)$$

صادق در نامساویهای

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

به تعداد زیادی زیر بازهٔ کوچکتر تقسیم می‌کنیم . در اینجا ، برای یکنواخت بودن نماد ، نقاط تقسیم a و b بازهٔ اصلی $[a, b]$ را نقاط تقسیم گرفته و آنها را با علایم x_0 و x_n نشان می‌دهیم ؛ نقاط (۱) ، که می‌گوییم یک *افراز* بازهٔ $[a, b]$ را تشکیل می‌دهند ، $[a, b]$ را درست به n زیر بازهٔ

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

تقسیم می‌کنند . فرض کنیم

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

طول زیربازهٔ i ام $[x_{i-1}, x_i]$ بوده ، و μ (موی یونانی کوچک) ماکزیمم طول تمام زیر بازه‌ها باشد ؛ درنتیجه ،

$$\mu = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}.$$

عدد μ *اندازهٔ مش* (یا نرم) افراز (۱) نام دارد ؛ این عدد " تناسب " افراز را می‌سنجد به این معنی که هرقدر اندازهٔ مش μ کوچکتر باشد ، تعداد نقاط تقسیم بیشتر است و این نقاط به هم نزدیکتر می‌باشند (ر.ک. مسئلهٔ ۲۵) . لذا ، کوچکی μ بزرگی n را تضمین می‌کند ، ولی عکس آن درست نیست . مثلاً ، نقاط

$$\frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$$

بازهٔ یکهٔ $[0, 1]$ را به n زیربازه تقسیم می‌کند ، ولی اندازهٔ مش μ ، صرف‌نظر از بزرگی n ، همواره مساوی $\frac{1}{2}$ است یعنی طول بزرگترین زیربازهٔ $[\frac{1}{2}, 1]$.

حال خطوط قائم $x = x_0, x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_{n-1}, x = x_n$ را رسم می‌کنیم . این خطوط ناحیهٔ R را به n نوار باریک مثل شکل ۱ (ب) تقسیم می کنند . تابع f پیوسته است ؛ و درنتیجه ، اگر Δx_i به‌قدر کافی کوچک باشد ، مقدارش بر زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ فقط کمی تغییر می‌کند . لذا ، اگر فرض کنیم f بر $[x_{i-1}, x_i]$ مقدار ثابت $f(p_i)$ داشته باشد که p_i یک نقطهٔ *دلخواه* $[x_{i-1}, x_i]$ است ، تقریب خوبی به دست خواهد آمد . دلخواه بودن p_i به شما اجازهٔ مانور می‌دهد ، زیرا گویی بعضی از p_i ها ازدیگران بهترند ، ولی تفاوت بین p_i های مختلف بزودی " در حد از بین می‌رود " ، زیرا ما μ را به صفر نزدیک خواهیم کرد . تعویض $f(x)$ با $f(p_i)$ بر هر زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ معادل تعویض نوارها با بالاهای

خمیده به‌وسیلهٔ مستطیلهای سایه‌دار شکل است . مجموع مساحات این مستطیلها عبارت است از

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i, \tag{۲}$$

که در آن از نماد سیگمای معرفی شده در بخش ۱۰۴ استفاده می‌کنیم . معقول است که (۲) را تقریب مناسبی از مساحت A ی ناحیهٔ R بگیریم ، که این تقریب وقتی عرض هر مستطیل کوچک شود ، یعنی عدد μ که مساوی ماکزیمم عرضهای مستطیلهاست کوچک شود ، بهتر خواهد شد . این نکات انگیزهٔ **تعریف** A به صورت حد

$$A = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i \tag{۳}$$

خواهد بود .

تعریف انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$. این نکات طبعاً" ما را به تعریف زیر می‌رساند . فرض کنیم f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ کراندار باشد . افراز دلخواهی بر $[a, b]$ درنظر می‌گیریم ؛ یعنی ، مجموعهٔ $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ از نقاط که در نامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ صدق می‌کنند . در هر زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ به طول $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ نقطهٔ دلخواه p_i را اختیار کرده و مجموع

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i \tag{۴}$$

را تشکیل می‌دهیم . فرض کنیم وقتی اندازهٔ مش $\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ به صفر نزدیک شود ، مجموع S ، *صرف نظر از انتخاب نقاط تقسیم* x_i *و نقاط " میانی "* p_i ، به حدی متناهی مانند I نزدیک گردد . (در واقع ، μ فقط از راست به صفر نزدیک می‌شود زیرا μ ذاتاً" مثبت است .) در این صورت ، حد I را **انتگرال معین** ، یا فقط **انتگرال** ، f از a تا b نامند و به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

وگوییم تابع f بر $[a, b]$ ، یا روی $[a, b]$ ، **انتگرالپذیر** است . مجموع (۴) به افتخار ریاضیدان برجستهٔ آلمانی ، جی. اف . برنارد ریمان[1] (۱۸۶۶ – ۱۸۲۶) ، به‌**مجموع ریمان**

---

1. G. F. Bernhard Riemann

معروف است . انتگرال معین اغلب *انتگرال ریمان* نام دارد تا از انواع دیگر انتگرالهاکه‌در ریاضیات عالی با آنها مواجه می‌شویم متمایز باشد .

مساحت تحت منحنی به عنوان انتگرال . فرمول (۳) برای مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ را می‌توان برحسب انتگرال به صورت فشرده‌تر

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (۵)$$

نوشت . با آنکه تعریف انتگرال از مسئلهٔ مساحت ناشی شده بود ، در این فصل و فصول آینده معلوم خواهد شد که انتگرال کاربردهای گسترده در مسائل مختلفی دارد که هیچ ارتباطی با مساحت ندارند .

انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ یک **عدد** است ، و عملی که ما را از f به این عدد می‌رساند *انتگرالگیری* نام دارد . علامت $\int$ ، که قرنها قبل توسط لایب‌نیتز معرفی شده است، *علامت انتگرال* نام دارد ؛ از نظر تاریخی ، همان‌حرف S برای مجموع است مبین آنکه‌انتگرالگیری دست کم در حد ، با جمعبندی ارتباط دارد . اعداد a و b را به ترتیب **حدود پایینی و بالایی** می‌نامند . در اینجا ، مثل حدود جمعبندی ، واژهٔ "حد" معنی محاوره‌ای "مرز" را دارد تا معنی تکنیکی معمولی آن . بازهٔ $[a, b]$ ، که a و b نقاط انتهایی آنند . *بازهٔ انتگرالگیری* نام دارد . تابع f را *انتگرالده* انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌نامند . شناسهٔ f ، در این حالت x ، **متغیر** *انتگرالگیری* نام دارد ، و یک " متغیر ظاهری " است بدین معنی که هر علامت دیگر به خوبی آن است . مثلاً " ،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz,$$

و غیره . وضع دقیقاً " همانند اندیس ظاهری جمعبندی می‌باشد (ر.ک. صفحهٔ ۳۶۲) .

عبارت $\int_a^b f(x)\,dx$ برای‌انتگرال‌تابع f از a تا b شامل‌دیفرانسیل dx متغیرانتگرالگیری است . دیفرانسیل dx با نمو Δx_i در مجموع ریمان $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ " متناسب " است ، که انتگرال حد آن است وقتی اندازهٔ مش μ به صفر نزدیک شود . در واقع ، وقتی $\mu \to 0$ ، علامت جمعبندی $\sum$ و نمو Δx_i با علامت انتگرال $\int$ و دیفرانسیل dx تعویض می‌شوند ، و حدود جمعبندی با حدود انتگرالگیری عوض خواهند شد . با آنکه این خیلی الهام بخش است ، می‌توانیم متغیر انتگرالگیری و دیفرانسیل آن را حذف کرده فقط‌بنویسیم $\int_a^b f$ ، و ما گهگاه این‌کاررا خواهیم کرد . بالاخره ، انتگرالگیری عملی است که ما را از یک تابع به عددی می‌رساند که آن را انتگرال روی یک بازه می‌نامیم ؛ و لذا ، کافی است فقط تابع و

نقاط انتهایی بازه را تصریح کنیم. با اینحال، معمولاً " از نماد کامل $\int_a^b f(x)\,dx$ (درحالتی که x متغیر انتگرالگیری است) استفاده می‌کنیم. مزیت این نماد بعدها روشن خواهد شد (ر.ک. صفحهٔ ۵۹۲).

تبصره. مجموع ریمان $S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ و اندازهٔ مش $\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ آمده در تعریف انتگرال $I = \int_a^b f(x)\,dx$ به افراز بازهٔ انتگرالگیری $[a, b]$ بستگی دارد. این را می‌توان با نوشتن $S = S(X)$ و $\mu = \mu(X)$ تصرح کرد، که در آنها X مجموعهٔ نقاط تقسیم $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ می‌باشد. به یاد داشته باشید که S به نقاط "میانی" $p_1, p_2, \ldots, p_n$، یکی در هر زیربازهٔ $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$، نیز بستگی دارد. لذا، اینکه می‌گوییم وقتی $\mu \to 0$، S به حد I نزدیک می‌شود یعنی تفاضل $S(X) - I$ به ازای هر X که $\mu(X)$ به قدر کافی کوچک باشد، **صرف نظر از انتخاب نقاط p_i مربوط به X**، بدلخواه نزدیک صفر خواهد بود. یا، به زبان ε, δ، یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان $\delta > 0$ ای یافت به‌طوری که هر وقت $0 < \mu(X) < \delta$، به ازای هر p_i مربوط به X،

$$|S(X) - I| = \left|S(X) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

انتگرالپذیری توابع پیوسته. در تعریف انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ چیزی راجع به پیوستگی f گفته نشد، و یک تابع ناپیوسته ممکن است انتگرالپذیر باشد یا نباشد (ر.ک. مسائل ۲۹ و ۳۱). از آن سو، **هر تابع پیوسته انتگرالپذیر است**. بخصوص، این تقریبهایی را که در تعریف مساحت تحت نمودار یک تابع پیوسته به کار رفتند توجیه کرده، و وجود مساحت را تضمین می‌نماید.

قضیهٔ ۱ (پیوستگی انتگرالپذیری را ایجاب می‌کند). *هرگاه تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است.*

قضیهٔ ۱ سند دیگری است بر اهمیت پیوستگی در حساب دیفرانسیل و انتگرال. برهان قضیه مستلزم مفهومی است (پیوستگی یکنواخت) که از حوصلهٔ این کتاب خارج است. خوانندهٔ علاقه‌مند را به کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ارجاع می‌دهیم.

حال، با استفادهٔ مستقیم از تعریف انتگرال به عنوان حد یک مجموع ریمان، چند انتگرال ساده را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱. انتگرال $\int_a^b 1\,dx$ ، که معمولاً" به صورت $\int_a^b dx$ نشان داده می‌شود، را حساب کنید.

حل. در اینجا از تابع ثابت $f(x) \equiv 1$ انتگرال می‌گیریم. بنابراین،

$$\int_a^b dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i,$$

زیرا به ازای هر p_i ، $f(p_i) = 1$. با بسط مجموع به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\ &= -x_0 + (x_1 - x_1) + (x_2 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-1}) + x_n.\end{aligned}$$

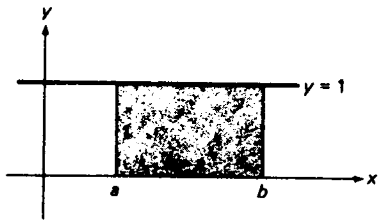
چون تمام جملات مجموع سمت راست جز اول و آخر 0 اند، مجموع " توی هم رفته" و به صورت سادهٔ زیر درمی‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_n - x_0 = b - a.$$

این را می‌شد پیش‌بینی کرد، زیرا مجموع طولهای زیر بازه‌های $[x_{i-1}, x_i]$ باید مساوی طول بازهٔ $[a, b]$ باشد. لذا، حد ثابت $\int_a^b dx$ ، $b - a$ است وقتی $\mu \to 0$ ؛ درنتیجه،

$$\int_a^b dx = b - a. \qquad (۶)$$

به‌طور هندسی، انتگرال (۶) مساحت تحت خط $y = 1$ از $x = a$ تا $x = b$ است؛ یعنی، مساحت مستطیل سایه‌دار شکل ۲ به طول $b - a$ و عرض 1 . البته، مساحت این مستطیل،



شکل ۲

یا معادلاً " طول بازهٔ $[a, b]$ ، مساوی $b - a$ است که با (۶) داده می‌شود.

در محاسبهٔ انتگرال مثال ۱ وجود نیز ثابت شد. وجود انتگرال از قضیهٔ ۱ و پیوستگی

انتگرالده $f(x) \equiv 1$ نیز نتیجه‌می‌شود . در دومثال‌زیر ، ابتدا از پیوستگی انتگرالده استفاده کرده وجود انتگرال را نتیجه می‌گیریم ، و سپس با استفاده از وجود انتگرال و دلخواه‌بودن نقاط p_i در مجموع (۴) ، انتگرال را حساب می‌کنیم .

مثال ۲. انتگرال $\int_a^b x\,dx$ را حساب کنید .

حل. بنابرقضیهٔ ۱ ،انتگرالده $f(x) = x$ پیوسته و درنتیجه انتگرالپذیر است . لذا ،

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i = \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_{i-1}),$$

که در آن حد موجود بوده و به ازای هر انتخاب نقاط p_i در زیر بازه‌های $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i = 1, \ldots, n$ ، یکسان است . فرض‌کنیم p_i نقطهٔ میانی $[x_{i-1}, x_i]$ باشد ؛ درنتیجه ، $p_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. در این صورت ،

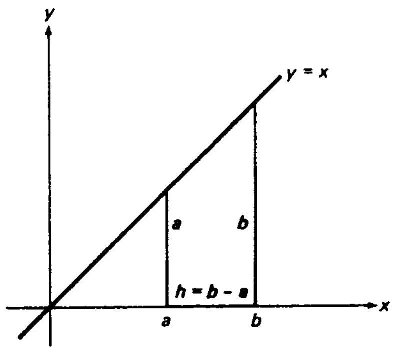
$$\int_a^b x\,dx = \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\mu\to 0} (x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2} \lim_{\mu\to 0} (b^2 - a^2),$$

زیرا انتخاب ما از p_i ها به مجموع توی هم رو دیگری منجر می‌شود ؛ و لذا ،

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \qquad (۷)$$

به‌طورهندسی ،انتگرال (۷) مساحت‌تحت‌خط $y = x$ از $x = a$ تا $x = b$ است ؛ یعنی مساحت ذوزنقهٔ سایه‌دار شکل ۳. چون مساحت یک ذوزنقه با اضلاع موازی به طولهای a و b و به



شکل ۳

فاصلهٔ h از هم مساوی $\frac{1}{2}(a+b)h$ است ، مساحت‌ذوزنقه درشکل مساوی است با

$$\frac{1}{2}(b+a)(b-a)=\frac{1}{2}(b^2-a^2),$$

که با فرمول (۷) سازگار است .

مثال ۳. انتگرال $\int_a^b x^2\,dx$ را حساب کنید .

حل. مجددا " انتگرالده پیوسته و درنتیجه انتگرالپذیر است . لذا ،

$$\int_a^b x^2\,dx=\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i=\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} p_i^2(x_i-x_{i-1}),$$

که درآن حد موجود و به‌ازای هرانتخاب‌نقاط p_i درزیربازه‌های $[x_{i-1},x_i]$، n، $i=1,\ldots$ ، یکسان است . برای تسهیل در محاسبات ، فرض‌می‌کنیم $a\geq 0$ (می‌توان نشان داد که جواب به این فرض بستگی ندارد) . در این صورت ، به ازای هـر i ، $0\leq x_{i-1}<x_i$ ؛ و لذا ،

$$x_{i-1}^2<\frac{1}{3}(x_{i-1}^2+x_{i-1}x_i+x_i^2)<x_i^2,$$

درنتیجه ، نقطهٔ

$$p_i=\sqrt{\frac{1}{3}(x_{i-1}^2+x_{i-1}x_i+x_i^2)}$$

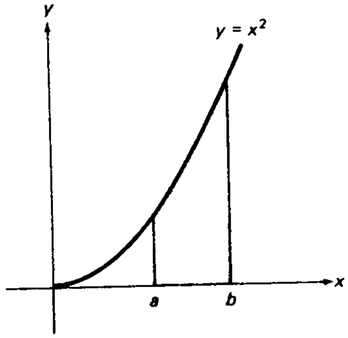
به زیربازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ تعلق دارد . این انتخاب p_i " از قبل طرح شده بود " ، زیرا با آن محاسبهٔ انتگرال به مجموع توی هم رو دیگر منجر می‌شود . به تفصیل و به کمک‌اتحادجبری $(u^2+uv+v^2)(u-v)=u^3-v^3$ داریم

$$\int_a^b x^2\,dx=\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2)(x_i-x_{i-1})$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}(x_i^3-x_{i-1}^3)=\frac{1}{3}\lim_{\mu\to 0}(x_n^3-x_0^3)=\frac{1}{3}\lim_{\mu\to 0}(b^3-a^3),$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\int_a^b x^2\,dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3). \qquad (۸)$$

این بار انتگرال مساحت ناحیه‌ای است از نوعی که در هندسه مقدماتی با آن‌آشنا نشده‌ایم ؛ یعنی، ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۴ که به خطوط قائم $x=a$ و $x=b$ ، محور x و سهمی $y=x^2$



شکل ۴

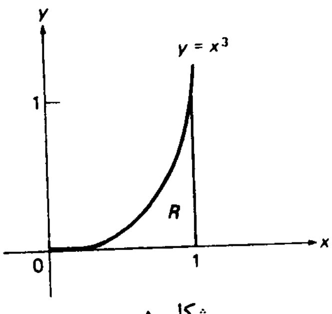
محدود شده است .

در بخش ۵.۴ روشی کلی برای محاسبهٔ انتگرالهای معین به دست می‌آوریم که درآن از محاسبهٔ صریح مجموعهای ریمان و حدود آنها کاملا" پرهیز می‌شود . در این صورت ، دیگر نیازی به استفاده از ترفندهای خاص از نوع به‌کار رفته در دو مثال قبل نخواهیم داشت . این جای خوشوقتی است ، زیرا در غیر این صورت ، حتی در محاسبهٔ انتگرالهای نسبتا" ساده نیز عاجز خواهیم ماند! در واقع ، معلوم می‌شود که فرمولهای (۶) و (۸) همه حالات خاصی از فرمول کلی

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{۹}$$

می‌باشند که در صفحهٔ ۴۱۱ ثابت خواهد شد . فعلا" فرمول (۹) را دانسته گرفته و آن را آزادانه به کار می‌بریم .

مثال ۴. مساحت A ناحیهٔ R محدود به‌منحنی $y = x^3$ ، محور x ، و خط $x = 1$ را بیابید (ر.ک. شکل ۵) .



شکل ۵

حل. چون

$$A = \int_0^1 x^3\,dx,$$

به کمک فرمول (۹) به ازای $n = 3$ معلوم می‌شود که

$$A = \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \frac{1}{4}.$$

قواعد انتگرالگیری. حال به اثبات چند قاعدهٔ مهم که بر انتگرالها حاکمند می‌پردازیم.

(یک) هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و c ثابت باشد، آنگاه cf نیز بر $[a, b]$ انتگرال پذیر است، و

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \tag{۱۰}$$

در واقع، هرگاه $S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ یک مجموع ریمان برای f باشد، آنگاه

$$cS = c\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} cf(p_i)\,\Delta x_i$$

یک مجموع ریمان برای cf می‌باشد. اما

$$\lim_{\mu\to 0} cS = c\lim_{\mu\to 0} S$$

(بنابر تشابه برای مجموعهای ریمان نتیجهٔ ۲، صفحهٔ ۱۳۱)؛ و درنتیجه،

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} cf(p_i)\,\Delta x_i = c\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i,$$

که با (۱۰) معادل می‌باشد. لذا، در یک انتگرال معین، هر ثابت ضربدر انتگرالده را می‌توان خارج کرده و جلو علامت انتگرال قرار داد.

(دو) هرگاه f و g هر دو بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشند، آنگاه مجموع $f + g$ نیز بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است، و

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{۱۱}$$

برای اثبات این امر، ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $S_h = \sum_{i=1}^{n} h(p_i)\,\Delta x_i$ یک مجموع ریمان برای $h = f + g$ باشد، آنگاه $S_f = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ و $S_g = \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\,\Delta x_i$ مجموعهای ریمانی برای

f و g (مبتنی بر نقاط یکسان p_i و x_i) می‌باشند . اما

$$S_h = \sum_{i=1}^{n} h(p_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(p_i) + g(p_i)]\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\,\Delta x_i,$$

و لذا ، بنابر تشابه برای مجموعهای ریمان قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۱۳۰،

$$\lim_{\mu\to 0} S_h = \lim_{\mu\to 0} (S_f + S_g) = \lim_{\mu\to 0} S_f + \lim_{\mu\to 0} S_g,$$

که با (۱۱) معادل‌می‌باشد . لذا ، انتگرال مجموع دو تابع مجموع انتگرالهای تک تک‌توابع می‌باشد .

(سه) هرگاه $f_1, f_2, \ldots, f_n$ بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثابت باشند ، آنگاه " ترکیب خطی " $c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n$ نیز بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و

$$\int_a^b (c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n) = c_1\int_a^b f_1 + c_2\int_a^b f_2 + \cdots + c_n\int_a^b f_n \qquad (۱۲)$$

(در اینجا از نماد اختصاری مطرح شده در صفحهٔ ۳۷۰ استفاده می‌کنیم) . اثبات (۱۲) ناشی از کاربرد مکرر فرمولهای (۱۰) و (۱۱) است . لذا ، انتگرال یک ترکیب خطی از توابع ترکیبی خطی از انتگرالهای تک‌تک توابع با همان ضرایب می‌باشد .

(چهار) هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $f(x) \geq 0$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

در واقع ، مجموع ریمان $S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ همواره نامنفی است ، زیرا به ازای هر انتخاب از نقاط p_i ، $f(p_i) \geq 0$. بنابراین ،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu\to 0} S \geq 0,$$

چرا که اگر $\lim_{\mu\to 0} S < 0$ ، می‌توان افرازی از $[a, b]$ و نقاطی چون p_i یافت که یک مجموع ریمان منفی به دست دهند که امری نامکن است . لذا ، انتگرال یک تابع نامنفی خود نامنفی می‌باشد .

(پنج) هرگاه f و g بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $f(x) \geq g(x)$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (۱۳)$$

برای مشاهدهٔ این امر ، توجه می‌کنیم که $f(x) - g(x) \geq 0$ ؛ و درنتیجه ، طبق قواعد (سه)

و (چهار)،

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geq 0,$$

که با (۱۳) معادل می‌باشد.

(شش) هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $c \leq f(x) \leq C$ ، که c و C ثابت هستند، آنگاه

$$c(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq C(b-a). \tag{۱۴}$$

در واقع، هر ثابت انتگرالپذیر است؛ و درنتیجه، بنابر قاعدهٔ (پنج)،

$$\int_a^b c\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b C\,dx,$$

که با (۱۴) معادل است، زیرا

$$\int_a^b c\,dx = c\int_a^b dx = c(b-a), \qquad \int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C(b-a).$$

از حالا به بعد، از تمام این مقادیر آزادانه استفاده خواهیم کرد.

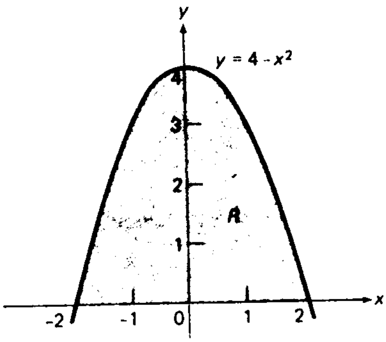
مثال ۵. انتگرال $\int_2^4 \left(\frac{3}{8}x^2 + 5x - 6\right)dx$ را حساب کنید.

حل. به کمک قاعدهٔ (سه) و فرمولهای (۶) تا (۸)، داریم

$$\begin{aligned}\int_2^4 \left(\frac{3}{8}x^2 + 5x - 6\right)dx &= \frac{3}{8}\int_2^4 x^2\,dx + 5\int_2^4 x\,dx - 6\int_2^4 dx\\ &= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)(4^3 - 2^3) + 5\left(\frac{1}{2}\right)(4^2 - 2^2) - 6(4-2)\\ &= \frac{1}{8}(56) + \frac{5}{2}(12) - 6(2) = 25.\end{aligned}$$

مثال ۶. مساحت بین منحنی $y = 4 - x^2$ و محور x را بیابید.

حل. مساحت A ناحیهٔ سایه‌دار R در شکل ۶ را جستجو می‌کنیم که مساحت تحت منحنی $y = 4 - x^2$ (سهمی) از $x = -2$ تا $x = 2$ ، یعنی قطعهای x منحنی، می‌باشد.



شکل ۶

بنابراین،

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 4\int_{-2}^{2} dx - \int_{-2}^{2} x^2\,dx$$

$$= 4[2 - (-2)] - \frac{1}{3}\left[2^3 - (-2)^3\right]$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

مسائل

۱. چرا تابع **sin x** بر هر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ انتگرالپذیر است؟

۲. چرا تابع $\cot x$ بر هر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ که شامل نقاط $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ نیست انتگرالپذیر است؟

۳. مساحت A تحت خط $y = (b/a)x$ از $x = 0$ تا $x = a$ را یافته، و نتیجه را تعبیر هندسی کنید.

انتگرالهای زیر را به کمک فرمولهای (۹) و (۱۲) حساب کنید.

۴. $\int_{1}^{2} 2x^3\,dx$ ✓

۵. $\int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x^4\,dx$ ✓

۶. $\int_{0}^{1} 8x^7\,dx$ ✓

۷. $\int_{2}^{3} |x^2 - 4x|\,dx$ ✓

۸. $\int_{-3}^{0} |x^2 - 4x|\,dx$ ✓

۹. $\int_{0}^{\sqrt{2}} (t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{2}{3})\,dt$ ✓

۱۰. $\int_{-2}^{1} (t^3 - t^2 + t - 1)\,dt$ ✓

۱۱. $\int_{-1}^{1} (3u^5 - 5u^3)\,du$ ✓

۱۲. $\int_0^1 (2u^{99} - u^{49} + \pi)\, du$

۱۳. $\int_0^{\sqrt{3}} (\frac{1}{9}v - \frac{1}{27}v^3)\, dv$

۱۴. $\int_{1/2}^1 (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}v + \frac{1}{7}v^2 - \frac{1}{5}v^3)\, dv$

۱۵. $\int_4^5 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)\, dx$

۱۶. $\int_{-4}^6 (x-1)(x^2+x+1)\, dx$

۱۷. $\int_2^8 \frac{x^3 - 1}{x - 1}\, dx$

۱۸. $\int_{-1}^2 \frac{x^3 + 8}{x + 2}\, dx$

مساحت A ناحیهٔ R زیر را بیابید.

۱۹. تحت منحنی $y = x^2 - 1$ از $x = 1.2$ تا $x = 1.8$

۲۰. تحت منحنی $y = x^2 + x + 1$ از $x = -1$ تا $x = 1$

۲۱. بین منحنی $y = 2 + x - x^2$ و محور x

۲۲. بین منحنی $y = 2x - x^2$ و محور x

۲۳. تحت منحنی $y = 2x^3 - 2x$ از $x = -1$ تا $x = 0$

۲۴. بین منحنی $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ و محور x

در هر حالت ناحیهٔ R را رسم نمایید.

۲۵. فرض کنید بازهٔ $[a, b]$ به وسیلهٔ افراز $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ به اندازهٔ مش μ به n زیربازهٔ $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$ تقسیم شده باشد. کوچکترین مقدار ممکن n به ازای اندازهٔ مش معلوم μ چیست؟ نشان دهید که وقتی $\mu \to 0$، این کوچکترین مقدار به بی‌نهایت نزدیک می‌شود.

۲۶. بازهٔ $[0, 10]$ با افرازی به اندازهٔ مش $\sqrt{2}$ به n زیربازه تقسیم شده است. کوچکترین مقدار ممکن n چقدر است؟

۲۷. بازهٔ $[0, 10]$ با افراز $0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{99}, x_{100} = 10$ به 100 زیربازه تقسیم شده است. کوچکترین مقدار ممکن اندازهٔ مش μ چقدر است؟ بزرگترین مقدار ممکن μ چقدر است؟

۲۸. نشان دهید هرگاه انتگرال به صورت تعریف شده در صفحهٔ ۳۷۰ موجود باشد، آنگاه منحصر به فرد است، بدین معنی که فقط یک مقدار دارد.

۲۹. تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \neq 0 \\ 1 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ ناپیوسته بوده؛ و درنتیجه، بر هیچ بازه‌ای چون $[a, b]$ شامل نقطهٔ $x = 0$

پیوسته نمی‌باشد . نشان دهید با اینحال f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر با انتگرالی مساوی 0 می‌باشد .

۳۰. بدون آنکه قادر به محاسبهٔ انتگرال باشیم ، از کجا بدانیم که

$$0 \leq \int_0^1 x^{10}\sqrt{1+x^2}\, dx \leq \sqrt{2}$$

۳۱. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد ،} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد ،} \end{cases}$$

نشان دهید f بر هر بازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌ناپذیر است .

۳۲. تابعی مثال بزنید که بر بازهٔ $[a, b]$ کراندار بوده ولی انتگرالپذیر نباشد .

۳۳. نشان دهید هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد ، آنگاه f باید بر $[a, b]$ کراندار باشد .

۳۴. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{اگر } x \neq 0 \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \text{ ،} \end{cases}$$

آیا f بر $[-1, 1]$ انتگرالپذیر است ؟

۳۵. نشان دهید هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، آنگاه

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

این مشابه **نامساوی مثلثی** مجموعها برای انتگرالها می‌باشد .

۴.۳ نکات دیگر در باب مساحت ؛ قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها

تا اینجا در نوشتن انتگرال

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

فرض کرده‌ایم $a < b$. اکنون حالت $a \geq b$ را نیز پذیرفته ، **طبق تعریف** ، قرار می‌دهیم

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx. \qquad (1)$$

فرض کنیم در (۱) $a = b$. در این صورت ،

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx,$$

که ما را به تعریف

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad (۲)$$

می‌رساند. این تعریف معنی دارد، زیرا "مساحت یک ناحیه به عرض صفر" مساوی صفر می‌باشد.

مثال ۱. انتگرال $\int_2^1 (x^2 - x)\,dx$ را حساب کنید.

حل. به کمک (۱) داریم

$$\int_2^1 (x^2 - x)\,dx = -\int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \int_1^2 (x - x^2)\,dx = \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{3}{2} - \frac{7}{3} = -\frac{5}{6}.$$

انتگرالگیری بر بازه‌های مجاور. حال ببینیم وقتی بازهٔ انتگرالگیری " تجزیه می‌شود " چه رخ می‌دهد.

قضیهٔ ۲ (**جمعپذیری انتگرال بر بازه‌های مجاور**). *هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته بوده و c یک نقطهٔ درونی $[a, b]$ باشد، آنگاه*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b). \qquad (۳)$$

برهان. همانند تعریف انتگرال، بازهٔ $[a, b]$ را با معرفی نقاط تقسیم به‌تعداد زیادی زیر بازهٔ کوچک تقسیم می‌کنیم، ولی این بار تأکید می‌کنیم که یکی از نقاط تقسیم نقطهٔ ثابت c باشد. به عبارت دیگر، نقاط تقسیم x $(i = 0, 1, \ldots, n)$ را طوری اختیار می‌کنیم که

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = c < x_{m+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

که در آن البته زیرنویس m به تعداد نقاط x_i سمت چپ c بستگی دارد. در این صورت، افراز حاصل از نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ برای $[a, b]$ خود افرازی از $[a, c]$ متشکل از نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_m$ و نیز افرازی از $[c, b]$ متشکل از نقاط $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ به‌دست می‌دهد. بنابراین، مجموع ریمان

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i,$$

به کار رفته در تعریف انتگرال f از a تا b، به مجموع

$$S = S' + S''$$

تجزیه می‌شود، که در آن

$$S' = \sum_{i=1}^{m} f(p_i)\,\Delta x_i, \qquad S'' = \sum_{i=m+1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$$

(Δx_i و p_i همان معانی‌داشته در صفحهٔ ۳۶۸ را دارند) S' و S'' را همان مجموعهای ریمانی می‌بینید که در تعریف انتگرال f از a تا c و انتگرال f از c تا b به کار رفته‌اند. فرض‌کنید μ، μ'، و μ'' به ترتیب اندازه‌های مش افرازهای $[a, b]$، $[a, c]$، و $[c, b]$ باشند؛ یعنی،

$$\mu = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}, \qquad \mu' = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m\},$$
$$\mu'' = \max\{\Delta x_{m+1}, \ldots, \Delta x_n\}.$$

در این صورت، واضح است که $\mu \to 0$ ایجاب می‌کند که $\mu' \to 0$ و $\mu'' \to 0$؛ درنتیجه،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu\to 0} S = \lim_{\mu\to 0}(S' + S'') = \lim_{\mu\to 0} S' + \lim_{\mu\to 0} S''$$
$$= \lim_{\mu'\to 0} S' + \lim_{\mu''\to 0} S'' = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

که در آن وجود هر سه‌انتگرال از فرض پیوسته‌بودن f بر $[a, b]$، و لذا بر $[a, c]$ و $[c, b]$، نتیجه می‌شود.

همانطور که اینک نشان می‌دهیم، نقاط a، b، و c در فرمول (۳) لازم نیست در شرط $a < c < b$ صدق کنند؛ و در واقع، می‌توانند **دلخواه** باشند.

نتیجه. *هرگاه f بر بازه‌ای شامل نقاط a، b، و c پیوسته باشد، آنگاه*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (\text{دلخواه } a, b, c) \tag{۴}$$

برهان. اگر دو نقطه از سه نقطهٔ a، b، و c یکی باشند، فرمول (۴) فوراً از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. به‌علاوه، اگر $a < c < b$، فرمول (۴) به (۳) تحویل می‌یابد. حالات دیگر را می‌توان با استفاده از (۱) همراه با (۳) سامان داد. مثلاً، هرگاه $c < b < a$، آنگاه، بنابر (۳)، با c, b, a به جای a, c, b،

$$\int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx.$$

از اینرو، با دو بار به کار بردن (۱)،

$$-\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx,$$

که ایجاب می‌کند که

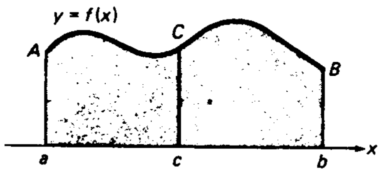
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

سایر حالات $a < b < c, b < a < c, b < c < a, c < a < b$ به همین نحو ثابت می‌شوند

لذا، اعتبار خاصیت جمعی بازه‌های (۴) به ترتیب a ، b ، و c بستگی ندارد. این امر شاهدی است بر تناسب تعریف (۱) که در برهان نتیجه نقشی کلیدی خواهد داشت.

قضیهٔ ۲ در حالت نامنفی بودن f بر $[a, b]$ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. در این صورت، $\int_a^b f(x)\,dx$ مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ است، حال آنکه $\int_a^c f(x)\,dx$ مساحت تحت منحنی از $x = a$ تا $x = c$ و $\int_c^b f(x)\,dx$ مساحت تحت منحنی از $x = c$ تا $x = b$ می‌باشد. اینها مساحت نواحی $abBA$ ، $acCA$، و $cbBC$ در شکل ۷ بوده، و معادلهٔ (۳) می‌گوید که

$$(\text{مساحت } cbBC) + (\text{مساحت } acCA) = \text{مساحت } abBA$$



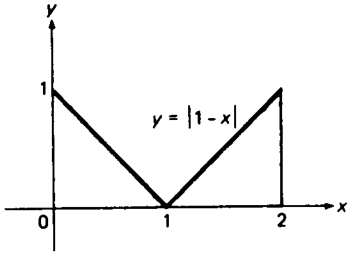
شکل ۷

مطلبی که از نظر هندسی واضح است، زیرا نواحی $acCA$ و $cbBC$ نقاط مشترکی غیر از پاره‌خط cC ، یعنی مرز مشترکشان، ندارند. شکل در حالتی رسم شده است که f بر $[a, b]$ مثبت است، ولی به آسانی معلوم می‌شود که این جمعی بودن سطحهای جدا از هم حتی وقتی f در یک یا چند نقطه از $[a, b]$ صفر است نیز برقرار می‌باشد.

مثال ۲. انتگرال $\int_0^2 |1 - x|\,dx$ را حساب کنید.

حل. محاسبهٔ انتگرال معادل یافتن مساحت تحت منحنی $y = |1 - x|$ از $x = 0$ تا $x = 2$

است . از شکل ۸ واضح است که این مساحت مساوی 1 است ، زیرا هر مثلث سایه‌دار یک



شکل ۸

مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به‌طول ساقهای 1 و مساحت $\frac{1}{2}$ می‌باشد . به‌صورت‌دیگر، انتگرال را می‌توان به کمک قضیهٔ ۲ حساب کرد :

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 |1-x|\,dx + \int_1^2 |1-x|\,dx$$
$$= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

(تجزیهٔ بازهٔ $[0, 2]$ به‌این صورت ناشی‌از تغییر علامت $x-1$ در $x = 1$ است) . بنابراین، همانطور که قبلاً به طور هندسی نشان داده‌ایم ،

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 dx$$
$$= 1 - \frac{1}{2}(1^2-0^2) + \frac{1}{2}(2^2-1^2) - 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 1$$

لازم است در انتگرالهای شامل قدرمطلق احتیاط نمایید .

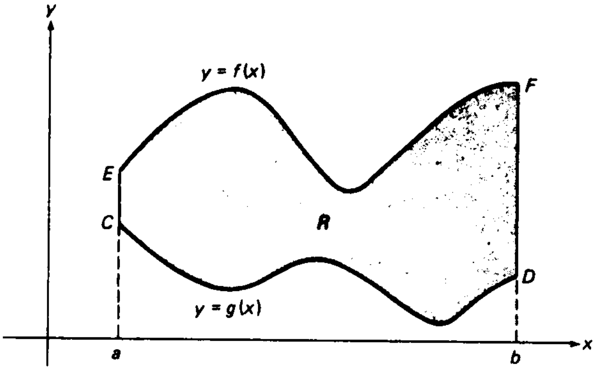
مساحت بین دو منحنی . ما قبلاً شایستگی استفاده از انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ به عنوان‌تعریف مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ ، یعنی مساحت ناحیهٔ مسطح محدود به خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ ، محور x ، و منحنی $y = f(x)$ که $f(x) \geq 0$ را نشان داده‌ایم . حال مسئلهٔ کلیتر یافتن **مساحت بین دو منحنی** $y = f(x)$ و $y = g(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ را درنظر می‌گیریم‌که در آنها توابع f و g هر دو پیوسته‌بوده و $f(x) \geq g(x)$. این مساحت ناحیهٔ مسطح R در شکل ۹ (آ) است که به خطوط‌قائم $x = a$ و $x = b$ ومنحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ محدود شده است و منحنی $y = f(x)$ مرز بالا و منحنی $y = g(x)$ مرز پایین‌آن

می‌باشد (برای سادگی فرض کرده‌ایم $f(x) > g(x) > 0$).

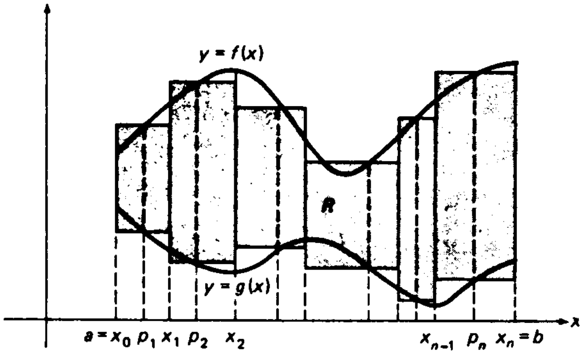
ناحیهٔ R معمولاً " دو سمت خمیده دارد(CD و EF در شکل) ، و این نواحی در هندسهٔ مقدماتی مطرح نمی‌شوند . لذا ، در محاسبهٔ مساحت A ی ناحیهٔ R باید مجدداً " به تعریف مناسبی از A بپردازیم . برای این کار ، به موازات ساختن صفحات ۳۶۷ تا ۳۶۹ پیش رفته ، A را با مجموعی به شکل

$$\sum_{i=1}^{n} [f(p_i) - g(p_i)] \Delta x_i, \tag{۵}$$

مبتنی بر افرازی از بازهٔ $[a, b]$ به n زیربازهٔ $[x_0, x_1]$ ، $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ به طولهای $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ که p_i نقطهٔ دلخواهی در $[x_{i-1}, x_i]$ است تقریب می‌کنیم . این تقریب متناظر است با تعویض نوارها با بالا و پایین خمیده در شکل ۹(ب) به وسیلهٔ مستطیلهای سایه‌دار نموده شده . در این صورت ، A را حد مجموع (۵) **تعریف می‌کنیم**



(آ)



(ب)

شکل ۹

وقتی اندازهٔ مش $\mu = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ به صفر نزدیک شود :

$$A = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(p_i) - g(p_i)] \Delta x_i.$$

همانطور که اینک می‌دانیم ، حد مورد نظر انتگرال

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \tag{۶}$$

است که وجودش از پیوستگی تابع $f - g$ نتیجه می‌شود . این فرمول مطلوب برای مساحت A بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ است . نامنفی بودن A ، که معنی هندسی‌اش آن را لازم دارد ، نتیجه‌ای است از نامساوی $f(x) - g(x) \geq 0$ و قاعدهٔ (چهار) ، صفحهٔ ۳۷۷ . شهودا " واضح است که $A > 0$ مگر آنکه منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ یکی باشند، و این مطلب نتیجهٔ این امر است که انتگرال یک تابع نامنفی پیوسته مثبت است مگر آنکه تابع متحد صفر باشد (ر.ک. مثال ۸) . اگر $g(x) \equiv 0$ ، همانطور که انتظار می‌رود ، رابطهٔ (۶) به فرمول

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

برای مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ تحویل می‌شود .

به صورت دیگر ، فرمول (۶) را می‌توان با استدلال زیر به دست آورد . بی‌آنکه به کلیت خللی وارد آید می‌توان فرض‌کرد که f و g هر دو نامنفی‌اند ، زیرا در غیر این‌صورت می‌توان با انتقال منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به بالا ،که در اثر آن تابع $f - g$ یا مساحت A بین منحنیها تغییر نمی‌کند ، به این وضع درآورد . در این صورت، مانند شکل ۹ (آ) ،

$$A = R \text{ مساحت} = (abFE \text{ مساحت}) - (abDC \text{ مساحت})$$

زیرا نواحی $abFE$ و $abDC$ نقطهٔ مشترکی جز مرز مشترک خود CD ندارند . اما

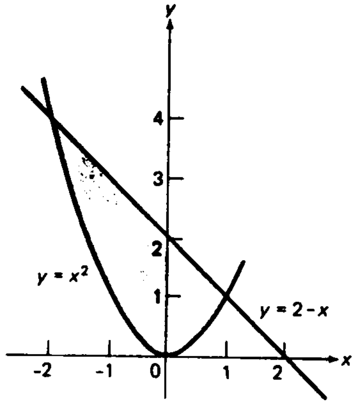
$$abFE \text{ مساحت} = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad abDC \text{ مساحت} = \int_a^b g(x)\, dx,$$

$$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

مثال ۳. مساحت A بین خط $y = 2 - x$ و سهمی $y = x^2$ را بیابید .

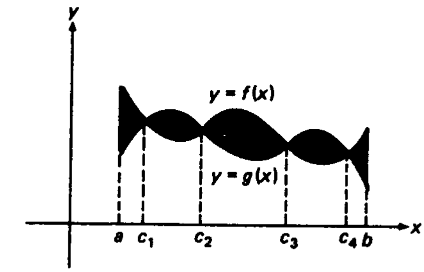
حل. برای یافتن مختصات x نقاط اشتراک خط و سهمی، معادلهٔ درجهٔ دوم $2 - x = x^2$ را حل کرده دو ریشهٔ $x = -2$ و $x = 1$ را بـه دست می‌آوریم. بر بازهٔ $[-2, 1]$ خط منحنی بالایی و سهمی منحنی پایینی است (ر.ک. شکل ۱۰). بنابراین، طبق (۶)،

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx = 2\int_{-2}^{1} dx - \int_{-2}^{1} x\,dx - \int_{-2}^{1} x^2\,dx$$
$$= 2[1 - (-2)] - \frac{1}{2}[1^2 - (-2)^2] - \frac{1}{3}[1^3 - (-2)^3]$$
$$= 2(3) - \frac{1}{2}(-3) - \frac{1}{3}(9) = \frac{9}{2}.$$



شکل ۱۰

فرض کنیم $y = f(x)$ و $y = g(x)$ دو منحنی به هم بافتهٔ شکل ۱۱ باشنـد. در این صورت، $y = f(x)$ منحنی بالایی و $y = g(x)$ منحنی پایینی بر بازه‌های $[a, c_1]$، $[c_2, c_3]$، و $[c_4, b]$ است، ولی نقش دو منحنی بر بازه‌های $[c_1, c_2]$ و $[c_3, c_4]$ عوض شده، $y = f(x)$



شکل ۱۱

منحنی پایینی و $y = g(x)$ منحنی بالایی می‌شود. لذا، سهم بازه‌های $[a, c_1]$، $[c_2, c_3]$،

و $[c_4, b]$ در انتگرال (۶) مثبت است‌ولی سهم $[c_1, c_2]$ و $[c_3, c_4]$ منفی می‌باشد. همانطور که در شکل علایم نشان می‌دهند، به کمک قضیهٔ ۲،

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \sum_{n=1}^{5} I_n,$$

که در آن

$$I_n = \int_{c_{n-1}}^{c_n} [f(x) - g(x)]\,dx \quad (c_0 = a, c_5 = b),$$

و I_1، I_3، و I_5 مثبت ولی I_2 و I_4 منفی می‌باشند. لذا، (۶) مساحت بین دو منحنی مورد بحث را نمی‌دهد بلکه مجموع مساحات سه ناحیه با علامت به علاوه منهای مجموع مساحات دو ناحیه با علامت منها را می‌دهد.

تعریف مناسب برای مساحت A بین دو منحنی بافته شدهٔ $y = f(x)$ و $y = g(x)$ مساوی است با

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx, \tag{۶'}$$

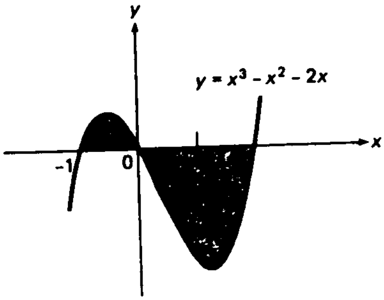
شامل قدر مطلق تفاضل $f(x) - g(x)$. با این تعریف، مساحت بین دو منحنی شکل ۱۱ مجموع مساحات تمام پنج ناحیهٔ سایه‌دار بی‌توجه به علامت می‌باشد. توجه کنید که اگر $f(x) \geq g(x)$، فرمول (۶') به فرمول (۶) قبلی تحویل می‌گردد.

فرض‌کنیم $f(x)$ بتواند هر دو مقدار مثبت و منفی را بگیرد. با اختیار $g(x) \equiv 0$ در (۶') معلوم می‌شود که $\int_a^b |f(x)|\,dx$ مساحت A ی بین منحنی $y = f(x)$ و محور x است. به آسانی معلوم می‌شود که $\int_a^b f(x)\,dx = A_+ - A_-$، که در آن A_+ قسمت واقع از A دربالای محور x و A_- قسمت واقع از A در زیر محور x می‌باشد.

مثال ۴. مساحت A ی بین منحنی $y = x^3 - x^2 - 2x$ و محور x را بیابید. این مجموع مساحات دو ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۲ می‌باشد.

حل. با حل معادلهٔ مکعبی $x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2) = 0$، معلوم می‌شود که منحنی $y = x^3 - x^2 - 2x$ دارای سه قطع x است، $x = -1$، $x = 0$، و $x = 2$. به علاوه، همانطور که شکل نشان می‌دهد، منحنی بالای محور x بین $x = -1$ و $x = 0$ و زیر محور x بین $x = 0$ و $x = 2$ قرار دارد. بنابراین،

$$A = \int_{-1}^{2} |x^3 - x^2 - 2x|\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx - \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} x^3\,dx - \int_{-1}^{0} x^2\,dx - 2\int_{-1}^{0} x\,dx - \int_{0}^{2} x^3\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,dx + 2\int_{0}^{2} x\,dx$$
$$= \frac{1}{4}[0^4 - (-1)^4] - \frac{1}{3}[0^3 - (-1)^3] - 2\left(\frac{1}{2}\right)[0^2 - (-1)^2]$$
$$-\frac{1}{4}(2^4 - 0^4) + \frac{1}{3}(2^3 - 0^3) + 2\left(\frac{1}{2}\right)(2^2 - 0^2)$$
$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 - 4 + \frac{8}{3} + 4 = \frac{7}{3} + \frac{3}{4} = \frac{37}{12}.$$



شکل ۱۲

مقدار میانگین یک تابع . فرض کنیم f تابع انتگرال‌پذیری بر بازهٔ $[a, b]$ باشد . عدد

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

مقدار میانگین (**یا متوسط**) f بر $[a, b]$ یا روی $[a, b]$ نام دارد . هرگاه ، علاوه‌براین، f بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، آنگاه ، همانطور که لحظه‌ای بعد نشان می‌دهیم(ر.ک. قضیهٔ ۳۶) ، همواره دست کم یک‌نقطه مانند c در $[a, b]$ هست به‌طوری که $f(c)$ مساوی مقدار میانگین f بر $[a, b]$ می‌باشد .

مثال ۵ . انتگرال تابع $f(x) = x^2 + 1$ بـر بازهٔ $[-2, 1]$ مساوی است با

$$\int_{-2}^{1} (x^2 + 1)\,dx = \int_{-2}^{1} x^2\,dx + \int_{-2}^{1} dx$$
$$= \frac{1}{3}[1^3 - (-2)^3] + [1 - (-2)] = 3 + 3 = 6.$$

از اینرو ، مقدار میانگین f بر $[-2, 1]$ مساوی است با

$$\frac{1}{1-(-2)}\int_{-2}^{1}(x^2+1)\,dx=\frac{1}{3}(6)=2.$$

توجه‌کنید که f این مقدار را در دونقطهٔ 1 و -1 که هر دو دربازهٔ $[-2, 1]$ اند می‌گیرد.

مثال ۶. مقدار میانگین تابع $f(x)=1-x^3$ بر بازهٔ $[0, 4]$ مساوی است با

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-0}\int_0^4(1-x^3)\,dx&=\frac{1}{4}\int_0^4 dx-\frac{1}{4}\int_0^4 x^3\,dx\\&=\frac{1}{4}(4-0)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)(4^4-0^4)=1-16=-15,\end{aligned}$$

و f این مقدار را در نقطهٔ $\sqrt[3]{16}\approx 2.52$ که متعلق به $[0, 4]$ است می‌گیرد .

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها) . *اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ هست به طوری که*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=f(c),$$

یا معادلاً

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c). \tag{۷}$$

برهان. بنابر قضیهٔ مقدار اکستریم (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۹) ، f بر $[a, b]$ دارای مینیمم m و ماکزیمم M است که در نقاط p و q بازهٔ $[a, b]$ گرفته می‌شوند . چون $m\le f(x)\le M$ ، به کمک قاعدهٔ (شش) ، صفحهٔ ۳۷۸، داریم

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a),$$

یا معادلاً

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le M.$$

لذا ، مقدار میانگین f بر $[a, b]$ ، که با h نموده می‌شود ، متعلق به بازهٔ $[m, M]$ می‌باشد . هرگاه $h=m$ یا $h=M$ ، آنگاه $h=f(p)$ یا $h=f(q)$ ، و قضیه به ازای $c=p$

یا $c = q$ ثابت می‌شود. در غیر این صورت، $m < h < M$، و از قضیهٔ مقدار میانی (ر.ک صفحهٔ ۱۵۴) معلوم می‌شود که نقطه‌ای مانند c بین p و q، و لذا مسلماً" در $[a, b]$، وجود دارد که $h = f(c)$.

قضیه ۳ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی باشد. در این صورت، فرمول (۷) می‌گوید که مستطیلی به طول $b - a$ و به ارتفاعی مساوی مقدار f در نقطهٔ c در $[a, b]$ وجوددارد که مساحتش مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ است. به صورت دیگر، با نوشتن (۷) به شکل معادل

$$\int_a^b [f(x) - f(c)]\, dx = 0, \qquad (۷')$$

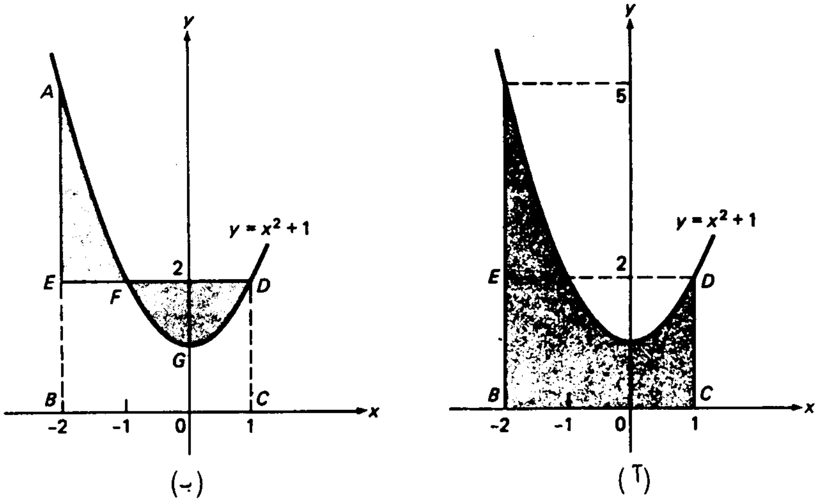
می‌بینیم که خطی افقی مانند $y = f(c)$ وجوددارد، که c نقطه‌ای در $[a, b]$ است، به‌طوری که مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ و بالای خط، از $x = a$ تا $x = b$، درست مساوی مساحت زیر خط و بالای منحنی است (در اینجا الزاماً" باید f را نامنفی گرفت).

مثال ۷. قضیهٔ ۳ را بااعمال برتابع $y = f(x) = x^2 + 1$ روی بازهٔ $[-2, 1]$ تعبیر هندسی کنید.

حل. همانطورکه در مثال۵ نشان دادیم، مقدار میانگین f بر $[-2, 1]$ مساوی 2 است. بنابراین، مساحت تحت سهمی $y = x^2 + 1$ از $x = -2$ تا $x = 1$، یعنی مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۳ (آ)، مساوی مساحت مستطیل $BCDE$ به طول 3 و ارتفاع 2 است (هر دو مساحت مساوی 6 می‌باشند)، و ارتفاع مستطیل مساوی مقدار f در دو نقطهٔ 1 و -1 بازهٔ $[-2, 1]$ می‌باشد. به صورت دیگر، مساحت ناحیهٔ سایه‌دار AEF شکل ۱۳ (ب) زیر سهمی $y = x^2 + 1$ و بالای خط $y = 2$ مساوی مساحت ناحیهٔ سایه‌دار FGD زیر خط و بالای سهمی است. در واقع، هر دو مساحت مساوی است با $\frac{4}{3}$ (تحقیق کنید).

مثال ۸. به کمک قضیهٔ ۳ نشان دهید هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی بوده‌و دست کم به ازای یک نقطه مانند c در $[a, b]$، $f(c) \neq 0$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0. \qquad (۸)$$



شکل ۱۳

حل. واضح است که $f(c) > 0$ ، زیرا f بر $[a, b]$ نامنفی است. هرگاه $a < c < b$، آنگاه، بنابر قاعدهٔ (دو)، صفحهٔ ۱۲۴، زیربازه‌ای مانند $[c - \delta, c + \delta]$ از بازهٔ $[a, b]$ وجود دارد که f بر آن مثبت است، زیرا f در c دارای مقدار مثبت می‌باشد. همچنین، طبق قضیهٔ ۲،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx,$$

که در آن انتگرالهای اول و سوم آمده در مجموع نامنفی‌اند (چرا؟). اما، بنابر قضیهٔ ۳، انتگرال دوم مجموع به ازای p ای در $[c - \delta, c + \delta]$ مساوی $2\delta f(p)$ است؛ و درنتیجه، چون $f(p) > 0$ ، مثبت می‌باشد. لذا، نامساوی (۸) برقرار می‌باشد. برهان اساساً "مانند حالت $c = a$ یا $c = b$ است (این بار $[a, b]$ را فقط به دو زیربازه تقسیم کنید). شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

بخصوص، از مثال ۸ معلوم می‌شود که هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی بوده و

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

آنگاه f بر $[a, b]$ متحد صفر می‌باشد.

تبصره. اگر همانطور که در قضیهٔ ۳ و فرمول (۷) تلویحاً " فرض شده است، به‌جای $a < b$

داشته باشیم $b < a$ ، و نیز f بر $[b, a]$ پیوسته باشد ، به‌جای (۷) داریم

$$\int_b^a f(x)\,dx = (a-b)f(c),$$

که در آن c نقطه‌ای در $[b, a]$ می‌باشد . با ضرب طرفین این فرمول در $1-$ به فرمول (۷) باز می‌گردیم . لذا ، همواره می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها را به شکل (۷) به کار برد ، که در آن c نقطه‌ای در بازه با نقاط انتهایی a و b است . در واقع ، معلوم می‌شود (ر.ک. مسئلهٔ ۳۹) که ، مثل قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات ، همیشه می‌توان c را نقطه‌ای بین a و b گرفت .

مسائل

۱. بنابر فرمول (۹) ، صفحهٔ ۳۷۵ ،

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

که در آن تلویحا " فرض شده است که $a < b$. نشان دهید که فرمول به ازای $a > b$ برقرار می‌ماند .

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۲. $\int_{11}^{7} x\,dx$

۳. $\int_{1}^{-1} (x^2 - x)\,dx$

۴. $\int_{-2}^{2} |x+1|\,dx$

۵. $\int_{-1}^{3} |x^2 - 2x|\,dx$

۶. $\int_0^1 t^{10}\,dt + \int_1^0 t^{10}\,dt$

۷. $\int_0^1 u^{10}\,du - \int_1^0 u^{10}\,du$

۸. $\int_0^1 v^2\,dv + \int_1^3 (v^2-1)\,dv + \int_3^2 (v^2+1)\,dv$

فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 2-x \text{ ، } x < 1 \text{ اگر } \\ x^3 \text{ ، } x \geq 1 \text{ اگر } \end{cases}$$

انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید .

۹. $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

۱۰. $\int_{2}^{-1} f(x)\,dx$

۱۱. $\int_0^2 f(x+1)\,dx$

۱۲. $\int_1^2 [f(x) - f(x-1)]\,dx$

مساحت A ی ناحیهٔ R بین منحنیهای زیر را بیابید.

۱۳. $y = x^2 - 1$ و $y = 1 - x^2$

۱۴. $y = x^2 - 4$ و $y = 2x - x^2$

۱۵. $y = x^2$ و $y = x^5$

۱۶. $y = x + 1$ و $y = |x| + |x - 1|$

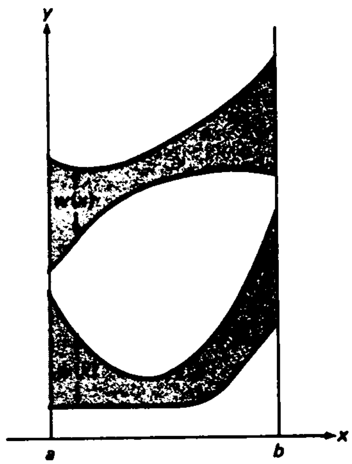
۱۷. $y = |x|$ و $y = 2 - x^2$

۱۸. $y = |2x - 1|$ و $y = 4 - x^2$

در هر حالت ناحیهٔ R را رسم نمایید.

۱۹. مساحت A ی بین منحنی $y = x^3 - x^2 - 2x$ (ر.ک. شکل ۱۲) و خط $y = 4x$ را بیابید.

۲۰. فرض کنید R ناحیهٔ محدود به خطوط قائم $x = a$ و $x = b$، منحنی بالایی $y = f(x)$ و منحنی پایینی $y = g(x) \le f(x)$ باشد. گوییم R به عرض $w(x) = f(x) - g(x)$ است که در آن تابع $w(x)$ بر $[a, b]$ تعریف شده است. *اصل کاوالیری*[1] برای مساحت را ثابت کنید که می‌گوید دوناحیه از این نوع به‌عرض یکسان $w(x)$، مانند دو ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۴، بی‌توجه به‌انتخاب منحنیهای بالایی و پایینی، دارای مساحت A می‌باشند.



شکل ۱۴

۲۱. تعبیر هندسی متوسط تابع x روی بازهٔ $[a, b]$ چیست؟

1. *Cavalieri*

۲۲. نشان دهید که متوسط تابع x^2 روی بازهٔ $[a, b]$ مساوی است با $\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$.

به ازای تابع f و نقاط a و b داده شده، مقدار میانگین f بر $[a, b]$ را بیابید.

۲۳. $f(x) = 1 - x - x^2, a = 0, b = 4$

۲۴. $f(x) = x^3 - 2x + 1, a = -2, b = 3$

۲۵. $f(x) = |1 - x|, a = -1, b = 2$

۲۶. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 10, a = -3, b = -1$

نقطهٔ c صادق در فرمول مقدار میانگین (۷) را درصورتی بیابید که

۲۷. $f(x) = x, a = 1, b = 7$

۲۸. $f(x) = 2x + 3, a = -1, b = 3$

۲۹. $f(x) = x^2, a = 2, b = 0$

۳۰. $f(x) = 3x^2 + 1, a = 4, b = 1$

۳۱. $f(x) = |x^2 - 1|, a = -2, b = 2$

۳۲. $a = -1, b = 2$، $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 0 \text{ اگر } \\ x & x \geq 0 \text{ اگر } \end{cases}$

۳۳. فرض کنید f و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده، و $f(x) \geq g(x)$ با دست کم یک نقطهٔ c در $[a, b]$ که $f(c) \neq g(c)$. نشان دهید که

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx.$$

۳۴. تحقیق کنید که

$$\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{1}{10 + x}dx < \frac{1}{5}.$$

بدون سعی در محاسبهٔ انتگرالها، معین کنید کدام انتگرال بزرگتر است.

۳۵. $\int_0^1 x\,dx$ یا $\int_0^1 x^2\,dx$

۳۶. $\int_1^2 x\,dx$ یا $\int_1^2 x^2\,dx$

۳۷. $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ یا $\int_0^{\pi/2} x\,dx$

۳۸. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$ یا $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx$

۳۹. نشان دهید که نقطهٔ c قضیهٔ ۳ را همیشه می‌توان یک نقطهٔ درونی بازهٔ $[a, b]$

گرفت.

۴۰. فرض کنید f بر $[1,4]$ پیوسته بوده و $f(3)\neq 0$. چه عدد بزرگتر است،

$$I_1=\int_1^4 f(x)\,dx+\int_4^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^1 f(x)\,dx$$

یا

$$I_2=\int_{\sqrt{5}}^{\pi} f^2(x)\,dx?$$

۴.۴ پاد مشتقات و انتگرال نامعین

مفاهیم مطرح شده در این بخش نقشی کلیدی در بررسی بیشتر حساب انتگرال خواهند داشت. بزودی به کمک آنها قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (قضیهٔ ۶، صفحهٔ ۴۰۹) را ثابت می‌کنیم، که با آن می‌توان انتگرالهای معین را بدون توسل به محاسبهٔ صریح مجموعهای ریمان حساب کرد.

تعریف پادمشتق. فرض کنیم تابع $f(x)$ بر بازهٔ I تعریف شده باشد، و $F(x)$ تابع دیگری باشد که بر I تعریف شده و مشتقش مساوی $f(x)$ باشد؛ درنتیجه، به ازای هر x در I ،

$$\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)=f(x)$$

در این صورت، گوییم $F(x)$ یک **پاد مشتق** $f(x)$ بر بازهٔ I است. در اینجا از حرف x برای متغیر مستقل استفاده می‌کنیم، ولی هر حرف دیگر به همین خوبی می‌باشد.

مثال ۱. تابع $\frac{1}{2}x^2$ یک پاد مشتق x بر $(-\infty,\infty)$ است، زیرا به ازای هر x ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(2x)=x$$

مثال ۲. تابع $\frac{2}{3}t^{3/2}$ یک پاد مشتق $t^{1/2}$ بر $(0,\infty)$ است، زیرا به ازای هر t مثبت،

$$\frac{d}{dt}\frac{2}{3}t^{3/2}=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)=t^{1/2}$$

مثال ۳. تابع $\tan u$ یک پاد مشتق $\sec^2 u$ برهربازه‌ای است که شامل نقاط $u=\pm\frac{1}{2}\pi,\pm\frac{3}{2}\pi,\ldots$ نیست. در واقع، جز در این نقاط که هر دوی $\tan u$ و $\sec u$ تعریف نشده‌اند،

$$\frac{d}{du}\tan u = \sec^2 u$$

پاد مشتق کلی. هرگاه $F(x)$ پاد مشتق $f(x)$ بر بازهٔ I باشد، آنگاه $G(x) = F(x) + C$ نیز چنین است، که در آن C ثابت دلخواهی می‌باشد، زیرا

$$\frac{dG(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[F(x) + C\right] = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = F'(x) = f(x).$$

همانطور که اینک نشان می‌دهیم، $G(x)$ پاد مشتق کلی $f(x)$ بر I است. بدین معنی‌که هر پاد مشتق $f(x)$ بر I به شکل $G(x)$ است.

قضیهٔ ۴ (شکل پاد مشتق کلی). *فرض‌کنیم $F(x)$ پاد مشتقی از $f(x)$ بر بازهٔ I باشد. در این صورت، هر پاد مشتق دیگر $f(x)$ بر I به شکل $F(x) + C$ است، که درآن C ثابت می‌باشد.*

برهان. فرض‌کنیم $G(x)$ پاد مشتق دیگری از $f(x)$ بر I بوده، و $H(x) = G(x) - F(x)$. در این صورت، به ازای هر x در I،

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\ ;$$

یعنی، $H'(x)$ در هر نقطه از I مساوی صفر است. از قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۲۶۱، معلوم می‌شود که $H(x)$ در هر نقطه از I مقدار ثابتی مثلاً C دارد. بنابراین،

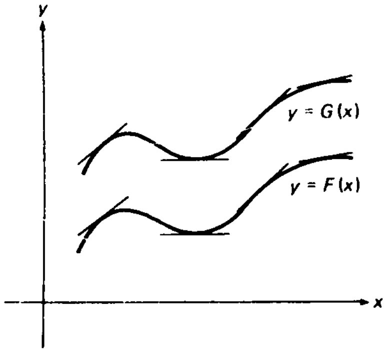
$$H(x) = G(x) - F(x) \equiv C,$$

یا معادلاً $G(x) \equiv F(x) + C$.

لذا، دو تابع که بر بازه‌ای مشتق یکسان داشته باشد فقط می‌توانند در یک ثابت فرق داشته باشند. به طور هندسی، این یعنی هرگاه دو منحنی روی یک بازه درهر جفت‌نقطه با طول یکسان شیب یکسانی داشته باشند، آنگاه هر منحنی را می‌توان از دیگری با انتقال قائم مناسبی به دست آورد، و این امر در شکل ۱۵ با دو منحنی $y = F(x)$ و $y = G(x)$ نموده شده است.

مثال ۴. از

$$\frac{d}{dx}(4 - \cos x) = \sin x, \qquad \frac{d}{dx}\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$$



شکل ۱۵

نتیجه می‌شود که

$$4 - \cos x \equiv 2\sin^2\frac{x}{2} + C$$

و با اختیار $x = 0$ معلوم می‌شود که $C = 3$. این اتحاد مثلثاتی را به عنوان تمرین ثابت کنید .

تعریف انتگرال نامعین . هم‌اکنون نشان دادیم که هرگاه $F(x)$ یک پاد مشتق $f(x)$ بر I باشد ، آنگاه پاد مشتق کلی $f(x)$ بر I با $F(x) + C$ داده می‌شود ، که در آن C ثابت دلخواهی است . عبارت $F(x) + C$ ***انتگرال نامعین*** $f(x)$ نام دارد و با $\int f(x)\,dx$ نموده می‌شود . لذا ، طبق تعریف ،

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1}$$

درنتیجه ، انتگرال نامعین فقط با تقریب یک " ثابت جمعی " دلخواه تعریف شده است . در اینجا نماد همان نماد انتگرال معین است ، **جز آنکه حدود *انتگرالگیری* وجود ندارند.** عدم وجود حدود انتگرالگیری به ما می‌گوید که انتگرال نامعین $\int f(x)\,dx$ ، به خلاف انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ که **عدد** است ، ***تابعی*** (به‌علاوهٔ یک ثابت دلخواه) می‌باشد . مثل قبل ، تابع $f(x)$ ***انتگرالده*** ، شناسه‌اش (در این حالت x) ***متغیر انتگرالگیری*** ، وعملی که ما را از $f(x)$ به عبارت (۱) می‌رساند ***انتگرالگیری*** (نامعین) نام دارد . ثابت C در (۱) ***ثابت انتگرالگیری*** نامیده می‌شود .

در نوشتن (۱) تلویحا " فرض شده است که فرمول به ازای هر x در بازهٔ زمینهٔ I که بر آن f و F تعریف شده‌اند یک اتحاد است ؛ با اینحال ، I معمولا " نامشخص رها می‌شود .

با مشتقگیری از (۱) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}[F(x)+C] = F'(x),$$

درنتیجه،

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x). \qquad (۲)$$

چون این یک پاد مشتق است، انتگرال نامعین باید همان شناسهٔ انتگرالده را داشته‌باشد. مثلاً"،

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C,$$

و در این حالت

$$\int x\,dx \neq \int t\,dt.$$

در اینجا، به‌خلاف انتگرال معین، متغیر انتگرالگیری یک متغیر ظاهری نیست.

چون هر تابع مشتقپذیر $f(x)$ پاد مشتقی از مشتق خود $f'(x)$ است، داریم

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C. \qquad (۳)$$

این فرمول را می‌توان برای به دست آوردن یک فرمول انتگرالگیری از هر فرمول مشتقگیری به کار برد. مثلاً"، هرگاه r یک عدد گویا و مخالف -1 باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{r+1}}{r+1} = \frac{(r+1)x^r}{r+1} = x^r,$$

و کاربرد (۳) نتیجه می‌دهد که

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1). \qquad (۴)$$

اگر $r = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{2}$ به نوبت اختیار شوند، به دست می‌آوریم

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$\int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C,$$

$$\int x^{1/3}\,dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + C,$$

$$\int dx = x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

دو فرمول اول در مثالهای ۱و۲ پیش‌بینی شده بودند . در آخرین فرمول ، از رسم معمول استفاده کرده

$$\int \frac{dx}{f(x)} \quad \text{را به صورت} \quad \int \frac{1}{f(x)}\,dx$$

می‌نویسیم .

به همین نحو ،فرمولهای مشتق توابع مثلثاتی (ر.ک. صفحهٔ ۲۱۱) ما را به فرمولهای انتگرالگیری زیر می‌رسانند :

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C,$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C,$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C,$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C.$$

قواعد برای انتگرالگیری نامعین . حال چند قاعده به دست می‌آوریم که انتگرالهای نامعین تحت تبعیت آنها می‌باشند .

(یک) هرگاه f انتگرال نامعین (پاد مشتق) داشته و c ثابت دلخواهی باشد ، آنگاه

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx. \qquad (۵)$$

در واقع ، عبارت سمت راست پاد مشتقی از $cf(x)$ است ، زیرا به کمک فرمول (۲)

$$\frac{d}{dx}\left(c\int f(x)\,dx\right) = c\,\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = cf(x),$$

به‌علاوه ، $\int f(x)\,dx$ فقط با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه تعریف شده است ؛ودرنتیجه ،

همین امر در مورد $c\int f(x)\,dx$ صادق است. لذا، در یک انتگرال نامعین، هر ثابت ضربدر انتگرالده را می‌توان، درست مثل انتگرال معین، خارج کرده جلو علامت انتگرال قرار داد.

(دو) هرگاه f و g بر بازهٔ یکسانی انتگرال نامعین (پاد مشتق) داشته باشند، آنگاه

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \tag{۶}$$

برای اثبات این امر، ملاحظه می‌کنیم که مجموع انتگرالهای سمت راست یک پاد مشتق $f + g$ است، زیرا

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = f(x) + g(x).$$

به‌علاوه، هر انتگرال $\int f(x)\,dx$ و $\int g(x)\,dx$ فقط با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه تعریف شده است؛ و درنتیجه، همین امر برای مجموع آنها نیز درست است. لذا، انتگرال نامعین مجموع دو تابع مجموع انتگرالهای نامعین تک تک توابع می‌باشد. این مشابه قاعدهٔ انتگرالهای نامعین (دو)، صفحهٔ ۳۷۶، می‌باشد.

(سه) هرگاه $f_1, f_2, \ldots, f_n$ بربازهٔ واحدی انتگرال نامعین داشته و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثابتهای دلخواهی باشند، آنگاه، درست مثل انتگرالهای معین (ر.ک. صفحهٔ ۳۷۷)،

$$\begin{aligned}&\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)]\,dx \\ &\qquad = c_1 \int f_1(x)\,dx + c_2 \int f_2(x)\,dx + \cdots + c_n \int f_n(x)\,dx,\end{aligned} \tag{۷}$$

فرمول ۷ باکاربرد مکررفرمولهای (۵) و (۶) ثابت می‌شود. لذا، انتگرال نامعین هرترکیب خطی از توابع ترکیبی خطی، با همان ضرایب، از انتگرالهای نامعین تک‌تک توابع می‌باشد.

(چهار) هرگاه f دارای پاد مشتق F باشد، درنتیجه $\int f(x)\,dx = F(x) + C$، آنگاه به به ازای ثابتهای دلخواه $a \neq 0$ و b،

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{F(ax + b)}{a} + C \tag{۸}$$

در واقع، چون $F'(x) = f(x)$، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dx}\frac{F(ax + b)}{a} = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}F(ax + b) = \frac{1}{a}F'(ax + b)\frac{d}{dx}(ax + b)$$

$$= \frac{a}{a}F'(ax + b) = f(ax + b),$$

لذا ، $(1/a)F(ax+b)$ یک پادمشتق $f(ax+b)$ است ، که (۸) را ثابت خواهد کرد .

حال در وضعی هستیم که چند انتگرال نامعین را حساب کنیم . همین‌طورکه‌حساب انتگرال را پی‌می‌گیریم ،تکنیکهای دیگر انتگرالگیری وارد کار خواهند شد . بخصوص، قاعدهٔ (چهار) حالت خاص مهمی است از یک روش کلی به نام *انتگرالگیری با جانشانی* (ر.ک . بخش ۱۰۷) .

مثال ۵ . $\int\left(5x^4-6x^2+\dfrac{2}{x^2}\right)dx$ را حساب کنید .

حل . بنابر قاعدهٔ (سه) ، پس‌از آنکه فرمول (۴) سه بار (به ازای $r=4, 2, -2$) به‌کار رفت ، داریم

$$\int\left(5x^4-6x^2+\frac{2}{x^2}\right)dx = 5\int x^4\,dx-6\int x^2\,dx+2\int x^{-2}\,dx$$
$$=5\left(\frac{x^5}{5}\right)-6\left(\frac{x^3}{3}\right)+2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)+C$$
$$=x^5-2x^3-\frac{2}{x}+C.$$

توجه کنید که ثابتهای دلخواه انتگرالگیری ناشی از سه انتگرال جداگانه باهم تلفیق‌وثابت انتگرالگیری C را به وجود آورده‌اند .

مثال ۶ . انتگرال نامعین چندجمله‌ای دلخواه
$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$
که در آن $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثابت اند ، را محاسبه کنید .

حل . فرض‌کنیم $a_n \neq 0$ ؛ درنتیجه ، $P(x)$ از درجهٔ n است .بنابر قاعدهٔ (سه)وکاربرد مکرر فرمول (۴) ، داریم

$$\int P(x)\,dx = a_0\int dx + a_1\int x\,dx + a_2\int x^2\,dx+\cdots+a_n\int x^n\,dx$$
$$=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C,$$

که چندجمله‌ای دیگری است ، در واقع یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n + 1$ است ، زیرا ضریب x^{n+1} ناصفر می‌باشد . باید توجه داشت که مشتقگیری از این چندجمله‌ای جدید فوراً "ما را به چندجمله‌ای اصلی $P(x)$ برمی‌گرداند ، و نشان می‌دهد که محاسبات درست انجام شده است .

مثال ۷ . $\int \cos 2x\,dx$ را حساب کنید .

حل . بنابر قاعدهٔ (چهار) به ازای $a = 2$ ، $b = 0$ ، $f(x) = \cos x$ ، و $F(x) = \sin x$ ،

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

مثال ۸ . $\int \cos^2 x\,dx$ را حساب کنید .

حل . چون

$$1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x,$$

به کمک مثال ۷ داریم

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

می‌توان C را نصف مجموع ثابتهای دلخواه انتگرالگیری ناشی از انتگرالهای $\int dx$ و $\int \cos 2x\,dx$ گرفت ، یا در آخر محاسبات یک ثابت دلخواه وارد کرد .

مثال ۹ . $\int (1 - u)(1 + u + u^2)\,du$ را حساب کنید .

حل . در اینجا متغیر انتگرالگیری به جای x ، u است . با انجام ضرب در انتگرالده در می‌یابیم که ، بنابر قاعدهٔ (سه) و فرمول (۴) یا تشخیص اینکه $u - \frac{1}{4}u^4$ یک پادمشتق $1 - u^3$ است ،

$$\int (1 - u)(1 + u + u^2)\,du = \int (1 - u^3)\,du = u - \frac{1}{4}u^4 + C,$$

وجود پادمشتقهای توابع پیوسته. ما از قبل می‌دانیم که هر تابع پیوسته انتگرال معین دارد (ر.ک. قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۳۷۱). حال نشان می‌دهیم که هر تابع پیوسته پاد مشتق، و در نتیجه، انتگرال نامعین دارد.

قضیهٔ ۵ (پیوستگی وجود پادمشتق را ایجاب می‌کند). *فرض کنیم f بر بازهٔ I پیوسته بوده، و*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad (۹)$$

که در آن a نقطهٔ ثابتی از I و x نقطهٔ متغیری از I باشد. در این صورت، F یک پاد مشتق f بر I است؛ یعنی، به ازای هر x در I، $F'(x) = f(x)$.

برهان. پیش از شروع به اثبات، متذکر می‌شویم که انتگرال معین (۹)، که وجودش را پیوستگی f تضمین می‌کند، تابعی است از حد بالایی انتگرالگیری متغیر x. در واقع، وجود x در حد بالایی ما را به استفاده از حرف دیگر (در اینجا t) برای متغیر انتگرالگیری مجبور می‌سازد.

حال فرض کنیم x و $x + \Delta x$ هر دو متعلق به بازهٔ I باشند. بنابرنتیجهٔ صفحهٔ ۳۸۳،

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

یا معادلاً

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

اگر قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها را در مورد انتگرال سمت راست که از نقطهٔ ثابت a مستقل است اعمال کنیم، به دست می‌آوریم

$$F(x + \Delta x) - F(x) = (x + \Delta x - x) f(c) = f(c)\,\Delta x,$$

که در آن بسته به اینکه Δx مثبت یا منفی باشد، $x \le c \le x + \Delta x$ یا $x + \Delta x \le c \le x$. نقطهٔ c وابسته به Δx است، و بخصوص وقتی $\Delta x \to 0$، $c \to x$. بنابراین، طبق پیوستگی f، وقتی $\Delta x \to 0$، $f(c) \to f(x)$. لذا، مشتق F در هر نقطهٔ x از I مساوی است

بـــا ۱

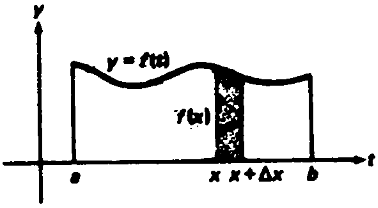
$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x),$$

درنتیجه ، F یک پادمشتق f بر I می‌باشد .

مشتقگیری از یک انتگرال با حد بالایی متغیر. البته ، تابع F بر I پیوسته است ، زیرا بر I مشتقپذیر می‌باشد . قضیهٔ ۵ را می‌توان به‌طور فشرده چنین نوشت :

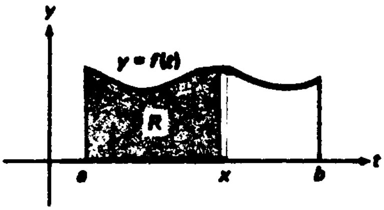
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

و این تعبیر هندسی ساده‌ای دارد . فرض‌کنیم $I=[a,b]$ و $f(t) \geq 0$. همانطـور که شکل ۱۶ (آ) نشان می‌دهد ، $F(x)$ مساحت ناحیهٔ سایه‌دار R تحت منحنی $y=f(t)$ از $t=a$ تا $t=x$ است ، و قضیه می‌گوید که وقتی x افزایش یابد ، $F(x)$ به میزانی مساوی‌ارتفاع $f(x)$ ناحیهٔ R در گوشه راست بالایی آن افزایش خواهد یافت . این معنی دارد ، زیرا افزایش x به $x+\Delta x$ سبب افزایش مساحت R به اندازهٔ $\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x)$ می‌شود ، که مساحت نوار تقریبا " مستطیلی باریک‌تحت منحنی $y=f(t)$ از $t=x$ تا $t=x+\Delta x$ است ، و مساحت این نوار که در شکل ۱۶ (ب) نموده شده تقریبا " مساوی $f(x)\Delta x$ است با خطایی نسبی کـه وقتی $\Delta x \to 0$ به صفر می‌رود .



مساحت سایه‌دار دقیقا " مساوی $F(x+\Delta x) - F(x)$ و تقریبا " مساوی $f(x)\Delta x$ است .

(ب)



مساحت سایه‌دار مساوی است با $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

(آ)

شکل ۱۶

---

۱ . اگر x نقطهٔ انتهایی چپ یا راست I باشد ، در عوض فرض می‌کنیم $\Delta x \to 0^+$ یا $\Delta x \to 0^-$ $F'(x)$ را مشتق راست یا چپ تعبیر می‌کنیم . در این صورت ، لازم نیست f خارج I تعریف شده باشد . اگر بازهٔ I باز باشد ، این بحث مطرح نخواهد بود .

از قضیهٔ ۵ فورا" نتیجه می‌شود که هرگاه *f* بر بازهٔ *I* پیوسته باشد، آنگاه *f* بر *I* انتگرال نامعین دارد. درواقع، چون تابع (۹) یک پادمشتق *f* بر *I* است، انتگرال نامعین *f* مساوی است با

$$\int f(x)\,dx = \int^x f(t)\,dt + C,$$

که در آن C یک ثابت دلخواه است.

مثال ۱۰. اگر $r = -1$، نمی‌توان فرمول انتگرالگیری اساسی

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

را به‌کار برد. درواقع، $r = -1$ مخرج سمت راست را صفر می‌کند. از آن سو، تابع $1/x$ بر هر بازه‌ای که شامل نقطهٔ $x = 0$ نباشد پیوسته است؛ ولذا، طبق قضیهٔ ۵، برهر چنین بازه پادمشتق دارد. به عبارت دیگر، انتگرال نامعین

$$\int \frac{dx}{x}$$

موجود *است*، اگر چه هنوز نام این تابع را نمی‌دانیم. در بخش ۱۰.۶ این تابع را، که **لگاریتم طبیعی** x بوده و با $\ln x$ نموده می‌شود، بررسی خواهیم کرد.

مسائل

پادمشتق کلی تابع داده شده را بیابید.

۱. $x^2 + x + 2$

۲. $x(x-1)(x-2)$

۳. $x^{49} - 5x^{24} + 20x^9 - 10$

۴. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{2/3}$

۵. $x^{-3/4} - x^{-4/3}$

۶. $(1 + x + x^2)/x^4$

۷. $2\sin x - 3\cos x$

۸. $5\sec^2 x + 4\csc^2 x$

۹. $(1-t)(1+t)(1+t^2)$

۱۰. $(3+2u)(9-6u+4u^2)$

۱۱. $(2-3v)(4+6v+9v^2)$

۱۲. $\frac{1}{4}w^4 - \frac{1}{2}w^2 + 8\sec w\tan w$

۱۳. نشان دهید. هرگاه $F(x)$ پادمشتقی از $f(x)$ باشد، آنگاه $-F(-x)$ پادمشتقی از $f(-x)$ است.

۱۴. با استفاده از مشتقگیری، نشان دهید $\sin^2 x = C - \frac{1}{2}\cos 2x$، که در آن C ثابت است،

و سپس C را پیدا کنید.

۱۵. در باب تابع $f(x)$ که مشتق n ام $f^{(n)}(x)$ متحد صفر است چه می‌توان گفت؟

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۱۶. $\int (x+5)(x-6)\,dx$

۱۷. $\int (x^4-3x^2+2x-4)\,dx$

۱۸. $\int x(1+x)(1-x)\,dx$

۱۹. $\int \left(x^3-x+\frac{1}{x^2}-\sin 3x\right)dx$

۲۰. $\int t^2(5-t)^4\,dt$

۲۱. $\int (1-u)(1-2u)(1-3u)\,du$

۲۲. $\int \frac{v+1}{\sqrt{v}}\,dv$

۲۳. $\int \sin^2 x\,dx$

۲۴. $\int \tan^2 x\,dx$

۲۵. $\int \cot^2 x\,dx$

۲۶. $\int \sin x\cos x\,dx$

۲۷. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

۲۸. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

۲۹. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$

۳۰. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

۳۱. $\int \frac{\cos 3u}{\cos u}\,du$

۳۲. $\int \frac{\sin 3v}{\sin v}\,dv$

۳۳. $\int \frac{w^4-1}{w-1}\,dw$

۳۴. $\int \frac{z^4-16}{z+2}\,dz$

۳۵. $\int \frac{1-\sin^3 x}{1-\sin x}\,dx$

۳۶. $\int \frac{1+\cos^3 x}{1+\cos x}\,dx$

۳۷. $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)\,dx$

۳۸. $\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx$

۳۹. $\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx$

۴۰. $\frac{d}{dx}\int_0^x t^{50}(1-t)^{50}\,dt$

۴۱. $\frac{d}{dt}\int_1^t (1+\sin x)^{25}\,dx$

۴۲. $\frac{d}{dt}\int_0^1 (2+\tan t)^{99}\,dt$

۴۳. نشان دهید که قضیهٔ ۵ را می‌توان بدون استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها ثابت‌کرد. سپس نشان‌دهید که می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین برای‌انتگرالها را از قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات نتیجه گرفت (قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۲۵۸).

۵.۴ قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

قضیهٔ اساسی زیر ارتباط نزدیک بین حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال را آشکار خواهد ساخت. در عین حال، ابزار توانایی برای محاسبهٔ انتگرالهای معین به ما می‌دهد.

قضیهٔ ۶ (قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال). هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

که در آن F یک پادمشتق f بر $[a, b]$ است.

برهان. بنابرقضیهٔ ۵، صفحهٔ ۴۰۵،

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

یک پادمشتق f بر $[a, b]$ است. در اینجا به F زیرنویس صفر داده‌ایم تا بر یک پاد مشتق خاص f، به جای پادمشتق دلخواه f، تأکید کرده باشیم. فرض کنیم F پادمشتق دیگری از f بر $[a, b]$ باشد. بنابر قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۳۹۸،

$$F_0(x) = F(x) + C, \tag{2}$$

که در آن C ثابت می‌باشد. برای تعیین C، ملاحظه می‌کنیم

$$F(a) + C = F_0(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0,$$

که $C = -F(a)$ را ایجاب می‌کند. با گذاردن این مقدار C در (۲)، به دست می‌آوریم

$$F_0(x) = F(x) - F(a).$$

بالاخره، با فرض $x=b$ و تغییر متغیر ظاهری انتگرالگیری از t به x خواهیم داشت

$$F_0(b)=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

و برهان تمام خواهد بود.

در بعضی از کتب، قضایای ۵ و ۶ در یک قضیهٔ دوقسمتی تلفیق شده و قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نام یافته است. همچنین، برهانی از قضیهٔ۶ وجود دارد که، به جای قضیهٔ ۵، بر قضیهٔ مقدار میانگین برای **مشتقات**، استوار است (ر.ک. مسئلهٔ ۴۱).

این امر که طرف راست فرمول (۱) به انتخاب پادمشتق f بستگی ندارد را می‌توان به‌آسانی با محاسبهٔ مستقیم تحقیق کرد: فرض کنیم G پادمشتق دیگری از f بر $[a, b]$ باشد. در این صورت، $G=F+C$، که در آن C ثابت است؛ و لذا،

$$G(b)-G(a)=[F(b)+C]-[F(a)+C]=F(b)-F(a),$$

یعنی، C در تشکیل تفاضل بین مقادیر پادمشتق در a و b حذف می‌شود. همچنین، باید توجه داشت‌که فرمول (۱) به ازای $b<a$ برقرار می‌ماند مشروط‌براینکه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، زیرا در این صورت داریم

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx=-[F(a)-F(b)]=F(b)-F(a).$$

در اینجا نمادگذاری دیگری مفید است. به‌ازای تابع $F(x)$ تعریف‌شده به‌ازای $x=a$ و $x=b$،

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{یا} \quad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

تفاضل $F(b)-F(a)$ را نشان می‌دهد. بااین‌نماد می‌توان (۱) رافشرده‌تربه‌صورت‌زیرنوشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b. \qquad (1')$$

به‌علاوه، چون

$$\Big[F(x)\Big]_a^b=\Big[F(x)+C\Big]_a^b=\Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b,$$

می‌توان ('۱) را به صورت زیر نوشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b.$$

این صورت اخیر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال رابطهٔ بین انتگرالهای معین‌و نامعین f را خیلی صریح نشان می‌دهد.

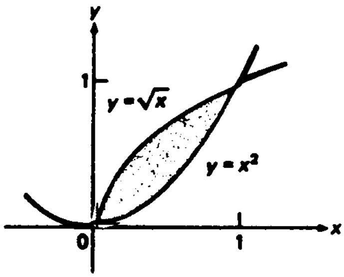
از فرمول (′۱) و فرمول (۴)، صفحهٔ ۴۰۰، معلوم می‌شود که اگر r عدد گویایی مخالف $1-$ باشد،

$$\int_a^b x^r\,dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_a^b = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}$$

اگر r را عدد صحیح مثبتی چون n بگیریم، فوراً فرمول (۹)، صفحهٔ ۳۷۵، به‌دست می‌آید که مدتی است آزادانه به کار برده می‌شود. اگر r منفی باشد، بازهٔ $[a, b]$ (یا $[b, a]$ اگر $b < a$) نباید شامل نقطهٔ $x = 0$ باشد، زیرا در غیر این صورت x^r بر $[a, b]$ پیوسته نبوده و قضیهٔ ۶ به کار نخواهد رفت.

مثال ۱. مساحت بین منحنیهای $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ را بیابید.

حل. ما در پی مساحت A ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۷ هستیم. برای یافتن مختصات x نقاط



شکل ۱۷

تقاطع منحنیها، معادلهٔ $\sqrt{x} = x^2$ را حل کرده دو ریشهٔ $x = 0$ و $x = 1$ را به دست می‌آوریم. بنابراین،

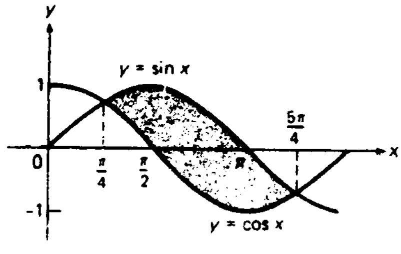
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx,$$

زیرا $y = \sqrt{x}$ منحنی بالایی و $y = x^2$ منحنی پایینی بر بازهٔ $[0, 1]$ می‌باشد. انتگرال را با استفاده از قضیهٔ ۶ حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$A = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

مثال ۲. مساحت بین منحنیهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را از $x = \pi/4$ تا $x = 5\pi/4$ بیابید.

حل . این بار مساحت A ی ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۸ را می‌خواهیم . چون $y = \sin x$ منحنی



شکل ۱۸

بالایی و $y = \cos x$ منحنی پایینی بر بازهٔ $[\pi/4, 5\pi/4]$ است ، نتیجه می‌شود که

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx = \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

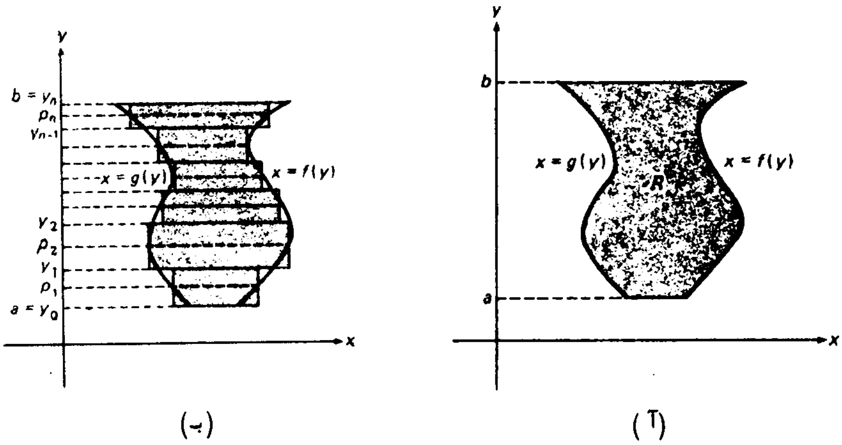
نکات دیگر راجع به مساحت بین دو منحنی . در مشخص کردن منحنیها اغلب شایسته است عرض y را متغیر مستقل و طول x را متغیر وابسته بگیریم ؛ این عکس کاری است که تا بحال شده است . فرض کنیم $f(y)$ و $g(y)$ دو تابع پیوسته بر بازهٔ $a \le y \le b$ بوده، و $f(y) \ge g(y)$ در این صورت ، خطوط افقی $y = a$ و $y = b$ و منحنیهای $x = f(y)$ و $x = g(y)$ مرز R را مثل شکل ۱۹ (آ) می‌سازند . با همان استدلال بخش ۴.۳ . منتها در مورد نوارهای افقی به جای قائم ، درمی‌یابیم که مساحت A ی ناحیهٔ R از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$A = \int_a^b [f(y) - g(y)]\, dy. \qquad (۳)$$

به‌طور مشروح ، A را با مجموعی به شکل

$$\sum_{i=1}^{n} [f(p_i) - g(p_i)]\, \Delta y_i \qquad (۴)$$

تقریب می‌کنیم که مبتنی بر افراز بازهٔ $[a, b]$ به n زیر بازهٔ $[y_{i-1}, y_i], i = 1, 2, \ldots, n$ است با $y_0 = a, y_n = b$ که $[y_{i-1}, y_i]$ به‌طول $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ بوده و p_i نقطهٔ دلخواهی در $[y_{i-1}, y_i]$ می‌باشد . این تقریب نظیر تعویض نوارها به اضلاع خمیدهٔ شکل ۱۹ (ب) با مستطیلهای سایه‌دار است . در این صورت ، A را حد مجموع (۴) می‌گیریم وقتی اندازهٔ مش



شکل ۱۹

$\mu = \max\{\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_n\}$ به صفر نزدیک شود:

$$A = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(p_i) - g(p_i)]\,\Delta y_i = \int_a^b [f(y) - g(y)]\,dy.$$

البته، فرمول (۳) با فرمول

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \qquad (۳')$$

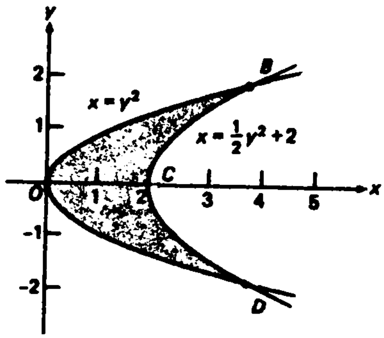
برای مساحت ناحیهٔ محدود به خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ و منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ که $f(x) \geq g(x)$ کاملا" مشابه‌است، و برای به دست آوردن یکی از آنهاازدیگری فقط کافی است x را با y یا y را با x عوض نماییم.

مثال ۳. مساحت بین منحنیهای $x = y^2$ و $x = \frac{1}{2}y^2 + 2$ را بیابید.

حل. ما در پی مساحت A ی ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۲۰ هستیم که به منحنیهای‌داده‌شده که سهمیهای متقارنی نسبت به محور x هستند محدود است. مختصات y نقاط اشتراک سهمیها عبارتنداز ریشه‌های $y = 2$ و $y = -2$ معادلهٔ $y^2 = \frac{1}{2}y^2 + 2$. بنابراین، طبق فرمول (۳)،

$$A = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}y^2 + 2 - y^2\right) dy = \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{1}{2}y^2\right) dy = \left[2y - \frac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= 2(2) - \frac{1}{6}(2)^3 - 2(-2) + \frac{1}{6}(-2)^3 = \frac{16}{3}.$$



شکل ۲۰

چون ناحیهٔ سایه‌دار OBD نسبت‌به‌محور x متقارن است ، دو زیر ناحیهٔ OBC و ODC مساحت یکسان خواهند داشت . لذا ، محاسبات را می‌توان از ابتدا با نوشتن

$$A = 2\int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}y^2\right)dy = 2\left[2y - \frac{1}{6}y^3\right]_0^2$$
$$= 2\left[2(2) - \frac{1}{6}(2)^3\right] = \frac{16}{3} \qquad (۵)$$

ساده نمود .

اگر x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته بگیریم ، محاسبات پیچیده می‌شوند . حال باید بین چهار تابع ، یعنی $y = \pm\sqrt{x}$ که از حل $x = y^2$ نسبت به y به دست می‌آید و $y = \pm\sqrt{2x-4}$ که‌ازحل $x = \frac{1}{2}y^2 + 2$ نسبت به y حاصل می‌شود فرق‌بگذاریم . مجددا ً، می‌توان با محاسبهٔ مساحت OBC و مضاعف کردن جواب زحمت کار را کم کرد . ولی‌مشکل جدیدی پیش می‌آید ، زیرا با آنکه $y = \sqrt{x}$ منحنی بالایی بر تمام بـازهٔ $0 \le x \le 4$ است ، محورِ x منحنی پایینی بر زیربازهٔ $0 \le x \le 2$ و $y = \sqrt{2x-4}$ منحنی پایینی بر زیربازهٔ $2 \le x \le 4$ می‌باشد . با احتساب همهٔ اینها ، داریم

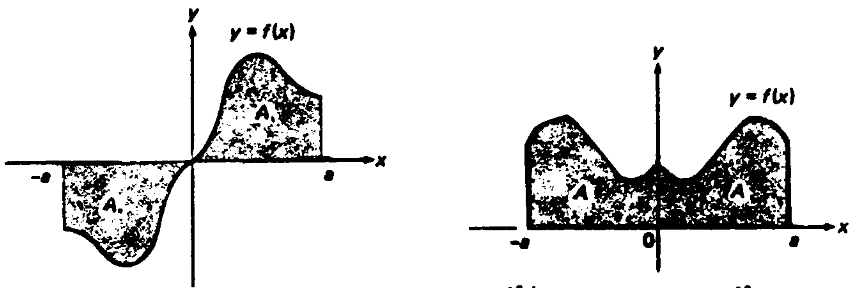
$$A = 2\int_0^2 \sqrt{x}\,dx + 2\int_2^4 (\sqrt{x} - \sqrt{2x-4})\,dx$$
$$= 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(2x-4)^{3/2}\right]_2^4$$
$$= \frac{4}{3}(2)^{3/2} + \frac{4}{3}(4)^{3/2} - \frac{2}{3}(4)^{3/2} - \frac{4}{3}(2)^{3/2} = \frac{2}{3}(4)^{3/2} = \frac{2}{3}(8) = \frac{16}{3}.$$

عامل $\frac{1}{2}$ جلو $(2x-4)^{3/2}$ از کاربرد فرمول (۸) ، صفحهٔ ۴۰۲ ، ناشی شده است . طبیعی

است که همان جواب‌قبل برای A به‌دست‌می‌آید ،ولی این درمقایسهٔ (۵) مسلما "محاسباتی طولانی و دوری می‌باشدا

مسائل

۱. با استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و مسئلهٔ ۱۳ ، صفحهٔ ۴۰۷، نشان دهید که اگر f زوج باشد ، $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ، کـه معنی‌هندسی‌آن در شکل ۲۱ (آ) نموده شده است . همچنین، نشان دهید که اگر f فـرد باشـد ، $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ ،که معنی‌هندسی‌آن در شکل ۲۱ (ب)نموده‌شده‌است .فرض‌کنید f بر $[-a, a]$ پیوسته باشد .



$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = A_+ - A_- = 0$, since $A_+ = A_-$.

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = A + A = 2A = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(ب) (آ)

شکل ۲۱

۲. $[F(x) + G(x)]_a^b$ و $[F(x)G(x)]_a^b$ را برحسب $[F(x)]_a^b$ و $[G(x)]_a^b$ بیان نمایید .

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۳. $\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + 3x - 4)\,dx$

۴. $\int_{-1}^1 (x^9 + 5x^8 + 10x^7)\,dx$

۵. $\int_2^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)dx$

۶. $\int_1^9 (1 + \sqrt{s})\,ds$

۷. $\int_1^2 \left(3s^3 - \frac{5}{s^4}\right)ds$

۸. $\int_0^3 \frac{dt}{(2t + 1)^2}$

۹. $\int_4^{16} \frac{1 - t}{\sqrt{t}}\,dt$

۱۰. $\int_{-1}^{1} \frac{du}{(2-u)^3}$

۱۱. $\int_{1}^{27} u^{-2/3}\, du$

۱۲. $\int_{-8}^{1} (1+v^{2/3})\, dv$

۱۳. $\int_{1}^{4} (v^{3/2}-v^{1/2})\, dv$

۱۴. $\int_{0}^{\pi} (2+3\sin x)\, dx$

۱۵. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos x - 1)\, dx$

۱۶. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$

۱۷. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$

۱۸. $\int_{0}^{2\pi} \sin x \cos x\, dx$

۱۹. $\int_{0}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos^2 t}$

۲۰. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{\sin^2 u}$

۲۱. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dv}{\sin^2 v \cos^2 v}$

۲۲. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\, dx$

۲۳. $\int_{-1}^{1} \sin^4 x \tan x\, dx$

۲۴. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cot x}{\sin x}\, dx$

۲۵. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos x}\, dx$

مساحت A ی ناحیهٔ R بین منحنیهای زیر را بیابید.

۲۶. $y=\sqrt{x}$ و $y=\sqrt[3]{x}$

۲۷. $y=x^3$ و $y=\sqrt[3]{x}\quad (x\geq 0)$

۲۸. $y=x^{2/3}$ و $y=x^{3/2}$

۲۹. $x=3y+2$ و $x=2y^2$

۳۰. $x=-y^2$ و $x=4-2y^2$

۳۱. $x=4-y^2$ و $x=y^2+2y$

در هر حالت ناحیهٔ R را رسم کرده، و مسئله را به دو طریق حل کنید یکی با انتگرالگیری نسبت به x و دیگری باانتگرالگیری نسبت به y. (در مسائل ۲۹ تا ۳۱ انتگرالگیری‌نسبت به y مشکلی ندارد، ولی انتگرالگیری نسبت به x پیچیده است.)

۳۲. از برخورد منحنیهای $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ بر بازهٔ $[0, 2\pi]$ چهار ناحیه پدید می‌آیند. منحنیها را رسم کرده و مساحت A ی هر ناحیه را مشخص نمایید.

۳۳. از برخورد منحنیهای $y=\cos x$ و $y=\cos 2x$ بر بازهٔ $[0, 2\pi]$ سه ناحیه پدید می‌آیند. منحنیها را رسم کرده ومساحت A ی هر ناحیه را مشخص نمایید.

مقدار میانگین تابع داده شده را بیابید .

۳۴ . $f(x) = \sqrt{x}$ بر $[0, 4]$

۳۵ . $f(x) = 1/x^2$ بر $[-3, -1]$

۳۶ . $f(x) = \sin x$ بر $[0, \pi]$

۳۷ . $f(x) = \cos x$ بر $[0, 2\pi]$

۳۸ . $f(x) = \sin^2 x$ بر $[0, 2\pi]$

۳۹ . $f(x) = \sec^2 x$ بر $[-\pi/4, \pi/4]$

۴۰ . $f(x) = \sec x \tan x$ بر $[0, \pi/3]$

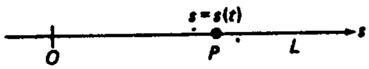
۴۱ . فرض کنید F پادمشتق f بر $[a, b]$ بوده ، و $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ در این صورت ،

$$\sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a), \qquad \text{(یک)}$$

زیرا مجموع سمت چپ توی هم رواست . با استفاده از فرمول (یک) و قضیهٔ مقدار میانگین‌برای‌مشتقات (قضیهٔ ۲ ،صفحهٔ ۲۵۸) ، قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مستقیما " ثابت کنید .

۶.۴ انتگرالگیری از تابع سرعت؛ معادلات دیفرانسیل

فرض‌کنیم $s = s(t)$ موضع ذرهٔ P در لحظهٔ t باشد که در امتداد خط مستقیم L حرکت می‌کند (ر.ک. شکل ۲۲) ، که مثل همیشه فرض می‌کنیم L دارای مبداٴ O ، جهت مثبت ،



شکل ۲۲

و واحد طول است . در این صورت ، سرعت (لحظه‌ای) $v = v(t)$ ذره در لحظهٔ t با مشتق زیر داده می‌شود :

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \qquad (1)$$

لذا ، تابع سرعت ذره با **مشتقگیری** از تابع موضع آن به دست می‌آید.به‌عکس، همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند ، تابع موضع ذره را می‌توان با ***انتگرالگیری*** از تابع سرعت آن به دست آورد .

مثال ۱ . سرعت یک ذرهٔ متحرک در لحظهٔ t در امتداد خطی مستقیم مساوی است با

$$v = v(t) = 3t^2 - 2t + 4.$$

فاصلهٔ بین مواضع ذره در لحظات $t = 2$ و $t = 5$ را بیابید . سرعت متوسط ذره بین این دو لحظه چقدر است ؟

حل. با انتگرالگیری از طرفین معادلهٔ (۱) روی بازهٔ $[2, 5]$ ، معلوم می‌شود که

$$\int_2^5 v(t)\,dt = \int_2^5 \frac{ds(t)}{dt}\,dt = \Big[s(t)\Big]_2^5 = s(5) - s(2),$$

که در آن قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در مرحلهٔ دوم به کار رفته است . بنابراین ، $s(5) - s(2)$ ، یعنی فاصلهٔ بین مواضع ذره در لحظات $t = 2$ و $t = 5$ ، مساوی است با

$$\int_2^5 v(t)\,dt = \int_2^5 (3t^2 - 2t + 4)\,dt = \Big[t^3 - t^2 + 4t\Big]_2^5$$
$$= (125 - 25 + 20) - (8 - 4 + 8) = 120 - 12 = 108.$$

سرعت متوسط ذره بین این دو لحظه مساوی است با

$$\frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{108}{3} = 36.$$

مثال ۲ . تابع موضع $s = s(t)$ یک ذره با همان تابع سرعت مثال ۱ را درصورتی بیابید که $s(0) = 6$ ؛ یعنی ، اگر مختص موضع ذره در لحظهٔ $t = 0$ مساوی 6 باشد .

حل. از (۱) معلوم می‌شود که $s(t)$ پادمشتق $v(t)$ است ؛ و لذا ،

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (3t^2 - 2t + 4)\,dt.$$

با محاسبهٔ انتگرال خواهیم داشت

$$s(t) = t^3 - t^2 + 4t + C, \qquad (۲)$$

که در آن برای تعیین ثابت انتگرالگیری C به اطلاعات بیشتر نیاز داریم . این اطلاعات با شرط $s(0) = 6$ داده‌شده‌است . در واقع ،با فرض $t = 0$ در (۲) نتیجه‌می‌شودکه $s(0) = C$ ؛ درنتیجه ، $C = 6$. با این C ، تابع موضع (۲) ذره به صورت زیر درمی‌آید :

$$s(t) = t^3 - t^2 + 4t + 6.$$

به‌طورکلی، همواره می‌توان ثابت C را طوری اختیار کرد که در هر شرط $s(t_0) = s_0$ صدق نماید. با نوشتن (۱) به شکل

$$\frac{ds}{dt} = v(t), \tag{۳}$$

می‌توان مسئلهٔ تعیین تابع موضع با تابع سرعت معلوم را مسئلهٔ یافتن تابع $s = s(t)$ ی گرفت که در معادلهٔ (۳) و *شرط اولیهٔ*

$$s(t_0) = s_0 \tag{۳'}$$

صدق کند. استفاده از واژهٔ " اولیه " ناشی از این است که t_0 معمولا "، ولی نه همیشه، زمانی است که حرکت در آن شروع می‌شود.

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول. معادلهٔ (۳) **یک *معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول*** است (صفحهٔ ۲۲۷ را به یاد آورید). این معادله از نوع ساده‌ای است که در آن طرف راست تابعی از متغیر مستقل است ولی از متغیر وابسته نیست. برای حل معادلهٔ (۳)، یعنی یافتن تابعی چون $s = s(t)$ که‌آن‌را به اتحاد بدل کند، از طرفین آن انتگرال می‌گیریم از این نتیجه می‌شود که

$$s = \int \frac{ds}{dt}\, dt = \int v(t)\, dt = V(t) + C, \tag{۴}$$

که در آن $V(t)$ پادمشتق $v(t)$ و C یک ثابت انتگرالگیری دلخواه است. ما (۴) را **جواب عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل (۳) می‌نامیم، زیرا هر جواب به ازای انتخابی از C به صورت (۴) است؛ این ناشی از آن است که $V(t) + C$ پادمشتق کلی $v(t)$ می‌باشد. همچنین، جواب عمومی را به شکل

$$s = \int v(t)\, dt + C$$

می‌نویسیم با این فرض که در اینجا $\int v(t)\, dt$ یک پادمشتق *ثابت* $v(t)$ است. ما این قرارداد را در مسائلی که مستلزم معادلات دیفرانسیل‌اند رعایت خواهیم کرد. جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۳) راکه‌به‌ازای مقادیر مختلف C به دست می‌آیند ***جوابهای خصوصی***‌می‌نامند. C نوعا " طوری اختیار می‌شود که s در شرط اولیه‌ای چون (۳') صدق کند.

همین اصطلاحات و روش حل، بی‌توجه به معنی ملموس علمی متغیرهای مستقل و وابسته یا در غیاب هر چنین معانی، به کار می‌روند. لذا، معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x), \tag{۵}$$

شامل تابع مجهول $y = y(x)$ و تابع معلوم $f(x)$ را درنظر می‌گیریم . برای حل (۵) تحت شرط

$$y(x_0) = y_0$$

(که هنوز هم **شرط اولیه** نام دارد) ، دقیقا" به همان روش عمل می‌کنیم . با مشتقگیری از (۵) به دست می‌آوریم

$$y = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C, \qquad (۶)$$

که در آن $F(x) = \int f(x)\,dx$ یک پادمشتق‌ثابت $f(x)$ بوده‌و C یک ثابت انتگرالگیری دلخواه می‌باشد . این جواب عمومی (۵) است ، و جوابی **خصوصی** می‌خواهیم که در ('۵) صدق نماید . به آسانی معلوم می‌شود که این جواب با انتخاب $C = y_0 - F(x_0)$ به‌دست‌می‌آید.

مثال ۳ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = \frac{dy}{dx} = x, \qquad (۷)$$

صادق در شرط اولیهٔ

$$y(1) = 2 \qquad (۷')$$

را پیدا کنید .

حل . ابتدا با انتگرالگیری جواب **عمومی** (۷) را می‌یابیم :

$$y = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int x\,dx + C = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

حال برای تعیین ثابت انتگرالگیری C شرط ('۷) را اعمال کرده ، در جواب عمومی $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ قرار می‌دهیم $x = 1,\ y = 2$ از این نتیجه می‌شود که

$$2 = \frac{1}{2} + C,$$

درنتیجه ، $C = \frac{3}{2}$ با انتخاب این مقدار C در جواب عمومی ، جواب خصوصی مطلوب (۷) به دست می‌آید :

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}.$$

صدق کردن این جواب در (۷) و ('۷) را می‌توان با محاسبه‌ای مستقیم به آسانی تحقیق

کرد .

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم . ساده‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم عبارت‌است‌از

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x). \tag{۸}$$

با انتگرالگیری از (۸) به دست می‌آوریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \int f(x)\,dx + C_1 = F(x) + C_1, \tag{۹}$$

که در آن $F(x) = \int f(x)\,dx$ پادمشتق ثابتی از $f(x)$ بوده و C_1 ثابت انتگرالگیری‌دلخواهی است . ملاحظه می‌کنید که (۹) یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ *اول* است و در واقع به شکل (۵) می‌باشد . با انتگرالگیری از (۹) به دست می‌آوریم

$$y = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int [F(x) + C_1]\,dx + C_2 = \int F(x)\,dx + C_1 x + C_2,$$

که در آن C_2 ثابت انتگرالگیری دیگری می‌باشد . لذا ، جواب **عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل (۸) شامل دو ثابت‌دلخواه‌است ،و این ویژگی مشخص جواب عمومی یک‌معادلهٔ دیفرانسیل **مرتبهٔ دوم** است . از اینرو ، برای جداکردن یک جواب **خصوصی** (۸) باید دو شرط اولیه اعمال کنیم ، زیرا با این کار دو معادلهٔ جبری به دست می‌آیند که می‌توان آنها را نسبت به ثابتهای C_1 و C_2 حل کرد .

مثال ۴ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = x \tag{۱۰}$$

صادق در شرایط اولیهٔ

$$y(1) = \frac{1}{2}, \qquad y'(1) = -\frac{1}{2} \tag{۱۰'}$$

را بیابید .

حل . توجه کنید که یک شرط اولیه مستلزم تابع $y = y(x)$ است ، حال آنکه دیگری مستلزم مشتقش y' می‌باشد . با دوبار انتگرالگیری از (۱۰) نسبت به x ، ابتدا به‌دست می‌آوریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = \int x\,dx + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_1, \tag{۱۱}$$

و سپس به دست می‌آوریم

$$y = \int \frac{1}{2} x^2\, dx + \int C_1\, dx + C_2 = \frac{1}{6} x^3 + C_1 x + C_2. \qquad (۱۲)$$

و بااعمال شرایط اولیهٔ (۱۰′) ، یعنی فرض $x = 1,\ y' = -\frac{1}{2}$ در (۱۱) و $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$ در (۱۲) ، درمی‌یابیم که

$$\frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = \frac{1}{2}.$$

سپس، با حل نسبت به C_1 و C_2 خواهیم داشت

$$C_1 = -1, \qquad C_2 = \frac{4}{3}.$$

بالاخره، باگذاردن این C_1 و C_2 در (۱۲) ، جواب خصوصی مطلوب (۱۰) صادق درشرایط اولیهٔ (۱۰′) به دست می‌آید :

$$y = \frac{1}{6} x^3 - x + \frac{4}{3}$$

(این را با محاسبهٔ مستقیم امتحان کنید) .

مسئلهٔ یافتن جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل صادق در شرایط اولیهٔ مشخصی مثل مثالهای ۲ تا ۴ را یک **مسئلهٔ مقدار اولیه** می‌نامند .

مثال ۵. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل (۱۰) صادق در شرایط

$$y(0) = 1, \qquad y(1) = 2, \qquad (۱۰'')$$

به جای شرایط اولیهٔ (۱۰′) را بیابید .

حل. توجه کنید که به جای گذاردن یک شرط بر تابع y و شرطی دیگر بر مشتقش y' در همان نقطه، دو شرط در دو نقطهٔ مختلف بر y می‌گذاریم . درنتیجه، شرایط (۱۰″) **شرایط مرزی** نام دارند، و ما اکنون به جای مسئلهٔ مقدار اولیه یک **مسئلهٔ مقدار مرزی** را حل می‌کنیم . برای اعمال شرایط مرزی (۱۰″) ، ابتدا در جواب عمومی (۱۲) قرار می‌دهیم $x = 0,\ y = 1$ و سپس قرار می‌دهیم $x = 1,\ y = 2$. با این کار دو معادله به دست

می‌آیند که ثابتهای انتگرالگیری C_1 و C_2 در آن صدق می‌کنند:

$$C_2 = 1,$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 2.$$

با حل نسبت به C_1 و C_2 معلوم می‌شود که

$$C_1 = \frac{5}{6}, \qquad C_2 = 1,$$

و، با گذاردن این C_1 و C_2 در (۱۲)، جواب خصوصی مطلوب (۱۰) صادق درشرایط مرزی ("۱۰) به دست می‌آید:

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1.$$

مسائل

۱. فرض کنید $s = s(t)$ تابع موضع و $v = v(t)$ تابع سرعت یک ذرهٔ متحرک در امتداد خطی مستقیم باشد. در این صورت، سرعت متوسط روی بازهٔ $[a, b]$ مساوی است با

$$v_{av} = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)\,dt$$

اگر از تعریف متوسط در صفحهٔ ۳۹۰ استفاده شود، و

$$v_{av} = \frac{s(b) - s(a)}{b-a}$$

اگر از تعریف قبلی در صفحهٔ ۱۷۱ استفاده کنیم. نشان دهید که این دو تعریف معادلند.

با شروع در لحظهٔ $t = 0$، یک ذره در امتداد خطی مستقیم با سرعت

$$v(t) = 20\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)\text{cm/sec}$$

در حرکت است.

۲. ذره در 15 sec اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن روی این بازه چقدر است؟

۳. ذره در 2 min اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن روی این بازه چقدر است؟

۴. فرض کنید $v_{av}(T)$ سرعت متوسط ذره روی بازهٔ $[0, T]$ باشد. چرا تقریب $v_{av}(T) \approx v(T)$

به ازای T بزرگ مناسب است؟ $v_{av}(T)$ را با $v(T)$ به ازای $T = 15\ \mathrm{min}$ مقایسه کنید.

اتومبیلی از حال سکون شروع به حرکت کرده و ظرف t ثانیه به

$$v(t) = 75\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right)\ \mathrm{mph}$$

می‌رسد.

۵. اتومبیل در $30\ \mathrm{sec}$ اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن در این بازه چقدر است؟

۶. اتومبیل در $90\ \mathrm{sec}$ اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن دراین بازه چقدر است؟

۷. فرض کنید $v_{av}(T)$ سرعت متوسط اتومبیل دربازهٔ $[0, T]$ باشد. چرا تقریب $v_{av}(T) \approx v(T)$ به ازای T بزرگ مناسب است؟ $v_{av}(T)$ را با $v(T)$ به ازای $T = 10\ \mathrm{min}$ مقایسه کنید.

۸. نشان دهید که جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل $y' = f(x)$ صادق در شرط اولیهٔ $y(x_0) = y_0$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0.$$

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول داده شده که در شرط اولیهٔ ذکر شده صدق کند را بیابید.

۹. $y' = 2x,\ y(2) = 1$

۱۰. $x^2 y' = 1,\ y(1) = 2$

۱۱. $y' = x(x-1),\ y(3) = \frac{1}{2}$

۱۲. $y' = \sqrt{x},\ y(0) = 3$

۱۳. $y' = 3x^2 + \cos x,\ y(\pi) = 2$

۱۴. $y' = 2\cos^2 x + \sin 2x,\ y(0) = -2$

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم داده شده که در شرایط اولیه یا شرایط مرزی ذکر شده صدق کند را بیابید.

۱۵. $y'' = x(x+1),\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$

۱۶. $(x+1)^3 y'' = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

۱۷. $\sqrt{x}\, y'' = 1,\ y(4) = 2,\ y'(4) = 0$

۱۸. $y'' = \sin x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 3$

۱۹. $x^3 y'' = 3,\ y(2) = -1,\ y(3) = 1$

۲۰. $y'' = x^2 + x + 1,\ y(-1) = 0,\ y(1) = 3$

۲۱. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

صادق در شرط اولیهٔ $y(\pi/2) = 0$ را بیابید .

۷.۴ مکانیک نیوتنی؛ انرژی جنبشی و کار

حال به کمک انتگرالگیری از ایده‌های فیزیکی سیر اسحق نیوتن استفاده کرده و حرکت در امتداد یک خط مستقیم (حرکت مستقیم‌الخط) را به تفصیل بررسی می‌کنیم . مانند بخش پیش، فرض کنیم $s = s(t)$ موضع یک ذرهٔ متحرک به جرم m در لحظه t در امتداد خط L باشد . همانطور که می‌دانیم ، سرعت $v = v(t)$ و شتاب $a = a(t)$ ذره‌بامشتقات زیر داده شده‌اند :

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

فرض کنیم نیروی F دراستداد L برذره وارد شود . در این صورت ، **قانون دوم حرکت نیوتن**، که در صفحهٔ ۲۲۶ به صورت مقدماتی مطرح شد ، به ما می‌گوید که

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F \tag{1}$$

(جرم ضربدر شتاب مساوی نیروی اعمال شده است) . لذا ، با معلوم بودن F ، موضع ذره به عنوان تابعی از زمان را می‌توان با حل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (۱) تحت شرایط اولیهٔ مناسبی تعیین کرد . مثالهای زیر طرز انجام این کار را نشان می‌دهند .

مثال ۱ . حرکت آزاد یک ذره ، یعنی حرکت در غیاب نیروی خارجی ، را بیابید .

حل. در این حالت نیرویی وجود ندارد ؛ درنتیجه ، در (۱) $F \equiv 0$. بنابراین ، پس از حذف جرم که نقشی در اینجا ندارد ،

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 0.$$

اگر از این معادلهٔ دیفرانسیل دوبار انتگرال بگیریم ، ابتدا داریم

$$v = \int \frac{dv}{dt}\,dt = \int a\,dt = \int 0\,dt = C_1, \tag{2}$$

و سپس خواهیم داشت

$$s = \int \frac{ds}{dt}\,dt = \int v\,dt = \int C_1\,dt + C_2 = C_1t + C_2. \tag{2'}$$

برای تعیین ثابتهای انتگرالگیری C_1 و C_2 ، شرایط اولیهٔ

$$s(0) = s_0, \qquad v(0) = v_0$$

را اعمال می‌کنیم که در آنها s_0 و v_0 موضع و سرعت ذره در لحظهٔ اولیه است که برای راحتی $t = 0$ گرفته می‌شود . با گذاردن $t = 0, v = v_0$ در (۲) و $s = s_0$ ، $t = 0$ در (۲′)، معلوم می‌شود که $C_1 = v_0, C_2 = s_0$. از اینرو، (۲) و (۲′) به صورت

$$v = v_0$$

و

$$s = v_0 t + s_0$$

درمی‌آیند ، که در آن می‌بینید که اگر $v_0 = 0$ ، s مقدار ثابت s_0 را خواهد داشت . لذا ، اگر نیروی خارجی وارد نشود ، یک جسم درحالت سکون $(v_0 = 0)$ ساکن می‌ماند ،و یک‌جسم متحرک $(v_0 \neq 0)$ با سرعت ثابت به حرکت ادامه می‌دهد . این صورت یک بعدی **قانون اول حرکت نیوتن** است که در مسئلهٔ ۳۱، صفحهٔ ۱۱۹۵ ،بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد .

مثال ۲ . سنگی به جرم m از یک برج بلند یا به‌داخل یک‌چاه‌عمیق‌خشک‌افتاده‌است .حرکت سنگ را پیدا کنید .

حل. سنگ را یک ذره گرفته و از اندازه‌اش صرف‌نظر می‌کنیم . فرض‌کنیم $s = s(t)$ موضع سنگ باشد که در امتداد یک محور قائم سنجیده می‌شود که جهت مثبتش به پایین بوده و مبدأ O در موضع اولیهٔ سنگ است (ر.ک. شکل ۲۳) . همانطور که در فیزیک دیده‌ایم ، نیروی وارد بر سنگ وزن آن است که مساوی است با

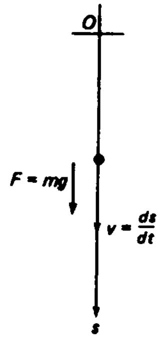
$$F = mg,$$

که در آن g شتاب جاذبه (تقریبا " $32\ \mathrm{ft/sec^2}$ یا $9.8\ \mathrm{m/sec^2}$) بوده[1] ، و از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود . با این F ، قانون دوم نیوتن (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg,$$

---

۱ . لذا ، برای به‌دست‌آوردن جرم یک جسم از وزن آن ، باید وزن بر g تقسیم شود .واحد انگلیسی جرم پوند ، که نیروست ، نیست بلکه **اسلاگ** است و آن جرم جسمی است که وقتی نیروی 1 پوند بر آن وارد می‌شود شتاب $1\ \mathrm{ft/sec^2}$ می‌یابد . بنابراین ،وزن 1 پوند جرمی حدود $\frac{1}{32}$ اسلاگ داشته ، و جرم 1 اسلاگ وزنی حدود 32 پوند خواهد داشت .



شکل ۲۳

یا ، پس از تقسیم بر m ،

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = g, \qquad (۳)$$

معادلهٔ دیفرانسیل (۳) می‌گوید که شتاب a دارای مقدار ثابت g است . اگر از (۳) دوبار انتگرال بگیریم ، ابتدا به دست می‌آوریم

$$v = \int \frac{dv}{dt}\,dt = \int a\,dt = \int g\,dt + C_1 = gt + C_1, \qquad (۴)$$

و سپس

$$s = \int \frac{ds}{dt}\,dt = \int v\,dt = \int (gt + C_1)\,dt + C_2 = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2. \qquad (۴')$$

این بار شرایط اولیه عبارتند از

$$s(0) = 0, \qquad v(0) = 0,$$

زیرا سنگ از مبداء افتاده است (یعنی ، با سرعت اولیهٔ صفر رها شده است) . با قرار دادن $t = 0, v = 0$ در (۴) و $t = 0, s = 0$ در (۴') ، فوراً معلوم می‌شود که $C_1 = C_2 = 0$ بنابراین ،

$$v = gt \qquad (۵)$$

و

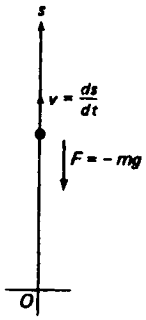
$$s = \frac{1}{2}gt^2, \qquad (۵')$$

دست کم تا وقتی سنگ به زمین یا ته چاه بخورد . هرگاه s به فوت و t به ثانیه باشد، آنگاه همانطور که در مثال ۶ ، صفحهٔ ۶۹ ، پیش‌بینی شد ، $s \approx 16t^2$.

مثال ۳. حرکت سنگی را بیابید که با سرعت اولیهٔ v_0 به طور قائم به بالا پرتاب شده است.

حل. در اینجا طبیعی‌تر است که موضع s سنگ را در امتداد محور قائمی بسنجیم که جهت مثبتش به *بالا* باشد (و مبداء در موضع اولیهٔ سنگ باشد)، زیرا در این صورت، مثل مثال قبل، s مجدداً نامنفی‌است. این جهت مثبت موجب‌تغییر g به $-g$ در (۴) و (۴′) می‌شود، زیرا نیروی ثقل روبه پایین می‌باشد (ر.ک. شکل ۲۴). حال شرایط اولیه به صورت زیر درمی‌آیند:

$$s(0) = 0, \qquad v(0) = v_0.$$



شکل ۲۴

با قراردادن $t = 0,\ v = v_0$ در (۴) و $t = 0,\ s = 0$ در (۴′)، معلوم می‌شود که $C_1 = v_0$ و $C_2 = 0$. لذا، (۴) و (۴′) در این حالت پس از تعویض g به $-g$ به صورت

$$v = v_0 - gt \tag{۶}$$

و

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{۶′}$$

تحویل می‌شوند.

تعریف انرژی جنبشی و کار. حال نشان می‌دهیم که چگونه مفاهیم انرژی جنبشی و کار در مکانیک نیوتنی ظاهر می‌شوند. فرض‌کنیم ذره‌ای به جرم m که در خطی مستقیم حرکت‌می‌کند تحت اثر نیروی (خالص) $F = F(s)$ که تابع پیوسته‌ای از موضع s آن است قرار گیرد

در این صورت، طبق قانون دوم نیوتن،

$$ma = m\frac{dv}{dt} = F(s),$$

یا، اگر سرعت v را تابعی از s به جای t بگیریم (در اینجا فرض است که v اعلامت ثابت دارد؛ درنتیجه، ذره فقط در یک جهت حرکت می‌کند)، بنابرقاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds} = F(s), \tag{۷}$$

فرض کنیم

$$v_0 = v(s_0), \qquad v_1 = v(s_1)$$

سرعت ذره در دو موضع مختلف s_0 و s_1 باشد. در این صورت،با انتگرالگیری‌از (۷) نسبت به s از s_0 تا s_1، به دست می‌آوریم

$$\int_{s_0}^{s_1} mv\frac{dv}{ds}\,ds = \int_{s_0}^{s_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)ds = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds,$$

و لذا،

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{s_0}^{s_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds. \tag{۸}$$

به عبارت دیگر، بر اثر نیرو، کمیت

$$K = \frac{1}{2}mv^2,$$

که *انرژی جنبشی* ذرهٔ متحرک نام دارد، به اندازهٔ

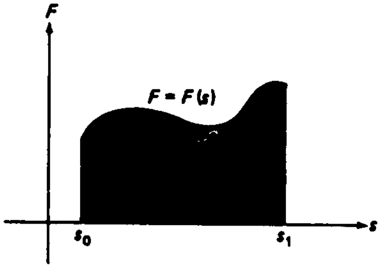
$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds \tag{۹}$$

تغییر می‌کند. کمیت (۹) *کار* انجام شده توسط نیرو بر ذره در حرکت از موضع $s = s_0$ تا موضع $s = s_1$ است. واضح است که W چیزی جز مساحت تحت منحنی $F = F(s)$ از $s = s_0$ تا $s = s_1$ نیست (ر.ک. شکل ۲۵).

مثال ۴. در غیاب نیرو داریم $F \equiv 0$ و کار (۹) مساوی صفر می‌باشد. در این صورت، (۸) به

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{۱۰}$$

تحویل می‌شود ؛ درنتیجه ، انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند یا ، به زبان فیزیک ، **حفظ می‌شود** . این اصلا " تعجب‌آور نیست ، زیرا قبلا " از مثال ۱ می‌دانیم که اگر $F \equiv 0$ ، $v_1 = v_0$.



شکل ۲۵

مثال ۵ . اگر $F(s)$ دارای مقدار ثابت F باشد ، فرمول (۹) به صورت زیر درمی‌آید :

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = F\int_{s_0}^{s_1} ds = F\cdot(s_1 - s_0). \qquad (11)$$

لذا ، کار در این حالت مساوی حاصلضرب نیروی F در " تغییر مکان " $s_1 - s_0$ است . گاهی فرض می‌شود که کار انجام شده توسط یک نیروی ثابت مساوی حاصلضرب نیرو در تغییر مکان است . در این صورت ، **تعریف** طبیعی کار انجام شده توسط نیروی متغیر $F(s)$ مساوی انتگرال (۹) می‌شود . لازم نیست برای این دلیل بیاوریم ، که اساسا " همان دلیل آمده در بخش ۲۰۴ برای تعریف مساحت تحت یک منحنی است .

مثال ۶ . اگر $F = mg,\ s_0 = 0,\ v_0 = 0$ ، مثل مثال ۲ ، مسئلهٔ سنگ افتان را داریم . در این صورت ، از (۱۱) نتیجه می‌شود که $W = mgs_1$ و (۸) ، پس از حذف 1 دوبار ، به صورت زیر تحویل می‌شود :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs.$$

با حل این معادله نسبت به v ، به دست می‌آوریم

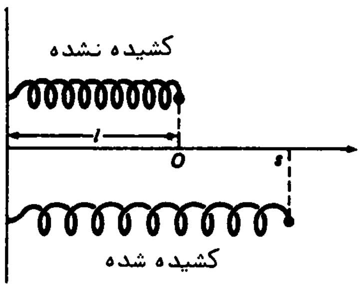
$$v = \sqrt{2gs}. \qquad (12)$$

همین نتیجه را می‌توان با حذف t از فرمولهای (۵) و (۵') به دست آورد ، ولی در اینجا از مفاهیم کار و انرژی جنبشی برای یافتن رابطهٔ بین سرعت سنگ و موضعش، بدون یافتن

یکی برحسب زمان، استفاده شده است. مثلا"، با صرف‌نظر کردن از مقاومت هواوانتخاب $g = 32\ \text{ft/sec}^2$ ، از (۱۲) نتیجـه می‌شودکه‌سرعت‌سنگی‌که 400 ft سقوط‌کرده مساوی‌است با

$$v = \sqrt{2(32)(400)} = 160\ \text{ft/sec}.$$

قانون هوک[1] . فرض‌کنیم یک فنر "طبیعی" (**یعنی**، کشیده نشده) به طول l از یک‌طرف بسته شده باشد. در این صورت، طبق **قانون هوک**، برای افزایش طول فنر از l بـه $l + s$ باید نیروی $F = ks$ را بر انتهای آزاد آن اعمال کرد. در اینجا k ثابت مثبتی است که سفتی یا *ثابت فنر* نام دارد. قانون هوک به ازای s های منفی، نظیر انقباض بـه جـای انبساط فنر، نیز کار می‌کند. با اینحال، دقت قانون هوک به ازای $|s|$ های خیلی‌بزرگ از بین می رود. فرض‌کنیم P انتهای آزاد فنر بوده، و مبداء O و جهت مثبت محور s را طبق شکل ۲۶ اختیار می‌کنیم؛ درنتیجه، اگر فنر کشیده نشده باشد، P در O می‌باشد. این یک



شکل ۲۶

انتخاب منطقی است، زیرا انبساط طولی s را مساوی مختص P می‌سازد. در این صورت، نیروی "خارجی" $F = ks$ لازم است تا P را در نقطهٔ s نگهدارد، و بنابر (۹)، کـار انجام شده توسط این نیرو بر P در حرکت از $s = s_0$ تا $s = s_1$ مساوی است با

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F\,ds = \int_{s_0}^{s_1} ks\,ds = \frac{1}{2}k(s_1^2 - s_0^2) \qquad (۱۳)$$

(P را یک ذره تصور کنید). در عین حال، کاربرد نیروی خارجی F یک *نیروی‌بازگردان الاستیک* مساوی و مخالف $-F = -ks$ در فنر ایجاد می‌کند، و کار این نیرو بر P چیزی جز

1. *Hooke*

قرینهٔ (۱۳) نیست .

مثال ۷. فرض کنیم برای کشیدن یک فنر به اندازهٔ 6 in بیش از طول طبیعی اش 2 ft نیرویی برابر 10 lb لازم باشد . کار W انجام شده در کشیدن فنر از طول 3 ft به طول 4 ft را در صورتی بیابید که قانون هوک برای انبساطهای طولی در این حد معتبر باشد .

حل. چون نیروی 10 lb به اندازه 0.5 ft به طول طبیعی فنر می‌افزاید ، داریم $0.5k = 10$ ؛ و لـذا ، $k = 20$ lb/ft . انبساط طولی وقتی طول فنر 3 ft باشد $3 - 2 = 1$ ft و وقتی طولش 4 ft باشد $4 - 2 = 2$ ft می‌باشد ؛ درنتیجه ، $s_0 = 1, s_1 = 2$. پس از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$W = \frac{1}{2} k(s_1^2 - s_0^2) = \frac{1}{2}(20)(2^2 - 1^2) = 30 \text{ فوت – پوند}$$

ثقل و سرعت فرار. در مثال زیر از مفاهیم کار و انرژی جنبشی برای حل مسئلهٔ مهم پرواز فضایی استفاده می‌کنیم .

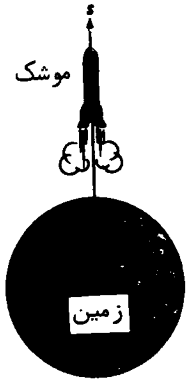
مثال ۸. با چه سرعت v_0 باید موشکی به‌طور قائم به بالا پرتاب شود تا کاملا " از جاذبهٔ ثقلی زمین فرار نماید ؟

حل. بنابر *قانون ثقلی نیوتن* ، نیرویی که موشک را به زمین جذب می‌کند از *قانون عکس مجذور*

$$F = F(s) = -\frac{GMm}{s^2} \tag{۱۴}$$

به دست می‌آید ، که در آن G یک ثابت مثبت به نام *ثابت ثقلی عمومی* بوده ، M جرم زمین m جرم موشک ، و s فاصلهٔ بین موشک (به عنوان یک ذره) و مرکز زمین است . انتخاب محور s که مبداء O آن مرکز زمین است در شکل ۲۷ نموده شده است . البته ، " به‌طور قائم به بالا " می‌تواند به معنی دورشدن از زمین در امتداد هر خط دیگر ماربر مرکز زمین نیز باشد . علامت منها در (۱۴) مبین آن است که نیروی ثقل *جاذب* بوده و موشک را به‌زمین باز می‌خواند .

کار انجام شده توسط نیروی زمین بر موشک پس از آنکه موشک سطح زمین را ترک‌کرده



شکل ۲۷

و مسافتی را می‌پیماید با انتگرال زیر داده می‌شود :

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = -\int_{s_0}^{s_1} \frac{GMm}{s^2}\,ds = \left[\frac{GMm}{s}\right]_{s_0}^{s_1} = \frac{GMm}{s_1} - \frac{GMm}{s_0},$$

که در آن s_0 مساوی R ، یعنی شعاع زمین ، بوده و s_1 عدد بسیار بزرگی می‌باشد . بنابراین، پس از حذف عدد کوچک قابل چشم‌پوشی GMm/s_1 ،

$$W = -\frac{GMm}{R}. \qquad (۱۵)$$

کار W مساوی تغییر

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (۱۶)$$

در انرژی جنبشی موشک است در پیمودن از سطح زمین تا نقطهٔ دور (v_0 سرعت اولیه و v_1 سرعت نهایی موشک می‌باشد) . چون طالب کوچکترین مقداری از v_0 هستیم که‌به‌موشک اجازهٔ فرار از ثقل زمین را بدهد ، v_1 را مساوی صفر می‌گیریم ؛ درنتیجه ، موشک وقتی به نقطهٔ دور می‌رسد انرژی اولیهٔ خود را کاملا "مصرف‌کرده‌است" . با متحد گرفتن (۱۵) و (۱۶) به ازای $v_1 = 0$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GMm}{R}.$$

لذا ، v_0 از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \qquad (۱۷)$$

که مستقل از جرم موشک است.

برای محاسبهٔ (۱۷)، ملاحظه می‌کنیم که، بنابر (۱۴)، نیروی وارد بر موشک در سطح زمین مساوی $-GMm/R^2$ است و برحسب ثابت g، یعنی شتاب ثقل که در مسائل مربوط به ثقل در یا مجاور سطح زمین نقش دارد، مساوی $-mg$ می‌باشد. بنابراین، $-GMm/R^2 = -mg$، یا، معادلاً،

$$\frac{GM}{R} = gR. \tag{۱۸}$$

به کمک این فرمول می‌توان v_0 را بدون اطلاع از جرم زمین یا موشک حساب کرد. در واقع، با گذاردن (۱۸) در (۱۷)، به دست می‌آوریم

$$v_0 = \sqrt{2gR}. \tag{۱۹}$$

چون با تقریب مناسب $g = 32\ \text{ft/sec}^2$ و $R = 3960$ miles بالاخره خواهیم داشت

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(32)(3960)}{5280}} \approx 6.9\ \text{mi/sec}$$

$(1\ \text{mi} = 5280\ \text{ft})$. کمیت v_0 را معمولاً "سرعت *فرار*" برای زمین می‌نامند، اگرچه دقیقتر آن است که بگوییم این تندی فرار از سطح زمین است[1]. موشکی که با تندی کمتر از v_0 به بالا پرتاب شود مآلاً باید به زمین برگردد مگر آنکه جسم سماوی دیگری آن را جذب نماید.

مسائل

۱. حرکت ذره‌ای به جرم m را درصورتی بیابید که نیروی ثابت F بر آن اثر کرده و ذره در ابتدا در نقطهٔ $s = 0$ در حال سکون باشد.

۲. ذره‌ای به جرم m تحت اثر نیروی ثابت F حرکت می‌کند. فرض کنید موضع ذره در لحظهٔ $t = t_0$ مساوی $s = s_0$ باشد. ذره در لحظهٔ $t = t_0$ چه سرعت v_0 ی باید داشته باشد تا درلحظهٔ $t = t_1$ به نقطهٔ $s = s_1$ برسد؟

۳. حرکت ذره‌ای به جرم m را بیابید که تحت اثر نیروی $F = kt$ است که با زمان سپری شده از لحظهٔ شروع متناسب بوده و ذره با سرعت اولیهٔ v_0 از نقطهٔ $s = 0$ شروع به

---

۱. *این عدم دقت در تمایز بین سرعت و تندی (قدرمطلق سرعت) در مطالعهٔ حرکت در امتداد خط، که دو کمیت حداکثر در علامت فرق دارند، کلیت دارد. در حرکت در ابعاد دو و سه این تمایز باید بدقت مراعات گردد (ر.ک. فصلهای ۱۱ و ۱۲).*

حرکت کرده باشد.

۴. کدام انرژی جنبشی بیشتری دارد، یک گلولهٔ 1 اونسی که با سرعت 500 mph حرکت می‌کند یا یک کامیون 10 تنی که سرعتش 1 mph است؟ اگر سرعت گلوله 600 mph باشد، جواب چیست؟

۵. دو ذره از حال سکون شروع به حرکت کرده و یکی دوبرابر دیگری سرعت دارد. اگر کار انجام شده بر هر دو یکی باشد، در باب جرمهای آنها چه می‌شود گفت؟

۶. کدام کار بیشتری علیه ثقل انجام می‌دهند، زنی که یک وزنهٔ 2.5 پوندی را مدت 1 دقیقه با دست نگهداشته یا مردی که از پله‌ها بالا می‌رود؟

۷. بر ذره‌ای به جرم m که ابتدا در حال سکون است نیروی $F = 5\cos 2t$ وارد می‌شود. ماکزیمم انرژی جنبشی ذره چیست؟

۸. فرض کنید نیروی 15 lb یک فنر را به اندازهٔ 2 in بیشتر از طول طبیعی‌اش که 8 in است بکشاند. با فرض برقراری قانون هوک، چقدر کار لازم است تا طول طبیعی فنر دوبرابر شود؟ در انبساط طول از 10 in تا طول 14 in چقدر؟ در انقباض آن از طول طبیعی تا طول 6 in چقدر؟

۹. سنگی با سرعت اولیهٔ v_0 به طور قائم به بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع ماکزیمم h آن چقدر است؟ اگر v_0 دوبرابر شود، h چقدر خواهد شد؟ v_0 را درصورتی بیابید که $h = 100$ ft.

۱۰. فرض کنید سنگی که به طور قائم به بالا پرتاب شده 8 sec بعد به زمین باز می‌گردد. سرعت اولیهٔ سنگ چقدر است؟ سرعت نهایی آن چقدر است؟ ارتفاع ماکزیمم سنگ چقدر است؟ نشان دهید که ارتفاع سنگ در لحظهٔ $8 - t$ مساوی ارتفاع در لحظهٔ t $(0 \le t \le 8)$ است. نشان دهید که سرعت سنگ در لحظهٔ $8 - t$ قرینهٔ سرعتش در لحظهٔ t می‌باشد.

۱۱. جسم A از یک پنجره به ارتفاع 260 ft به بیرون پرتاب شده است، و درست 1 sec بعد جسم B از یک پنجره به ارتفاع 200 ft به بیرون پرتاب می‌شود. آیا A به B می‌رسد، و اگر چنین است کی؟

۱۲. یک ذره با نیرویی متناسب با فاصله به دو نقطهٔ ثابت A و B جذب می‌شود. در حرکت ذره از A تا B در امتداد AB چقدر کار انجام می‌شود؟ فرض کنید ثابت تناسب k برای هر دوی A و B یکی باشد.

۱۳. موشکی از سطح زمین به طور قائم به بالا پرتاب شده و به ارتفاع ماکزیمم h می‌رسد. نشان دهید که سرعت اولیهٔ موشک مساوی است با

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}, \qquad \text{(یک)}$$

که در آن g شتاب ثقل و R شعاع زمین می‌باشد. چگونه می‌توان سرعت فرار برای زمین را از این فرمول نتیجه گرفت؟

۱۴. موشکی از سطح زمین به‌طور قائم به بالا پرتاب شده و به ارتفاع ماکزیممی مساوی شعاع زمین می‌رسد. سرعت اولیهٔ موشک چقدر است؟

۱۵. اگر یک موشک باسرعت 1 mi/sec یا سرعت 2 mi/sec به‌طور قائم به بالا پرتاب شود، به چه ارتفاعی خواهد رسید؟

۱۶. فرض کنید ماه به شعاع تقریبی $\frac{3}{11}$ شعاع زمین و به جرم تقریبی $\frac{1}{81}$ جرم زمین باشد. سرعت فرار برای ماه را تخمین بزنید.

۱۷. فرض کنید یک فضانورد در لباس فضایی خود بتواند روی زمین 2.5 ft بپرد. روی ماه چقدر می‌تواند بپرد؟ از داده‌های مسئلهٔ قبل استفاده کنید.

۱۸. جرم خورشید تقریباً 2×10^{30} kg و شعاعش تقریباً 7×10^5 km است. به فرض‌آنکه ثابت ثقلی عمومی G تقریباً 6.67×10^{-20} km³/kg sec² باشد، سرعت فرار برای خورشید را تخمین بزنید.

۱۹. سرعت فرار برای یک **کوتولهٔ سفید** را تخمین بزنید، این یک نوع ستاره است که در آن جرمی حدود جرم خورشید به حجمی تقریباً مساوی حجم زمین متراکم‌شده است (شعاع زمین تقریباً 6400 km است.)

۲۰. سرعت فرار برای **ستارهٔ نوترون** را تخمین بزنید، این یک نوع ستاره است که درآن جرمی حدود جرم خورشید به کره‌ای به شعاع 10 km متراکم شده است.

۲۱. فرض کنید جرم M به صورت کره‌ای درآمده که شعاع R آن مثل یک ستارهٔ "در حال مرگ" منقبض می‌شود. به‌ازای مقداری از R، به‌نام **شعاع ثقلی** که با R_0 نموده می‌شود، سرعت فرار از جرم منقبض‌شده دقیقاً مساوی سرعت نور است: $c \approx 300{,}000$ km/sec بر طبق این مدل سادهٔ شدهٔ رفتار نور در یک میدان ثقلی قوی، وقتی $R = R_0$، نور دیگر نمی‌تواند از کره خارج شود، که در این صورت یک **سیاهچاله** نامرئی خواهیم داشت. نشان دهید که

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2} \qquad \text{(دو)}$$

تذکار. چون ذرات نور یا فوتونها جرم ندارند، مدل سرعت فرار در اینجا به‌کار نمی‌رود. اما مسئله را می‌توان به کمک نظریهٔ عمومی نسبیت اینشتن به دقت حل کرد، که با کمال

تعجب وجود سیاهچالەها را نیز پیش‌بینی کرده و به همان مقدار R_0 رسیده است.
شعاع ثقلی اجرام زیر را بیابید.

۲۲. خورشید ۲۳. زمین ۲۴. ماه
(جرم زمین تقریباً 6×10^{24} kg است.)

۲۵. بنابر یک مدل ستاره‌شناسی پذیرفته شده، جهان در 15 تا 20 بیلیون سال قبل در انفجاری به نام "صدای بزرگ" به‌وجود آمده است. از آن زمان جهان‌طوری منبسط شده است که سرعت v یک کهکشان در فاصلهٔ R تا کهکشان ما (راه شیری) از **قانون هوبل**[1] $v = HR$ به دست می‌آید، که در آن H **ثابت هوبل** است که تقریباً مساوی 15 km/sec بر میلیون سال نوری است. (یک سال نوری فاصله‌ای است که نور در یک سال طی می‌کند، که‌حدوداً 9.5×10^{12} km است.) معلوم نیست این انبساط جهان تا ابد ادامه خواهد یافت یا نه. اگر جهان به‌اندازهٔ کافی ماده داشته‌باشد، نیروهای ثقلی وارد از این مواد بر خودش مآلاً انبساط را پایان داده، سپس دورهٔ انقباض خواهیم داشت که به یک برخورد ثقلی کامل به نام "انهدام بزرگ" ختم می‌شود، که با آن جهانی که می‌شناسیم منهدم خواهد شد. نشان دهید که اگر چگالی (جرم بر واحد حجم) ماده در جهان درحال حاضر از **چگالی بحرانی**[2]

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

تجاوز نکند، جهان تا ابد به انبساط خود ادامه می‌دهد. ρ_c را تخمین بزنید.

۲۶. سرعت گریز یک گلولهٔ $\frac{1}{4}$ اونسی که از یک تفنگ بدون پس‌زن‌شلیک‌شده 1200 mph است. لولهٔ تفنگ به طول 2 ft است. وقتی گلوله در لوله است، نیروی وارد بر آن به فرض ثابت بودن چقدر است؟ گلوله چه مدت در لوله می‌ماند؟

۲۷. منظور از *اندازهٔ‌حرکت* یک ذره یعنی حاصل‌ضرب $p = mv$ جرم m آن‌در سرعتش $v = v(t)$. فرض کنید بر ذره نیروی $F = F(t)$ وارد می‌شود که تابع پیوسته‌ای‌از زمان t است. فرض کنید Δp تغییر اندازهٔ حرکت ذره در بازهٔ زمانی $[t_0, t_1]$ باشد. در این صورت،

$$\Delta p = mv\Big|_{t_0}^{t_1} = mv_1 - mv_0,$$

که در آن $v_0 = v(t_0)$ و $v_1 = v(t_1)$. نشان دهید که

---

1. *Hubble*

۲. حرف یونانی کوچک رو می‌باشد.

$$\Delta p = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt,$$

که در آن انتگرال سمت راست ضربهٔ نیرو در طول بازهٔ $[t_0, t_1]$ نام دارد.

۲۸. یک پرتاب کننده در بیس‌بال یک توپ سریع را با سرعت 90-mph به سوی یک توپ زن پرتاب می‌کند و وی با یک ضربهٔ پایین آن را به سوی پرتاب کننده برمی‌گرداند که خوشبختانه به‌موقع آن را با شیرجه می‌گیردا فرض کنید توپ چوبدستی را باتندی 102 mph ترک کند. اگر زمان تماس بین چوبدستی و توپ 0.01 sec باشد، نیروی متوسط وارد بر چوبدستی چقدر است؟ (یک توپ بیس‌بال معمولا "5 oz است.)

راهنمایی. ابتدا تغییراندازهٔ حرکت توپ در اثر برخورد با چوبدستی را بیابید.

۲۹. فرض کنید بر ذره‌ای به جرم m و سرعت $v = v(t)$ نیروی وابسته به زمان $F = F(t)$، مثل مسئلهٔ ۲۷، وارد شده‌باشد. در این صورت، انرژی جنبشی ذره دربازهٔ زمانی $[t_0, t]$ به اندازهٔ

$$\frac{1}{2} mv^2\Big|_{t_0}^{t} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

تغییر می‌کند، که در آن $v_0 = v(t_0)$. با تعدیل جزئی زبان در صفحهٔ ۴۲۹، این تغییر انرژی جنبشی کار انجام شده توسط نیرو بر ذره در بازهٔ $[t_0, t]$ نام دارد و با $W = W(t)$ نموده می‌شود. به‌علاوه، مشتق W نسبت به زمان توان نام دارد و با $P = P(t)$ نموده می‌شود. نشان دهید که

$$W = \int_{t_0}^{t} F(u)v(u)\,du, \qquad P = \frac{dW}{dt} = Fv. \qquad (\text{سه})$$

۳۰. مردی می‌خواهد دوستش را که در طبقهٔ چهارم سکونت دارد ملاقات نماید. وزن او 165 lb بوده و در 1 min به اندازهٔ 50 ft بالا می‌رود. توان متوسطی که مرد در بالا رفتن صرف‌کرده به اسب بخار پیدا نمایید. این توان به وات چقدر است؟

(746 وات = 550 ft-lb/sec = 1 اسب‌بخار.)

اصطلاحات و مباحث کلیدی

جمعبندی، حدود جمعبندی، اندیس جمعبندی

قضیهٔ دوجمله‌ای، ضرایب دوجمله‌ای

افرازهای یک بازه، اندازهٔ مش یک بازه

تعریف انتگرال و انتگرالپذیری، مجموعهای ریمان

مساحت تحت یک منحنی به عنوان انتگرال معین

انتگرالگیری، حدود انتگرالگیری، متغیر انتگرالگیری
انتگرالپذیری توابع پیوسته
انتگرالگیری بر بازه‌های مجاور، مساحت بین دو منحنی
قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها
پادمشتقها، شکل پادمشتق کلی
انتگرال نامعین
وجود پادمشتقهای توابع پیوسته
مشتقگیری از انتگرال با حد بالایی متغیر
قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
تابع موضع به عنوان انتگرال تابع سرعت
معادلات دیفرانسیل $y' = f(x)$ و $y'' = f(x)$
جوابهای عمومی و جوابهای خصوصی
شرایط اولیه و شرایط مرزی
مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی
حرکت مستقیم‌الخط و قانون دوم نیوتن
انرژی جنبشی و کار، قانون هوک
ثقل و سرعت فرار

مسائل تکمیلی

عبارات زیر را حساب کنید.

۱. $\sum_{n=2}^{6} |1 - 3n|$

۲. $\sum_{n=3}^{8} (n^2 - 2n)$

۳. $\sum_{n=0}^{4} \frac{1 - n^2}{1 + n^2}$

۴. $\sum_{n=1}^{7} \tan \frac{(2n-1)\pi}{4}$

مجموع داده شده را با کمترین زحمت حساب کنید.

۵. $\sum_{n=10}^{99} \frac{1}{n(n+1)}$

۶. $\sum_{n=1}^{49} (3n^2 + 3n + 1)$

راهنمایی. توجه کنید که

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 - n^3$$

۰۷ دو تابع

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{،} \; x > 0 \; \text{اگر} \\ x^2 + 1 & \text{،} \; x < 0 \; \text{اگر} \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{،} \; x > 0 \; \text{اگر} \\ x^2 & \text{،} \; x < 0 \; \text{اگر} \end{cases}$$

دارای مشتق یکسان $2x$ اند، ولی تفاوت آنها ثابت نیست. چرا این‌قضیه۴، صفحه۳۹۸، را نقض نمی‌کند؟

۰۸ با استفاده از مشتقگیری، نشان دهید که بر هر بازه‌ٔ غیرشامل نقاط $x = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$ داریم $\tan^2 x = \sec^2 x + C$. سپس ثابت C را بیابید.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۰۹ $\int \left(3x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx$

۱۰ $\int \frac{(x+2)^2}{x^4}\, dx$

۱۱ $\int \cos(\pi x + \sqrt{2})\, dx$

۱۲ $\int (1 + \sec^2 3t)\, dt$

۱۳ $\int \frac{\cos 2u}{\cos^2 u \sin^2 u}\, du$

۱۴ $\int \frac{(\sqrt{v} + 1)^3}{\sqrt{v}}\, dv$

۱۵ $\int_1^2 \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 dx$

۱۶ $\int_{-1}^1 (1 - \sqrt[3]{x})^3\, dx$

۱۷ $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x\, dx$

۱۸ $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 t\, dt$

۱۹ $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot^2 u\, du$

۲۰ $\int_{-1}^1 \cos^2 v \tan v\, dv$

۲۱ به ازای عدد صحیح $n \geq 0$، نشان دهید که

$$\frac{n+1}{2} \int_{-1}^1 x^n\, dx = \begin{cases} 1 & \text{، اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 0 & \text{، اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

مقدار میانگین تابع زیر را بیابید.

۲۲ $f(x) = (1-x)^3$ بر $[-2, 2]$

۲۳ $f(x) = (x+1)^{2/3}$ بر $[-1, 7]$

۲۴ $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$ بر $[0, \pi/2]$

۲۵ $f(x) = (\cos x - x)^2$ بر $[-\pi, \pi]$

۲۶ از فرمول

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)\, dx = \frac{5}{6}$$

نتیجه بگیرید که معادلهٔ درجهٔ دوم $6x^2 - 6x + 1$ ریشه‌ای بین 0 و 1 دارد. این را مستقیماً تحقیق کنید.

راهنمایی. از قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها استفاده کنید.

۲۷. **قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته برای انتگرالها** را ثابت کنید: فرض کنید f و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده، و g بر $[a, b]$ تغییر علامت ندهد. در این صورت، نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ هست به‌طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (\text{یک})$$

(اگر $g(x) \equiv 1$، این قضیه به قضیهٔ مقدار میانگین معمولی برای انتگرالها تحویل می‌شود.)

نقطهٔ c صادق در فرمول (یک) را درصورتی بیابید که

۲۸. $f(x) = x^2, g(x) = x, a = 0, b = 2$

۲۹. $f(x) = x, g(x) = x^2 - 1, a = -1, b = 0$

۳۰. $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x, a = \pi, b = 3\pi/2$

۳۱. $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, a = 0, b = \pi/2$

مساحت A ی ناحیهٔ R را بیابید.

۳۲. بین منحنیهای $y = |x|$ و $y = \sqrt{2}\cos(\pi x/4)$

۳۳. بین منحنیهای $y = 1/x^2$ و $y = \frac{15}{8}x - \frac{7}{8}x^2$

۳۴. محدود به محور x، سهمی $x = y^2 + 1$، و مماس بر سهمی در نقطهٔ $(2, 1)$

۳۵. داخل حلقهٔ منحنی $y^2 = x(x-1)^2$

در هر حالت ناحیهٔ R را رسم کنید.

۳۶. نشان دهید که به ازای هر عدد گویای مثبت r،

$$\int_0^1 x^r\,dx + \int_0^1 x^{1/r}\,dx = 1$$

این رابطه را تعبیر هندسی کنید.

۳۷. اگر $0 < a < 1$، $\int_0^1 f(x)\,dx$ را بیابید که در آن

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } 0 \le x \le a \\ a\dfrac{1-x}{1-a} & \text{اگر } a < x \le 1 \end{cases}$$

۳۸. نشان دهید هرگاه f'' بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b x f''(x)\,dx = bf'(b) - af'(a) + f(a) - f(b).$$

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول صادق در شرط اولیهٔ داده‌شده را بیابید .

۳۹ . $y' = x^5 - x^3, y(0) = 4$

۴۰ . $y' = \tan^2 x, y(\pi/4) = 0$

۴۱ . $y' \cos^2 x = \sin x, y(0) = 7$

۴۲ . $y' \sin^2 x = \cos x, y(\pi/2) = -1$

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم صادق در شرایط اولیه یا شرایط مرزی داده شده را بیابید .

۴۳ . $y'' = \sqrt{x}, y(1) = 2, y'(1) = 1$

۴۴ . $y'' = \sin^2 x, y(0) = -1, y'(0) = 1$

۴۵ . $y'' = 7x^{1/3}, y(-1) = -2, y(1) = 0$

۴۶ . $y'' = \cos^2 x, y(0) = 1, y(\pi) = 1$

۴۷ . هزینهٔ حاشیه‌ای یک شرکت در تولید کالایی $MC(q) = 3q^2 - 90q + 1200$ دلار در سطح تولید q است . تابع هزینهٔ کل $C(q)$ را درصورتی بیابید که سرانه $7200 باشد . هزینهٔ (جدا از سرانهٔ) تولید دومین دوجین از کالا را به صورت انتگرال بیان کرده، و آن را حساب کنید . هزینهٔ متوسط بر واحد (همراه‌باسرانهٔ) تولید سه دوجین اول را بیابید .

۴۸ . اتومبیلی زمان ترمز 90 mph سرعت دارد . اگر نیروی مقاومت ترمز در برابر حرکت نصف وزن اتومبیل باشد ، چند ثانیه تا توقف کامل طول خواهد کشید ؟ اتومبیل چه مسافتی را پس از ترمز طی می‌کند ؟ فرض کنید $g = 32\ \text{ft/sec}^2$.

۴۹ . اتومبیلی به وزن 2700 lb از حال سکون شتاب یکنواخت گرفته و ظرف 15 ثانیه به تندی 75 mph می‌رسد .توان لحظه‌ای موتور اتومبیل را به‌عنوان تابعی‌اززمان‌بیابید توان متوسط موتور روی بازهٔ شتاب چقدر است ؟

۵۰ . ذره‌ای از نقطهٔ ثابت O با نیرویی متناسب با عکس مجذور فاصله دفع می‌شود .فرض کنید نیروی وارد بر ذره وقتی در فاصلهٔ 1cm از O است مساوی 100 دین باشد .چقدر باید کار انجام داد تاذره‌راازفاصلهٔدور به‌نقطهٔ 0.001 cm از O آورد ؟ (نیروی 1 دین به جرم 1 گرم شتاب $1\ \text{cm/sec}^2$ می‌دهد ، و 1 dyne-cm را یک ارگ می‌نامند .)

۵۱ . کارگری یک آچار را به داخل محوطهٔ عبور آسانسور انداخته و درست 3 sec بعدصدای برخورد آن را با ته‌محوطه می‌شنود .عمق محوطه چقدر است ؟ (g را مساوی $32\ \text{ft/sec}^2$ و سرعت صوت در هوای گرم را 1156 ft/sec بگیرید .)

۵۲ . در چه فاصله از ماه جاذبهٔ ثقلی زمین مساوی جاذبهٔ ماه است ؟ (جرم زمین‌حدودا " 81 برابر جرم ماه است ، و فاصلهٔ بین زمین و ماه حدودا " 240,000 mi می‌باشد .)

۵۳. قانون دوم حرکت نیوتن $m(dv/dt) = F$ برحسب اندازهٔ حرکت $p = mv$ یک ذره به جرم m و سرعت v به شکل $d(mv)/dt = dp/dt = F$ درآمده ، و حتی اگر m ثابت نباشد ، که تا بحال فرض شده است ، برقرار می‌ماند . فرض کنید یک قطره باران کروی از درون جوی سقوط می‌کند که از بخار آب اشباع شده است . در اثر تراکم ، جرم قطره به میزانی متناسب با مساحت سطح و با ثابت تناسب k افزایش می‌یابد . نشان دهید که سقوط قطرهٔ باران با شتاب ثابت $a = \frac{1}{4}g \approx 8\ \text{ft/sec}^2$ صورت می‌گیرد البته با این فرض که اندازهٔ اولیهٔ قابل چشم‌پوشی بوده و سرعت اولیهٔ آن صفر باشد .

۵۴. بنابر نظریهٔ **خصوصی نسبیت** اینشتن[1] ، قانون حرکت نیوتن $d(mv)/dt = F$ را باید با

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = F \qquad (\text{دو})$$

تعویض کرد ، که در آن c سرعت نور است $(\approx 300{,}000\ \text{km/sec})$. اگر v در مقایسه با c کوچک باشد (که در تمام مسائل عادی مهندسی مکانیک چنین است) قانون نیوتن تقریبی عالی به قانون اینشتن می‌باشد . اما اگر v کسر محسوسی از c باشد (که در ذرات زیر اتمی با انرژی بسیار زیاد چنین است) ، قانون حرکت اینشتن (دو) به " اثرات نسبی " منجر می‌شود که قانون نیوتن آنها را پیش‌بینی نکرده است . مثلا "، نشان دهید که ، بر طبق قانون اینشتن ، یک ذره به جرم ناصفر تحت اثر نیروی ثابت F هرقدر اثر نیرو طول بکشد نمی‌تواند به سرعت نور برسد . قانون نیوتن در این باب چه می‌گوید ؟

راهنمایی . اگر ذره از حال سکون شروع به حرکت کند ، انتگرالگیری از (دو) نتیجه می‌دهد که $v/\sqrt{1-(v/c)^2} = Ft/m$.

مسائل ۵۵ تا ۶۴ به انتگرالگیری از توابعی می‌پردازند که فقط بر بخشهایی از بازه‌های انتگرالگیری خود پیوسته‌اند . به‌طور مشخص ، گوییم تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ **قطعه‌قطعه پیوسته** است اگر افرازی مانند $a = c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n = b\ (c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n)$ از $[a, b]$ وجود داشته باشد به‌طوری که (۱) f در $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ ناپیوسته باشد ، (۲) f بر بازه‌های **باز** $(c_0, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_{n-1}, c_n)$ پیوسته باشد ، و (۳) حدود یکطرفهٔ

$$f(c_0^+), f(c_1^-), f(c_1^+), \ldots, f(c_{n-1}^-), f(c_{n-1}^+), f(c_n^-)$$

همه موجود و متناهی باشند ، که در آن برای اختصار می‌نویسیم

$$f(c_i^+) = \lim_{x \to c_i^+} f(x), \qquad f(c_i^-) = \lim_{x \to c_i^-} f(x).$$

---

1. Einstein

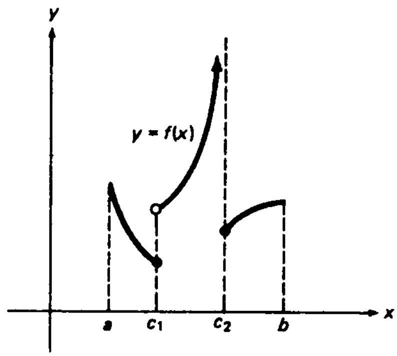
مقادیر f در نقاط c_i می‌توانند دلخواه (یا حتی تعریف نشده) باشند . توجه کنید هرگاه $n = 1$ و $f(c_0^+) = f(a), f(c_1^-) = f(b)$ ، آنگاه f بر $[a, b]$ پیوسته است؛ درنتیجه ،ردهٔ توابع قطعه‌قطعه پیوسته‌شامل‌تمام‌توابع پیوسته‌است .همچنین، توجه کنید که ناپیوستگیهای f در نقاط $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ (اگر $n = 1$ ، این‌گونه‌نقاط‌وجود ندارند) باید ناپیوستگیهای جهشی به صورت تعریف شده درصفحهٔ ۱۵۳باشند . با یک استدلال تکنیکی که آن راحذف‌کرده‌ایم می‌توان نشان‌داد هرگاه f بر $[a, b]$ قطعه‌قطعه‌پیوسته باشد ، آنگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است با انتگرال

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f_1(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{b} f_n(x)\,dx, \qquad (\text{سه})$$

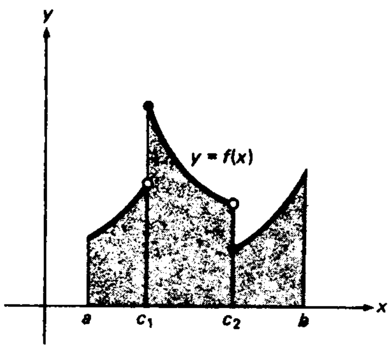
که در آن f_i تابع **پیوسته** بر $[c_{i-1}, c_i]$ است که با f بر (c_{i-1}, c_i) یکی است؛ یعنی ،

$$f_i(x) = \begin{cases} f(c_{i-1}^+) & \text{اگر } x = c_{i-1}\text{ ،} \\ f(x) & \text{اگر } c_{i-1} < x < c_i\text{ ،} \\ f(c_i^-) & \text{اگر } x = c_i\text{ ،} \end{cases}$$

این برحسب تعبیر مساحتی انتگرال کاملا" موجه است . مثلا" ، تابع f رسم شده در شکل ۲۸ (آ) بر $[a, b]$ قطعه قطعه پیوسته‌است باناپیوستگیهایی در c_1 و c_2 ، و انتگرال‌آن مجموع مساحات سه ناحیهٔ سایه‌دار است . یک مثال مهم از توابع قطعه قطعه پیوسته‌تابع بزرگترین عدد صحیح $[\![x]\!]$ است ، که بر هر بازهٔ $[a, b]$ قطعه قطعه پیوسته است . از آن سو ، تابع f رسم شده در شکل۲۸ (ب) قطعه قطعه پیوسته نیست ، زیرا $f(c_2^-) = \lim_{x \to c_2^-} f(x) = \infty$ ؛



(ب)



(آ)

شکل ۲۸

و در واقع ، f بر $[a, b]$ بی‌کران و لذا انتگرال‌ناپذیراست (ر.ک. مسئلهٔ ۳۳ ،صفحهٔ ۳۸۱) .

با استفاده از فرمول (سه)، انتگرال داده شده را حساب کنید (در هر حالت، انتگرالده قطعه قطعه پیوسته است).

۵۵. $\int_{-1}^{2} [\![x]\!]\,dx$

۵۶. $\int_{-2}^{1} [\![x]\!]\,dx$

۵۷. $\int_{\sqrt{2}}^{\pi} [\![x]\!]\,dx$

۵۸. $\int_{0}^{2} [\![2x+1]\!]\,dx$

۵۹. $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$ ، که در آن

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{اگر } 0 \le x \le 2 \\ -1 & \text{اگر } 2 < x < 3 \\ 10 & \text{اگر } x = 3 \\ x^2 & \text{اگر } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

۶۰. $\int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx$ ، که در آن

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{اگر } 0 \le x < \pi/2 \\ \cos x & \text{اگر } \pi/2 \le x < \pi \\ \sin x & \text{اگر } \pi \le x < 3\pi/2 \\ \cos x & \text{اگر } 3\pi/2 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

۶۱. $\int_{-2}^{8} f(x)\,dx$ ، که در آن

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{اگر } -2 < x < 1 \\ -4 & \text{اگر } 1 < x < 3 \\ 5 & \text{اگر } 3 < x < 8 \end{cases}$$

۶۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & \text{اگر } 0 \le x < 1 \\ a_2 & \text{اگر } 1 \le x < 2 \\ \cdots & \\ a_n & \text{اگر } n-1 \le x \le n \end{cases}$$

نشان دهید که مقدار میانگین یا متوسط تابع f بر بازهٔ $[0, n]$ مساوی است با $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ یعنی میانگین یا متوسط حسابی n عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

۶۳. مقدار میانگین $[\![x]\!]$ را بر بازهٔ $[0, n]$ بیابید، که در آن n عدد صحیح مثبتی است.

۶۴. مقدار میانگین $[\![x]\!]$ را بر بازهٔ $[-a, a]$ به ازای $a > 0$ دلخواه بیابید.

توابع معکوس[5]

هر تابع $y = f(x)$ دارای این خاصیت است که مقدار متغیر وابستهٔ y منحصراً به وسیلهٔ مقدار متغیر مستقل x معین می‌شود ،ولی بعضی‌از توابع این خاصیت اضافی را دارند که مقدار x نیز منحصراً به‌وسیلهٔ y معین می‌شود . توابع از این نوع خاص را **توابع یک به یک** می‌نامند . به هر چنین تابع $y = f(x)$ می‌توان یک **تابع معکوس** $x = f^{-1}(y)$ مربوط‌کرد که مقادیر y را به مقادیر x برمی‌گرداند . به‌علاوه ، همانطور که بخشهای ۵٠۱ و۵٠۲ نشان داده‌اند ، اگر f پیوسته باشد ، f^{-1} پیوسته است ، و اگر f دارای مشتق ناصفر باشد ، f^{-1} نیز چنین می‌باشد .گاهی معکوس یک تابع یک به‌یک آشنا تابع جدیدی است که خود ارزش مطالعه دارد . این درمورد **توابع مثلثاتی معکوس**، که‌دربخش۵٠۳معرفی‌شده‌اند ،وتعدادی تابع دیگر که در فصل بعد مطرح می‌شوند صحت دارد .

۵٠۱ معکوس تابع یک به یک

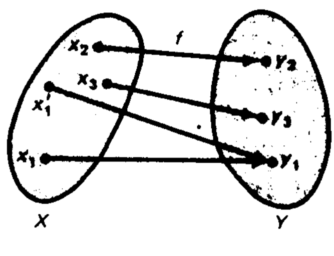
فرض‌کنیم f تابعی باشد که برمجموعهٔ X تعریف شده است ، و Y نقش X تحت f باشد ؛ یعنی ، مجموعهٔ تمام مقادیر $y = f(x)$ که f با تغییر x روی مجموعهٔ X می‌گیرد ؛ با نماد نظریهٔ مجموعه‌ها ، $Y = \{y : y = f(x), x \in X\}$. در این صورت ، اینکه x منحصراً y را معین می‌کند بدین معنی است که به ازای هر نقطهٔ x در X یک و فقط یک نقطه مانند y در Y هست به‌طوری که $y = f(x)$. در واقع ، این یکتایی جوهر مفهوم تابع است .البته، f ممکن است بیش از یک نقطه از X را به نقطهٔ واحدی از Y بنگارد ، و این عموماً رخ خواهد داد . مثلاً ، هرگاه $y = f(x) = |x|$ ، آنگاه f هر دو نقطهٔ $x = 3$ و$x = -3$را به نقطهٔ واحد $y = 3$ می‌نگارد .

با اینحال، فرض‌کنیم f بیش از یک نقطهٔ X را به نقطهٔ واحدی از Y **ننگارد** . در این صورت ، به ازای هر نقطهٔ y در Y ، یک و فقط یک نقطه مانند x در X هست به طوری

که $y = f(x)$ ، و می‌گوییم f یک تابع یک به یک ، یا f یک به یک بر X است . به عبارت دیگر ، اگر f بر X یک به یک بوده و x و x' نقاطی از X باشند ، تساوی $f(x) = f(x')$ فقط وقتی ممکن است که $x = x'$. به بیان دقیق ، تابع یک به یک f نقاط متمایز X را به نقاط متمایز Y می‌نگارد .

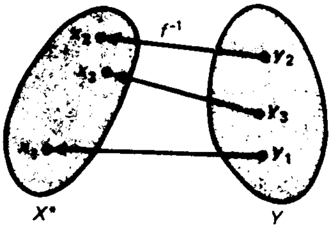
توابع معکوس. در تابع یک به یک ، و **فقط** در این مورد ، می‌توان تابع دیگری تعریف کرد که با f^{-1} نموده و **تابع معکوس** (یا فقط **معکوس**) تابع اصلی f نامیده می‌شود . تابع معکوس بر Y تعریف شده و هر y در Y را به نقطهٔ منحصر به فرد x در X می‌نگارد که $y = f(x)$. واضح است که X نقش Y تحت f^{-1} است درست همانطور که Y نقش X تحت f است . هرگاه X بزرگترین مجموعه‌ای باشد که f بر آن تعریف شده است ،آنگاه X قلمرو f و برد f است، درحالی که Y برد f و قلمرو f^{-1} می‌باشد . به آسانی معلوم می‌شود که f^{-1} خود یک تابع یک به یک بوده و f معکوس آن می‌باشد ؛ درنتیجه ، $f = (f^{-1})^{-1}$.

مثال ۱. تابع f را که با " نمودار " شکل ۱ مشخص می‌شود درنظر می‌گیریم . اشکالی که X و Y نامیده شده‌اند نمایش قلمرو و برد f اند ، و مقادیر متغیر مستقل x و متغیر وابستهٔ y با نقاط نموده شده‌اند .هر مقدار x با یک سهم به مقدار y که توسط f بدان نگاشته شده مربوط

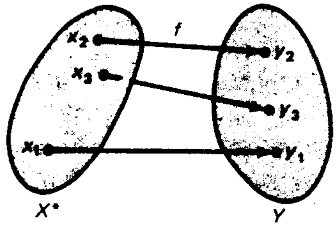


شکل ۱

می‌شود ، و جهت سهم جهت نگاشت (از X به Y) را نشان می‌دهد . تابع f بر تمام قلمرو X یک به یک نیست ، زیرا دو سهم به نقطهٔ y_1 ختم می‌شوند . اما ، همانطور که از شکل ۲ (آ) واضح است ، f بر مجموعهٔ X^* که با حذف x'_1 از X به دست می‌آید یک به یک است ، و تابع معکوس نظیر f^{-1} ، که در شکل ۲ (ب) رسم شده ، با عکس‌کردن جهت سهمها که از نقاط Y به نقاط X^* بروند به دست می‌آید . توجه کنید که f یک به یک است و درنتیجه برهرزیر مجموعهٔ X که شامل x_1 و x'_1 نباشد معکوس دارد .



(ب)



(آ)

شکل ۲

مثال ۲. نشان دهید که تابع

$$y = \frac{1+x}{1-x} \qquad (x \neq 1) \tag{1}$$

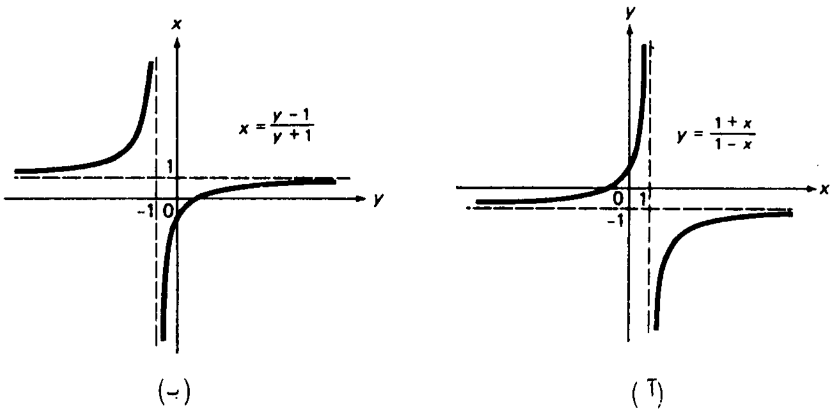
یک به یک است، و معکوس آن را بیابید.

حل. از (۱) معلوم می‌شود که $1 + x = y - xy$ ، یا معادلاً $x + xy = y - 1$. بنابراین،

$$x = \frac{y-1}{y+1} \qquad (y \neq -1), \tag{2}$$

و به آسانی می‌توان (۱) را نسبت به x و برحسب y حل کرد. به‌علاوه، فرمول (۲) مسلماً به هر $y \neq -1$ مقدار منحصر به فردی از x را نسبت می‌دهد. از اینرو، (۱) تابع یک به یکی مانند $y = f(x)$ است، و (۲) تابع معکوس آن $x = f^{-1}(y)$ می‌باشد. فرض کنیم X مجموعهٔ تمام $x \neq 1$ها بوده و Y مجموعهٔ تمام $y \neq -1$ های باشد. در این صورت، f دارای قلمرو X و برد Y است، درحالی که f^{-1} دارای قلمرو Y و برد X می‌باشد. نمودار این توابع در شکلهای ۳(آ) و ۳(ب) نموده شده‌اند. توجه کنید که در شکل ۳(ب) **عرض** x و **طول** y می‌باشد.

مثال ۳. تابع $y = f(x) = x^2$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ یک به یک نیست، زیرا به‌ازای هر $y > 0$ دو نقطه در $(-\infty, \infty)$ ، یعنی $x = \sqrt{y}$ و $x = -\sqrt{y}$ ، وجوددارندکه $f(x) = y$. (مثل همیشه، $\sqrt{y}$ ریشهٔ دوم **مثبت** y می‌باشد.) اما f بر بازهٔ $[0, \infty)$ یک به یک *است*، زیرا درست یک نقطه در $[0, \infty)$ ، یعنی $x = \sqrt{y}$ ، وجود دارد که به ازای آن $f(x) = y$ به‌عبارت



شکل ۳

دیگر، تابع

$$y = f(x) = x^2 \qquad (0 \le x < \infty)$$

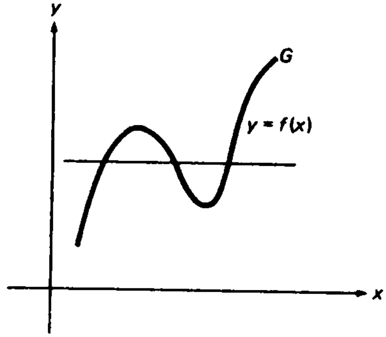
یک تابع یک به یک است با معکوس

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \qquad (0 \le y < \infty). \tag{۳}$$

به‌علاوه، به آسانی معلوم می‌شود که f بر هر بازه که در آن x علامت ثابت دارد یک به‌یک است، ولی بر هیچ بازه‌ای که x در آن تغییر علامت می‌دهد چنین نیست.

خاصیت خط افقی. از صفحهٔ ۷۶ به یاد می‌آوریم که نمودار هر تابع $y = f(x)$ دارای این خاصیت است که هیچ خط قائم، یعنی هیچ خط موازی محور y، نمی‌تواند نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند. نمودار یک تابع **یک به یک** دارای این خاصیت اضافی است که هیچ خط افقی، یعنی هیچ خط موازی محور x، نمی‌تواند نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند زیرا هرگاه خط افقی $y = c$ نمودار $y = f(x)$ را در دو یا چند نقطه قطع کند، آنگاه دو یا چند مقدار از x، یعنی طول این نقاط، وجود دارند که نظیر یک مقدار از y، یعنی c، می‌باشند، و این تعریف تابع یک به یک را نقض می‌کند.

مثال ۴. بررسی شکل ۳ (آ) نشان می‌دهد که هیچ خط افقی نمودار تابع (۱) را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند. بنابراین، همانطور که از قبل می‌دانیم، (۱) یک تابع یک به‌یک است. از آن سو، تابع $y = f(x)$ با نمودار G شکل ۴ نمی‌تواند یک به یک باشد، زیرا خطوطی افقی وجود دارند که G را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند (یک چنین خط در شکل نشان



شکل ۴

داده شده است) .

فرض کنیم $y=f(x)$ تابع یک‌به‌یکی با معکوس $x=f^{-1}(y)$ باشد. باگذاردن $y=f(x)$ در $x=f^{-1}(y)$ و نیز گذاردن $x=f^{-1}(y)$ در $y=f(x)$ جفت اتحاد مهم زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, \qquad f(f^{-1}(y)) \equiv y,$$

یا معادلا"

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, \qquad f(f^{-1}(x)) \equiv x, \tag{۴}$$

که در آن به‌خاطر هماهنگ بودن نمادها y در اتحاد دوم به x تغییر یافته است. بنابر رابطهٔ (۴) ، هر یک‌از توابع f و f^{-1} عمل دیگری را خنثی می‌کند. به عبارت‌دیگر، حاصل اعمال توابع f و f^{-1} با هر ترتیب مقدار x را تغییر نمی‌دهد. فرمولهای (۴) را می‌توان به طور فشرده‌تر نوشت:

$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I, \tag{۵}$$

که در آن I ***تابع همانی*** است؛ یعنی، تابع هر عدد x را به خودش می‌نگارد.[1] معادلهٔ (۵) نشان می‌دهد که f^{-1} متقابل f نسبت به عمل ***ترکیب*** است. f^{-1} را با متقابل f نسبت به عمل ضرب، که با $1/f$ نموده می‌شود، خلط نکنید. تابع $1/f$ با فرمول

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

---

۱. به طور دقیقتر، به ازای هر x در قلمرو f ، $f^{-1}\circ f = I$ ، حال آنکه به ازای هر x در برد f (قلمرو f^{-1})، $f\circ f^{-1} = I$.

تعریف می‌شود مشروط براینکه $f(x) \neq 0$.

مثال ۵. با استفاده از فرمول $f(f^{-1}(x)) \equiv x$ ، معکوس تابع (۱) مثال ۲ را به‌دست‌آورید.

حل. با نوشتن $y = f(x)$ در (۱) ، داریم

$$f(x) = \frac{1 + x}{1 - x} \qquad (x \neq 1). \tag{۱´}$$

سپس، با اعمال فرمول ذکر شده ، نتیجه می‌شود که

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1 + f^{-1}(x)}{1 - f^{-1}(x)} = x.$$

بنابراین ،

$$1 + f^{-1}(x) = x - xf^{-1}(x),$$

و با حل نسبت به $f^{-1}(x)$ به دست می‌آوریم

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \qquad (x \neq -1). \tag{۲´}$$

تفاوتها ظاهری‌اند ؛ فرمولهای (۲) و (۲´) در واقع دو طریق معادل برای نوشتن تابع واحدی است . در واقع ، برای تبدیل (۲) به (۲´) ، کافی است متغیرهای x و y را باهم عوض کرده ، و سپس قرار دهیم $y = f^{-1}(x)$. چگونه (۲´) به (۲) تبدیل می‌شود؟

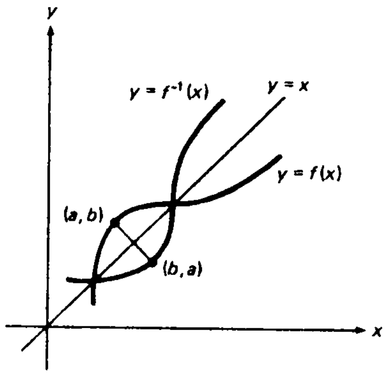
رابطهٔ بین نمودارهای f و f^{-1} . فرض کنیم $y = f(x)$ یک تابع یک به یک با تابع معکوس f^{-1} باشد . در این صورت ، **نمودار f^{-1} منعکس نمودار f نسبت به خط** $y = x$ (خط مار بر مبداء به شیب 1) است . برای مشاهدهٔ این امر ، فرض کنیم a نقطه‌ای در قلمرو f باشد . هرگاه $b = f(a)$ ، آنگاه $a = f^{-1}(b)$. بنابراین ، اگر نقطهٔ (a, b) متعلق به نمودار f باشد ، نقطهٔ (b, a) متعلق به نمودار f^{-1} است (ر.ک. شکل ۵) . اما این دو نقطه **نسبت به خط** $y = x$ ***متقارن اند*** ؛ یعنی ، خط $y = x$ عمود منصف پاره‌خط واصل بین نقاط (a, b) و (b, a) می‌باشد. در واقع ، خط ماربر نقاط (a, b) و (b, a) به شیب

$$\frac{a - b}{b - a} = -1$$

است ؛ و درنتیجه ، بر خط $y = x$ عمود است ، ولی نقطهٔ میانی پاره‌خط واصل بین نقاط (a, b) و (b, a) مساوی

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

بوده ؛ و درنتیجه ،برخط $y = x$ قرار دارد . توجه‌کنید که برای رسم‌نمودار تابع f ومعکوسش f^{-1} در یک دستگاه مختصات قائم ، باید مثل شکل ۵ از یک علامت برای شناسه‌های هردو تابع استفاده کنیم .



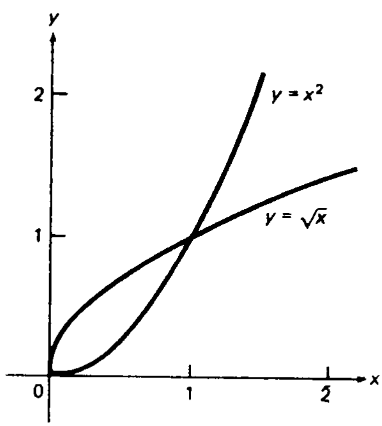
شکل ۵

مثال ۶. در شکل ۶ تابع

$$y = f(x) = x^2 \qquad (0 \le x < \infty)$$

و معکوسش

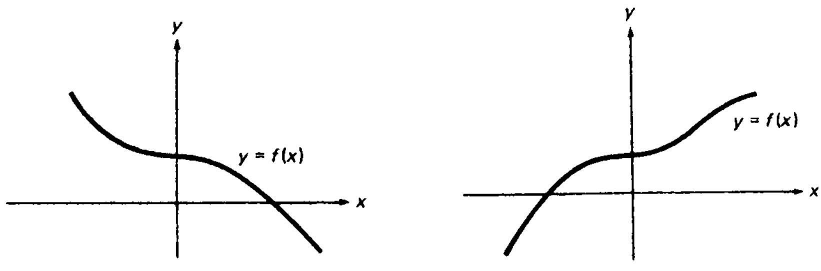
$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad (0 \le x < \infty)$$



شکل ۶

در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است . (عبارت مربوط بـه $f^{-1}(x)$ را می‌تـوان از فرمول (۳) بـه‌وسیلهٔ تعویض‌متغیرهای x و y باهم به‌دست‌آورد .) توجه کنید که هر نمودار نیمی از سهمی است ، و انعکاس نسبت به خط $y = x$ هر یک از این نمودارها را به دیگری تبدیل می‌کند . چطور می‌توان با یک نگاه گفت که توابع f و f^{-1} یک به یک‌اند ؟

معکوس تابع یکنوا . همانطور که احتمالا" حدس زده‌اید ، هر تابع یکنوا (یعنی ، هـر تابع صعودی یا نزولی) خود بخود یک به یک بوده ؛ و درنتیجه ، دارای معکوس می‌باشد . زیرا ، هرگاه نمودار f مثـل شکل ۷ (آ) بالا رود یا مثل شکل ۷ (ب) پایین بیاید ، آنگاه‌هیچ خط



(ب) (آ)

شکل ۷

افقی نمی‌تواند نمـودار f را در بیش از یک نقطه قطع کند . به‌علاوه ، همانطور کـه اینک نشان می‌دهیم ، معکوس یک تابع یکنوا خود تابعی یکنواست .

قضیهٔ ۱ (معکوس یک تابع یکنوا) . ***هر تابع صعودی یک به یک و دارای معکوسی صعـودی است . هر تابع نزولی یک به یک با معکوسی نزولی می‌باشد .***

برهان . فرض‌کنیم f (بر مجموعه‌ای) صعودی بوده و $x \neq x'$. در این صورت ، یا $x < x'$ یا $x' < x$. درحالت اول $y < y'$ ، که در آن $y = f(x), y' = f(x')$ ، و در حالت دوم $y' < y$ ، ولـی در هر حالت $y \neq y'$. بنابراین ، f در نقاط مختلف مقادیرمتفـاوت می‌گیرد ؛ یعنی ، f یک به یک است ؛ و درنتیجه ، دارای تابع معکوس f^{-1} می‌باشد . فرض کنیـم $y < y'$ ، و قرار می‌دهیم $x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$. در این صورت ، $x < x'$ ، زیرا $x = x'$ ایجاب می‌کند که $y = y'$ (f تابع است) ، حال آنکه $x > x'$ ایجاب می‌کند که $y > y'$ (f صعودی است) . بنابراین ، f^{-1} نیز (بر Y ، یعنی نقش X تحت f) صعودی

است . اثبات نزولی بودن f اساسا " همین است .

مثال ۷. فرض کنیم

$$y = f(x) = x^n \qquad (0 \le x < \infty),$$

که در آن n عدد صحیح مثبتی است . بنابر آزمون یکنوایی (قضیهٔ ۷ ، صفحهٔ ۲۶۹) ، f بر قلمرو $[0, \infty)$ صعودی است ، زیرا $f'(x) = nx^{n-1}$ بر $(0, \infty)$ صعودی است . از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که f یک به یک است با تابع معکوس

$$x = f^{-1}(y) = y^{1/n},$$

یا ، پس از تعویض متغیرهای x و y ،

$$y = f^{-1}(x) = x^{1/n}, \qquad (۶)$$

و f^{-1} بر J ، یعنی نقش I تحت f ، صعودی است . مجموعهٔ J باید بازه باشد ، چون f بر I پیوسته است (قضیهٔ ۱۵ ، صفحهٔ ۱۶۰ ، را به یاد آورید) . درواقع ، J بازهٔ $[0, \infty)$ است ، زیرا $f(0) = 0$ ، f بر $[0, \infty)$ نامنفی است ، و

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^n = \infty.$$

چون $J = [0, \infty)$ قلمرو تابع معکوس (۶) است ، این ثابت می‌کند که ریشهٔ n ام $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ به ازای هر x نامنفی موجود و منحصر به فرد است ، و این در طول راه تلویحا " فرض شده بود .

مثال ۸. نشان دهید که تابع

$$f(x) = x^{11} + 3x^7 + 2x + \sin 2x - 13 \qquad (۷)$$

یک به یک است .

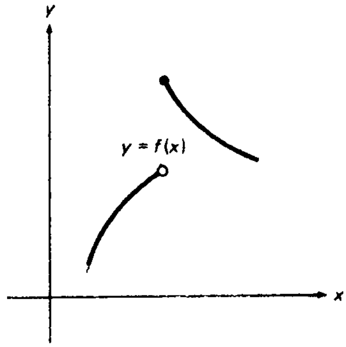
حل. با مشتقگیری از (۷) ، تابع

$$f'(x) = 11x^{10} + 21x^6 + 2(1 + \cos 2x)$$

به دست می‌آید ، که به ازای هر x مثبت است (چرا؟) .

از آزمون یکنوایی نتیجه می‌شود که f بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است . لذا ، طبق قضیهٔ ۱ ، f بر قلمرو خود $(-\infty, \infty)$ یک به یک است . به‌علاوه ، با آنکه نمی‌توان فرمول صریحی برای تابع معکوس f^{-1} به‌دست‌آورد ، قضیه به ما می‌گوید که f^{-1} یک تابع صعودی است . به‌عنوان تمرین ، نشان دهیدکه برد f ، و درنتیجه‌قلمرو f^{-1} ، مجددا " بازهٔ $(-\infty, \infty)$ می‌باشد .

توابع یک به یک پیوسته. بنابر قضیهٔ ۱، هر تابع یکنوا باید یک به یک باشد. عکس این درست نیست؛ یعنی، توابع یک به یکی وجود دارند که یکنوا نیستند. نمودار یک چنین تابع f در شکل ۸ نموده شده است. ناپیوسته بودن این تابع تصادفی نیست، زیرا همانطور که اینک نشان می‌دهیم، هر تابع یک به یک **پیوسته** باید یکنوا باشد.



شکل ۸

قضیهٔ ۲ (توابع یک به یک پیوسته یکنوایند). *هرگاه f بر بازهٔ I پیوسته و یک به یک باشد، آنگاه f بر I صعودی است یا نزولی.*

برهان. می‌توان فرض کرد که f غیرثابت باشد، زیرا یک تابع ثابت مسلماً "یک‌به‌یک‌نیست". فرض کنیم f بر I پیوسته و یک به یک بوده ولی بر I نه صعودی باشد نه نزولی. در این صورت، سه نقطهٔ a, b, c در I وجود دارند به‌طوری که $a < b < c$ و

$$f(a) < f(b), \qquad f(c) < f(b), \tag{۸}$$

یا

$$f(a) > f(b), \qquad f(c) > f(b). \tag{۸'}$$

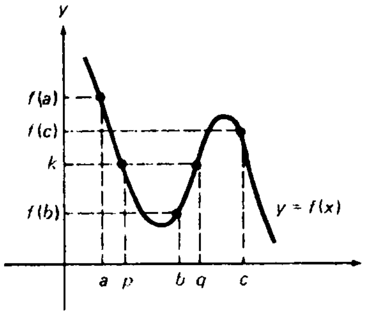
فرض کنیم (۸) برقرار باشد، و k را طوری می‌گیریم که در نامساویهای

$$f(a) < k < f(b), \qquad f(c) < k < f(b)$$

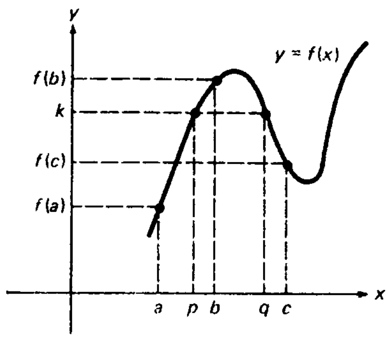
صدق کند [ر.ک. شکل ۹(آ)]. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند p در بازهٔ (a, b) هست به‌طوری که $f(p) = k$ و نقطه‌ای مانند q در بازهٔ (b, c) هست به طوری که $f(q) = k$. اما در این صورت $f(p) = f(q)$، که با فرض یک به یک بودن f بر I تعارض دارد. با انتخاب

$$f(a) > k > f(b), \qquad f(c) > k > f(b)$$

می‌توان به تناقض مشابهی رسید [ر.ک. شکل ۹ (ب)] .



(ب)



(آ)

شکل ۹

شهوداً " واضح است که معکوس یک تابع پیوسته خود پیوسته می‌باشد ، چرا که اگر نمودار f یک تکه باشد ، پس از انعکاس نسبت به خط $y = x$ (عملی که نمودار f^{-1} را می‌دهد) یک تکه می‌ماند . این قضیهٔ زیر را به ما می‌دهد که از برهان آن (که‌درآخراین بخش داده شده) به‌خاطر ماهیت تکنیکی‌اش چشم پوشیده‌ایم .

قضیهٔ ۳ (پیوستگی تابع معکوس) . فرض کنیم f بر بازهٔ I پیوسته و یک به یک بوده ، و J نقش I تحت f باشد (بنابر پیوستگی f ، J بازه است). در این صورت ، f^{-1} بر J پیوسته می‌باشد .

مثال ۹. تابع $f(x) = x^n$ (n یک عدد صحیح مثبت است) بر $(-\infty, \infty)$ ، و بخصوص بر $[0, \infty)$ ، پیوسته‌است . به‌علاوه ، f بر $[0, \infty)$ صعودی ، و درنتیجه یک به یک ، بامعکوس $f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ می‌باشد (ر.ک. مثال ۰.۷) . چون نقش بازهٔ $[0, \infty)$ تحت f مجدداً " بازهٔ $[0, \infty)$ است ، ازقضیهٔ ۳ نتیجه‌می‌شود که $\sqrt[n]{x}$ بر $[0, \infty)$ پیوسته‌می‌باشد . در بخشهای ۸.۱ و ۹.۱ ، پیوستگی $\sqrt[n]{x}$ به‌روش کاملاً " متفاوتی ثابت شده است .

مثال ۱۰. تابع یک به یک

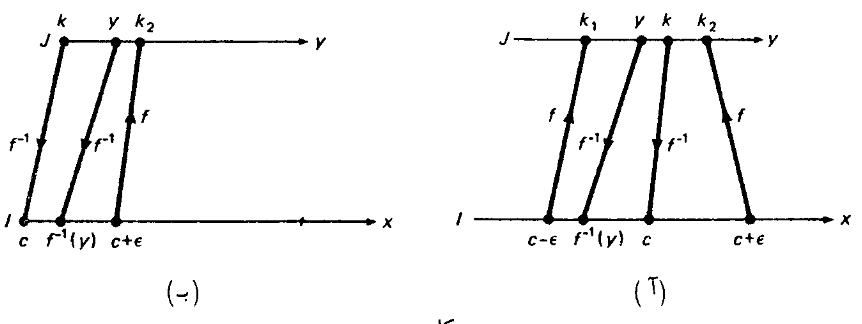
$$f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$$

مثالهای ۲ و ۵ بر $I_1 = (-\infty, 1)$ و $I_2 = (1, \infty)$ پیوسته است. لذا، معکوسش

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

بر نقشهای این دو بازه تحت f، یعنی بازه‌های $J_1 = (-1, \infty)$ و $J_2 = (-\infty, -1)$، پیوسته می‌باشد.

برهان قضیهٔ ۳ (اختیاری). بنابر قضیهٔ ۲، f بر I صعودی یا نزولی است. فرض کنیم f بر I صعودی باشد. در این صورت، طبق قضیهٔ ۱، f^{-1} بر J صعودی می‌باشد. فرض کنیم k یک نقطهٔ درونی J بوده، و $c = f^{-1}(k)$. در این صورت، c یک نقطهٔ درونی I است (چرا؟). برای اثبات پیوسته بودن f^{-1} در k، به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم ε عدد مثبت به‌قدر کافی کوچکی باشد که هر دو نقطهٔ $c \pm \varepsilon$ تعلق به I داشته‌باشند، و قرار می‌دهیم $k_1 = f(c-\varepsilon)$، $k_2 = f(c+\varepsilon)$ که، همانطور که شکل ۱۰ (آ) نشان داده، ایجاب می‌کند که $k_1 < k < k_2$، زیرا f صعودی است. در این صورت، $c-\varepsilon = f^{-1}(k_1), c+\varepsilon = f^{-1}(k_2)$. هرگاه y متعلق به بازهٔ (k_1, k_2) باشد، یعنی $k_1 < y < k_2$، آنگاه $f^{-1}(k_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(k_2)$، زیرا f^{-1} صعودی‌است، یامعادلاً $c-\varepsilon < f^{-1}(y) < c+\varepsilon$. به عبارت دیگر، می‌توان $f^{-1}(y)$ را هرقدر بخواهیم به $c = f^{-1}(k)$ نزدیک کرد؛ یعنی با انتخاب y به‌قدر کافی‌نزدیک k، یعنی دربازهٔ (k_1, k_2)، در فاصلهٔ ε از c. بنابراین، وقتی $y \to k$، $f^{-1}(y) \to f^{-1}(k)$؛ درنتیجه، f^{-1} در k پیوسته است، که k یک نقطهٔ درونی دلخواه J می‌باشد. اگر k یک نقطهٔ انتهایی J و متعلق به J باشد، تعدیل (وساده سازی!) مختصر استدلال فوق، که در شکل ۱۰ (ب) نموده شده، ثابت می‌کند که اگر k



(ب) (آ)

شکل ۱۰

یک نقطهٔ انتهایی چپ (راست) J باشد، f^{-1} از راست (چپ) پیوسته می‌باشد. دوحکم اخیر باهم نشان‌می‌دهند که f^{-1} بر بازهٔ J پیوسته‌است. اگر جهت افزایش y راعکس‌کرده،

و این را به حساب بیاوریم که با این کار در شکل ۱۰ (آ) داریم $k_2 < k < k_1$ یا در شکل ۱۰ (ب) داریم $k_2 < k$ ، برهان نزولی بودن f به همین ترتیب جریان خواهد یافت .

مسائل

۱. چه شرطی بر ثابت a تابع خطی $f(x) = ax + b$ را یک به یک می‌سازد؟ تابع معکوس نظیر f^{-1} را بیابید . چه شرط اضافی بر a باعث تقاطع نمودار f و نمودار f^{-1} در تنها یک نقطه می‌شود؟ این نقطه را بیابید .

۲. نشان دهید که تابع زوج f نمی‌تواند بر هیچ بازه (یا مجموعه) که نسبت به مبداء متقارن است یک به یک باشد .

۳. نشان دهید هرگاه f یک به یک و فرد باشد ، آنگاه f^{-1} نیز فرد می‌باشد .

۴. نشان دهید هرگاه f و g یک به یک باشند ، آنگاه $f \circ g$ نیز یک به یک بوده و $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

آیا تابع داده شده بر بازهٔ ذکر شده یک به یک است؟ جواب خود را در هر حالت توضیح دهید .

۵. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ بر $(-\infty, 1]$ ✓

۶. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ بر $[2, 4]$ ✓

۷. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ بر $[-1, 1]$ ✓

۸. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ بر $[1, \infty)$ ✓

۹. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ بر $[1, 3]$ ✓

۱۰. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ بر $[0, 2]$ ✓

۱۱. $f(x) = x^{3/5}$ بر $(-\infty, \infty)$

۱۲. $f(x) = x^{8/3}$ بر $(-\infty, \infty)$

۱۳. $f(x) = x^{-2/5}$ بر $(-\infty, 0)$

۱۴. $f(x) = x^{-5/4}$ بر $(0, \infty)$

۱۵. $f(x) = \sin x$ بر $[\pi/4, 3\pi/4]$ ✓

۱۶. $f(x) = \cos x$ بر $[0, \pi]$ ✓

۱۷. $f(x) = \tan x$ بر $(-\pi/2, \pi/2)$

۱۸. $f(x) = \sec x$ بر $(-\pi/2, \pi/2)$ ✓

۱۹. $f(x) = \cos x + \sin x$ بر $[0, \pi]$ ✓

۲۰. $f(x) = x + \cos x$ بر $(-\infty, \infty)$ ✓

تمام بازه‌ها به طول π را بیابید که بر آنها

۲۱. $\sin x$ یک به یک باشد. ۲۲. $\cos x$ یک به یک باشد.

با حل نسبت به x به عنوان تابعی از y، معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

۲۳. $y = -x$ ۲۴. $y = 2x + 1$

۲۵. $y = \dfrac{1}{x}$ ۲۶. $y = \dfrac{1}{1-x}$

۲۷. $y = \dfrac{x}{x+1}$ ۲۸. $y = \dfrac{3x-1}{3x+1}$

۲۹. $y = x^3 - 2$ ۳۰. $y = \sqrt[3]{x-1}$

۳۱. $y = \sqrt{x(8-x)} \quad (0 \le x \le 4)$

۳۲. $y = \sqrt{x(8-x)} \quad (4 \le x \le 8)$

با استفاده از فرمول $f(f^{-1}(x)) \equiv x$، مثل مثال ۵، معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

۳۳. $f(x) = 1 - 3x$ ۳۴. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

۳۵. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \quad (0 \le x < \infty)$

۳۶. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \quad (-\infty < x \le 0)$

۳۷. $f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$

۳۸. $f(x) = (x^3+1)^{1/3}$

۳۹. $f(x) = x^2 - 2x + 5 \quad (-\infty < x \le 1)$

۴۰. $f(x) = x^2 - 2x + 5 \quad (1 \le x < \infty)$

۴۱. نمودار تابع $y = f(x)$ که معکوس خودش است را توصیف کنید.

نشان دهید که هر یک از توابع زیر معکوس خودش است.

۴۲. $f(x) = 2 - x$ ۴۳. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

۴۴. $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ ۴۵. $f(x) = \dfrac{3x+5}{4x-3}$

۴۶. $f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad (0 \le x \le 3)$

۴۷. با استفاده از قضیهٔ ۳، نشان دهید اگر n فرد باشد، $\sqrt[n]{x}$ بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته‌است.

۴۸. در تعریف جفت مرتبی یک تابع (ر.ک. مسئلهٔ ۵۸، صفحهٔ ۷۲)، دو جفت مرتب در f با عنصر اول یکسان نمی‌توانند وجود داشته باشند. چه شرط اضافی f را یک‌به یک می‌سازد؟ اگر f یک به یک باشد، تابع معکوس f^{-1} چطور به دست می‌آید؟

۴۹. نشان دهید که معکوس تابع (۷) بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته است.

۵.۲ مشتق یک تابع معکوس

همانطور که اینک نشان می‌دهیم، رابطهٔ ساده‌ای بین مشتق f^{-1}، معکوس تابع یک به یک f، و مشتق خود f وجود دارد.

قضیهٔ ۴ (مشتق تابع معکوس). *فرض کنیم f در همسایگی نقطهٔ x پیوسته و یک به یک بوده، و f در x مشتق ناصفر متناهی داشته باشد. در این صورت، f^{-1} درنقطهٔ $y = f(x)$ مشتقی مساوی*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{1}$$

دارد، که در آن $x = f^{-1}(y)$

برهان. فرض کنیم I همسایگی x بوده، و J نقش I تحت f باشد. در این صورت، f^{-1} بر J، بخصوص در نقطهٔ $y = f(x)$ که یک نقطهٔ درونی J است، پیوسته می‌باشد (این احکام از قضایای ۲ و ۳، صفحات ۴۵۵ و ۴۵۶ نتیجه می‌شوند). فرض کنیم y بوده، و $u = f^{-1}(v)$. در این صورت،

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{v\to y} \frac{f^{-1}(v) - f^{-1}(y)}{v - y}$$

$$= \lim_{v\to y} \frac{u - x}{f(u) - f(x)} = \lim_{v\to y} \frac{1}{\dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}}$$

(چرا مخرج صفر وجود ندارد؟). اما f^{-1} در y پیوسته‌است؛ و درنتیجه، $v \to y$ ایجاب می‌کند که $f^{-1}(v) \to f^{-1}(y)$، یا معادلاً $u \to x$. پس نتیجه می‌شود که

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{u\to x} \frac{1}{\dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to x} \dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

این روش اثبات در صفحهٔ ۲۲۰ در اثبات $D_x x^r = rx^{r-1}$ به ازای عدد گویای دلخواه r پیش‌بینی شد. با نماد d، (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x)}{dx}}.$$

به‌طور فشرده، داریم

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}},$$

یا معادلاً

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}, \qquad \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = 1.$$

سه فرمول اخیر شبیه اتحادهای جبری‌اند، ولی البته برهانی برای قضیه به ما نمی‌دهند. اما گواه دیگری هستند بر شایستگی نماد d.

مثال ۱. تابع

$$y = f(x) = \frac{1+x}{1-x} \qquad (x \neq 1) \tag{۲}$$

پیوسته، مشتقپذیر، و یک به یک است با معکوس

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1} \qquad (y \neq -1) \tag{۳}$$

(ر.ک. مثال ۲، صفحهٔ ۴۴۸). از اینرو، طبق قضیهٔ ۴،

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \qquad (y \neq -1),$$

مشروط بر اینکه $f'(x) \neq 0$. با مشتقگیری از (۲) نسبت به x، به دست می‌آوریم

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \qquad (x \neq 1),$$

که هرگز صفر نیست. بنابراین، به ازای هر $x \neq 1, y \neq -1$،

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{2}{(1-x)^2}} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

با گذاردن (۳) در این فرمول، خواهیم داشت

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{\left(1-\frac{y-1}{y+1}\right)^2}{2}=\frac{2}{(y+1)^2}, \tag{۴}$$

یا معادلا"، اگر x را متغیر مستقل بگیریم،

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx}=\frac{2}{(x+1)^2}.$$

به عنوان تمرین، اعتبار (۴) را با مشتقگیری مستقیم از (۳) نسبت به y تحقیق کنید

مثال ۲. هرگاه $y=\sqrt{x}$، آنگاه $x=y^2$. بنابراین، همانطور که از قبل می‌دانیم،

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x>0).$$

مثال ۳. به فرض آنکه

$$f(x)=x^8+3x^4+2x^2+1 \qquad (0\le x<\infty),$$

$(f^{-1})'(7)$ را بیابید.

حل. چون به ازای $x>0$، $f'(x)=8x^7+12x^3+4x>0$، می‌دانیم که f بر $[0,\infty)$ صعودی است. بنابراین، f بر $[0,\infty)$ یک به یک با تابع معکوس f^{-1} می‌باشد. به آسانی معلوم می‌شود که $f(1)=7, f'(1)=24$. از اینرو، طبق قضیهٔ ۴،

$$(f^{-1})'(7)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{24}.$$

توجه کنید که قضیهٔ ۴ به ما توان محاسبهٔ مقدار مشتق f^{-1} را حتی در حالاتی که یافتن فرمول صریح برای f^{-1} ناممکن است می‌بخشد. این وضع یادآور تکنیک مشتقگیری ضمنی است، و این امری تصادفی نیست (ر.ک. مسئلهٔ ۱).

مثال ۴. به فرض آنکه

$$f(x)=2x+\sin^3 x,$$

$(f^{-1})'(0)$ را بیابید.

حل. داریم

$$f'(x) = 2 + 3\sin^2 x \cos x = 2 + \frac{3}{2}\sin x \sin 2x,$$

که در آن

$$|\sin x \sin 2x| = |\sin x|\,|\sin 2x| \le 1.$$

لذا، به ازای هر x ، $f'(x) \ge \frac{1}{2} > 0$ ، و f بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است. پس نتیجه‌می‌شود که f بر $(-\infty, \infty)$ یک به یک با تابع معکوس f^{-1} می‌باشد. به‌علاوه، $f(0) = 0, f'(0) = 2$ ؛ و درنتیجه، طبق قضیهٔ ۴،

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

این حالت دیگری است که در آن یافتن فرمول صریح برای معکوس f^{-1} ممکن نیست.

مسائل

۱. به فرض مشتقپذیر بودن f و f^{-1} ، فرمول (۱) را به کمک مشتقگیری ضمنی ثابت کنید.

۲. فرض کنید $y = f(x) = x^2 + 2x + 1$ ، که در آن $x \ge -1$. $(f^{-1})'(9)$ را با استفاده از قضیهٔ ۴ حساب کنید. سپس جواب را ابتدا با حل نسبت به x به عنوان تابعی از y امتحان نمایید.

با استفاده از قضیهٔ ۴، $(f^{-1})'(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۳. $f(x) = 4x^2 - 5x + 1, c = 10$

۴. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4, c = -16$

۵. $f(x) = \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - 1, c = 7$

۶. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, c = 5$

۷. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}, c = -3$

۸. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}, c = \dfrac{1}{2}$

۹. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, c = 4$

۱۰. $f(x) = x^{21} + 2x^{11} + 5x^7, c = -8$

۱۱. $f(x) = x + \cos x, c = \pi - 1$

۱۲. $f(x) = x^3 + x + \sin x,\ c = 0$

۱۳. $f(x) = \tan x,\ c = -\sqrt{3}$

۱۴. $f(x) = \cot^3 x,\ c = 1$

در هر حالت تحقیق کنید که f بر بازهٔ مناسبی یک به یک است.

در مسائل ۱۵ تا ۲۰ هر تابع f یک به یک با معکوس f^{-1} است. مماس بر منحنی $y = f^{-1}(x)$ در نقطهٔ دادهٔ شدهٔ P را بیابید.

۱۵. $f(x) = \dfrac{x}{x-4},\ P = (-3, 3)$

۱۶. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-5},\ P = (2, 11)$

۱۷. $f(x) = x^3 + x,\ P = (-10, -2)$

۱۸. $f(x) = x + \sin x,\ P = \left(\dfrac{\pi}{2} + 1, \dfrac{\pi}{2}\right)$

۱۹. $f(x) = \sqrt{169 - x^2}\ (0 \le x \le 13),\ P = (12, 5)$

۲۰. $f(x) = \sqrt{169 - x^2}\ (-13 \le x \le 0),\ P = (5, -12)$

۲۱. فرض کنید $f(x) = \int_1^x \sqrt{2 + \sin^{11} t}\, dt$. نشان دهید که f بر $(-\infty, \infty)$ یک به یک است. قرار دهید $a = f(\pi), b = f(3\pi/2)$، با آنکه قادر به محاسبهٔ این اعداد نیستیم. $(f^{-1})'(a)$ و $(f^{-1})'(b)$ را بیابید. همچنین، $(f^{-1})'(0)$ را پیدا نمایید.

فرض کنید $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + u^6}\, du$. $(f^{-1})'(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۲۲. $c = 0$ ۲۳. $c = f(\frac{1}{2})$ ۲۴. $c = f(\sqrt{2})$

۲۵. فرض کنید f در همان شرایط قضیهٔ ۴ صدق کرده، و نیز f در نقطهٔ x مشتق دوم متناهی داشته باشد. نشان دهید که f^{-1} در نقطهٔ $y = f(x)$ مشتق دومی مساوی

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \qquad \text{(یک)}$$

دارد

در مسائل ۲۶ تا ۳۱، هر یک از توابع یک به یک با معکوس f^{-1} می‌باشد. با استفاده از (یک)، $(f^{-1})''(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۲۶. $f(x) = x^{3/2},\ c = 8$

۲۷. $f(x) = \dfrac{3x+1}{3x-1},\ c = 2$

۲۸. $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2}, c = 1$

۲۹. $f(x) = x + \sin x, c = 0$

۳۰. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + v^2}\, dv, c = f(1)$

۳۱. $f(x) = \tan^3 x\ (-\pi/2 < x < \pi/2), c = -1$

۳۲. فرض کنید f بر بازهٔ I مشتق‌پذیر با مشتق f' بوده، و f' بر I ناصفر باشد. در این صورت، f بر I یکنوا و یک به یک با معکوس f^{-1} است. فرض کنید بازهٔ J نقش I تحت f باشد. نشان دهید هرگاه f بر I به بالا (پایین) مقعر باشد، آنگاه f^{-1} در حالت نزولی بودن f بر J به بالا (پایین) مقعر و در حالت صعودی بودن f بر J به پایین (بالا) مقعر است. نشان دهید هرگاه f در نقطهٔ درونی c از I نقطهٔ عطف داشته باشد، آنگاه f^{-1} در $f(c)$ نقطهٔ عطف دارد.

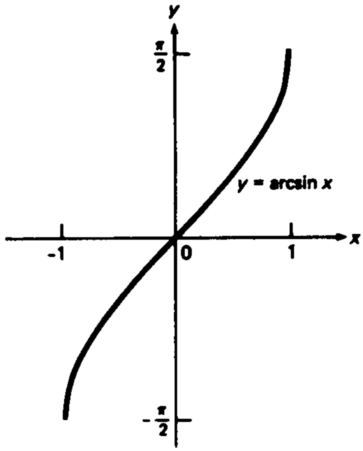
۳.۵ توابع مثلثاتی معکوس

حال به یافتن توابع معکوس مناسبی برای توابع مثلثاتی $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$، $\cot x$، $\sec x$، و $\csc x$ می‌پردازیم. هر یک از این شش تابع متناوب است؛ و درنتیجه، نمی‌تواند برقلمرو تعریف طبیعی خود یک‌به‌یک باشد. مثلاً، $\sin x$ بر $(-\infty, \infty)$ متناوب با دورهٔ تناوب اساسی 2π است، و شرط تناوب $\sin (x + 2\pi) \equiv \sin x$ خود $\sin x$ را از یک به یک بودن وا می‌دارد، زیرا این شرط می‌گوید که سینوس در نقاط متمایز x و $x + 2\pi$ مقدار یکسان می‌گیرد. برای آنکه تابع $\sin x$ یک به یک شود که بتواند تابع معکوس داشته باشد، باید قلمرو X آن را به طرز شایسته‌ای، بدون آنکه بی‌جهت خیلی کوچک شود، محدود کنیم. انتخاب متعارف X بازهٔ $[-\pi/2, \pi/2]$ است، که بر آن $\sin x$ صعودی و درنتیجه یک به یک است. (به آسانی معلوم می‌شود که $\sin x$ بر هر بازه به طول بزرگتر از π یک به یک نیست.). پس برد $\sin x$ بازهٔ $Y = [-1, 1]$ است، که همان برد $\sin x$ است وقتی بر تمام بازهٔ $(-\infty, \infty)$ تعریف شده باشد.

سینوس معکوس. حال‌که قلمرو $\sin x$ به‌بازهٔ $X = [-\pi/2, \pi/2]$ محدودشده‌است، می‌توان معکوس $\sin x$ را گرفته تابعی به‌نام **سینوس معکوس** به دست آوریم. به طور مشخص، سینوس معکوس y، که با $\arcsin y$ نموده می‌شود، عددمنحصر به فرد x دربازهٔ $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ است به طوری که $y = \sin x$. نماد دیگر $\sin^{-1} y$ است، ولی در استفاده از این‌نماد باید مواظب خلط با متقابل $\sin y$ بود که با $1/\sin y$ یا $(\sin y)^{-1}$ نموده می‌شود؛ این تذکر را

در مورد توابع مثلثاتی معکوس دیگر نیز می‌دهیم . هر دو نماد مرسوم است . "نماد قوس" کمتر مبهم است ، ولی " نماد -1 " جای کمتری را می‌گیرد ؛ و درنتیجه ، برای مهره‌های ماشینهای حساب علمی جیبی ارجح است . توجه کنید که تابع $\arcsin y$ دارای قلمرو $Y = [-1, 1]$ و برد $X = [-\pi/2, \pi/2]$ می‌باشد .

پیش از رسم تابع سینوس معکوس، $\arcsin y$ را با $\arcsin x$ عوض کرده x را متغیرمستقل می‌گیریم . نمودار $\arcsin x$ در شکل ۱۱ نموده شده است ، و منعکس بخشی از نمودار $\sin x$ ،



شکل ۱۱

یعنی بخشی که بین خطوط $x = \pm\pi/2$ است ، نسبت به خط $y = x$ می‌باشد .خواهیددید که $\arcsin x$ بر $[-1, 1]$ صعودی است که با قضیهٔ ۱ سازگار است ، و بر $[-1, 1]$ پیوسته است که با قضیهٔ ۳ سازگار می‌باشد . همچنین ، توجه کنید که طبق انتظار ما $\arcsin x$ بر $[-1, 1]$ فرد است (ر.ک. مسئلهٔ ۳ ، صفحهٔ ۴۵۸) .

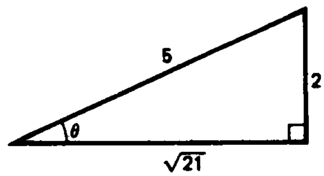
مثال ۱ . $\sin(\arcsin 1)$ و $\arcsin(\sin \pi)$ را حساب کنید .

حل . سینوس زاویه‌ای‌که سینوس آن 1 است باید 1 باشد ؛و درنتیجه ، $\sin(\arcsin 1) = 1$. این حالت خاصی‌از فرمول $f(f^{-1}(x)) = x$ است‌که برای هر تابع یک به یک f ومعکوس f^{-1} درست است . به خاطر فرمول $f^{-1}(f(x)) = x$ ممکن است اغوا شده و بنویسیم $\arcsin(\sin \pi) = \pi$ ، ولی این رابطه درست نیست‌ا در واقع ، π مقداری از تابع سینوس معکوس، که بردش $[-\pi/2, \pi/2]$ است ، نیست . از آن سو، $\sin \pi = 0$ و زاویهٔ منحصربه‌فردی

در $[-\pi/2, \pi/2]$ ، یعنی زاویهٔ 0 ، هست که سینوس آن 0 می‌باشد . پس نتیجه می‌شود که $\arcsin(\sin \pi) = 0$.

مثال ۲ . $\tan(\arcsin \frac{2}{5})$ را حساب کنید .

حل . منظور از $\arcsin \frac{2}{5}$ یعنی زاویهٔ θ بین $-\pi/2$ و $\pi/2$ که سینوس آن $\frac{2}{5}$ است . شکل ۱۲ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ حادهٔ θ را نشان می‌دهد که طول ضلع مقابل θ مساوی 2 بوده



شکل ۱۲

و طول وتر برابر 5 می‌باشد . بنابر قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع دیگر مساوی است با $\sqrt{25-4} = \sqrt{21}$. از اینرو ، $\tan \theta$ ، یعنی نسبت طول ضلع مقابل θ به ضلع مجاور θ ، مساوی است با $2/\sqrt{21}$ ؛ و لذا ، $\tan(\arcsin \frac{2}{5}) = 2/\sqrt{21}$.

برای مشتقگیری از سینوس معکوس ، قرار می‌دهیم $y = \arcsin x,\ x = \sin y$ و قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۴۶۰ ، را به کار می‌بریم . درنتیجه ، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\sin y)} = \frac{1}{\cos y},$$

مشروط براینکه $\cos y \neq 0$. توجه کنید که این فرمول فقط بر بازهٔ باز $-\pi/2 < y < \pi/2$ برقرار است که $\cos y > 0$ و

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

از تلفیق دو فرمول اخیر معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (1)$$

مشروط براینکه $-1 < x < 1$. از (۱) فوراً نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (|x| < 1). \tag{۲}$$

به‌علاوه، بااستفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای از $\arcsin (x/a)$ که $a > 0$ مشتق می‌گیریم، به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dx} \arcsin \frac{x}{a} = \frac{1/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad (a > 0, |x| < a), \tag{۲'}$$

که تعمیم (۲) می‌باشد.

مثال ۳. انتگرال $I = \int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ را حساب کنید.

حل. چون

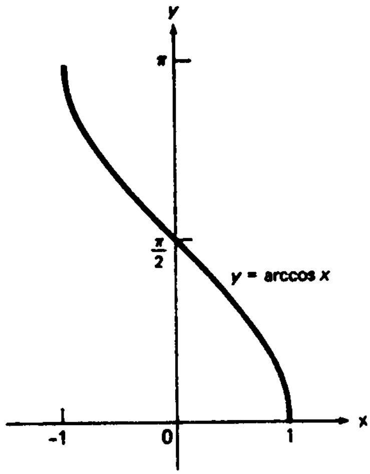
$$I = \int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{\sqrt{9(\frac{4}{9}-x^2)}} = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}},$$

از فرمول (۲') به ازای $a = \frac{2}{3}$ نتیجه می‌شود که

$$I = \frac{1}{3}\left[\arcsin \frac{3x}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/3} = \frac{1}{3}\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin 0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

به بیان دیگر، چون $\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4-(3x)^2}$ ، همین جواب را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۴۰۲، و فرمول (۲') به ازای $a = 2$ به دست آورد.

کسینوس معکوس. برای تعریف کسینوس معکوس، که با $\arccos x$ یا $\cos^{-1} x$ نموده می‌شود، به همین نحو عمل می‌کنیم. از آغاز نقشهای x و y را باهم عوض کرده، می‌نویسیم $x = \cos y$ ؛ درنتیجه، وقتی تابع معکوس را تشکیل می‌دهیم، x متغیر مستقل و y متغیر وابسته می‌باشد. سپس قلمرو $\cos y$ را به بازهٔ $[0, \pi]$ محدود می‌کنیم. تابع $\cos y$ بر این بازه نزولی و در نتیجه یک به یک است که این بازه را به‌روی بازهٔ $[-1, 1]$ می‌نگارد. تابع معکوس نظیر $y = \arccos x$ بر $[-1, 1]$ نزولی و پیوسته است، و نمودارش در شکل ۱۳ نموده شده است.



شکل ۱۳

مقایسهٔ اشکال ۱۱ و ۱۳ باهم نشان می‌دهد که نمودار $\arccos x$ را می‌توان از $\arcsin x$ با انعکاس نسبت به محور y و سپس انتقالی به اندازهٔ $\pi/2$ واحد به بالا به دست آورد. بنابر این،

$$\arccos x = \arcsin(-x) + \frac{\pi}{2},$$

یا، معادلاً،

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \tag{۳}$$

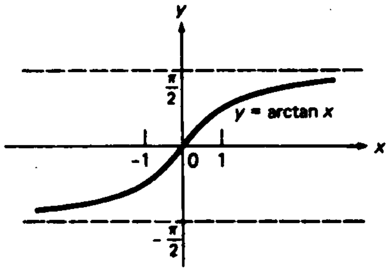
زیرا $\arcsin x$ فرد است. با مشتقگیری از (۳) معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{d}{dx}\arcsin x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{۴}$$

مشروط براینکه $-1 < x < 1$.

تانژانت معکوس. حال به *تانژانت معکوس* می‌پردازیم که با $\arctan x$ یا $\tan^{-1} x$ نموده می‌شود. می‌نویسیم $x = \tan y$، و یکی از بی‌نهایت شاخهٔ $\tan y$ را با تحدید قلمرو $\tan y$ به بازهٔ باز $(-\pi/2, \pi/2)$ انتخاب می‌کنیم. تابع $\tan y$ بر این بازه صعودی و درنتیجه‌یک به یک است، که‌این بازه را به‌رویِ‌بازهٔ $(-\infty, \infty)$ می‌نگارد. تابع معکوس‌نظیر $y = \arctan x$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ صعودی و پیوسته است، که این بازه را به روی بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$

می‌نگارد ، و نمودارش در شکل ۱۴ نموده شده است . نمودار **arctan x** منعکس شاخهٔ معینی از **tan x** نسبت به خط **y = x** است ، و تحت این انعکاس ، مجانبهای قائم **x = ±π/2** از **tan x** به مجانبهای افقی **y = ±π/2** از **arctan x** تبدیل می‌شوند . توجه کنید که **arctan x** یک تابع فرد مانند **tan x** است .



شکل ۱۴

برای مشتقگیری از تانژانت معکوس ، قرار می‌دهیم $y = \arctan x$ ، $x = \tan y$ و با اعمال قضیهٔ ۴ به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\tan y} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

اما

$$\sec^2 y = \tan^2 y + 1 = x^2 + 1$$

(ر.ک. فرمول (۶) ، صفحهٔ ۸۸) ؛ و لذا ،

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1}. \tag{۵}$$

از رابطهٔ (۵) فوراً نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C. \tag{۶}$$

به‌علاوه ، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، از $\arctan (x/a)$ مشتق گرفته به‌دست‌می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\arctan\frac{x}{a} = \frac{1/a}{(x/a)^2+1} = \frac{a}{x^2+a^2}.$$

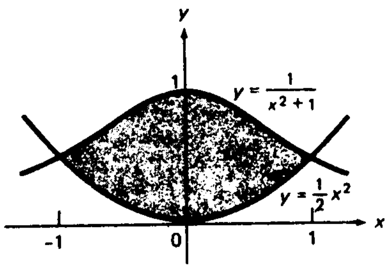
پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0), \tag{۶'}$$

که رابطهٔ (۶) را تعمیم می‌دهد. در واقع، فرض $a > 0$ هیچ کلیتی را خدشه‌دار نمی‌کند.

مثال ۴. مساحت بین منحنیهای $y = 1/(x^2 + 1)$ و $y = \frac{1}{2}x^2$ را بیابید.

حل. مساحت A ی ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۱۵ را جستجو می‌کنیم. برای یافتن مختصات x نقاطی که در آنها دو منحنی متقاطعند، معادلهٔ $1/(x^2 + 1) = \frac{1}{2}x^2$ را حل می‌کنیم، که



شکل ۱۵

معادل است با

$$x^4 + x^2 - 2 = (x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0. \qquad (۷)$$

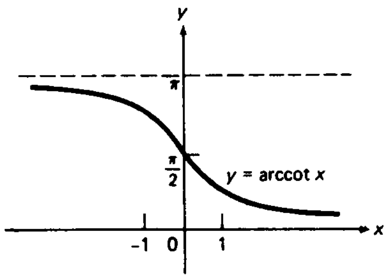
چون عامل $x^2 + 2$ هرگز صفر نیست، معادلهٔ (۷) فقط دو ریشهٔ $x = 1$ و $x = -1$ را دارد. بر بازهٔ $[-1, 1]$، منحنی "زنگدیس" $y = 1/(x^2 + 1)$ منحنی بالایی و سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ منحنی پایینی می‌باشد. به کمک (۶) نتیجه می‌شود که

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}x^2\right) dx$$
$$= 2\left[\arctan x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = 2\left(\arctan 1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

زوج بودن انتگرالده در مرحلهٔ دوم به کار رفته است (مسئلهٔ ۱، صفحهٔ ۴۱۵ را به یاد آورید).

کتانژانت معکوس. برای تعریف *کتانژانت معکوس* که با $\text{arccot}\ x$ یا $\cot^{-1} x$ نموده می‌شود می‌نویسیم $x = \cot y$ و قلمرو $\cot y$ را به بازهٔ $(0, \pi)$ محدود می‌کنیم. تابع $\cot y$ بر این بازه نزولی، و درنتیجه یک به یک، است، که این بازه را به روی بازهٔ $(-\infty, \infty)$ می‌نگارد. تابع معکوس نظیر $y = \text{arccot}\ x$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ نزولی و پیوسته است، که این بازه را به

روی بازهٔ $(0, \pi)$ می‌نگارد، و دارای نمودار شکل ۱۶ است. مقایسهٔ اشکال ۱۴ و ۱۶ نشان می‌دهد که نمودار $\operatorname{arccot} x$ را می‌توان از نمودار $\arctan x$ با انعکاس نسبت به محور x و



شکل ۱۶

سپس انتقال به اندازهٔ $\pi/2$ واحد به بالا به دست آورد. بنابراین،

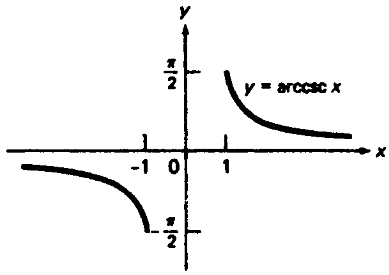
$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x. \tag{۸}$$

با مشتقگیری از (۸) معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\frac{d}{dx}\arctan x = -\frac{1}{x^2+1}. \tag{۹}$$

سکانت و کسکانت معکوس. دو تابع مثلثاتی معکوس باقیمانده **سکانت معکوس** است که با $\operatorname{arcsec} x$ یا $\sec^{-1} x$ نموده می‌شود، و **کسکانت معکوس** است که با $\operatorname{arccsc} x$ یا $\csc^{-1} x$ نموده می‌شود. مطلب را با $\operatorname{arccsc} x$ شروع می‌کنیم، زیرا این تابع عملاً از دو تابع دیگر به خاطر فرد بودن ساده‌تر است. می‌نویسیم $x = \csc y$ و قلمرو $\csc y$ را جفت‌بازهٔ $[-\pi/2, 0)$ و $(0, \pi/2]$ اختیار می‌کنیم؛ نقطهٔ 0 باید مستثنی شود، زیرا $\csc 0$ تعریف نشده است. تابع $\csc y$ بر هر یک از این دو بازه نزولی، و درنتیجه یک به یک، است. به علاوه، بر هر یک از بازه‌های $[-\pi/2, 0)$ و $(0, \pi/2]$ پیوسته است، که آنها را به‌ترتیب به‌روی بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$ می‌نگارد. تمام این اطلاعات را می‌توان از شکل ۲۵، صفحهٔ ۱۰۵، به‌دست آورد. تابع معکوس نظیر $y = \operatorname{arccsc} x$ بر هر یک از بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$ نزولی و پیوسته است، که این بازه‌ها را به ترتیب به روی $[-\pi/2, 0)$ و $(0, \pi/2]$ می‌نگارد، ولی بر بازهٔ $(-1, 1)$ تعریف نشده است. نمودار $\operatorname{arccsc} x$ در شکل ۱۷ نموده شده است، که از آن معلوم می‌شود که $\operatorname{arccsc} x$ مانند $\csc x$ یک تابع فرد است.

برای مشتقگیری از کسکانت معکوس، به شکل معمول عمل کرده، می‌نویسیم



شکل ۱۷

$x = \csc y,\ y = \text{arccsc}\ x$ و قضیهٔ ۴ را اعمال می‌کنیم . درنتیجه ، به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\text{arccsc}\ x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\csc y} = \frac{1}{-\csc y \cot y}.$$

اما

$$\cot^2 y = \csc^2 y - 1 = x^2 - 1$$

(ر.ک. فرمول (۶) ، صفحهٔ ۸۸)؛ و درنتیجه ،

$$\cot y = \pm\sqrt{x^2 - 1}. \qquad (۱۰)$$

در انتخاب علامت‌در (۱۰) باید خیلی محتاط بود . درواقع ، چون $\cot y$ وقتی $0 < y < \pi/2$ مثبت و وقتی $-\pi/2 < y < 0$ منفی‌است ، باید وقتی $0 < y < \pi/2$ ، یعنی $x = \csc y > 1$ ، علامت به‌علاوه ، و وقتی $-\pi/2 < y < 0$ ، یعنی $x = \csc y < -1$ ، علامت منها را برگزینیم . بنابراین ،

$$\frac{d}{dx}\text{arccsc}\ x = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{اگر } x > 1 \text{ ،} \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{اگر } x < -1 \text{ ،} \end{cases}$$

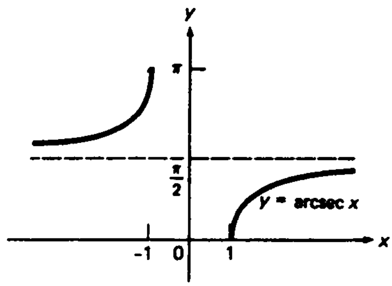
یا ، به طور ساده ،

$$\frac{d}{dx}\text{arccsc}\ x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad (۱۱)$$

مشروط براینکه $|x| > 1$

بالاخره ، برای تعریف $\text{arcsec}\ x$ می‌نویسیم $x = \sec y$ و قلمرو $\sec y$ را جفت بازهٔ $[0, \pi/2)$ و $(\pi/2, \pi]$ اختیار می‌کنیم؛ نقطهٔ $\pi/2$ باید مستثنی شود ، زیرا $\sec(\pi/2)$ تعریف

نشده است . تابع $\sec y$ بر هر یک از این دو بازه صعودی ، و درنتیجه یک به یک ،است . به علاوه ، بر هر یک از بازه‌های $[0, \pi/2)$ و $(\pi/2, \pi]$ پیوسته است ، که این بازه‌ها را به‌ترتیب روی بازه‌های $[1, \infty)$ و $(-\infty, -1]$ می‌نگارد . تمام این اطلاعات را نیز می‌توان از شکل ۲۵ ، صفحهٔ ۱۰۵ ،به دست آورد . تابع معکوس نظیر $\operatorname{arcsec} x$ بر هر یک از بازه‌های $[1, \infty)$ و $(-\infty, -1]$ صعودی و پیوسته است ، که آنها را به ترتیب روی بازه‌های $[0, \pi/2)$ و $(\pi/2, \pi]$ می‌نگارد ، ولی بر بازهٔ $(-1, 1)$ تعریف نشده است . نمودار $\operatorname{arcsec} x$ در شکل ۱۸ نموده شده است . مقایسهٔ شکلهای ۱۷ و ۱۸ باهم نشان می‌دهد که نمودار $\operatorname{arcsec} x$ را می‌توان از



شکل ۱۸

نمودار $\operatorname{arccsc} x$ به وسیلهٔ انعکاس نسبت به محور x و پس از آن انتقال بـه اندازهٔ $\pi/2$ واحد به بالا به دست آورد . بنابراین ،

$$\operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccsc} x. \qquad (۱۲)$$

با مشتقگیری از (۱۲) معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = -\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad (۱۳)$$

مشروط براینکه $|x| > 1$.

مثال ۵ . نشان دهید که

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}, \qquad (۱۴)$$

$$\operatorname{arccsc} x = \arcsin \frac{1}{x}, \qquad (۱۴')$$

مشروط براینکه $|x| \geq 1$.

حل . هرگاه $y = \text{arcsec}\, x$ ، آنگاه $\sec y = x$ یا معادلاً $\cos y = 1/x$. پس نتیجه می‌شود که $y = \arccos (1/x)$ ، زیرا y عددی در بازهٔ $0 \le y \le \pi$ می‌باشد . از مقایسهٔ دو عبارت مربوط به y رابطهٔ (۱۴) به دست می‌آید . با استدلالی مشابه ، که به عنوان تمرین گذارده می‌شود ، فرمول (۱۴') ثابت خواهد شد .

با جمع‌آوری فرمولهای (۱) ، (۴) ، (۵) ، (۹) ، (۱۱) ، و (۱۳) در یک‌جا، داریم

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1}, \qquad \frac{d}{dx}\text{arccot}\, x = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arcsec}\, x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad \frac{d}{dx}\text{arccsc}\, x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

مثال ۶ . با استفاده از این فرمولها و قاعدهٔ زنجیره‌ای ، از

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}$$

مشتق گرفته به دست می‌آوریم

$$f'(x) = \frac{1}{(1/x)^2+1}\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{-1/x^2}{(1/x)^2+1} = -\frac{1}{x^2+1},$$

که در آن باید فرض کنیم $x \ne 0$ ، زیـرا $f(0)$ ، و درنتیجه $f'(0)$ ، تعریف نشده است . بنابر این ، $f(x)$ بر هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ دارای همان مشتق $-\arctan x$ اسـت . پس نتیجه می‌شود که

$$\arctan \frac{1}{x} = -\arctan x + C_1 \qquad (0 < x < \infty), \tag{۱۵}$$

$$\arctan \frac{1}{x} = -\arctan x + C_2 \qquad (-\infty < x < 0), \tag{۱۵'}$$

که در آنها C_1 و C_2 دو ثابت‌اند که لازم نیست یکی باشند . در واقع ، C_1 و C_2 نامساوی‌اند زیرا ، با گذاردن $x = 1$ در (۱۵) ، داریم

$$\arctan 1 = -\arctan 1 + C_1, \qquad \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + C_1,$$

درنتیجه ، $C_1 = \pi/2$ ، و نیز با گذاردن $x = -1$ در (۱۵') نتیجه می‌شود که

$$\arctan(-1) = -\arctan(-1) + C_2, \qquad -\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + C_2,$$

درنتیجه ، $C_2 = -\pi/2$. با این مقادیر C_1 و C_2 می‌توان (۱۵) و (۱۵') را به فرمول واحدی تلفیق کرد :

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ ، اگر } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ ، اگر } x < 0 \end{cases} \qquad (۱۶)$$

مسائل

کمیات زیر را بدون استفاده از جدول یا ماشین حساب محاسبه نمایید .

۱ . $\arcsin \frac{1}{2}$

۲ . $\operatorname{arccot}(-1)$

۳ . $\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$

۴ . $\operatorname{arccsc}(2/\sqrt{3})$

۵ . $\arctan(-1/\sqrt{3})$

۶ . $\arccos 1$

۷ . $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$

۸ . $\operatorname{arcsec} 2$

۹ . $\operatorname{arccsc}(-\sqrt{2})$

۱۰ . $\arctan\sqrt{3}$

۱۱ . $\arccos(-\frac{1}{2})$

۱۲ . $\arcsin(1/\sqrt{2})$

۱۳ . $\arcsin(\sin(3\pi/2))$

۱۴ . $\sin(\arccos(-1/\sqrt{2}))$

۱۵ . $\cos(\arcsin \frac{1}{3})$

۱۶ . $\tan(\arccos \frac{1}{4})$

۱۷ . $\operatorname{arcsec}(\sec(5\pi/4))$

۱۸ . $\operatorname{arccot}(\tan(4\pi/3))$

۱۹ . معکوس تابع $\sin x$ در صورت محدود شدن قلمروش به بازهٔ $[\pi/2, 3\pi/2]$ چیست ؟

عبارات زیر را بدون استفاده از توابع مثلثاتی یا مثلثاتی معکوس بیان کنید .

۲۰ . $\sin(\operatorname{arcsec} x)$

۲۱ . $\cos(\arctan x)$

۲۲ . $\tan(\arcsin x)$

۲۳ . $\sin(2\arccos x)$

۲۴ . $\cos(2\arccos x)$

۲۵ . $\cos(2\arcsin x)$

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۲۶ . $(\arccos x)^2$

۲۷ . $\operatorname{arcsec}(2x+1)$

۲۸ . $\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$

۲۹ . $\operatorname{arccot}\dfrac{2t}{1-t^2}$

۳۰ . $\arcsin t^2$

۳۱ . $\operatorname{arccsc}\dfrac{1}{t}$

۳۲. $\arcsin \sqrt{1-u^2}$

۳۳. $\arccos \dfrac{1-u}{\sqrt{2}}$

۳۴. $\operatorname{arcsec} \sqrt{u^2-1}$

۳۵. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arccot} \dfrac{\sqrt{3}}{v}$

۳۶. $\operatorname{arccsc} \sqrt{v}$

۳۷. $\arctan \dfrac{3 \sin v}{4 + 5 \cos v}$

۳۸. با شروع از فرمولهای (۱۴) و ('۱۴)، فرمولهایی برای مشتقات arcsec x و arccsc x به دست آورید.

۳۹. نشان دهید که

$$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{اگر } x > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

۴۰. نشان دهید که

$$\arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{اگر } x > -1 \\ -\dfrac{3\pi}{4} & \text{اگر } x < -1 \end{cases}$$

۴۱. فرمول انتگرالگیری

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} |x| + C \qquad (|x| > 1) \qquad \text{(یک)}$$

و، به‌طورکلی،

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|x|}{a} + C \qquad (|x| > a > 0) \qquad \text{(یکَ)}$$

را تحقیق کنید.

انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید.

۴۲. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

۴۳. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+121}$

۴۴. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-49}}$

۴۵. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{16-4t^2}}$

۴۶. $\displaystyle\int \frac{du}{64u^2+36}$

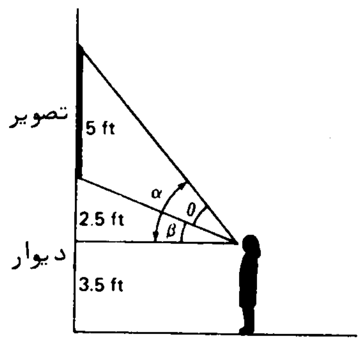
۴۷. $\displaystyle\int \frac{dr}{r\sqrt{121r^2-144}}$

۴۸. $\displaystyle\int_{1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۴۹. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

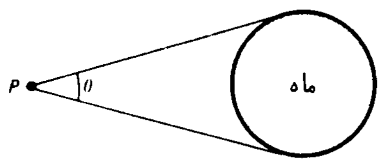
۵۰. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

۵۱. یک تصویر به ارتفاع 5 ft از دیواری آویزان است به طوری که پایین آن از کف اطاق 6 ft فاصله دارد. یک بچه که سطح دید وی 3.5 ft بالای کف اطاق است می‌خواهد بهترین دید را از تصویر داشته باشد. با این فرض که بهترین دید وقتی به دست می‌آید که زاویهٔ θ ی تصویر در چشمان کودک (ر.ک. شکل ۱۹) ماکزیمم است، کودک در چه فاصله‌ای از دیوار باید بایستد؟



شکل ۱۹

۵۲. یک سفینهٔ فضایی در فاصلهٔ 20,000 km تا سطح ماه بوده و با سرعت 2 km/sec به آن نزدیک می‌شود. زاویهٔ ماه در موضع P سفینه با چه‌سرعتی افزایش می‌یابد؟ (این زاویه زاویهٔ θ در شکل ۲۰ است.) شعاع ماه 1738 km است.



شکل ۲۰

مساحت A ناحیهٔ R به

۵۳. محور x، خط $x = 1$، و منحنی $y = \arcsin x$

۵۴. محور y، خط $y = \pi/2$، و منحنی $y = \arcsin x$

۵۵. محورهای مختصات و منحنی $y = \arccos x$

محدود است. در هر حالت ناحیهٔ R را رسم نمایید. **راهنمایی.** نسبت به y انتگرال بگیرید.

۵۶. از شش تابع مثلثاتی معکوس چهارتا نقاط عطف دارند. اینها کدامند و نقاط عطف آنها کجا قرار دارند؟

۵۷. فرمولهای زیر را تحقیق کنید :

(دو) $$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),$$

(سه) $$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy},$$

که در (دو) فرض است که $|\arcsin x + \arcsin y| \le \pi/2$ و در (سه) فرض است که $|\arctan x + \arctan y| < \pi/2$.

نشان دهید که

۵۸. $$\arcsin\frac{4}{5} - \arcsin\frac{3}{5} = \arcsin\frac{7}{25}$$

۵۹. $$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

۶۰. $$\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4}$$

۶۱. $$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{2}{9} = \frac{\pi}{4}$$

۶۲. فرمول

$$\pi = 16 \arctan\frac{1}{5} - 4 \arctan\frac{1}{239}.$$

را تحقیق کنید.

در سال ۱۷۰۶ جان ماشن با استفاده از این فرمول اولین صدرقم اعشار π رامحاسبه کرد. امروزه بیش از هشت میلیون رقم اعشاری π معلوم شده است.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

توابع یک به یک

معکوس تابع یک به یک

نمودار تابع یک به یک و خاصیت خط افقی

رابطهٔ بین نمودار f^{-1} و نمودار f

خواص توابع پیوستهٔ یک به یک

مشتق تابع معکوس

سینوس و کسینوس معکوس

تانژانت و کتانژانت معکوس
سکانت و کسکانت معکوس
مشتقات توابع مثلثاتی معکوس

مسائل تکمیلی

۱. نشان دهید هرگاه f بر $[-a, a]$ زوج و بر $[0, a]$ یک به یک باشد، آنگاه f بر $[-a, 0]$ یک به یک است. آیا f بر $[-a, a]$ یک به یک است؟

۲. نشان دهید هرگاه f بر $[-a, a]$ فرد و بر $[0, a]$ یک‌به‌یک‌باشد، آنگاه f بر $[-a, 0]$ یک به یک است. آیا f بر $[-a, a]$ یک به یک است؟

آیا تابع داده شده بر بازهٔ مشخص شده یک به یک است؟

۳. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ بر $(-\infty, 0]$

۴. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ بر $(-1, 1)$

۵. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ بر $(1, \infty)$

۶. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ بر $[0, \infty)$

معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

۷. $f(s) = s^2 + s + 1 \quad (-\frac{1}{2} \le s < \infty)$

۸. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 1} \quad (0 \le t < \infty)$

۹. $h(u) = (u^3 + 1)^{1/5}$

۱۰. $k(v) = (10 + v^{1/3})^5$

۱۱. تابع غیرثابتی چون f مثال بزنید که بر هر بازه، ولو خیلی کوچک، یک به یک نباشد.

۱۲. فرض‌کنید n عدد صحیح مثبتی باشد. نشان دهید که $f(x) = x^n$ بر $(-\infty, 0]$ یک به یک است. معکوس f بر $(-\infty, 0]$ چیست؟

نشان دهید که هر یک از توابع زیر معکوس خودش است.

۱۳. $f(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \quad (0 \le x \le a)$

۱۴. $f(x) = \dfrac{9x + 11}{13x - 9}$

۱۵. $f(x)=\sqrt[3]{27-x^3}$

۱۶. $f(x)=\sqrt[4]{16-x^4}\quad (0\le x\le 2)$

$(f^{-1})'(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۱۷. $f(x)=x^7+x^3+2x,\ c=4$

۱۸. $f(x)=\dfrac{x-4}{3-x},\ c=-2$

۱۹. $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}\ (x\ge 0),\ c=1$

۲۰. $f(x)=\tan^3 x,\ c=3\sqrt{3}$

در هر حالت، تحقیق کنید که f بر بازهٔ مناسبی یک به یک است.

$(f^{-1})''(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۲۱. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-6},\ c=0$

۲۲. $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1},\ c=\frac{1}{2}$

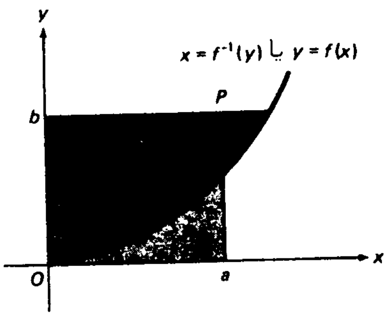
۲۳. $f(x)=2x+\cos x,\ c=1$

۲۴. $f(x)=\cot^5 x,\ c=-1$

۲۵. فرض کنید f بر $[0,\infty)$ پیوسته و صعودی بوده و $f(0)=0$. در این صورت، f یک به یک با معکوس f^{-1} می‌باشد. با استفاده از شکل ۲۱، *نامساوی یانگ*[1] را ثابت‌کنید:

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(x)\,dx\ge ab,$$

که در آن a و b اعداد مثبت دلخواهی هستند. چه وقت نامساوی به تساوی بدل می‌شود؟



شکل ۲۱

1. *Young*

۲۶ . فرض کنید a ، b ، c ، و d ثابتهایی باشند به‌طوری که $c^2 + d^2 \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$. نشان دهید که تبدیل خطی کسری

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(که حالات بسیاری از آن قبلاً مطرح شده‌اند) بر قلمرو خود یک به یک است. این قلمرو چیست؟ اگر $ad - bc = 0$ چه رخ می‌دهد؟ چه‌وقت تابع f معکوس‌خودش است؟ $(f^{-1})'(0)$ و $(f^{-1})''(0)$ را حساب کنید .

کمیات زیر را بدون استفاده از جدول یا ماشین حساب محاسبه نمایید .

۲۷ . $\text{arcsec}\,(-2/\sqrt{3})$

۲۸ . $\arcsin\,(-\sqrt{3}/2)$

۲۹ . $\text{arccot}\,1$

۳۰ . $\arccos\,(\sqrt{3}/2)$

۳۱ . $\text{arccsc}\,(-2)$

۳۲ . $\arctan\,(-1)$

۳۳ . $\sec\,(\arctan 2)$

۳۴ . $\cot\,(\text{arcsec}\,(-3))$

۳۵ . $\arccos\,(\tan \pi)$

۳۶ . $\text{arccsc}\,(\sec \pi)$

۳۷ . $\csc\,(\text{arccot}\,\frac{2}{3})$

۳۸ . $\arctan\,(-\tan\,(5\pi/4))$

۳۹ . $\sin\,(\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin \frac{1}{3})$

۴۰ . $\cos\,(\arccos \frac{2}{3} + \arcsin \frac{3}{4})$

۴۱ . $\tan\,(\arctan 5 - \arctan 4)$

۴۲ . $\cot\,(\arctan \sqrt{3} + \text{arccot}\,1)$

۴۳ . $\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0)$

۴۴ . $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x$

۴۵ . $\arctan\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)$

۴۶ . $\text{arccot}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۴۷ . $\int_{-3/7}^{0} \frac{dx}{\sqrt{36 - 49x^2}}$

۴۸ . $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2 + 2}$

۴۹ . $\int_{5\sqrt{2}/3}^{10/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 25}}$

۵۰ . تابع $f(x) = \arcsin\,(\sin x)$ را رسم کرده ، و نشان دهید متناوب با دورهٔ تناوب اساسی 2π است .

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال ، حدود زیر را حساب کنید .

۵۱ . $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

۵۲ . $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}$

۵۳. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - x}{x^3}$

۵۴. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x - \arcsin x}$

۵۵. منحنیهای $y = \arcsin x$ و $y = \arccos x$ مستطیل محدود به خطوط $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، و $y = \pi/2$ را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. منحنیها و مستطیل را رسم کرده، و مساحت A ی هر ناحیه را رویش بنویسید.

۵۶. نشان دهید که به ازای هر دو عدد دلخواه a و b ، $|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|$.

۵۷. معکوس تابع

$$f(x) = 4 \arcsin \sqrt{1 - x^2} \qquad (0 \le x \le 1)$$

را بیابید.

لگاریتمها و نماییها

اهمیت توابع لگاریتمی و نمایی که در این فصل مطرح می‌شوند آنچنان است که به سختی می‌توان در آن مبالغه کرد. این توابع در ریاضیات محض و کار بسته ابزار لازمی بوده، و گهگاه در علوم فیزیک، زیست‌شناسی، و اجتماعی ظاهر می‌شوند. این توابع کلیدی را با تعریف **لگاریتم** (طبیعی) به‌صورت انتگرالی با حد انتگرالگیری بالایی متغیر آغاز می‌کنیم. پس از استنتاج خواص لگاریتم از این تعریف و بخصوص اثبات یک به یک بودن این تابع، **نمایی** را تابع معکوس لگاریتم تعریف می‌کنیم. نقطهٔ اوج مطالعهٔ ما در این توابع کلیدی در بخشهای ۶.۶ و ۷.۶ و زمانی است که نماییها و لگاریتمها برای حل مسائل عملی مختلفی در رابطه با رشد و تحلیل به کار گرفته می‌شوند. در دو بخش آخر چند تابع مهم را بررسی می‌کنیم که با نمایی و لگاریتم رابطهٔ نزدیک دارند و اینها عبارتند از **توابع هذلولوی** و هذلولوی معکوس.

۱.۶ لگاریتم طبیعی

فرض کنید از تمام توانهای صحیح نامنفی

$$x^0 = 1, x, x^2, x^3, \dots \qquad (۱)$$

و تمام توانهای صحیح منفی

$$x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \dots \qquad (۲)$$

متغیر مستقل x مشتق گرفته باشیم. در این صورت، معلوم می‌شود که مشتقات توانهای (۱) عبارتند از

$$0, 1, 2x, 3x^2, \dots, \qquad (۱')$$

ولی مشتقات توانهای (۲) عبارتند از

$$-x^{-2}, -2x^{-3}, -3x^{-4}, \dots \qquad (۲')$$

با بررسی مشتقات (۱') و (۲') به نکتهٔ عجیبی دست می‌یابیم: **هر توان صحیح ظاهر می‌شود الا x^{-1}، یعنی متقابل x**. اما مسلماً " تابعی وجود دارد که مشتقش بر یک بازهٔ غیرشامل $x = 0$ مساوی x^{-1} است. همانطور که اینک نشان می‌دهیم، این تابع وجود دارد، و خواهیم دید که این تابع رابطهٔ نزدیکی با لگاریتم معمولی در ریاضیات دبیرستانی دارد!

تعریف لگاریتم به صورت انتگرال. حال، باتوجه به این نکات، تابع جدید $\ln x$، به نام **لگاریتم طبیعی** یا فقط **لگاریتم**، را معرفی و به ازای هر x مثبت با فرمول

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

تعریف می‌کنیم، که می‌توان آن را به صورت فشرده‌تر

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (۳)$$

نوشت. این یک انتگرال معین است با حد بالایی انتگرالگیری متغیر. از تعریف ۳ و قضیهٔ ۵، صفحهٔ ۴۰۵، فوراً " نتیجه می‌شود که $\ln x$ یک پاد مشتق تابع $1/x = x^{-1}$ بر بازهٔ $(0, \infty)$ است، چیزی که در مثال ۱۰، صفحهٔ ۲۵۵، پیش‌بینی شد. لذا، فرمول اساسی

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad (x > 0) \qquad (۴)$$

را داریم که به ازای هر x مثبت معتبر است. چون انتگرال معرف $\ln x$ به‌ازای $x = 1$ به

$$\int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

تحویل می‌شود، می‌بینیم که $\ln x$ پادمشتق $1/x$ است که با شرط

$$\ln 1 = 0 \qquad (۵)$$

معین می‌شود. البته، لگاریتم بر $(0, \infty)$ پیوسته است، زیرا بر $(0, \infty)$ مشتقپذیر می‌باشد. همچنین، بنابر آزمون یکنوایی (قضیهٔ ۷، صفحهٔ ۲۶۹)، $\ln x$ بر $(0, \infty)$ صعودی است، زیرا

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} > 0 \qquad (0 < x < \infty).$$

پس نتیجه می‌شود که $\ln x$ بر $(0, \infty)$ یک به یک می‌باشد.

مثال ۱. از $x \ln x$ مشتق بگیرید.

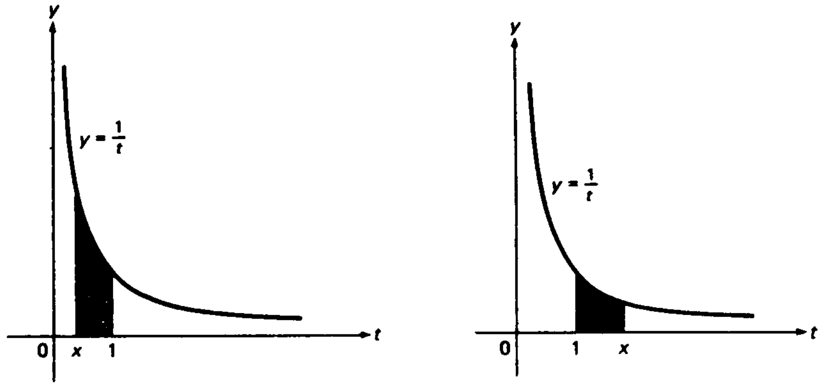
حل. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب و فرمول (۴)،

$$\frac{d}{dx}(x\ln x) = \frac{dx}{dx}\ln x + x\frac{d\ln x}{dx} = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1.$$

برای تعبیر هندسی لگاریتم، حالات $x > 1$ و $1 > x > 0$ را جداگانه درنظرمی‌گیریم. هرگاه $x > 1$، آنگاه $\ln x$ مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱ (آ) است؛ یعنی، مساحت‌تحت منحنی $y = 1/t$ از $t = 1$ تا $t = x$ است. از آن‌سو، هرگاه $0 < x < 1$، آنگاه چون

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t},$$

$\ln x$ قرینهٔ مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱ (ب) است؛ یعنی، قرینهٔ مساحت تحت منحنی



(ب). (آ)

شکل ۱

$y = 1/t$ از $t = x$ تا $t = 1$. لذا، $\ln x > 0$ اگر $x > 1$، حال‌آنکه $\ln x < 0$ اگر $0 < x < 1$.
تابع $\ln x$ به ازای $0 \leq x$ تعریف نشده است، زیرا انتگرالده $1/t$ در (۱) بر هر بازهٔ شامل نقطهٔ $t = 0$ بی‌کران است (ر.ک. مسئلهٔ ۳۳، صفحهٔ ۳۸۱).

مثال ۲. تابع $\ln(x^2 + x + 1)$ به ازای هر x تعریف شده است، زیرا به ازای هر x،

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

اما تابع $\ln(2x^2 - x - 1)$ فقط به ازای $x > 1$ یا $x < -\frac{1}{2}$ تعریف شده است، زیرا به‌ازای

$-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ،

$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) \leq 0$$

برای مشتقگیری از این توابع ، فرمول (۴) و قاعدهٔ زنجیره‌ای را به کار می‌بریم :

$$\frac{d}{dx} \ln (x^2 + x + 1) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \frac{d}{dx} (x^2 + x + 1) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

$$\frac{d}{dx} \ln (2x^2 - x - 1) = \frac{1}{2x^2 - x - 1} \frac{d}{dx} (2x^2 - x - 1) = \frac{4x - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

فرمول (۴) برای مشتق لگاریتم را می‌توان تعمیم داده ، نتیجهٔ کلیتر زیررا به‌دست آورد :

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0), \tag{۴'}$$

که به ازای هر x ناصفر معتبر است . در واقع ، اگر x مثبت باشد ، $x = |x|$ و (۴') به (۴) تحویل می‌شود ، حال آنکه اگر x منفی باشد ، $|x| = -x$ ؛ و لذا ،

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{d}{dx} \ln (-x) = \frac{1}{-x} \frac{d}{dx} (-x) = -\frac{1}{x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

از (۴') فوراً نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C. \tag{۶}$$

لازم است این فرمول انتگرالگیری مهم به خاطر سپرده شود .

لگاریتم حاصلضرب . حال یک خاصیت اساسی لگاریتم را ثابت می‌کنیم .

قضیهٔ ۱ (لگاریتم حاصلضرب) . *هرگاه a و b مثبت باشند ، آنگاه*

$$\ln ab = \ln a + \ln b. \tag{۷}$$

برهان . با مشتقگیری از تابع $\ln ax$ معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{ax} \frac{d}{dx} ax = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

لذا ، هر دو تابع $\ln ax$ و $\ln x$ دارای مشتق $1/x$ می‌باشند . به عبارت دیگر ، $\ln ax$ و $\ln x$

هر دو پادمشتق $1/x$ بر بازهٔ $(0, \infty)$ می‌باشند . پس نتیجه می‌شود که

$$\ln ax = \ln x + C,$$

که در آن C ثابت می‌باشد . برای تعیین C قرار می‌دهیم $x = 1$ ، به کمک (۵) خواهیم داشت

$$\ln a = \ln 1 + C = C,$$

درنتیجه ، $C = \ln a$. بنابراین ،

$$\ln ax = \ln a + \ln x,$$

و با قرار دادن $x = b$ در این فرمول ، فرمول (۷) به دست خواهد آمد .

بنابر فرمول (۷) ، لگاریتم حاصل‌ضرب دو عامل مجموع لگاریتمهای تک تک عوامل است . به طور معادل ، با خواندن (۷) از راست به چپ ، ملاحظه می‌کنیم که مجموع دو لگاریتم خود یک لگاریتم است که شناسه‌اش حاصل‌ضرب شناسه‌های لگاریتمهای داده شده است . لگاریتم معمولی که در دبیرستان می‌خوانند واجد همین خاصیت است؛ و در واقع ، همانطور که در صفحهٔ ۵۱۴ خواهیم دید ، با لگاریتم طبیعی فقط در یک عامل‌ثابت تفاوت دارد .

فرمول (۷) فوراً به دو فرمول مهم دیگر منجر می‌شود . چون

$$\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln \left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0,$$

داریم

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a,$$

و در این صورت ، چون

$$\ln \frac{a}{b} = \ln \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b},$$

نیز خواهیم داشت

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b. \qquad (۸)$$

قضیهٔ زیر خاصیت اساسی دیگر لگاریتم را به ما می‌دهد .

قضیهٔ ۲ (لگاریتم توان گویا) . *هرگاه $x > 0$ ، آنگاه به ازای هر عدد گویای r ،*

$$\ln x^r = r \ln x \tag{۹}$$

برهان. روش اثبات مشابه قضیهٔ ۱ است. با مشتقگیری از تابع $\ln x^r$ ، که $x > 0$ و r گویا است، معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\ln x^r = \frac{1}{x^r}\frac{d}{dx}x^r = \frac{1}{x^r}rx^{r-1} = \frac{r}{x},$$

که همان مشتق تابع $r \ln x$ است. بنابراین، $\ln x^r$ و $r \ln x$ هر دو پادمشتقهای r/x بربازه $(0, \infty)$ می‌باشند. از این نتیجه می‌شود که

$$\ln x^r = r \ln x + C, \tag{۹'}$$

که در آن C ثابت می‌باشد. با فرض $x = 1$ به دست می‌آوریم $\ln 1 = r \ln 1 + C$؛ در نتیجه، $C = 0$ و (۹') به (۹) تحویل خواهد شد.

در اثبات قضیهٔ ۲ از فرمول مشتقگیری $D_x x^r = rx^{r-1}$ استفاده شد، که در صفحات ۲۲۵ و ۲۳۴ به ازای r گویا اثبات شده است. در بخش ۵.۶ نشان‌داده‌ایم‌که این فرمول، و درنتیجهٔ قضیهٔ ۲، برای هر r حقیقی (نه لزوماً" گویا) معتبر است.

مثال ۳. $\ln 72$ ، $\ln 6^{1/5}$ ، و $\ln \sqrt{\frac{2}{27}}$ را برحسب $\ln 2$ و $\ln 3$ بیان کنید.

حل. با استفادهٔ آزاد از فرمولهای (۷) تا (۹)، داریم

$$\ln 72 = \ln (2^3 \cdot 3^2) = \ln 2^3 + \ln 3^2 = 3 \ln 2 + 2 \ln 3,$$

$$\ln 6^{1/5} = \frac{1}{5}\ln 6 = \frac{1}{5}\ln (2 \cdot 3) = \frac{1}{5}(\ln 2 + \ln 3),$$

$$\ln \sqrt{\frac{2}{27}} = \ln\left(\frac{2}{3^3}\right)^{1/2} = \ln \frac{2^{1/2}}{3^{3/2}} = \ln 2^{1/2} - \ln 3^{3/2} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3.$$

حال رفتار $\ln x$ وقتی $x \to \infty$ را بررسی می‌کنیم. به ازای هر عدد مثبت C ، مهم نیست چقدر بزرگ، فرض می‌کنیم n عدد صحیحی بزرگتر از $C/\ln 2$ باشد. برای بزرگتر کردن $\ln x$ از C کافی است $x > 2^n$ را اختیار کنیم. در واقع، چون $\ln x$ تابعی صعودی است، $x > 2^n$ ایجاب می‌کند که

$$\ln x > \ln 2^n = n \ln 2 > \frac{C}{\ln 2}(\ln 2) = C.$$

که در مرحلهٔ دوم از فرمول (۹) به ازای $x = 2$ و $r = n$ استفاده شده است (توجه‌کنید که $\ln 2 > 0$) . بنابراین ،

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty. \tag{۱۰}$$

همچنین ،

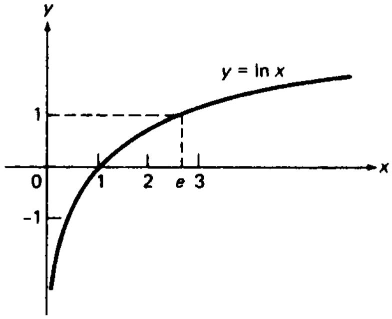
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \tag{۱۱}$$

زیرا ، به کمک جانشانی $x = 1/t$ ،

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{t\to\infty} \ln \frac{1}{t} = -\lim_{t\to\infty} \ln t = -\infty,$$

بنابر (۱۰) و (۱۱) ، $\ln x$ مقادیر مثبت بدلخواه بزرگ و مقادیر منفی بدلخواه بزرگ می‌گیرد . این امر ، همراه با قضیهٔ مقدار میانی ، ایجاب می‌کند که $\ln x$ هر مقدار حقیقی‌را بگیرد . به عبارت دیگر ، برد $\ln x$ تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد .

شکل ۲ نمودار تابع $\ln x$ را نشان می‌دهد . از این شکل معلوم می‌شود که $\ln x$ بر



شکل ۲

$(0, \infty)$ صعودی است ،برد $(-\infty, \infty)$ را دارد ،و درشرط $\ln 1 = 0$ صدق می‌کند .همچنین ، می‌بینید که $\ln x$ بر $(0, \infty)$ به پایین مقعر است . این امر فورا" از آزمون تقعر (قضیهٔ ۱۰ ، صفحهٔ ۲۷۸) نتیجه می‌شود ، زیرا

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln x = \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad (0 < x < \infty).$$

به‌علاوه ، به خاطر (۱۱) ، $\ln x$ محور y را به عنوان مجانب دارد .

عدد e . فرض‌کنیم e چنان عددی باشد که ، مثل شکل ۲ ،

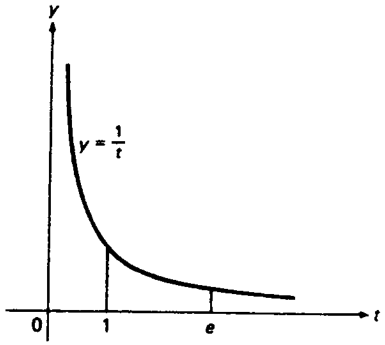
$$\ln e = 1,$$

یا معادلا "

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1,$$

درنتیجه ، مساحت تحت‌منحنی $y = 1/t$ از $t = 1$ تا $t = e$ (مساحت سایه‌دار شکل۳) درست مساوی 1 است . از ساختن سه مستطیل R_1 ، R_2 ،و R_3 در شکل ۴ هر یک به مساحت $\frac{1}{2}$ معلوم می‌شود که

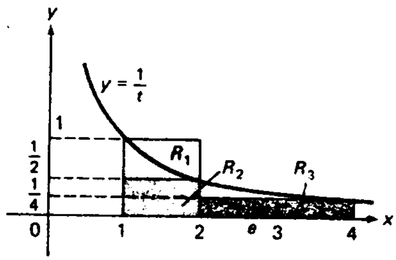
$$\ln 2 < (\text{مساحت } R_1) + (\text{مساحت } R_2) = 1 = (\text{مساحت } R_2) + (\text{مساحت } R_3) < \ln 4.$$



شکل ۳

بنابراین ، e عددی است بین 2 و 4 . این عدد ، به نام **پایهٔ لگاریتم طبیعی**، اهمیت زیادی در حساب دیفرانسیل و انتگرال و کاربردهایش دارد . خواهیم دید که e گنگ بوده و

$$e = 2.718281828459045\ldots$$



شکل ۴

(این امر که ارقام 1828 دو بار متوالی تکرار می‌شوند تصادفی است ولی در به‌خاطرآوردن

عدد e موجب تسهیل می‌شود.[1]) همانطور که در بخش ۵.۶ پس از معنی کردن a^x به‌ازای x گنگ خواهیم دید، عدد e از فرمول

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

نیز به دست می‌آید.

مثال ۴. تابع $\ln(\ln(\ln x))$ فقط وقتی تعریف شده است که $\ln(\ln x) > 0$، یعنی وقتی $\ln x > 1$ یا معادلاً $x > e$، و مشتق آن عبارت است از

$$\frac{d}{dx}\ln(\ln(\ln x)) = \frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{d}{dx}\ln(\ln x)$$
$$= \frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}.$$

بنابر فرمولهای (۱۰) و (۱۱)، وقتی $x \to \infty$ یا $x \to 0^+$، لگاریتم (به‌صورت‌قدر مطلق) به بی‌نهایت نزدیک می‌شود، ولی وقتی $x \to \infty$، از x کندتر به بی‌نهایت میل می‌کند، و وقتی $x \to 0^+$ از $1/x$ کندتر به بی‌نهایت میل خواهد کرد. به طور دقیقتر،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0, \tag{۱۲}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0. \tag{۱۳}$$

این دو فرمول به‌آسانی با قاعدهٔ هوپیتال[2] ثابت می‌شوند. به‌طور مشروح،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{D_x\ln x}{D_x x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{D_x\ln x}{D_x(1/x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

باتوجه به

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = -\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t} = 0,$$

---

۱. شش رقم بعدی 459045 نیز آسان به خاطر می‌آیند، زیرا یادآور زوایای یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند!

2. L'Hospital

پس از جانشانی $x = 1/t$ می‌توان (۱۳) را نیز از (۱۲) نتیجه گرفت.

مشتقگیری لگاریتمی. محاسبهٔ مشتق تابع $f(x)$ را اغلب می‌توان با تکنیک **مشتقگیری لگاریتمی** ساده کرد. دراین راه ابتدا از فرمول (۴') و قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده کرده **مشتق لگاریتمی** را حساب می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \tag{۱۴}$$

و سپس، با ضرب (۱۴) در $f(x)$، مشتق معمولی را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|.$$

توجه کنید که این تکنیک فقط در نقاطی قابل اعمال است که $f(x) \neq 0$، زیرا در غیراین صورت $\ln|f(x)|$ تعریف نشده است.

مثال ۵. با استفاده از مشتقگیری لگاریتمی، مشتق تابع

$$f(x) = \frac{(6x+1)^{7/3}\cos^9 x}{(x^2-4)^5}$$

را حساب کنید.

حل. چون

$$|f(x)| = \frac{|6x+1|^{7/3}|\cos x|^9}{|x^2-4|^5},$$

به کمک فرمولهای (۷) تا (۹) معلوم می‌شود که

$$\ln|f(x)| = \frac{7}{3}\ln|6x+1| + 9\ln|\cos x| - 5\ln|x^2-4|.$$

حال، با مشتقگیری از $\ln|f(x)|$، مشتق لگاریتمی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln|f(x)| &= \frac{7}{3(6x+1)}\frac{d}{dx}(6x+1) + \frac{9}{\cos x}\frac{d}{dx}\cos x - \frac{5}{x^2-4}\frac{d}{dx}(x^2-4)\\ &= \frac{14}{6x+1} - \frac{9\sin x}{\cos x} - \frac{10x}{x^2-4}.\end{aligned}$$

در این صورت، با ضرب در $f(x)$ مشتق مطلوب به دست می‌آید:

$$f'(x) = \frac{(6x+1)^{7/3}\cos^9 x}{(x^2-4)^5}\left(\frac{14}{6x+1} - 9\tan x - \frac{10x}{x^2-4}\right).$$

توضیح دهید چرا این فرمول به‌ازای $x = \pm 2, -\frac{1}{6}$ یا $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ ، که در آن n عددی صحیح است ، برقرار نیست .

مسائل

۱ . آیا توابع $\ln x^2$ و $2 \ln x$ مساویند ؟

تمام x هایی را بیابید که تابع داده شده به ازای آنها تعریف شده است .

۲ . $\ln (x^2 - 9)$

۳ . $\ln (\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$

۴ . $\ln (\sin \pi x)$

۵ . $\arcsin (\ln x)$

۶ . $\ln (\ln (1 - x^2))$

۷ . $\sqrt{\ln (x-2)}$

عبارات زیر را برحسب $\ln 2$ ، $\ln 3$ ، و $\ln 5$ بیان کنید .

۸ . $\ln \frac{125}{36}$

۹ . $\ln \sqrt[3]{\frac{24}{25}}$

۱۰ . $\ln (810)^{3/4}$

۱۱ . $\ln (0.002)$

۱۲ . $\ln \sqrt{0.005}$

۱۳ . $\ln (4.5 \times 10^4)$

۱۴ . ثابت کنید تابع $\ln (x + \sqrt{1 + x^2})$ فرد است .

۱۵ . متوسط تابع $1/x$ را روی $[a, b]$ درصورتی که a و b متحدالعلامه باشند بیابید .

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۱۶ . $\ln (6 - x^2)$

۱۷ . $\ln (x^3 - 2x + 5)$

۱۸ . $(\ln x)^2$

۱۹ . $x^2 \ln x$

۲۰ . $\frac{\ln x}{x}$

۲۱ . $\frac{\ln x}{x^2 + 1}$

۲۲ . $\ln \tan \frac{x}{2}$

۲۳ . $x[\sin (\ln x) - \cos (\ln x)]$

۲۴ . $\ln (\arcsin x)$

۲۵ . $\ln \frac{1+t}{1-t}$

۲۶ . $\ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

۲۷ . $\ln (t + \sqrt{1 + t^2})$

کمیات زیر را بیابید .

۲۸ . مشتق چهارم $x^2 \ln x$

۲۹ . مشتق پنجم $\frac{\ln x}{x}$

۳۰. از تمام خطوط مماس بر منحنی $y = \ln x$ فقط یکی از مبداء می‌گذرد. این خط را پیدا کنید.

۳۱. تحقیق کنید که

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C.$$

۳۲. نشان دهید که تابع $\ln x$ غیراز محور y مجانب ندارد.

مساحت A ی ناحیهٔ R زیر را بیابید.

۳۳. محدود به محور x، خط $x = e$، و منحنی $y = \ln x$

۳۴. تحت منحنی $y = 2/(x+1)$ از $x = 0$ تا $x = 3$

۳۵. بین منحنیهای $y = 2x - x^2$ و $y = 1/x$

۳۶. بین منحنیهای $y = 2/x$ و $y = 10/(x^2+4)$

در هر حالت، ناحیهٔ R را رسم کنید.

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده‌شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌ای صعودی است؟ نزولی است؟ به بالا مقعر است؟ به پایین مقعر است؟ تمام اکسترممهای مطلق و مجانبها را بیابید. تابع را رسم نمایید.

۳۷. $f(x) = x \ln x$

۳۸. $f(x) = (\ln x)^2$

۳۹. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

۴۰. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

۴۱. با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین، نشان دهید که اگر $0 < a < b$،

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

۴۲. نشان دهید که به ازای هر $x > 0$، $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$.

مشتق عبارات زیر را با استفاده از مشتقگیری لگاریتمی بیابید.

۴۳. $(2x^2 - 1)^{3/4}(x^3 + 1)^{4/3}$

۴۴. $\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$

۴۵. $\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$

۴۶. $\dfrac{\sqrt{4x+1}}{(x+2)^7(\ln x)^3}$

۴۷. $\dfrac{(1+\sin x)^5}{(1-\cos x)^6}$

۴۸. $\dfrac{(2-\cot x)^3}{(3+\sec x)^2}$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید.

۴۹. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

۵۰. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$

۵۱. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x}$

۵۲. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$

۵۳. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

۵۴. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi^+} \left[\cos x \ln \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

۶.۲ چند انتگرال که به لگاریتمها منجر می‌شوند

همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، تابع لگاریتم توان ما را در محاسبهٔ انتگرالها به طور قابل توجهی بالا می‌برد.

مثال ۱. انتگرال $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$ $(a \neq 0)$ را حساب کنید.

حل. تابع $F(x) = \ln |x|$ یک پاد مشتق $1/x$ است. بنابراین، طبق قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۴۰۲،

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} F(ax+b) + C = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$$

لذا،

$$\int \frac{dx}{5x+7} = \frac{1}{5} \ln |5x+7| + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \frac{1}{-2} \ln |1-2x| + C = -\frac{1}{2} \ln |2x-1| + C,$$

و غیره.

مثال ۲. انتگرال $\displaystyle\int \frac{x+a}{x+b}\, dx$ را حساب کنید.

حل. با تقسیم $x+b$ بر $x+a$ معلوم می‌شود که

$$\frac{x+a}{x+b} = 1 + \frac{a-b}{x+b},$$

و لذا،

$$\int \frac{x+a}{x+b}\, dx = \int \left(1 + \frac{a-b}{x+b}\right) dx = x + (a-b) \ln |x+b| + C. \qquad (1)$$

مثال ۳. انتگرال $\int \frac{2x+3}{6x-1}\,dx$ را حساب کنید.

حل. چون

$$\int \frac{2x+3}{6x-1}\,dx = \int \frac{2(x+\frac{3}{2})}{6(x-\frac{1}{6})}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{x+\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{6}}\,dx,$$

از فرمول (۱) به ازای $a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{6}$ نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{2x+3}{6x-1}\,dx = \frac{1}{3}\left[x+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)\ln\left|x-\frac{1}{6}\right|+k\right],$$
$$=\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}\ln\left|x-\frac{1}{6}\right|+C,$$

که در آن k و $C=\frac{1}{3}k$ ثابتهای دلخواهی هستند. چون

$$\frac{5}{9}\ln\left|x-\frac{1}{6}\right| = \frac{5}{9}\ln\left|\frac{6x-1}{6}\right| = \frac{5}{9}\ln|6x-1|-\frac{5}{9}\ln 6,$$

می‌توان پس از ادغام $-\frac{5}{9}\ln 6$ در ثابت دلخواه انتگرالگیری C نیز نوشت

$$\int \frac{2x+3}{6x-1}\,dx = \frac{1}{3}x+\frac{5}{9}\ln|6x-1|+C.$$

انتگرالگیری از مشتق لگاریتمی. حال فرض کنیم $f(x)$ تابع مشتقپذیری باشد که مقدار صفر را نمی‌گیرد. در این صورت، مثل صفحهٔ ۴۹۳، $f(x)$ دارای مشتق لگاریتمی

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (۲)$$

است، که در آن پریم یعنی مشتقگیری نسبت به x. پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C. \qquad (۳)$$

این فرمول ابزار مخصوصاً مفیدی در محاسبهٔ انتگرالهاست.

مثال ۴. انتگرال $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,dx$ را حساب کنید.

حل. صورت انتگرالده مشتق مخرج است. لذا، طبق (۳)، بر هر بازه که شامل نقاط $x=1,2$ که صفرهای مخرج انتگرالده‌اند نباشد داریم

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,dx = \ln|x^2-3x+2| + C$$

مثال ۵. انتگرال $\int \tan x\,dx$ را حساب کنید.

حل. چون

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x},$$

به کمک (۳) معلوم می‌شود که

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C. \qquad (۴)$$

به بیان دیگر،

$$\tan x = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \frac{(\sec x)'}{\sec x},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C. \qquad (۴')$$

فرمولهای (۴) و (۴') معادلند، زیرا

$$-\ln|\cos x| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| = \ln|\sec x|.$$

هر دو فرمول بر هر بازه‌ای که شامل صفرهای $\cos x$ نباشد، یعنی نقاط $x = (n+\frac{1}{2})\pi$ که در آنها n عدد صحیحی است، معتبرند.

فرض کنید در فرمول (۲) اختیار کنیم

$$f(x) = \frac{x+a}{x+b} \qquad (a \neq b)$$

در این صورت،

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{d}{dx}(\ln|x+a| - \ln|x+b|)$$

$$= \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} = \frac{b-a}{(x+a)(x+b)},$$

و (۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int \frac{b-a}{(x+a)(x+b)}\,dx = \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C \qquad (a \neq b),$$

یا معادلاً

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C \qquad (a \neq b). \tag{۵}$$

با فرض $a \neq 0$ و قرار دادن $b = -a$، معلوم می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \qquad (a \neq 0),$$

یا معادلاً

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad (a \neq 0). \tag{۶}$$

این با فرمول

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0),$$

که در صفحهٔ ۴۷۰ به‌دست‌آمد فرق دارد. در سه فرمول اخیر می‌توان $a > 0$ را نیز اختیار کرد.

مثال ۶. انتگرال $\int \frac{dx}{x^2+x-6}$ را محاسبه نمایید.

حل. چون

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x-2)(x+3)},$$

از فرمول (۵) به ازای $b = 3$، $a = -2$ نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x^2+x-6} = \frac{1}{3-(-2)}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C.$$

تحقیق کنید که با انتخاب $a = 3,\ b = -2$ نیز همین جواب به دست می‌آید.

مثال ۷. انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x-6}$ را حساب کنید.

حل. بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و مثال پیش،

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x-6} = \left[\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{5}\left(\ln\left|\frac{1-2}{1+3}\right| - \ln\left|\frac{0-2}{0+3}\right|\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\ln\frac{1}{4} - \ln\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{8} \approx -0.196.$$

توجه کنید که اعتبار این محاسبات تابع آن است که بازهٔ انتگرالگیری شامل هیچ یک از نقاط $x = 2, -3$ که صفرهای انتگرالده‌اند نباشد.

مثال ۸. انتگرال $\int \frac{dx}{3x^2+5x-2}$ را حساب کنید.

حل. چون

$$\frac{1}{3x^2+5x-2} = \frac{1}{(3x-1)(x+2)} = \frac{1}{3(x-\frac{1}{3})(x+2)},$$

از فرمول (۵) به ازای $a = -\frac{1}{3}$، $b = 2$ نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{3x^2+5x-2} = \frac{1}{3[2-(-\frac{1}{3})]}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}}{x+2}\right| = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}}{x+2}\right| + C.$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که این را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$\int \frac{dx}{3x^2+5x-2} = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{3x-1}{x+2}\right| + C$$

(ر.ک. استدلال آخر مثال ۳).

مثال ۹. انتگرال $\int \frac{dx}{4x^2-9}$ را حساب کنید.

حل. بنابر قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۴۰۲، و فرمول (۶) به ازای $a = 3$، داریم

$$\int \frac{dx}{4x^2-9} = \int \frac{dx}{(2x)^2-3^2} = \frac{1}{2(2)(3)}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C$$
$$= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$$

انتگرالده در تمام مثالهای فوق جز یکی تابع گویای ساده‌ای است. در بخش ۶.۷ تکنیک محاسبهٔ انتگرال یک تابع گویای *دلخواه* ذکر خواهد شد.

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۱. $\int \frac{dx}{15x+5}$

۲. $\int \frac{dx}{2x-9}$

۳. $\int \frac{ds}{11-7s}$

۴. $\int_1^7 \frac{dx}{20x+10}$

۵. $\int_2^4 \frac{dt}{8-5t}$

۶. $\int_{-2}^2 \frac{du}{12u+25}$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (۱) حساب کنید.

۷. $\int \frac{x-2}{4x+3}\,dx$

۸. $\int \frac{2x+1}{2x-1}\,dx$

۹. $\int \frac{6t+1}{5-t}\,dt$

۱۰. $\int_0^3 \frac{1-3x}{2+4x}\,dx$

۱۱. $\int_{-2}^4 \frac{v}{v+5}\,dv$

۱۲. $\int_0^1 \frac{8w+4}{8-4w}\,dw$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (۳) حساب کنید.

۱۳. $\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx$

۱۴. $\int \frac{x^3+x}{x^4+2x^2+3}\,dx$

۱۵. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

۱۶. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

۱۷. $\int_0^\pi \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$

۱۸. $\int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

نشان دهید که

۱۹. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

۲۰. $\int \sec x\csc x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x\sin x} = \ln|\tan x| + C$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (۵) یا (۶) حساب کنید.

۲۱. $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$

۲۲. $\int \frac{dx}{4x^2+4x-3}$

۲۳. $\int \frac{dx}{9x^2-25}$ ✓

۲۴. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}$ ✓

۲۵. $\int_{-3}^0 \frac{dy}{y^2+3y-4}$ ✓

۲۶. $\int_{-2}^1 \frac{dz}{16-z^2}$ ✓

۳.۶ تابع نمایی؛ نماییها در هر پایه

نمایی به عنوان معکوس لگاریتم. تابع لگاریتم $f(x) = \ln x$ ، که در بخش پیش‌تعریف شد، بر بازهٔ $(0, \infty)$ که به روی بازهٔ $(-\infty, \infty)$ نگاشته می‌شود صعودی و پیوسته است. لذا، f دارای تابع معکوس‌صعودی وپیوستهٔ f^{-1} بربازهٔ $(-\infty, \infty)$ است، و f^{-1} بازهٔ $(-\infty, \infty)$ را به روی بازهٔ $(0, \infty)$ می‌نگارد. تابع f^{-1} یکی از مهمترین توابع در ریاضیات‌است. این تابع را *نمایی در پایهٔ* e یا فقط *نمایی* نامیده و با

$$\exp x$$

نمایش می‌دهند.

تابع $\exp x$ به ازای هر x تعریف شده است، زیرا قلمروش برد $\ln x$ ، یعنی بازهٔ $(-\infty, \infty)$ ، می‌باشد. به‌علاوه، $\exp x$ به ازای هر x مثبت است، زیرا بردش‌قلمرو $\ln x$ یعنی بازهٔ $(0, \infty)$ ، می‌باشد. چون هر یک از توابع $\exp x$ و $\ln x$ معکوس دیگری است، اتحادهای زیر را داریم:

$$\exp(\ln x) = x \quad (x > 0), \qquad \ln(\exp x) = x \quad (x \text{ هر}). \tag{۱}$$

بخصوص، از اتحاد اول و فرمولهای

$$\ln 1 = 0, \qquad \ln e = 1$$

نتیجه می‌شود که

$$\exp 0 = 1 \tag{۲}$$

و

$$\exp 1 = e. \tag{۳}$$

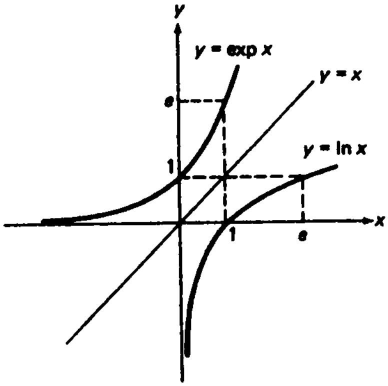
مثل هر تابع یک به یک و معکوسش، نمودار هر یک از توابع $\ln x$ و $\exp x$ منعکس دیگری نسبت به خط $y = x$ است (ر.ک. شکل ۵).

از شکل واضح است که $\exp x$ بر $(-\infty, \infty)$ مثبت و صعودی است، و در شرایط (۲) و (۳) صدق می‌کند. چون $\exp x$ بر $(-\infty, \infty)$ صعودی بوده و دارای برد $(0, \infty)$ است، فوراً دیده می‌شود که

$$\lim_{x \to \infty} \exp x = \infty, \tag{۴}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0, \tag{۵}$$

و این رفتار از شکل نیز واضح می‌باشد. پس‌از (۵) معلوم می‌شود که $\exp x$ محور x را به عنوان مجانب دارد.



شکل ۵

نمایی یک مجموع. حال خاصیت کلیدی نمایی را ثابت می‌کنیم که از فرمول لگاریتم حاصل ضرب "به ارث" رسیده است.

قضیهٔ ۳ (نمایی مجموع). فرمول

$$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y) \tag{۶}$$

به ازای x و y دلخواه برقرار است.

برهان. فرض کنیم $X = \exp x,\ Y = \exp y$؛ درنتیجه، $x = \ln X,\ y = \ln Y$. پس، طبق قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۴۸۷،

$$x + y = \ln X + \ln Y = \ln XY,$$

و لذا،

$$\exp(x + y) = \exp(\ln(XY)) = XY = (\exp x)(\exp y).$$

بنابر رابطهٔ (۶)، نمایی مجموع دوجمله حاصل ضرب نماییهای تک‌تک جملات است. به بیان معادل، با خواندن (۶) از راست به چپ، می‌بینیم که حاصل‌ضرب دونمایی داده شده خود یک نمایی است که شناسه‌اش مجموع شناسه‌های نماییهای داده شده است.

فرض کنیم r عدد گویایی باشد . با انتخاب $x = e$ در فرمول (۹) ، صفحهٔ ۴۸۹ ، درمی‌یابیم که

$$\ln e^r = r \ln e = r,$$

و لذا ،

$$\exp r = e^r.$$

اما $\exp x$ به ازای x گنگ نیز تعریف شده است ، اگرچه هنوز به ازای چنین x به e^x معنی نداده‌ایم . حال با تعریف سادهٔ

$$e^x = \exp x \tag{۷}$$

به ازای هر x ، گویا و گنگ ، این کار را می‌کنیم . به‌علاوه ، به دلیلی که در مسئلهٔ ۴۱ ذکر شد ، اگر بخواهیم تابع e^x پیوسته باشد ، این تنها تعریف ممکن e^x است . لذا ، به‌توانهای گنگ e ، نظیر $e^{\sqrt{2}}$ یا e^{π} ، معنی واحدی بخشیده‌ایم . برای درک این منظور ، تعبیر

$$e^{\sqrt{2}} = (2.718281828459\ldots)^{1.414213562373\ldots}$$

را بدون کمکی از حساب دیفرانسیل و انتگرال درنظر می‌گیریم .

از حالا به بعد نماد e^x یعنی $\exp x$ ، ولی نماد اخیر نیز گهگاه مفید واقع می‌شود . اتحادهای (۱) برحسب e^x شکل فشردهٔ زیر را به خود می‌گیرند :

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \qquad \ln e^x = x \quad (\text{هر } x).$$

به همین نحو ، فرمول (۶) را می‌توان (از راست به چپ) به صورت

$$e^x e^y = e^{x+y} \tag{۸}$$

نوشت . اعتبار (۸) به ازای x و y پیش از تعریف (۷) معلوم بود ، ولی اکنون می‌بینیم‌که (۸) به ازای اعداد حقیقی دلخواه ، بخصوص اعداد گنگ ، برقرار است . با فرض $y = -x$ در (۸) به دست می‌آوریم

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1,$$

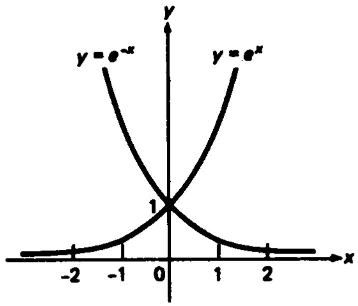
که فورا" ایجاب می‌کند که

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}. \tag{۹}$$

تابع e^{-x} به خودی خود مهم است . شکل ۶ نمودارهای e^x و e^{-x} را دریک دستگاه مختصات قائم‌نشان می‌دهد . توجه کنید که هر نمودار منعکس دیگری نسبت به محور y است .

فرمولهای (۴) و (۵) برحسب e^x به صورت زیر درمی‌آیند :

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty \tag{۴}$$



شکل ۶

و

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0. \qquad (۵)$$

توجه کنید که (۵') نتیجهٔ فوری (۴') است ، زیرا به کمک جانشانی $x=-t$ وفرمول (۹) ،

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 0.$$

همچنین ، باید توجه داشت که

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty,$$

و این از نمودار e^{-x} واضح خواهد بود .

مشتق و انتگرال e^x . برای مشتقگیری از تابع نمایی ، از قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۴۶۰ ،باتوجه به اینکه شرایط قضیه برقراراست استفاده می‌کنیم . با نوشتن $y=e^x$ و $x=\ln y$ ، داریم

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\ln y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x,$$

درنتیجه ،

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x. \qquad (۱۰)$$

همانطور که این فرمول اساسی نشان می‌دهد ، تابع e^x دارای این خاصیت جالب‌توجه‌است که مشتق خودش می‌باشد ؛ و لذا ، با هر تعداد مشتقگیری تغییر نمی‌کند . لذا ، به ازای هر

عدد صحیح مثبت n ،

$$\frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x$$

پس از (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \qquad (۱۱)$$

همچنین، می‌بینیم که

$$\frac{d^2}{dx^2}e^x = e^x > 0,$$

درنتیجه، بنابر آزمون تقعر، e^x بر $(-\infty, \infty)$ به بالا مقعر است.

مثال ۱. از xe^x مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب،

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = \frac{dx}{dx}e^x + x\frac{de^x}{dx} = e^x + xe^x.$$

مثال ۲. از $\sqrt{1+e^x}$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+e^x} = \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\frac{d}{dx}(1+e^x) = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}.$$

مثال ۳. انتگرال $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$ را حساب کنید.

حل. با تقسیم صورت بر مخرج به دست می‌آوریم

$$\frac{e^{3x}+1}{e^x+1} = \frac{(e^x)^3+1}{e^x+1} = (e^x)^2 - e^x + 1 = e^{2x} - e^x + 1.$$

بنابراین، به کمک (۱۱) داریم

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int (e^{2x} - e^x + 1)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$$

نمایی در پایهٔ a . حال‌که به‌توانهای حقیقی دلخواه عدد e معنی‌بخشیده‌ایم، می‌خواهیم همین کار را برای هر عدد مثبت a انجام دهیم. آنچه لازم است تابع پیوسته‌ای چون $\exp_a x$ است‌که وقتی x عددی گویا باشد مقدار a^x را بگیرد. انتخاب شایسته عبارت است از

$$\exp_a x = \exp (x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

در واقع، چون به ازای r گویا

$$\ln a^r = r \ln a, \qquad (۱۲)$$

بنابر قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۴۸۸، به ازای $x = a$ معلوم می‌شود که طبق مطلوب

$$\exp_a r = \exp (r \ln a) = \exp (\ln a^r) = a^r,$$

و به‌علاوه $\exp_a x$ پیوسته‌است، زیرا تابع پیوستهٔ $\exp x$ از تابع پیوستهٔ $x \ln a$ می‌باشد. تابع $\exp_a x$ نمایی در پایهٔ a است، و اگر $a = e$ به e^x تحویل می‌شود. حال برای معنی بخشیدن به a^x به ازای x حقیقی دلخواه، بخصوص x گنگ، در تشابه کامل با (۷) تعریف می‌کنیم

$$a^x = \exp_a x = e^{x \ln a} \qquad (a > 0). \qquad (۱۳)$$

تابع a^x، به صورت تعریف شده با (۱۳)، خواصش را از خواص نظیر e^x "به ارث می‌برد". مثلاً،

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = \frac{1}{e^{x \ln a}},$$

درنتیجه،

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

به‌علاوه،

$$a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{(x+y) \ln a},$$

و درنتیجه،

$$a^x a^y = a^{x+y}. \qquad (۱۴)$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین (۱۳)، معلوم می‌شود که

$$\ln a^x = \ln (e^{x \ln a}).$$

پس نتیجه می‌شود

$$\ln a^x = x \ln a,$$

که فرمول (۱۲) را از حالتی که x عدد گویای r است به حالت x حقیقی دلخواه تعمیم

می‌دهیم .

خاصیت مهم دیگر a^x از فرمول

$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{۱۵}$$

به دست می‌آید که اعتبار آن به ازای x و y گویا از قبل معلوم است . برای اثبات (۱۵) به ازای x و y حقیقی ، ابتدا از (۱۳) با e^x و y به جای a و x نتیجه می‌شود

$$(e^x)^y = e^{y \ln e^x} = e^{yx} = e^{xy}, \tag{۱۵'}$$

که همان (۱۵) به ازای $a = e$ است . اما ، در این صورت ،

$$(a^x)^y = (e^{x \ln a})^y = e^{xy \ln a} = a^{xy},$$

که همان (۱۵) به ازای $a > 0$ کلی است . اعتبار فرمولهای (۱۴) و (۱۵) به ازای x و y حقیقی دلخواه شایستگی بیشتر تعریف (۱۳) را گواه خواهد بود . به‌علاوه ،

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x a^{-y},$$

و لذا ،

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

ولی هرگاه b عدد مثبت دیگری باشد ، آنگاه

$$a^x b^x = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln ab},$$

که ایجاب می‌کند که

$$a^x b^x = (ab)^x.$$

لذا ، به‌طور خلاصه ، همان *قوانین نماهای*

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

مثل صفحه ۱۸۶ ثابت‌شده‌اند ،ولی این بار نماهای x و y **حقیقی و دلخواه** می‌باشند؛ یعنی ، برای نماهای x و y گویا و گنگ .

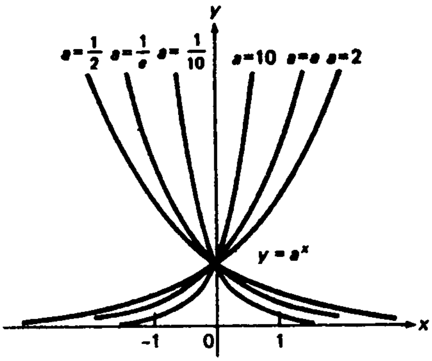
رفتار تابع a^x اساساً به‌این وابسته‌است که عدد مثبت a از 1 بزرگتر یا کوچکتر باشد (توجه کنید که اگر $a = 1$ ، $a^x \equiv 1$) . فرض کنیم $t = x \ln a$ ؛ درنتیجه ، (۱۳) شکل فشردهٔ $a^x = e^t$ را به خود می‌گیرد . هرگاه $a > 1$ ، آنگاه $\ln a > 0$. بنابراین ، t با x متحدالعلامه بوده ، و

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0 \qquad (a > 1), \tag{۱۶}$$

زیرا $x \to \pm\infty$ ایجاب می‌کند که $t \to \pm\infty$. از آن سو، هرگاه $0 < a < 1$، آنگاه $\ln a < 0$ ؛ درنتیجه، t با x مختلف‌العلامه است، و به جای (۱۶) داریم

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty \qquad (0 < a < 1), \tag{۱۶'}$$

زیرا اکنون $x \to \pm\infty$ ایجاب می‌کند که $t \to \mp\infty$. این تفاوت اساسی بین رفتار تابع a^x به ازای $a > 1$ و رفتارش به ازای $0 < a < 1$ در شکل ۷ نموده شده، که در آن نمودار a^x بـه ازای $a = 2, e, 10, 1/2, 1/e, 1/10$ در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است. توجه



شکل ۷

کنید که هر جفت منحنی $y = a^x$ و $y = (1/a)^x$ منعکس دیگری نسبت به محور y است. این نتیجهٔ فوری $(1/a)^x = a^{-x}$ است. توضیح‌دهید چرا منحنیهای $y = a^x$ همه ازنقطهٔ $(0, 1)$ می‌گذرند، ولی نقطهٔ مشترک دیگری ندارند.

مشتق و انتگرال a^x . مشتق تابع a^x به‌آسانی به دست می‌آید. در واقع، بنابر (۱۰) و قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx} (x \ln a),$$

و درنتیجه،

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a. \tag{۱۷}$$

از (۱۷) فوراً نتیجه می‌شود که

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \tag{۱۸}$$

مثال ۴. از $x\left(\frac{1}{3}\right)^x$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب و (۱۷)،

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]=\left(\frac{1}{3}\right)^x+x\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^x(1-x\ln 3).$$

مثال ۵. از $2^{\sin x}$ مشتق بگیرید.

حل. بنابر (۱۷) و قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx}2^{\sin x}=2^{\sin x}\ln 2\frac{d}{dx}\sin x=2^{\sin x}\cos x\ln 2.$$

مثال ۶. انتگرال $\int_{-1}^{1}10^x\,dx$ را حساب کنید.

حل. بنابر فرمول (۱۸)،

$$\int_{-1}^{1}10^x\,dx=\frac{10^x}{\ln 10}\Big|_{-1}^{1}=\frac{10^1-10^{-1}}{\ln 10}=\frac{9.9}{\ln 10}\approx 4.3.$$

مثال ۷. نشان دهید که $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

حل. این یک صورت مبهم $0/0$ است که می‌توان آن را با قاعدهٔ هوپیتال رفع کرد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{D_x(a^x-1)}{D_x x}=\lim_{x\to 0}a^x\ln a=\ln a.$$

مسائل

۱. تحقیق کنید که نمودار تابع ce^x $(c>0)$ را می‌توان از انتقال افقی نمودار e^x به دست آورد.

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۲. e^{4x+5} ۳. e^{-6x} ۴. xe^{2x}

۵. x^2e^x ۶. $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ ۷. e^{x^2}

۰۸. $e^x \ln x$

۰۹. $e^{1/x}$

۰۱۰. $\dfrac{e^x}{x}$

۰۱۱. $e^{\sqrt{x}}$

۰۱۲. $\cos(e^x)$

۰۱۳. $e^{\tan x}$

۰۱۴. $\arcsin(e^{x/2})$

۰۱۵. $x\,10^x$

۰۱۶. 3^{-x}

۰۱۷. 5^{x^2}

۰۱۸. π^{x^2-x}

۰۱۹. $\exp_2(4^x)$

۰۲۰. $\ln|e^x-1|$

۰۲۱. $\dfrac{10^x-1}{5^x}$

۰۲۲. $\exp(e^x)$

۰۲۳. $\exp(\ln u - u)$

۰۲۴. $\ln(\sqrt{e^x})$

کمیات زیر را بیابید .

۰۲۵. مشتق سوم xe^{x^2}

۰۲۶. مشتق چهارم x^2e^{2x}

۰۲۷. مشتق پنجم $e^x \ln x$

راهنمایی . در مسائل ۲۶ و ۲۷ بهتر است از قاعدهٔ لایب‌نیتز استفاده کنیم (مسئلهٔ ۳۵ ، صفحهٔ ۳۶۶) .

۰۲۸. نشان دهید که تابع e^x غیر از محور x مجانب ندارد .

۰۲۹. مشتق $e^{x^2+2x}/(2^x \ln x)$ را با استفاده از مشتقگیری لگاریتمی بیابید .

۰۳۰. متوسط تابع e^x را روی بازهٔ $[\ln a, \ln b]$ ، که $0<a<b$ ، پیدا کنید .

۰۳۱. تابع e^x دارای این خاصیت است که مشتق خود می‌باشد . نشان دهید که هر تابع دیگر $y=f(x)$ با این خاصیت به شکل ce^x است ، که در آن c ثابت می‌باشد .

۰۳۲. تحقیق کنید که

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

مساحت A ی ناحیهٔ R زیر را بیابید .

۰۳۳. محدود به خط $x=1$ و منحنیهای $y=e^x$ و $y=e^{-x}$

۰۳۴. محدود به خطوط $x=1$ و $x=2$ و منحنیهای $y=\ln x$ و $y=e^{x/2}$

۰۳۵. بین منحنیهای $y=xe^{1-x}$ و $y=4x^2-3x$

۰۳۶. محدود به خط $x=1$ و منحنیهای $y=2^x$ و $y=4^x$

در هر حالت ، ناحیهٔ R را رسم نمایید .

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید . تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است ؟ نزولی است ؟ به بالا مقعر است ؟ به پایین مقعر است ؟ تمام اکسترممهای مطلق و مجانبها را بیابید ، و تابع را رسم کنید .

۳۷. $f(x) = e^{-x^2/2}$

۳۸. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

۳۹. $f(x) = 4xe^{-2x}$

۴۰. $f(x) = \exp(-e^{-x})$

۴۱. فرض کنید h تابع پیوسته‌ای باشد که بر $(-\infty, \infty)$ تعریف شده است، و به‌ازای‌هر x گویا، $h(x) = 0$. نشان‌دهید که به‌ازای‌هر x گنگ نیز $h(x) = 0$؛ درنتیجه $h(x) \equiv 0$. با استفاده از این، نشان دهید که یک تابع پیوسته‌ٔ تعریف شده بر $(-\infty, \infty)$ منحصراً با مقادیرش به ازای x گویا معین می‌شود.

راهنمایی. باتوجه به $h = f - g$، نشان دهید که هر دو تابع پیوسته‌ٔ f و g که به ازای تمام x های گویا منطبق باشند باهم مساوی خواهند بود.

۴۲. معادلهٔ $2^x - 2x = 0$ را حل کنید.

۴۳. از تمام خطوط مماس بر منحنی $y = e^x$ فقط یکی از مبداء می‌گذرد. این خط را پیدا کنید.

بدون محاسبهٔ انتگرالها معین کنید کدام انتگرال بزرگتر است.

۴۴. $\int_0^1 e^x\,dx$ یا $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

۴۵. $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ یا $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

۴۶. $\int_{-2}^{-1} (\frac{1}{3})^x\,dx$ یا $\int_{-2}^{-1} 3^x dx$

۴۷. $\int_1^e \sqrt{\ln x}\sin x\,dx$ یا $\int_1^e \ln x \sin x\,dx$

۴۸. نشان دهید که

$$2e^{-1/4} < \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx < 2e^2.$$

۴۹. تحقیق‌کنید‌که‌تابع $y = ae^{2x} + be^{3x}$ درمعادلهٔ‌دیفرانسیل‌مرتبهٔ‌دوم $y'' - 5y' + 6y = 0$ به ازای ثابتهای دلخواه a و b صدق می‌کند.

انتگرالهای زیر را حساب کنید

۵۰. $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$

۵۱. $\int xa^x\,dx$

۵۲. $\int \frac{e^{4x} - 1}{e^x - 1}\,dx$

۵۳. $\int_0^1 (3^x + 3^{-x})\,dx$

۵۴. $\int_2^4 \frac{dx}{1 - e^{-x}}$

۵۵. $\int_{-1}^3 5^x\,dx$

۵۶. $\int_0^4 2^{-t}\, 3^t\, dt$

۵۷. $\int_0^1 4^u e^u\, du$

۵۸. $\int_{-1}^1 v\, 2^v\, dv$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید.

۵۹. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

۶۰. $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$

۶۱. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

۶۲. $\lim_{x\to \infty} x(e^{1/x} - 1)$

۶۳. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

۶۴. $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1 + x} - 1}$

۶۵. $\lim_{x\to 0} \frac{3^{\tan x} - 1}{\sin x}$

۶۶. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{e^{\sin x} - e}{\cos x}$

۶۷. $\lim_{x\to 0} \frac{4^{\sin x} - 1}{8^{\tan x} - 1}$

۴.۶ لگاریتمها در هر پایه

در بخش پیش دیدیم که a^x، یعنی نمایی در پایهٔ a (که $a > 0$)، با فرمول

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad (۱)$$

داده می‌شود. معکوس تابع (۱) **لگاریتم در پایهٔ** a نام دارد و با $\log_a x$ نموده می‌شود. در اینجا a مثبت است، ولی باید حالت $a = 1$ مستثنی شود، زیرا تابع $1^x \equiv 1$ یک‌به‌یک نیست؛ و درنتیجه، معکوس ندارد. چون تابع a^x دارای قلمرو $(-\infty, \infty)$ و برد $(0, \infty)$ است، معکوسش، یعنی تابع $\log_a x$، دارای قلمرو $(0, \infty)$ و برد $(-\infty, \infty)$ می‌باشد. لذا، به ازای هر $x > 0$ داریم

$$a^{\log_a x} = x, \qquad (۲)$$

یا معادلاً

$$e^{\log_a x \cdot \ln a} = x.$$

از فرمول اخیر نتیجه می‌شود که

$$\log_a x \cdot \ln a = \ln x,$$

و لذا ،

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{۳}$$

توجه کنید که اگر $a = e$ ، رابطهٔ (۳) به رابطهٔ

$$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

تحویل می‌شود؛ یعنی، لگاریتم در پایهٔ e چیزی جز لگاریتم طبیعی نیست.

از رابطهٔ (۲) واضح است که $\log_a x$ توانی است که a باید بدان برسد تا x به‌دست آید. همچنین، فرمول همتای

$$\log_a a^x = x \tag{۴}$$

را داریم که به‌ازای‌هر x معتبر است. البته فرمولهای (۲) و (۴) حالات خاصی‌ازفرمولهای کلی $f(f^{-1}(x)) \equiv x$ و $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ هستند که هر تابع یک به یک f و معکوسش f^{-1} در آنها صدق می‌کنند.

خواص $\log_a x$ شبیه خواص $\ln x$ بوده، و نتیجهٔ فوری تعریف (۳) می‌باشند. مثلاً،

$$\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0, \qquad \log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1,$$

$$\log_a \frac{1}{x} = \frac{\ln (1/x)}{\ln a} = \frac{-\ln x}{\ln a} = -\log_a x,$$

$$\log_a xy = \frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y,$$

و از این قبیل. فرمول

$$\log_a b^x = \frac{\ln b^x}{\ln a} = \frac{x \ln b}{\ln a} = x \log_a b \qquad (b > 0)$$

را نیز باید متذکر شد. به‌ازای $a = 10$ لگاریتم در پایهٔ 10 یا **لگاریتم معمولی** $\log_{10} x$ در ریاضیات دبیرستانی را به دست می‌آوریم که اغلب با $\log x$ بدون زیرنویس 10 نموده‌می‌شود. ارتباط بین لگاریتم معمولی و لگاریتم طبیعی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0.43429 \ln x.$$

چون $\ln a > 0$ اگر $a > 1$ ، از فرمولهای (۱۰) و (۱۱)، صفحهٔ ۴۹۰ ، و تعریف $\log_a x$ معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \qquad (a > 1).$$

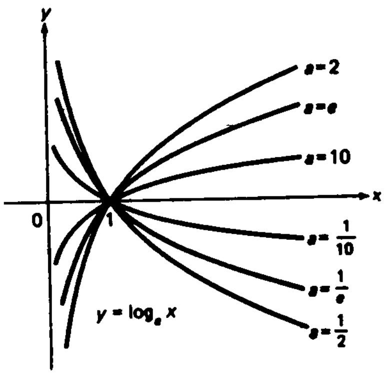
از آن سو ، چون $\ln a < 0$ اگر $0 < a < 1$ ، داریم

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = \infty \qquad (0 < a < 1).$$

در شکل ۸ تفاوت اساسی بین رفتار تابع $\log_a x$ به‌ازای $a > 1$ و رفتار آن به‌ازای $0 < a < 1$ نموده شده است ، که در این شکل $\log_a x$ به ازای $a = 2, e, 10, 1/2, 1/e, 1/10$ در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است . توجه کنید که هر یک از منحنیهای $y = \log_a x$ و $y = \log_{1/a} x$ منعکس دیگری نسبت به محور x است . این امر نتیجهٔ فوری آن است که

$$\log_{1/a} x = \frac{\ln x}{\ln (1/a)} = \frac{\ln x}{-\ln a} = -\log_a x.$$

توضیح دهید چرا منحنیهای $y = \log_a x$ همه از نقطهٔ $(1, 0)$ می‌گذرند ولی نقطهٔ مشترک دیگری ندارند .



شکل ۸

از فرمولهای (۱۲) و (۱۳)، صفحهٔ ۴۹۲ ، و تعریف $\log_a x$ معلوم می‌شود که هم به ازای $a > 1$ و هم به ازای $0 < a < 1$ ،

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x \log_a x = 0.$$

هرگاه a و b دو عدد مثبت غیر از 1 باشند ، آنگاه

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a}\frac{\ln x}{\ln b},$$

درنتیجه ،

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

بخصوص، با انتخاب $x = a$ معلـــوم می‌شود که

$$1 = \log_a b \cdot \log_b a,$$

یا معادلا "

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{۵}$$

این رابطه به ازای $b = e$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_a e = \frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}. \tag{۵'}$$

مثال ۱. $\log_2 64$ و $\log_{64} 2$ را بیابید.

حل. به کمک رابطهٔ (۴) داریم

$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6.$$

پس از (۵) نتیجه می‌شود که

$$\log_{64} 2 = \frac{1}{\log_2 64} = \frac{1}{6}.$$

در واقع، چون $\log_a x$ توانی است که عدد a باید به آن برسد تا عدد x به دست آید، می‌توان $\log_2 64$ و $\log_{64} 2$ را فورا" باتوجه به $2^6 = 64, 64^{1/6} = 2$ ذهنی حساب کرد.

مشتق تابع $\log_a x$ به آسانی به دست می‌آید. در واقع،

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a},$$

یا معادلا"، به کمک (۵')،

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e, \tag{۶}$$

مثال ۲. از $\log_3(\sin x)$ مشتق بگیرید.

حل. از رابطهٔ (۶) و قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dx}\log_3(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\log_3 e\,\frac{d}{dx}\sin x = \frac{\cos x}{\sin x}\log_3 e = \cot x \log_3 e.$$

مثال ۳. از $\log_x a$ مشتق بگیرید.

حل. این بار متغیر مستقل x پایهٔ لگاریتم است. بنابر (۳) و قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx}\log_x a = \frac{d}{dx}\frac{\ln a}{\ln x} = -\frac{\ln a}{(\ln x)^2}\frac{d}{dx}\ln x = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}.$$

مثال ۴. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \tag{۷}$$

حل. این یک صورت مبهم $0/0$ است که آن را با قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{D_x\log_a(1+x)}{D_x x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log_a e}{1+x} = \log_a e.$$

اگر $a = e$، فرمول (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1. \tag{۸}$$

به بیان دیگر، چون

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x},$$

معلوم می‌شود که حد (۸) در واقع مشتق $\ln x$ در نقطهٔ $x = 1$ است؛ درنتیجه،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{d\ln x}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{x}\bigg|_{x=1} = 1.$$

به عنوان تمرین، فرمول (۷) را به همین نحو ثابت کنید.

مسائل

عبارات زیر را ساده کنید.

۱. $\log_2 1024$
۲. $\log_{10}(0.001)$
۳. $\log_3 \frac{1}{81}$
۴. $\log_{81} 3$
۵. $\log_{1/2}\sqrt{2}$
۶. $\log_4(0.0625)$
۷. $\log_2 3\cdot\log_3 4$
۸. $\log_5(2.5\times 10^4)$

۹. $\log_{0.1}(0.2)$

۱۰. $\log_3(\log_3 27)$

۱۱. $\log_\pi \pi x^2 \quad (x \neq 0)$

۱۲. $\log_x \pi x^2 \quad (x > 0)$

۱۳. $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

۱۴. $\log_{\sqrt{e}}(\ln e^e)$

۱۵. $\log_2(\log_2(\log_2 16))$

۱۶. $\log_2(\log_4(\log_8 64))$

۱۷. $\log_2(\log_3(\log_4 64))$

۱۸. $\log_2(3^{\ln 4})$

۱۹. نشان دهید هرگاه $b > a > 1$ یا $0 < a < b < 1$ ، آنگاه $\log_a x > \log_b x$ ، مشروط بر اینکه $x > 1$. آیا این به ازای $0 < x < 1$ نیز درست است؟

۲۰. نشان دهید هرگاه $\log_a y$ تابع خطی غیرثابتی از x باشد، آنگاه y با یک تابع نمایی از x متناسب می‌باشد.

نشان دهید که اگر ثابت تناسب مثبت باشد، عکس مطلب نیز درست است.

۲۱. اگر $\log_3 y = 1 - 2x$ ، y را به صورت تابعی از x بیان کنید. اگر $y = \frac{1}{8}(2^x)$ ، $\log_4 y$ را به صورت تابعی از x بیان نمایید.

تمام x هایی را بیابید که تابع داده شده به ازای آنها تعریف شده باشد.

۲۲. $\log_5(x+1) + \log_{0.5}(x+2)$

۲۳. $\sqrt{\log_a x}$

۲۴. $\arcsin(1-x) + \log_2(\log_2 x)$

۲۵. $\log_{10}(1 - \log_{10}(x^2 - 5x + 16))$

۲۶. $\log_2(\log_3(\log_4 x))$

۲۷. $\arcsin(\log_{10}(x/10))$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۲۸. $\log_\pi |x|$

۲۹. $x \log_{10} x$

۳۰. $x^2 \log_3 x$

۳۱. $\log_4(2^{\ln x})$

۳۲. $\dfrac{x}{\log_2 x}$

۳۳. $5^{\log_7 x}$

۳۴. نشان دهید که مشتق $\log_a(\log_b x)$ از انتخاب b مستقل است.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۳۵. $\int \log_2 x \, dx$

۳۶. $\int_1^{10} \log_{10} x \, dx$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید.

۳۷. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_3(1+2x)}{\log_2(1+3x)}$

۳۸. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_\pi(1+\sin x)}{\tan x}$

۳۹. $\lim_{x\to 0} \frac{\log_{10}(1+x)}{10^x - 1}$

۴۰. $\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(x^2+1)}{x \sin x}$

۴۱. $\lim_{x\to e} \frac{\log_2(\ln x)}{x - e}$

۴۲. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_4(\tan x)}{\log_5(\sin x)}$

۴۳. گوییم عدد a *از حیث اندازه* k مرتبه از عدد b بزرگتر است اگر $a \approx 10^k b$ ، وگوییم b از حیث اندازه k مرتبه از a کوچکتر است . این زبان بخصوص در فیزیک و زیست شناسی مفید است . اگر a از حیث اندازه k مرتبه از b بزرگتر باشد ، رابطهٔ بین $\log_{10} a$ و $\log_{10} b$ چیست ؟

۴۴. چگونه سرعت نور (186,000 میل بر ثانیه ≈)از حیث اندازه با سرعت صوت (1150 فوت برثانیه ≈) مقایسه می‌شود ؟

۴۵. چگونه وزن یک موش(1 oz ≈)از حیث اندازه با وزن یک مرد مقایسه می‌شود ؟

۴۶. pH یک محلول آبکی با فرمول $pH = -\log_{10}[H^+]$ تعریف می‌شود ، که در آن $[H^+]$ غلظت یونهای هیدروژن است که با مل بـرلیتر سنجیده می‌شود . pH آب خالص 7 است ، محلولهای اسیدی pH کمتر از 7 دارند ، و محلولهای قلیایی pH بیشتر از 7 خواهند داشت .کاغذ لیتموس ، که رنگ‌طبیعی آن صورتی‌است ، در محلولهای‌اسیدی قرمز ودرمحلولهای‌قلیایی‌آبی می‌شود .رنگ‌کاغذلیتموس‌درمحلولی‌که $[H^+] = 4\times 10^{-9}$ قرمز می‌شود یا آبی ؟ در محلولی که $[H^+] = 0.00002$ چطور ؟

۴۷. شدت I یک موج صوتی میزان انتقال انرژی صوتی از سطح واحد عمود بر انتشار موج است . ضعیفترین صدای قابل شنیدن توسط گوش ما *آستانهٔ شنوایی* است که شدتی حدود 10^{-16} watt/cm² دارد ، حال آنکه قویترین صدای قابل تحمل توسط‌گوش ما *آستانهٔ درد* بوده و شدتی حدود 10^{-4} watt/cm² خواهد داشت . لذا ، گوش‌درمورد صداهایی واکنش دارد که شدتشان بتواند به اندازهٔ عامل 10^{12} (یک تریلیون) فرق کند . احساس *بلند بودن* ،که با L نموده می‌شود ، ظاهرا " با لگاریتم شدت I متناسب است ، و معمولا " با فرمول زیر تعریف می‌شود :

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0},$$

که در آن I_0 شدت ضعیفترین صدای قابل شنیدن است . L تعریف‌شده‌به‌این‌صورت‌با *دسیبل* سنجیده و با علامت اختصاری dB نموده می‌شود . 1-dB تغییر در بلند بودن صدا تقریبا " کمترین تغییری است که گوش انسان متوجه می‌شود . نشان دهید که اگر I در 10 ضرب شود ، L درست 10 dB افزایش می‌یابد . چه درصد افزایش در I بـه

افزایش 1-dB در L منجر می‌شود؟

۴۸. نشان دهید که، با تقریبی عالی، افزایش 3-dB در بلند بودن یک صوت نظیر دو برابر شدن شدت آن می‌باشد.

۴۹. بلند بودن صدایی که 50,000 بار شدیدتر از ضعیفترین صدای قابل شنیدن است چند دسیبل می‌باشد؟ صدایی که 200 بار از صدای قابل تحمل شدیدتر است چطور؟

۵۰. شدت صدای خش خش برگها را با بلندی حدوداً 10 dB، و نیز یک خیابان شلوغ پر ترافیک با بلندی حدوداً 70 dB را تخمین بزنید.

۵۱. در زمانهای قدیم ستارگان قابل رؤیت با چشم غیرمسلح به شش گروه تقسیم می‌شدند. به ستارگان اندازهٔ از 1 تا 6 نسبت می‌دادند که به نورانی‌ترین آنها اندازهٔ 1 و به کم نورترین آنها اندازهٔ 6 منتسب می‌کردند. امروزه این رده‌بندی تا حدود زیادی گسترش یافته، و از فرمول

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log_{10} \frac{I_1}{I_2} \qquad \text{(یک)}$$

برای ارتباط اندازه‌های m_1, m_2 با شدتهای I_1, I_2 دو ستارهٔ S_1, S_2 استفاده می‌شود. یک ستاره با اندازهٔ 1 چند بار از یک ستاره با اندازهٔ 6 نورانی‌تر است؟ ضعیفترین ستارگانی که می‌توان از آنها با تلسکوپ 200 اینچی رصدخانهٔ مونت پالومار در کالیفرنیا عکس گرفت دارای اندازه‌ای حدود 23.5 اند. این تلسکوپ چند برابر چشم غیرمسلح حساستر است؟

۵۲. نشان دهید که، با تقریبی عالی، کاهش 1 واحد از اندازهٔ یک ستاره نظیر به 2.5 برابر افزایش در شدت نور آن است.

۵۳. شعرای یمانی، نورانی‌ترین ستاره در آسمان، دارای اندازهٔ -1.4، و ستارهٔ سهیل دومین ستارهٔ روشن پس از آن، دارای اندازهٔ -0.7 است. شعرای یمانی چند برابر (برحسب شدت) سهیل روشنتر است؟

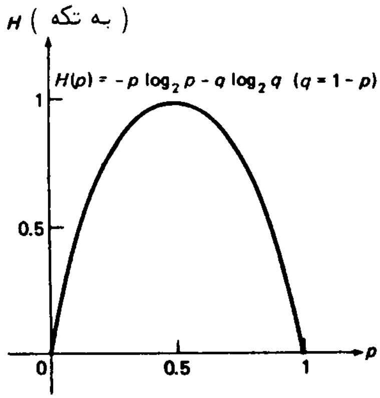
۵۴. سکه‌ای را چند بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید احتمال آنکه شیر بیاید p باشد، که p به خاطر احتمال بودن در بازهٔ $[0, 1]$ قرار دارد. در این صورت، احتمال خط آمدن $q = 1 - p$ است، و q نیز در $[0, 1]$ قرار دارد. اگر سکه سالم باشد، شیر و خط متساوی‌الممکن‌اند؛ یعنی، $p = q = \frac{1}{2}$. پس از قبل نمی‌دانیم حاصل پرتاب یک سکه چیست؛ درنتیجه، یک عدد دورقمی یا تکه لازم است تا نتیجه را به ما بگوید (مثلاً 1 برای شیرها و 0 برای خطها). هرگاه سکه کاملاً معیوب باشد مثلاً $p = 1$، لذا حاصل هر پرتاب شیر باشد، آنگاه از قبل نتیجهٔ پرتاب را می‌دانیم. لذا، اگر

$p = \frac{1}{2}$ ، 1 تکه اطلاعات برای رفع ابهام در باب نتیجهٔ یک پرتاب لازم است، در حالی که اگر $p = 1$ (یا $q = 1$) ، به هیچ اطلاعی در این باب نیاز نداریم. به قول کلود شانون[1]، پایه‌گذار نظریهٔ *اطلاعات*، درحالت p دلخواه، عدم قطعیت یا آنتروپی پرتاب یک سکه باید مساوی

$$H(p) = -p \log_2 p - q \log_2 q = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) \qquad \text{(دو)}$$

تکه تعریف شود، و این **مقدار** *اطلاعات* نقل شده توسط یک پیام است که نتیجهٔ پرتاب را به ما می‌دهد. طبق قرارداد، $0 \log_2 0 = 0$ ، که $H(p)$ را بر $[0, 1]$ پیوسته می‌سازد.

نشان دهید که تابع آنتروپی $H(p)$ بر $[0, 1]$ نامنفی است، ماکزیمم 1 خود را در $p = \frac{1}{2}$ و مینیمم 0 خود را در $p = 0$ یا $p = 1$ می‌گیرد. نشان دهید که $H(p)$ بر $[0, 1]$ به پایین مقعر است و نسبت به خط $p = \frac{1}{2}$ متقارن می‌باشد. نمودار $H(p)$ در شکل ۹ نموده شده است، و تمام این ویژگیها را نشان می‌دهد.



شکل ۹

۵۵. فرض کنید در پرتاب یک سکهٔ معیوب احتمال آمدن شیر دو برابر خط باشد. چقدر اطلاعات به شما داده شده است؟

۵۶. در نظریهٔ اطلاعات نشان داده شده که در یک پیام که حاصل یک آزمایش تصادفی با N نتیجهٔ متساوی‌الاحتمال را بازگو می‌کند $\log_2 N$ تکه اطلاعات وجود دارند. فرض

---

1. Claude Shannon

کنید به شما روز تولد یک شخص کاملا" بیگانه گفته شده باشد. چقدر اطلاعات به شما داده شده است؟ (از سالهای کبیسه صرف‌نظر کنید.)

۵.۶ تابع توانی کلی؛ مطالب دیگر در باب صور مبهم

ما از قبل معنی x^a به ازای a ی گویا را می‌دانیم. در واقع، هرگاه $a = m/n$ که درآن m و $n > 0$ صحیح‌اند، آنگاه x^a یعنی

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}. \qquad (۱)$$

حال می‌خواهیم به x^a درحالتی که a گنگ است معنی بدهیم. تعریف مناسب عبارت است از

$$x^a = e^{a \ln x} \qquad (x > 0), \qquad (۲)$$

که در آن باید x را مثبت فرض کرد؛ درنتیجه، $\ln x$ تعریف نشده است.

فرمول (۲) ازدیدگاه‌جبری‌چیزی‌جزفرمول (۱۳)، صفحهٔ ۵۰۷، نیست که در آن نقشهای a و x باهم عوض شده‌اند، ولی رفتار x^a، به عنوان تابعی از x، کلا" با رفتار a^x فرق دارد.

تابع (۲)، به نام *تابع توانی کلی*، بر $(0, \infty)$ پیوسته بوده و، وقتی a عدد گویای m/n باشد، مقدار $\sqrt[n]{x^m}$ را می‌گیرد. برای مشاهدهٔ این امر، $a = m/n$ را در (۲) گذارده به دست می‌آوریم

$$x^{m/n} = e^{(m/n) \ln x} = e^{mn^{-1} \ln x}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$(x^{m/n})^n = (e^{mn^{-1} \ln x})^n = e^{mn^{-1} n \ln x} = e^{m \ln x} = (e^{\ln x})^m,$$

و لذا،

$$(x^{m/n})^n = x^m,$$

که با فرمول (۱) معادل می‌باشد. اما اگر a گنگ باشد، نمی‌توان a را به صورت نسبت دو عدد صحیح مانند m/n نمایش داد؛ و درنتیجه، فرمول (۲) تنها راه تعریف x^a می‌باشد.

تبصره. فرض‌کنیم $a = m/n$ عدد گویای تحویل ناپذیری بوده و $n > 0$ فرد باشد. دراین صورت، فرمول (۱) از فرمول(۲)، که به ازای n های مثبت باآن یکی است، فراتر می‌رود، زیرا $x^{m/n}$ را به ازای x منفی و $x = 0$ (در این حالت $0^{m/n} = 0$) اگر $m > 0$ نیز تعریف می‌کند. در واقع، هرگاه n فرد باشد، آنگاه $x^{m/n}$ همان جفتی m را دارد؛ یعنی، $x^{m/n}$ یک تابع زوج است اگر m زوج باشد و یک تابع فرد است اگر m فرد باشد. اما فرمول (۱)

$x^{m/n}$ را به ازای x منفی و n زوج تعریف نمی‌کند ، زیرا در این صورت m فرد است (به یا آورید که m/n تحویل ناپذیر است) ؛ و درنتیجه ، اگر x منفی باشد ، x^m نیز منفی بوده $\sqrt[n]{x^m}$ یعنی ریشهٔ زوج گرفتن از عددی منفی که غیرممکن می‌باشد .

لذا ، به توانهای گنگ x مانند $x^{\sqrt{2}}$ و x^e معنی بخشیده‌ایم . از (۲) نتیجه می‌شود که

$$x^{-a} = e^{-a \ln x} = \frac{1}{e^{a \ln x}},$$

و لذا ،

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}. \qquad (۳)$$

به‌علاوه ، هرگاه a و b اعداد حقیقی دلخواهی باشند ، آنگاه

$$(x^a)^b = (e^{a \ln x})^b = e^{ab \ln x},$$

یعنی ،

$$(x^a)^b = x^{ab}. \qquad (۴)$$

به همین نحو ،

$$x^a x^b = e^{a \ln x} e^{b \ln x} = e^{a \ln x + b \ln x} = e^{(a+b) \ln x},$$

درنتیجه ،

$$x^a x^b = x^{a+b}. \qquad (۵)$$

همچنین ، بنابر (۳) ،

$$\frac{x^a}{x^b} = x^a x^{-b},$$

و لذا ، به کمک (۵) داریم

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}. \qquad (۶)$$

فرمولهای (۴) تا (۶) چیزی جز صورتهایی از قوانین نماها در صفحهٔ ۵۰۷ نیستند .

رفتار x^a به علامت نمای a بستگی اساسی دارد (حالت $a = 0$ استثنایی‌است ، زیرا $x^0 \equiv 1$) . فرض کنیم $t = a \ln x$ ؛ درنتیجه ، (۲) شکل فشردهٔ $x^a = e^t$ را به خود می‌گیرد . هرگاه $a > 0$ ، آنگاه t با $\ln x$ همعلامت بوده ، و

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} x^a = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty \qquad (a > 0), \qquad (۷)$$

زیـرا $x \to 0^+$ ایجاب می‌کند کـه $t \to -\infty$ ، حال آنکه $x \to \infty$ ایجاب می‌کند کـه $t \to \infty$. از اولین فرمول واضح است که هرگاه تعریف کنیم

$$0^a = 0 \qquad (a > 0),$$

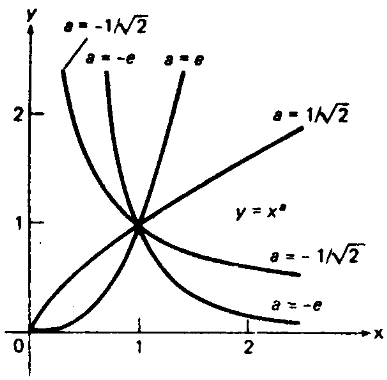
آنگاه تابع x^a ، که ابتدا فقط بر بازهٔ باز $(0, \infty)$ تعریف شده‌است ، بر بازهٔ بستـهٔ $[0, \infty)$ پیوسته می‌باشد . بنابراین ، به ازای a ی مثبت ، تعریف تعمیم یافتهٔ زیر را می‌پذیریم :

$$x^a = \begin{cases} e^{a \ln x} \text{ ، } & x > 0 \text{ اگر} \\ 0 \text{ ، } & x = 0 \text{ اگر} \end{cases} \quad (a > 0).$$

از آن سو ، هرگـاه $a < 0$ ، آنگاه $t = a \ln x$ با $\ln x$ مختلف‌العلامه است ، و

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} x^a = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0 \qquad (a < 0), \tag{۷'}$$

زیرا در اینجا $x \to 0^+$ ایجاب می‌کند کـه $t \to \infty$ ، حال آنکه $x \to \infty$ ایجاب می‌کند که $t \to -\infty$. ایـن تفاوت اساسی رفتار تابع x^a به ازای $a > 0$ و رفتار به ازای $a < 0$ در شکل ۱۰ نموده شده است ، که در آن x^a به‌ازای $a = \pm 1/\sqrt{2}, \pm e$ رسم شده است . ما برای a مقادیر گنگ اختیار کرده‌ایم که برای آنها استفاده از $x^a = e^{a \ln x}$ لازم اســت . ایـن‌امر که تمام منحنیهای $y = x^a$ از نقطهٔ $(1, 1)$ می‌گذرند و نقطهٔ مشترک دیگری ندارنـد را چطور به حساب می‌آورید ؟



شکل ۱۰

برای مشتقگیری از تابع x^a ، از تعریف و قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده می‌کنیــم . این نتیجه می‌دهد که اگر $x > 0$ ،

$$\frac{d}{dx} x^a = \frac{d}{dx} e^{a \ln x} = e^{a \ln x} \frac{d}{dx} (a \ln x) = x^a \frac{a}{x} = a \frac{x^a}{x}$$

که، پس از استفاده از (۶) به ازای $b = 1$، به صورت سادهٔ زیر درمی‌آید:

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}, \tag{۸}$$

ما از فرمول (۸) در حالت a ی گویا استفاده کرده‌ایم، و حال می‌بینیم به ازای a ی گنگ نیز درست است. مثلاً،

$$\frac{d}{dx} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},$$

$$\frac{d}{dx} x^e = ex^{e-1},$$

و غیره. از (۸) فوراً نتیجه می‌شود که به ازای مقادیر گویا و گنگ x،

$$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1)$$

مثلاً،

$$\int x^\pi\, dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + C.$$

حالت $a = -1$ زحمتی ندارد، زیرا

$$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

پس می‌توان از هر توان **حقیقی** x مشتق و انتگرال گرفت.

مثال ۱. از x^x مشتق بگیرید.

حل. داریم

$$\frac{d}{dx} x^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln x} = e^{x \ln x} \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x(\ln x + 1).$$

به‌طور معادل، با مشتقگیری لگاریتمی داریم

$$\frac{d}{dx} x^x = x^x \frac{d}{dx} \ln x^x = x^x \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x(\ln x + 1).$$

مثال ۲. نشان دهید که به ازای a ی دلخواه

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x-1}=a \tag{۹}$$

حل. این یک صورت مبهم $0/0$ است که می‌توان آن را با قاعدهٔ هوپیتال و فرمول (۸) رفع ابهام کرد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{D_x(x^a-1)}{D_x(x-1)}=\lim_{x\to 1}ax^{a-1}=a.$$

قبلاً در صفحهٔ ۴۹۲ نشان دادیم که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\qquad \lim_{x\to 0^+}x\ln x=0.$$

دو مثال بعدی نشان می‌دهد که این فرمولها در صورت تعویض x با هر توان مثبتی از x برقرار می‌مانند.

مثال ۳. نشان دهید که به ازای هر $a>0$،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0 \tag{۱۰}$$

حل. این یک صورت مبهم ∞/∞ است که می‌توان آن را با قاعدهٔ هوپیتال و استفاده از (۸) و فرمول دوم (۷) رفع ابهام کرد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{D_x\ln x}{D_x x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0.$$

بنابر (10)، وقتی $x\to\infty$ ، $\ln x$ از هر توان مثبتی از x ، **ولو کوچک**، کندتر رشد می‌کند. به عنوان مثال،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{0.001}}=0.$$

مثال ۴. نشان دهید که به ازای هر $a>0$،

$$\lim_{x\to 0^+}x^a\ln x=0$$

حل. این بار صورت مبهم $0\cdot\infty$ داریم که آن را به کمک مثال قبل و جانشانی $x=1/t$ رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^a \ln\frac{1}{t} = -\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t^a} = 0.$$

صور مبهم 0^0 ، ∞^0 ، و 1^∞ . در صفحهٔ ۲۹۷ گفتیم که 0^0 ، ∞^0 ، و 1^∞ صور مبهمی می‌باشند . حال در وضعی هستیم که این ابهامات را بررسی نماییم . فرض کنیم F و G توابع پیوسته‌ای باشند که F مثبت نیز بوده و حد عبارت $[F(x)]^{G(x)}$ را وقتی $x\to a$ در نظر می‌گیریم . (طبق معمول ، در صور مبهم فقط برای راحتی می‌نویسیم $x\to a$ ، وموارد دیگر عبارتند از $x\to a^+$ ، $x\to a^-$ ، $x\to\infty$ ، و $x\to -\infty$.) در این صورت ،

$$\lim_{x\to a}[F(x)]^{G(x)} = \lim_{x\to a} e^{G(x)\ln F(x)} = e^L, \tag{11}$$

که در آن

$$L = \lim_{x\to a}[G(x)\ln F(x)], \tag{12}$$

مشروط بر اینکه حد L موجود و متناهی باشد . این نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۱۱ ، صفحهٔ۱۴۱، به ازای $f(x) = G(x)\ln F(x)$ و $g(x) = e^x$ می‌باشد . (به آسانی معلوم می‌شود که حد (۱۱) در صورت $L=\infty$ مساوی ∞ و در صورت $L=-\infty$ مساوی 0 است .) اما (۱۲) ، و در نتیجه (۱۱) ، درصورتی که یکی از $\ln F(x)$ یا $G(x)$ به صفر و دیگری به بی‌نهایت نزدیک شود ، مبهم است . این می‌تواند به سه طریق رخ دهد ؛ یعنی ،

(یک) $F(x)\to 0^+$ ، یا معادلاً" $\ln F(x)\to -\infty$ ، و $G(x)\to 0$ ؛

(دو) $F(x)\to\infty$ ، یا معادلاً" $\ln F(x)\to\infty$ ، و $G(x)\to 0$ ؛

(سه) $F(x)\to 1$ ، یا معادلاً" $\ln F(x)\to 0$ ، و $G(x)\to\infty$ ،

که به ترتیب نظیر بـه صورمبهم 0^0 ، ∞^0 ، و 1^∞ می‌باشند . لذا ، محاسبهٔ این صور به رفع ابهام از $0\cdot\infty$ تحویل می‌شود .

مثال ۵ . $\lim_{x\to 0^+} x^x$ را حساب کنید .

حل . برای رفع ابهام از صورت 0^0 ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{x \to 0^+} x \ln x.$$

اما از قبل می‌دانیم‌که $L = 0$ ؛ و درنتیجه،

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

مثال ۶. $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$ را حساب کنید.

حل. این بار صورت مبهم ∞^0 را داریم. باتوجه به اینکه

$$\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = \lim_{x \to \infty} e^{(1/x) \ln x} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x},$$

فورا" خواهیم داشت

$$\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = e^0 = 1,$$

زیرا همانطور که از قبل می‌دانیم $L = 0$.

مثال ۷. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ را حساب کنید.

حل. حال صورت مبهم 1^∞ را داریم. چون

$$(1 + x)^{1/x} = e^{(1/x) \ln (1 + x)},$$

می‌بینیم که

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x}.$$

اما، بنابر مثال ۴، صفحه۵۱۷، $L = 1$ ؛ و درنتیجه،

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e^1 = e. \qquad (۱۳)$$

مثال ۸. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ را حساب کنید.

حل. این مجددا "یک صورت مبهم 1^∞ است"؛ و در واقع، صورت دیگری است از حد مطرح شده در مثال قبل. با جانشانی $t = 1/x$ معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{1/t},$$

و لذا، به کمک (۱۳)،

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{۱۴}$$

اگر مقادیر x را به اعداد صحیح مثبت محدود کنیم، فرمول مهم زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{۱۴'}$$

که e را به صورت حد یک "دنبالهٔ نامتناهی" بیان می‌کند. در مثال ۱۱، صفحه ۷۹۲، در معنی این فرمول بیشتر سخن خواهیم گفت.

مثال ۹. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ را درصورتی حساب کنید که a عدد دلخواهی باشد.

حل. برای رفع ابهام از این صورت 1^∞، جانشانی $t = a/x$ را انجام داده به دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{a/t} = \lim_{t\to 0^+} e^{(a/t)\ln(1+t)} = e^L,$$

که در آن

$$L = \lim_{t\to 0^+} a\,\frac{\ln(1+t)}{t} = a\cdot 1 = a.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a. \tag{۱۵}$$

به ازای $a = 1$، این رابطه به فرمول (۱۴) تحویل می‌شود.

تبصره. فرمول (۱۳) در صورت تعویض $x\to\infty$ با $x\to-\infty$ برقرار می‌ماند. در واقع،

با جانشانی $x = -t$ خواهیم داشت

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{a}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{t}\right)^t}$$

$$= \frac{1}{\lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{a}{t}\right)^t} = \frac{1}{e^{-a}},$$

و درنتیجه،

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a. \qquad (۱۵')$$

سود مرکب. همانطور که اینک نشان می‌دهیم، فرمول (۱۵) کاربرد مالی مهمی دارد. فرض کنیم پول با نرخ سود سالانهٔ r، یا معادلاً" $100r$ درصد، n بار در سال مرکب شود. فرض کنیم A_i پول موجود در بانک در آخر دورهٔ سوددهی i م بوده، و هیچ پولی بعداز پس‌انداز اولیه برداشت نشده باشد. در این صورت،

$$A_{i+1} = A_i + A_i \frac{r}{n} = A_i \left(1 + \frac{r}{n}\right), \qquad (۱۶)$$

زیرا سود روی مقدار موجود و با نرخ r، یعنی نرخ اسمی، تقسیم بر n، یعنی تعداد ترکیب سود در سال، محاسبه می‌شود. البته مقدار اولیهٔ A_0 سرمایهٔ P است. پول موجود در بانک پس از t سال پول موجود پس از nt دورهٔ سوددهی است. برای محاسبهٔ این پول، که آن را با A نشان می‌دهیم، از فرمول (۱۶) مکرر استفاده کرده، به دست می‌آوریم

$$A = A_{nt} = A_{nt-1}\left(1 + \frac{r}{n}\right) = A_{nt-2}\left(1 + \frac{r}{n}\right)\left(1 + \frac{r}{n}\right) = A_{nt-2}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$$

$$= \cdots = A_1\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt-1} = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

بنابراین،

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}, \qquad (۱۷)$$

زیرا $A_0 = P$.

حال فرض کنیم سود به طور پیوسته مرکب شود؛ یعنی، تعداد دفعاتی که سود مرکب در سال حساب می‌شود بزرگتر و بزرگتر شود؛ درنتیجه، زمان بین محاسبهٔ سود مرکب کمتر

و کمتر گردد . در این صورت ، مقدار موجودی پس از t سال عبارت است از

$$A = P \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$

یا معادلاً ، پس از قرار دادن $x = nt$ ،

$$A = P \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{rt}{x}\right)^{x}.$$

اما حد سمت راست چیزی جز حد (۱۵) به ازای $a = rt$ نیست . بنابراین ،

$$A = Pe^{rt}. \qquad (۱۸)$$

با این می‌توان عدد e را به زبان مالی تعبیر کرد؛ فرض کنیم $1\$ با سود 100% و به طور پیوسته مرکب سپرده بگذاریم . در این صورت ، $P = \$1$ ، $r = 1$ ، و موجودی پس از 1 سال درست e دلار می‌شود؛ یعنی ، با نزدیکترین سنت ، $2.72\$.

مثال ۱۰ . فرض کنیم $P = \$1000$ ، $r = 0.06\ (6\%)$ ، و $t = 1$ سال . مقادیر A ی داده شده با فرمول (۱۷) را به‌ازای مقادیر مختلف n (تعداد ترکیبها در سال) با مقدار A ی داده شده با فرمول (۱۸) برای ترکیب پیوسته مقایسه نمایید .

حل . نتایج در جدول زیر برای سال ، شش ماه ، چهار ماه ، ماهانه ، روزانه ، و ترکیب پیوسته (آخری با ∞ نموده شده است) ذکر شده‌اند :

n	1	2	4	12	365	∞
A	\$1060.00	\$1060.90	\$1061.36	\$1061.68	\$1061.83	\$1061.84

واضح است که تمایز بین ترکیب روزانه (که بعضی از بانکها انجام می‌دهند) و ترکیب پیوسته اهمیت پولی چندانی ندارد .

مثال ۱۱ . چقدر پول را اکنون به سپرده بگذاریم تا 4 سال بعد $10,000\$ پس‌انداز داشته باشیم مشروط براینکه نرخ سالانهٔ سود 5% و به طور پیوسته مرکب شود؟

حل . با حل معادلهٔ (۱۸) نسبت به P ، معلوم می‌شود که

$$P = \frac{A}{e^{rt}} = Ae^{-rt}. \qquad (۱۸')$$

با قرار دادن $A = \$10{,}000$ ، $r = 0.05$ ، و $t = 4$ در این فرمول ، با نزدیکترین سنت‌به

دست می‌آوریم

$$P = \$10{,}000e^{-0.2} = \$8187.31$$

به زبان مالی، P *مقدار فعلی* (یا مقدار *تخفیف یافته*ٔ) **$10,000** در **4** سال با نرخ به‌طور پیوسته مرکب شدهٔ **5%** نامیده می‌شود .

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۱. $x^a \ln x$
۲. $x^a e^x$
۳. $x^a a^x$
۴. $x^\pi 5^x$
۵. $x^{1/x}$
۶. $x^{\sqrt{x}}$
۷. $(\ln x)^x$
۸. $x^{\ln x}$
۹. $x^{\tan x}$
۱۰. $(\ln x)^{\ln x}$
۱۱. $(\sin x)^{\cos x}$
۱۲. x^{x^2}
۱۳. e^{x^x}
۱۴. x^{e^x}
۱۵. x^{4^x}
۱۶. x^{x^x}

۱۷. تحقیق کنید که

$$\int x^{a-1} \ln x \, dx = \frac{x^a \ln x}{a} - \frac{x^a}{a^2} + C \qquad (a \neq 0).$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱۸. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
۱۹. $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

۲۰. نشان دهید هرگاه $\log_a y$ یک تابع خطی غیرثابت از $\log_a x$ باشد ، آنگاه y با یک تابع توانی از x متناسب است . نشان دهید که عکس مطلب درصورتی درست‌است‌که ثابت تناسب مثبت باشد .

۲۱. اگر $\log_2 y = \pi \log_2 x - 1$ ، y را به صورت تابعی از x بیان کنید . اگر $y = 9x^{\sqrt{2}}$ ، $\log_3 y$ را به صورت تابعی از $\log_3 x$ بیان نمایید .

۲۲. نشان دهید که معادلهٔ $x^a = a^x$ $(a > 0)$ جواب غیربدیهی دارد ، یعنی جوابی غیراز $x = a$ دارد ، اگر و فقط اگر $1 < a < e$ یا $a > e$. جواب به ازای $a = 2$ چیست؟

۲۳. فرض‌کنید a عدد حقیقی دلخواهی باشد . نشان دهید که

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty, \qquad \text{(یک)}$$

یا معادلاً "

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0.$$

(لذا، e^x از هر توان x ، ولو بزرگ، سریعتر رشد می‌کند.)

۲۴. نشان دهید که 0^∞ و ∞^∞ مبهم نیستند.

ابهام نظیر به حد داده شده را توصیف کنید. سپس حد را به کمک قاعدهٔ هوپیتال یا فرمول (۱۵) محاسبه نمایید.

۲۵. $\lim_{x\to1}\frac{x^e-1}{x^\pi-1}$

۲۶. $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}$

۲۷. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^{101}}$

۲۸. $\lim_{x\to0^+}x^{\sqrt{x}}$

۲۹. $\lim_{x\to0^+}(\sin x)^x$

۳۰. $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^a}{x}$ $(a>0)$

۳۱. $\lim_{x\to0^-}(2^{\cot x})^x$

۳۲. $\lim_{x\to0^+}x^{x\ln x}$

۳۳. $\lim_{x\to0}(1+\pi x)^{1/x}$

۳۴. $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{e}{x}\right)^x$

۳۵. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

۳۶. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)^x$

۳۷. $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x}$

۳۸. $\lim_{x\to0}(e^x+x)^{1/x}$

۳۹. $\lim_{x\to1^-}x^{x/(1-x)}$

۴۰. $\lim_{x\to0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$

۴۱. $\lim_{x\to0^+}(e^{1/x})^{\tan x}$

۴۲. $\lim_{x\to0^+}(\csc x)^x$

۴۳. سپردهٔ اولیهٔ $1000 ظرف 5 سال اگر هر چهارماه با نرخ سودسالانهٔ 8% ترکیب شود؛ اگر به‌طور پیوسته مرکب شود چقدر خواهد شد؟

۴۴. یک سپردهٔ اولیه با ترکیب پیوسته ظرف 10 سال دوبرابر می‌شود. نرخ سود سالانه چقدر است؟

۴۵. چقدر طول می‌کشد تا $15,000 با ترکیب‌پیوسته و نرخ سود سالانهٔ 7% تا $25,000؛ تا $35,000 رشد نماید؟

۴۶. مقدار فعلی $\$60,000$ در 5 سال با نرخ سود سالانهٔ 9% و ترکیب پیوسته چقدر است؟ با همان نرخ ولی ترکیب ماهانه چقدر است؟

۴۷. ارزش V نوشابه‌ای با زمان و طبق فرمول $V = V_0 e^{\sqrt{t}/5}$ (t به سال) افزایش می‌یابد. نوشابه همین طور که فروخته می‌شود صاحب آن پولش را در بانکی که نرخ سالانه‌اش r درصد و با ترکیب پیوسته است سپرده می‌گذارد. ظرف چند سال باید نوشابه فروش رود تا سپرده ماکزیمم گردد؟

۴۸. اگر n تعداد ترکیبها در سال باشد،

$$r_E = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 \qquad \text{(دو)}$$

نرخ سود (سالانهٔ) موثر، در مقابل نرخ سود (سالانهٔ) اسمی r، را توجیه نمایید.

نرخ سود موثر نظیر به نرخ اسمی داده شده را بیابید:

۴۹. 8% با ترکیب شش ماهه

۵۰. 7.2% با ترکیب ماهانه

۵۱. 6.5% با ترکیب پیوسته

۵۲. اگر ترکیب چهارماهه؛ ماهانه؛ پیوسته باشد، چه نرخ سود اسمی نرخ موثر 8% را " سالانه " می‌سازد؟

۶.۶ معادلات دیفرانسیل جدایی‌پذیر؛ رشد و تحلیل نمایی

برای آماده شدن بیشتر جهت بررسی تابع نمایی و کاربردهای آن، کمی منحرف شده معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول به شکل

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (g(y) \neq 0) \qquad (1)$$

را بررسی می‌کنیم. در اینجا $f(x)$ و $g(y)$ دو تابع پیوستهٔ معلوم بوده، و $y = y(x)$ تابع مجهولی است که مشتقپذیر فرض می‌شود. ویژگی اصلی معادلهٔ (۱) این است که $g(y)$ تابعی از متغیر *وابستهٔ* y می‌باشد. گوییم هر معادله به شکل (۱) *متغیرهای از هم جدا* شده دارد، و معادله‌ای را که بتوان به این شکل درآورد *جدایی‌پذیر* می‌نامیم. مثلاً، معادلهٔ $y' = y^3 \sin x$ جدایی پذیر است، و این را می‌توان فوراً با اختیار $f(x) = \sin x$ و $g(y) = 1/y^3$ مشاهده کرد، ولی معادلهٔ $y' = \sin xy$ جدایی‌پذیر نمی‌باشد.

برای حل (۱) ابتدا طرفین معادله را در $g(y)$ ضرب می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (2)$$

سپس می‌بینیم که طرف چپ (۲) چیزی جز مشتق $G(y) = G(y(x))$ نسبت به x نیست، که در آن $G(y)$ یک پادمشتق $g(y)$ می‌باشد. در واقع، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{dG(y)}{dx} = \frac{dG(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = g(y)\frac{dy}{dx}.$$

لذا، (۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{dG(y)}{dx} = f(x). \qquad (۳)$$

حال، با انتگرالگیری از طرفین (۳) نسبت به x، خواهیم داشت

$$G(y) = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C, \qquad (۴)$$

که در آن $F(x) = \int f(x)\,dx$ یک پادمشتق ثابت $f(x)$ بوده، و C ثابت دلخواه انتگرالگیری است. توجه کنید که اگر $g(y) \equiv 1$، می‌توان $G(y) = y$ را اختیار کرد. در این صورت، معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به $y' = f(x)$، و معادلهٔ (۴) به فرمول (۶)، صفحهٔ ۴۲۵، برای جواب عمومی $y' = f(x)$ تحویل می‌شود.

جداسازی متغیرها. به صورت دیگر، با ضرب طرفین (۱) در $g(y)\,dx$ و تعبیر dy/dx به صورت خارج قسمت دیفرانسیلها، معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx, \qquad (۱')$$

که در آن طرف چپ فقط شامل متغیر y و طرف راست فقط شامل متغیر x می‌باشد. بدین معنی است که **متغیرها هم در (۱') و هم در معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۱) *از هم جدا شده‌اند***، و فرایندی که ما را از (۱) به (۱') می‌برد ***جداسازی متغیرها*** نام دارد. حال اگر از طرفین (۱') انتگرال بگیریم، به دست می‌آوریم

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C,$$

که چیزی جز نوشتن (۴) به صورتی دیگر نیست. در نگاه اول به نظر می‌رسد که در این استدلال از قاعدهٔ زنجیره‌ای دوری می‌شود، ولی واقعاً این طور نیست، زیرا $y = y(x)$ متغیر وابسته بوده و دیفرانسیل آن $dy = y'(x)\,dx$ می‌باشد.

توجه کنیدکه معادلهٔ (۴) به صورتی که هست تابع $y = y(x)$ را به *طور ضمنی* تعریف می‌کند، ولی در بسیاری از حالات می‌توان به آسانی (۴) را نسبت به y و به صورت تابع صریحی از x حل کرد. در هر حالت، معادلهٔ (۴)، یا معادلهٔ حاصل از (۴) با حل

نسبت به y ، **جواب عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل (۱) نامیده می‌شود . جواب عمومی شامل ثابت دلخواه انتگرالگیری C بوده ،و برای یافتن جواب خصوصی (۱) صادق درشرط اولیهٔ

$$y(x_0) = y_0 \tag{۵}$$

باید ثابت C را تعیین کنیم . با گذاردن $x = x_0, y = y_0$ در (۴) و حل معادلهٔ حاصل نسبت به C ، فوراً معلوم می‌شود که

$$C = G(y_0) - F(x_0).$$

این جواب خصوصی منحصر به فرد است . در واقع ، هرگاه y در معادلهٔ دیفرانسیل (۱) و شرط اولیهٔ (۵) صدق کند ، آنگاه ، همانطور که با جانشانی C در (۴) دیدیم، $G(y) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$. اما ،طبق فرض، $dG(y)/dy = g(y)$؛ درنتیجه ، $G(y)$ یکنواو لذا یک به یک است . پس فقط یک جواب از (۱) وجود دارد که در (۵) صدق می‌کندو آن عبارت است از $y = G^{-1}(F(x) + G(y_0) - F(x_0))$ ، که درآن G^{-1} تابع معکوس G می‌باشد.

مثال ۱ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \tag{۶}$$

صادق در شرط اولیهٔ

$$y(0) = 3 \tag{۶'}$$

را بیابید .

حل. با این فرض‌که y هیچگاه صفر نیست ،طرفین (۶) را در dx/y ضرب می‌کنیم .ازاین معادلهٔ

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

نتیجه می‌شود ، که در آن متغیرها از هم جدا شده‌اند . سپس با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx + k,$$

درنتیجه ،

$$\ln|y| = x^2 + k.$$

در اینجا ثابت دلخواه انتگرالگیری‌را با k نشان می‌دهیم و C را برای کارهای بعدی‌ذخیره

می‌کنیم . با گرفتن نمایی از طرفین معادلهٔ اخیر ، معلوم می‌شود که

$$|y| = e^{x^2+k} = e^k e^{x^2} = Ce^{x^2}, \qquad (۷)$$

که در اینجا $C = e^k$ ثابت مثبت دلخواه است (چرا؟) . تابع $y = y(x)$ پیوسته است (زیرا مشتقپذیر است) و هرگز صفر نیست . بنابراین ، y به‌ازای جمیع x هامتحدالعلامه است ، که اگر باید (۶') برقرار باشد ، مثبت می‌باشد . لذا ، $y = |y|$ و (۷) به صورت

$$y = Ce^{x^2}$$

در می‌آید . باگذاردن $x = 0$ و $y = 3$ در این فرمول فورا" خواهیم داشت $C = 3$. ازاینرو جواب خصوصی مطلوب معادلهٔ (۶) خواهد بود $y = 3e^{x^2}$.

تبصره . فرمول $y = Ce^{x^2}$ درصورتی جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل (۶) است کـه شرط مثبت بودن C را لغو کرده و اجازه دهیم C هر مقدار ، مثبت ، منفی ، یا صفر ، به خود بگیرد . در واقع ، چون e^{-x^2} ناصفر بوده و

$$\frac{d}{dx}(ye^{-x^2}) = \left(\frac{dy}{dx} - 2xy\right)e^{-x^2},$$

رابطهٔ (۶) برقرار است اگر و فقط اگر مشتق ye^{-x^2} صفر باشد؛ یعنی ، اگـر و فقط اگر $ye^{-x^2} = C$ ، یـا معادلا" $y = Ce^{x^2}$ که در آن C یک ثابت دلخواه است .

رشد و تحلیل نمایی . حال آماده‌ایم مسائل رشد و تحلیل نمایی را حل کنیم . فرض کنیم بستگی یک متغیر ، مثـلا" y ، به متغیر دیگر ، مثلا" t (نوعا" زمان) ، با فرمول

$$y = y_0e^{rt} \qquad (۸)$$

داده شده‌باشد ،که در آن $y_0 > 0$ و r ثابت باشند . دراین صورت ، میزان تغییر $y = y(t)$ نسبت به زمان t عبارت است از مشتق

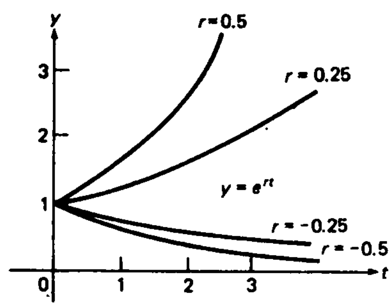
$$\frac{dy}{dt} = y_0re^{rt}.$$

لذا ، y در معادلهٔ دیفرانسیل‌سادهٔ

$$\frac{dy}{dt} = ry \qquad (۹)$$

صدق می‌کند؛ یعنی ، *میزان تغییر متغیر y با مقدار y متناسب می‌باشد* . اگر r مثبت‌باشد ، تابع (۸) یک‌تابع صعودی از t است ،زیرا دراین‌صورت به‌ازای هر t ، $dy/dt = y_0re^{rt} > 0$

و گوییم y به‌طور نمایی با t رشد می‌کند، یا y یک تابع به‌طور نمایی صعودی از t است. از آن سو، اگر r منفی باشد، رابطهٔ (۸) یک تابع نزولی از t است، زیرا در این صورت به ازای هر t، $dy/dt = y_0re^{rt} < 0$، و گوییم y به طور نمایی با t به تحلیل می‌رود (یا افت می‌کند) یا y یک تابع به طور نمایی نزولی از t است. در شکل ۱۱ این تفاوت اساسی بین رفتار توابع به‌طور نمایی صعودی و به‌طور نمایی نزولی نموده شده است، که در آن



شکل۱۱۰

نمودار تابع e^{rt} به ازای $r = \pm0.25, \pm0.5$ بر بازهٔ $0 \le t < \infty$ در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است. اگر $r = 0$ چه رخ می‌دهد؟

با قرار دادن $t = 0$ در "قانون نمایی" (۸) معلوم می‌شود که

$$y(0) = y_0 \qquad (y_0 > 0). \tag{۹'}$$

لذا، ثابت y_0 چیزی جز *مقدار اولیهٔ* y، یعنی مقدار y در $t = 0$، نیست و می‌بینیم که (۸) جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل (۹) است که در شرط اولیهٔ (۹') صدق می‌کند. این را می‌توان مستقیماً با جداسازی متغیرها نیز نشان داد. (این کار را با استفاده از همان دلایل مثال ۱ ولی با (۹) به جای (۶) و $\int r\,dt = rt$ به جای $\int 2x\,dx = x^2$ به عنوان تمرین انجام دهید.)

از (۹) نتیجه می‌شود که

$$r = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}, \tag{۱۰}$$

یا معادلاً

$$r = \frac{d}{dt}\ln y, \tag{۱۰'}$$

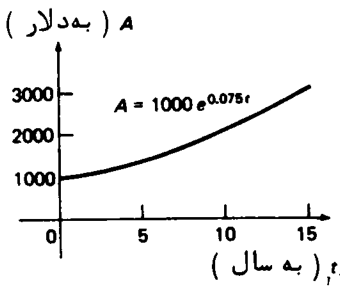
یعنی، r *مشتق لگاریتمی* y می‌باشد. لذا، r میزان تغییر y نبوده، بلکه میزان تغییر y

بخش بر مقدار " جاری " y می‌باشد . به عبارت دیگر ، r به جای آنکه میزان رشد "مطلق" dy/dt باشـــد ، میزان رشد نسبی یا کسری (۱۰) می‌باشد . علی‌رغم این تمایز مهم ، در مسائلی که ابهام ایجاد نشود ، r را اغلب **میزان رشد** (یا فقط میزان) می‌نامند .

مثال ۲ . همانطور که در صفحهٔ ۵۳۰ دیدیم ، هرگاه سپردهٔ اولیهٔ P دلار به نـرخ سـود سالانهٔ r به طور پیوسته مرکب شود ، آنگاه پول موجود پس از t سال در بانک مساوی است با

$$A = Pe^{rt} \tag{۱۱}$$

دلار . لذا ، A به طور نمایی با زمان رشد می‌کند ، و میزان رشد (نسبی) چیزی جز نرخ سود r نیست . در شکل ۱۲ نمودار (۱۳) در طی سالهای بسیار به ازای سپردهٔ اولیهٔ $1000 و نرخ سود 7.5% رسم شده است .



شکل ۱۲

رشد جمعیت . نظریهٔ رشد نمایی کاربردهای مهمی در مبحث زیست‌شناسی جمعیتی دارد . فرض‌کنیم $N = N(t)$ اندازهٔ جمعیتی از ارگانیسمهای زنده (باکتریها ، حشرات مردم ، و غیره) در لحظهٔ t باشد . اگرچه N را تابع پیوسته‌ای می‌گیریم ، ولی مقادیر N فقط می‌توانند اعداد صحیح باشند . چون N نوعا " بسیار بزرگ است ، خطای حاصل از این تقریب قابل چشم‌پوشی است . فرض‌کنیم جمعیت به میزان رشد نسبی r به‌طور نمایی رشدنماید . در این صورت ،

$$N = N(t) = N_0e^{rt}, \tag{۱۲}$$

که در آن N_0 اندازهٔ جمعیت در لحظهٔ $t = 0$ است . البته ، تابع N چیزی جز جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt} = rN \tag{۱۳}$$

صادق در شرط اولیهٔ

$$N(0) = N_0 \tag{۱۳'}$$

نیست .

معادلهٔ دیفرانسیل (۱۳) می‌گوید که میزان تغییر اندازهٔ جمعیت در هر لحظه با اندازهٔ جمعیت در آن لحظه متناسب است . این دست کم در شرایط عادی و برای دوره‌های محدودی از زمان موجه است . در واقع ، از یک سو داریم

$$\frac{dN}{dt} = B - D, \tag{۱۴}$$

که در آن B و D به ترتیب میزانهای تولد و مرگ (مطلق) می‌باشند . از آن سو ، هر دوی B و D اغلب با اندازهٔ جمعیت متناسب‌اند (تعداد زایشگاهها و قبرستانها در شهرهای بزرگ بیشتر از شهرهای کوچک می‌باشد) ، و در این صورت $B - D$ نیز با N متناسب است . از مقایسهٔ (۱۳) و (۱۴) معلوم می‌شود که

$$r = \frac{B - D}{N}.$$

به عبارت دیگر ، میزان نسبی رشد جمعیت مساوی مازاد سرانهٔ میزان تولد بر میزان مرگ است .

زمان مضاعف سازی . یک جمعیت که دارای رشد نمایی به میزان r است اندازه‌اش در هر دوره از زمان به طول

$$T = \frac{\ln 2}{r} \tag{۱۵}$$

دوبرابر می‌شود $(\ln 2 \approx 0.6931)$ ، و به این دلیل T را ***زمان مضاعف سازی*** جمعیت می‌نامیم. در واقع ، از (۱۲) نتیجه می‌شود که

$$N(t + T) = N_0e^{r(t+T)} = N_0e^{rt}e^{rT} = e^{rT}N(t).$$

لذا ، به ازای هر $t \geq 0$ ، $N(t + T) = 2N(t)$ اگر و فقط اگر

$$e^{rT} = 2,$$

که با (۱۵) معادل است .

در مسائل میزانهای رشد سالانه ، r معمولاً به صورت درصد در سال بیان می‌شود . در این صورت ، فرمول (۱۵) به تقریب

$$T = \frac{100 \ln 2}{r} \approx \frac{69}{r} \text{ سال} \tag{۱۵'}$$

برای زمان مضاعف‌سازی میل می‌کند . مثلا" ، اگر میزان رشد سالانه ثابت و برابر 3% باشد ، جمعیت یک کشور حدودا" $69/3 = 23$ سال دوبرابر می‌شود ، پول موجود در بانک با نرخ سود سالانهٔ 7.5% و به‌طور پیوسته مرکب حدودا" $69/7.5 = 9.2$ سال دوبرابر می‌شود (ر.ک. شکل ۱۲) ، و از این قبیل .

مثال ۳ . یک نوع باکتری که زیاد روی آن مطالعه شده و معمولا" در جهاز هاضمهٔ انسان زندگی می‌کند یک ارگانیسم تک سلولی است به نام *اشریچیاکولی*[1] (مختصرا" *ای کولی*) . تحت شرایط ایده‌آل ، یک سلول ای‌کولی به جرم تقریبا" 5×10^{-13} گرم ، حدود 20 دقیقه پس از " تولد " تحت *انشقاق دوپی* ، یعنی تقسیم به دو سلول ، به طور غیرجنسی تکثیر می‌شود . چقدر طول می‌کشد تا یکی از این باکتریها کشتی به جرم 3 گرم تولید کند مشروط براینکه تکثیر با همین میزان ادامه یابد .

حل . در اینجا طبیعی است به جای تعداد سلولها در کشت از جرم کشت صحبت کنیم . پس از t دقیقه رشد ، جرم کشت به گرم عبارت است از

$$m = m(t) = m_0 e^{rt},$$

که در آن m_0 جرم اولیهٔ آن‌است ،که مساوی 5×10^{-13} g است ، و r میزان رشدمی‌باشد . فرض کنیم t_1 زمان لازم برای رسیدن وزن کشت به 3 g باشد . در این صورت ،

$$m_0 e^{rt_1} = 3,$$

یا معادلا"

$$t_1 = \frac{1}{r} \ln \frac{3}{m_0}.$$

به‌علاوه ، چون $T = 20$ min ، فرمول (۱۵) ایجاب می‌کند که

$$r = \frac{\ln 2}{20}.$$

بنابراین ،

$$t_1 = \frac{20}{\ln 2} \ln \frac{3}{m_0} = \frac{20}{\ln 2} \ln \frac{3}{5 \times 10^{-13}} = \frac{20}{\ln 2} \ln (6 \times 10^{12})$$

$$= 20 \frac{\ln 6 + 12 \ln 10}{\ln 2} \approx 849 \text{ min} = 14.15 \text{ hr}.$$

---

1. *Escherichia coli*

تحلیل رادیواکتیو. حال به مسائل *تحلیل* نمایی می‌پردازیم ، که تحلیل رادیواکتیو نمونهٔ بارز آن است . فرض‌کنیم $m = m(t)$ جرم یک مادهٔ رادیواکتیو ، مانند رادیم ، درلحظهٔ t باشد . در این صورت ، وقتی ماده به خاطر ناپایداری هستهٔ اتمهای سازای آن‌تجزیه‌شود ، میزان از بین رفتن جرم آن در هر لحظه با جرم باقیماندهٔ ماده متناسب است . لـذا ، m در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند :

$$\frac{dm}{dt} = rm,$$

که در آن r ثابت‌است .چون r منفی است (جرم ناپدید می‌شود) ، می‌نویسیم $r = -k$ که در آن k عدد مثبتی‌است به‌نام *ثابت تحلیل*. بنابراین ، برای یافتن تابـع $m = m(t)$ باید معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

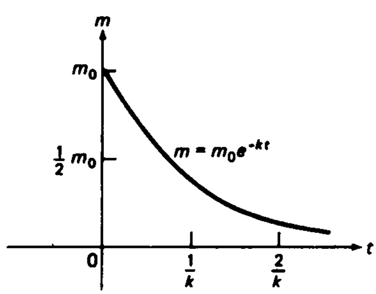
را با شرط‌اولیهٔ

$$m(0) = m_0$$

حل کنیم ، که در آن m_0 جرم ماده در لحظهٔ $t = 0$ اســت .با جداسازی متغیرها (یا صرفا " با امتحان) معلوم می‌شود که

$$m = m(t) = m_0 e^{-kt} \qquad (۱۶)$$

جواب این مسئلهٔ مقدار اولیه است . لذا ، جرم مادهٔ رادیواکتیو به‌طور نمایی و به میزانی که با ثابت k تعیین‌می‌شود به تحلیل می‌رود (هرقدر k بزرگتر باشد ،تحلیل‌سریعتراست) . در شکل ۱۳ تابع (۱۶) رسم شده است ، که در آن t با واحدهای $1/k$ سنجیده می‌شود .



شکل ۱۳

نیمه عمر. یک مادهٔ رادیواکتیو ، با ثابت تحلیل k ، نصف جرم خود را در هر دوره از

زمان به طول

$$T = \frac{\ln 2}{k} \qquad (۱۷)$$

از دست می‌دهد، و به این دلیل T (که اغلب به صورت $T_{1/2}$ نوشته می‌شود) نیمه عمر ماده نام دارد. در واقع، از (۱۶) نتیجه می‌شود که

$$m(t+T) = m_0 e^{-k(t+T)} = m_0 e^{-kt} e^{-kT} = e^{-kT} m(t).$$

لذا، به ازای هر $t \geq 0$، $m(t+T) = \frac{1}{2} m(t)$ اگر و فقط اگر

$$e^{-kT} = \frac{1}{2},$$

که با (۱۷) معادل است. به تشابه کامل بین فرمول (۱۷) برای نیمه عمر و فرمول (۱۵) برای زمان مضاعف سازی توجه نمایید.

مثال ۴. چقدر طول می‌کشد تا 99% از نمونه‌ای از استرونتیوم 90 ناپدید شود؟ نیمه عمر استرونتیوم 90، که ماده‌ٔ رادیواکتیو خطرناکی است، 28.1 سال می‌باشد.

حل. ناپدید شدن 99% از نمونه یعنی جرم اولیهٔ m_0 به $\frac{1}{100} m_0$ تحلیل رفته است. بنابراین، اگر t_1 زمان لازم برای تحلیل 99% از نمونه باشد، داریم

$$m_0 e^{-kt_1} = \frac{1}{100} m_0,$$

یا معادلاً

$$t_1 = \frac{\ln 100}{k}.$$

اما، طبق فرمول (۱۷)،

$$k = \frac{\ln 2}{28.1},$$

و درنتیجه،

$$t_1 = 28.1 \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 186.7 \text{ سال}$$

مسائل

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را با جداسازی متغیرها حل کنید.

۱. $x\dfrac{dy}{dx}+y=0,\ y(2)=1$

۲. $x\dfrac{dy}{dx}=y^2+1,\ y(-1)=1$

۳. $2xy\dfrac{dy}{dx}+y^2+1=0,\ y(1)=2$

۴. $x^3\dfrac{dy}{dx}=2y,\ y(\sqrt{\log_2 e})=3$

۵. $(x^2+x)\dfrac{dy}{dx}=2y+1,\ y(1)=0$

۶. $(e^x+1)y\dfrac{dy}{dx}=e^x,\ y(0)=1$

۷. $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+y^2+1=0,\ y(3)=2$

۸. $x\dfrac{dy}{dx}+y\ln y=0,\ y(1)=e$

۹. یک منحنی از نقطهٔ $(0, 2)$ گذشته و دارای این خاصیت است که شیب آن در هر نقطه P سه برابر عرض P است. این منحنی چیست؟

۱۰. یک منحنی دارای این خاصیت است که قائم به آن در هر نقطه از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد. نشان دهید که منحنی دایره‌ای به مرکز A (یا قوسی از این دایره) است.

۱۱. فرض کنید شعاع R یک بالون به میزان 2.5% بر دقیقه به‌طور نمایی افزایش یابد. مساحت سطح S بالون چه رفتاری دارد؟

۱۲. یک جمعیت که رشد نمایی دارد اندازه‌اش در 50 سال دوبرابر می‌شود. میزان رشد سالانهٔ آن چقدر است؟

۱۳. نشان دهید هرگاه T زمان مضاعف‌سازی یک جمعیت با رشد نمایی و اندازهٔ N باشد، آنگاه $N=N_0 2^{t/T}$ که در آن N_0 اندازهٔ اولیهٔ جمعیت است.

۱۴. یک جمعیت با رشد نمایی ظرف 5 سال 20% افزایش می‌یابد. زمان مضاعف‌سازی چقدر است؟

۱۵. جمعیت جهان که در سال 1980، 4.5 بیلیون بوده به میزانی حدود 1.8% در سال به‌طور نمایی رشد می‌کند. اگر رشد با همین میزان ادامه یابد، جمعیت جهان را در

سال 2010 تخمین بزنید .

۱۶ . فرض کنید مصرف کل به میزان $r\%$ در سال به‌طور نمایی رشد داشته باشد ، در حالی که جمعیت به میزان $s\%$ در سال به‌طور نمایی رشد می‌کند . مصرف سرانه چه رفتاری دارد ؟

۱۷ . تعداد باکتریهای یک کشت در هر 15 دقیقه دوبرابر می‌شود . چقدر طول می‌کشد تا 500 باکتری یک میلیون شود ؟

۱۸ . تعداد باکتریهای یک کشت در لحظهٔ t مساوی است با $N = 1500(2^{2.5t})$ ، که در آن t به ساعت است . زمان بین انشقاقهای متوالی باکتریها چقدر است ؟

۱۹ . یک کشت شامل دو نوع باکتری است ، نوع A و نوع B . باکتریهای نوع A (با انشقاق دویی) در هر ساعت تکثیر می‌شوند ، حال آنکه باکتریهای نوع B هر 2 ساعت تکثیر می‌گردند . پس از 2 ساعت کشت شامل 3.5 برابر تعداد اولیهٔ باکتریهاست . ترکیب اولیهٔ کشت را بیابید . کشت پس از 4 ساعت چه رشدی یافته است ؟

۲۰ . قدرت خرید دلار را پس از ده سال تورم به میزان 8% در سال بیابید . با 12% در سال چقدر است ؟ (تورم را نمایی بگیرید .)

۲۱ . بهای نان در سال 1936 دانه‌ای 10¢ و در 1986 دانه‌ای $1.35 بوده است . میزان تورم سالانه را در این دورهٔ 50 سال تخمین بزنید .

۲۲ . چقدر طول می‌کشد تا یک نمونه از پلوتونیم 239 ، 90% رادیواکتیو خود را از دست بدهد ؟ (نیمه عمر پلوتونیم 239 تولید شده در راکتورهای هسته‌ای از نوع "تکثیرکن" 24,360 سال است .)

۲۳ . یکدهم یک مادهٔ رادیواکتیو طی 20 سال ناپدید می‌شود . نیمه عمر ماده چقدر است؟

۲۴ . اگر 30% یک مادهٔ رادیواکتیو ظرف 10 روز ناپدید شود ، چقدر طول می‌کشد تا 60% آن ناپدید گردد ؟

۲۵ . فرض کنید $C = C(t)$ غلظت یک داروی خوردنی در خون باشد . همین طور که بدن اثر دارو را از بین می‌برد ، C به میزانی متناسب با مقدار آن در هر لحظه کاهش می‌یابد ؛ یعنی ،

$$\frac{dC}{dt} = -kC \qquad (k > 0),$$

که در آن عدد k به **ثابت حذف** دارو معروف است . اگر غلظت اولیه C_0 باشد ، غلظت آن در لحظهٔ t چقدر است ؟ اگر حذف نیمی از دارو 36 ساعت طول بکشد ، چقدر طول می‌کشد تا بدن 95% دارو را حذف نماید ؟

۲۶ . داروهای رادیواکتیو اغلب به عنوان " ردیاب " در تشخیصهای طبی به‌کارمی‌روند . فرض کنید به بیماری یک خوراک ردیاب رادیواکتیو با نیمه‌عمر 8 روز داده باشیم ، و نصف دارو طی 2 روز توسط متابولیسم بدن حذف‌شود (متابولیسم مستلزم فرایندهای بیوشیمی بوده و ربطی به رادیواکتیو که در رابطه با فرایندهای هسته‌ای است‌ندارد). چقدر طول می‌کشد تا رادیواکتیو بدن بیمار تا 1% مقدار اولیه افت کند ؟ این‌کار در صورت عدم حذف توسط متابولیسم چقدر طول خواهد کشید ؟

۲۷ . مقدار متوسط رادیم پوستهٔ زمین تقریبا " 1 اتم در 10^{12} است . آیا این فرض‌که‌رادیم فعلی از رادیم بیشتری در گذشته به جا مانده معقول است ؟ جواب خود را توضیح دهید . (نیمه‌عمر رادیم 1620 سال است .)

کربن 14 رادیواکتیو (*رادیو کربن*) با نیمه‌عمر 5730 سال به‌وسیلهٔ عمل‌اشعهٔ کیهانی روی ازت در طبقات بالای جو مرتب تولید می‌شود . رادیو کربن ، در ترکیب با دی اکسید کربن ، با طبقات پایین جو مخلوط شده و ابتدا توسط گیاهان در طول‌فتوسنتز و سپس توسط جانورانی که گیاهان را می‌خورند جذب می‌شود . گیاهان و جانوران تا وقتی زنده‌اند رادیو کربن تازه دریافت می‌کنند ، ولی وقتی مردند فرایند متوقف شده و رادیو کربن موجود در نسوج آنها به کندی تجزیه شده و طی 5730 به نصف مقدار اصلی می‌رسد . این امر ما را به روشی به نام *تاریخ‌گذاری رادیو کربن* می‌رساند که در باستان‌شناسی برای تخمین سن اشیاء عتیقه بسیار مهم است . مثلا " ، سن یک نقره از دوران مومیایی را می‌توان از مقایسهٔ مقدار رادیواکتیو نقره با رادیواکتیو موجود در یک قطعه چوب تازه‌ازهمان‌نوع‌واندازه مقایسه کرد . با همین روش بود که سن طومارهای دریای مرده حدود 2000 سال تخمین زده شد .

۲۸ . فرض کنید یک شمارشگر گایگر[1] از یک نمونهٔ کربن‌دار به سن مجهول x در یک‌دوره‌از زمان m تحلیل را نشان دهد ، و در همین دوره از زمان در یک نمونهٔ فعلی مشابه n تحلیل را نشان دهد $(n > m)$. نشان دهید که

$$x = \text{سال } \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{n}{m} \qquad \text{(یک)}$$

۲۹ . مغز یک درخت عظیم کاج حدودا " 75% رادیواکتیو چوب خارجی جوانتر را دارد . سن درخت را تخمین بزنید .

۳۰ . ذغال چوب و استخوان جانوران به‌دست‌آمده از یک خرابهٔ ماقبل تاریخ دارای 55%

---

1. Geiger

رادیواکتیو نمونه‌های معاصر مشابه است. سن خرابه را تخمین بزنید.

فرض کنیم در تحلیل هر اتم مادهٔ رادیواکتیو A با ثابت تحلیل a یک اتم از مادهٔ رادیو اکتیو جدید B با ثابت تحلیل $b\ (\neq a)$ تولید می‌شود. همچنین، $m_A = m_A(t)$ جرم مادهٔ A و $m_B = m_B(t)$ جرم مادهٔ B در لحظهٔ t باشد. در این صورت، چون از بین رفتن A به ایجاد B منجر می‌شود، این فرایند تحلیل با دو معادلهٔ دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{dm_A}{dt} = -am_A,$$

$$\frac{dm_B}{dt} = am_A - bm_B.$$

۳۱. معادلهٔ اول را تحت شرط اولیهٔ $m_A(0) = m_0$ نسبت به m_A حل کنید، که m_0 جرم اولیهٔ مادهٔ A است، و m_A را از معادلهٔ دوم حذف نمایید. سپس معادلهٔ دیفرانسیل حاصل نسبت‌به m_B را در e^{bt} ضرب و آن را تحت شرط اولیهٔ $m_B(0) = 0$ حل کنید (هیچ B ای در آغاز وجود ندارد).

۳۲. نشان دهید که بزرگترین مقدار m_B مساوی $m_0(b/a)^{b/(a-b)}$ است که در لحظهٔ

$$t = \frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b}$$

گرفته می‌شود.

۳۳. اگر نیمه‌عمر A مساوی 100 سال و نیمه‌عمر B مساوی 150 سال‌بوده و نمونه‌ای‌که‌ابتدا تمام A بوده اینک شامل A و B به میزان مساوی باشد، نمونه چند سال سن دارد؟ بزرگترین مقدار m_B چقدر است و چه وقت رخ می‌دهد؟

۳۴. نشان‌دهید هرگاه‌نیمه‌عمر A از نیمه‌عمر B کمترباشد، آنگاه‌وقتی $t \to \infty$، $m_B/m_A \to \infty$؛ درنتیجه، نمونه‌ای که ابتدا تمام A است بالاخره تقریبا" تمام B می‌شود. اگر نیمه عمر A بیشتر از نیمه‌عمر B باشد، چه رخ می‌دهد؟

۷.۶ چند کاربرد دیگر نماییها

رشد لژیستیک (اختیاری). در بخش اخیر دیدیم که معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt} = rN \qquad (1)$$

$(r > 0)$ تحت شرط اولیهٔ

$$N(0) = N_0 \qquad (1')$$

منجر به رشد جمعیت طبق قانون نمایی

$$N = N(t) = N_0 e^{rt} \tag{۲}$$

می‌شود. فرمول (۲) به " انفجار جمعیت " منجر می‌شود، که در آن جمعیت در زمان بسیار کوتاهی به هر سطحی که بخواهیم می‌رسد. مثلاً "، میزان رشد سالانهٔ 3% جمعیت یک کشور پس از 4 زمان مضاعف سازی، یعنی 92 سال = (23)4، 16 برابر می‌شود. البته، رشد جمعیت به‌خاطر کمبود غذا، شیوع بیماریهای واگیردار، عدم باروری به جهت جمعیت بیش از حد، جنگ برای منابع بتدریج کاهش یافته، و غیره، باید کند شود. خواهیم دید که این اثرات " جمعیت بیش‌از حد " را می‌توان در بسیاری از حالات با معرفی جملهٔ اضافی $-sN^2$ در طرف راست معادلهٔ (۱) به طرز جالبی توصیف کرد، که در آن s (مانند r) ثابت مثبتی می‌باشد. (برای توضیح نحوهٔ پیدایش این جمله، ر.ک. مسئلهٔ ۸.) در این صورت، معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر رشد به‌جای (۱) خواهد بود

$$\frac{dN}{dt} = rN - sN^2, \tag{۳}$$

و تحت همان شرط اولیهٔ ('۱) می‌باشد.

برای حل معادلهٔ دیفرانسیل (۳)، متغیرها را جدا کرده و انتگرال می‌گیریم. این نتیجه می‌دهد که

$$\int \frac{dN}{rN - sN^2} = \int dt + c = t + c, \tag{۴}$$

که در آن c ثابت انتگرالگیری است. محاسبهٔ انتگرال سمت چپ آسان است. با فرض

$$N_1 = \frac{r}{s}, \tag{۵}$$

داریم

$$\int \frac{dN}{rN - sN^2} = -\frac{1}{s}\int \frac{dN}{N^2 - \frac{r}{s}N} = -\frac{1}{s}\int \frac{dN}{N(N - N_1)}.$$

پس فرمول (۵)، صفحهٔ ۴۹۹، قابل اعمال است (به ازای $a = 0, b = -N_1$)، و به‌رابطهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\int \frac{dN}{rN - sN^2} = \frac{1}{sN_1} \ln\left|\frac{N}{N - N_1}\right| = \frac{1}{r} \ln\left|\frac{N}{N - N_1}\right|.$$

لذا ، (۴) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\ln\left|\frac{N}{N-N_1}\right| = rt + k,$$

که در آن $k = rc$ ، یا

$$\left|\frac{N}{N-N_1}\right| = Ce^{rt},$$

که در آن $C = e^k$. با اعمال شرط اولیهٔ $N(0) = N_0$ ، به دست می‌آوریم

$$C = \left|\frac{N_0}{N_0-N_1}\right|,$$

درنتیجه ،

$$\left|\frac{N}{N-N_1}\right| = \left|\frac{N_0}{N_0-N_1}\right|e^{rt}.$$

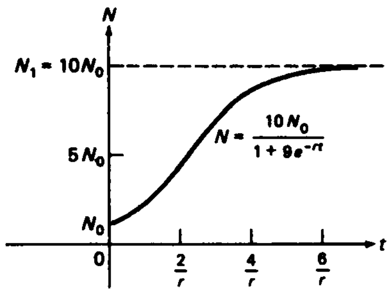
حال می‌توان علایم قدرمطلق را حذف کرد ، زیرا N و N_0 هر دو مثبت بوده و $N - N_1$ و $N_0 - N_1 = N(0) - N_1$ متحدالعلامه می‌باشند (در محاسبهٔ انتگرال تلویحاً " فرض شده بود که به ازای هر $t \geq 0$ ، $N - N_1 \neq 0$). با این کار و حل نسبت به N ، پس از چند عمل سرراست معلوم می‌شود که

$$N = \frac{N_1e^{rt}}{e^{rt} + \left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right)},$$

یا معادلاً "

$$N = \frac{N_1}{1 + \left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}. \qquad (۶)$$

با فرض $N_1 > N_0$ (حالات دیگر در مسائل ۹ و ۱۰ بحث شده‌اند) ، می‌بینیم که مخرج تابع $N = N(t)$ تعریف شده با (۶) مشتق منفی دارد ؛ و درنتیجه ، یک تابع نزولی است . پس نتیجه می‌شود که N یک تابع صعودی می‌باشد . با رسم این تابع ، منحنی S‑شکل آمده در شکل ۱۴ را در حالت $N_1 = 10N_0$ به دست می‌آوریم . اکنون رشد جمعیت محدود شده است ، زیرا وقتی $t \to \infty$ ، نمایی e^{-rt} به صفر نزدیک می‌شود ؛ درنتیجه ، (۶) به *اندازهٔ* حدی یا *پایدار* جمعیت N_1 نزدیک می‌شود که از فرمول (۵) به دست می‌آید.



شکل ۱۴

توجه کنید که N_1 از اندازهٔ اولیهٔ جمعیت N_0 مستقل است. در واقع، N_1 اندازهٔ جمعیتی است که در آن طرف راست معادلهٔ دیفرانسیل (۳) مساوی صفر است؛ یعنی، در آن میزان مرگ با میزان تولد یکی است. اعتبار **قانون رشد لژیستیک** (۶) با آزمایشات بسیار نه فقط با جمعیتهای بشری، بلکه با جمعیتهای آزمایشی از قارچها، تک یاخته‌ها، و مگسها، تأیید شده است. همچنین، از این قانون برای توصیف رشد ارگانیسمهای چندسلولی استفاده شده است.

مثال ۱. یک جمعیت از قانون رشد لژیستیک (۶)، با $N_1 > 2N_0$، تبعیت می‌کند. چه وقت میزان رشد جمعیت ماکزیمم است؟

حل. میزان رشد جمعیت مشتق dN/dt است که با معادلهٔ دیفرانسیل (۳) داده می‌شود. به خاطر (۵) می‌توان (۳) را به شکل

$$\frac{dN}{dt} = s(NN_1 - N^2) = sP(N) \qquad (۳')$$

نوشت، که برحسب چندجمله‌ای درجهٔ دوم

$$P(N) = NN_1 - N^2$$

می‌باشد. چون $s > 0$، میزان رشد dN/dt وقتی ماکزیمم است که $P(N)$ ماکزیمم باشد. با مشتقگیری از $P(N)$ نسبت به N، معلوم می‌شود که

$$P'(N) = \frac{d}{dN}(NN_1 - N^2) = N_1 - 2N.$$

بنابراین، $P'(N)$ مثبت است اگر $N_0 \le N < \frac{1}{2}N_1$، صفر است اگر $N = \frac{1}{2}N_1$، و منفی

است اگر $\frac{1}{2}N_1 < N < N_1$ (N هرگز به مقدار N_1 نمی‌رسد) . از آزمون مشتق‌اول معلوم می‌شود که $P(N)$ در $N = \frac{1}{2}N_1$ ماکزیمم موضعی (و مطلق) اکیدی مساوی

$$P\left(\frac{1}{2}N_1\right) = \frac{1}{2}N_1^2 - \frac{1}{4}N_1^2 = \frac{1}{4}N_1^2$$

دارد . امـا $dN/dt = sP(N)$ ؛ و درنتیجه ، dN/dt به عنوان تابعی از N نیز در $N = \frac{1}{2}N_1$ ماکزیممی مساوی

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{N=\frac{1}{2}N_1} = sP\left(\frac{1}{2}N_1\right) = \frac{1}{4}sN_1^2 = \frac{1}{4}rN_1$$

دارد . این ماکزیمم در لحظهٔ t_1 که $N = \frac{1}{2}N_1$ به دست می‌آید ، همچنین ، بنا بر آزمون یکنوایی ، $P(N)$ بر $[N_0, \frac{1}{2}N_1]$ صعودی و بر $[\frac{1}{2}N_1, N_1)$ نزولی است ؛ و درنتیجه ، همین امر در مـورد dN/dt ، به عنوان تابعی از N ، درست است .

برای یافتن زمان t_1 که در آن $N = \frac{1}{2}N_1$ ، ملاحظه می‌کنیم که در لحظهٔ t_1 مخـرج فرمول (۶) برای N مساوی 2 است . بنابراین ،

$$1 + \left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right)e^{-rt_1} = 2,$$

یا معادلا "

$$e^{rt_1} = \frac{N_1}{N_0} - 1. \qquad (۷)$$

با حل نسبت به t_1 به دست می‌آوریم

$$t_1 = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right). \qquad (۸)$$

به ازای تابع لژیستیک شکل ۱۴ ، نظیر به حالت $N_1 = 10N_0$ ، در می‌یابیم که

$$t_1 = \frac{\ln 9}{r} \approx \frac{2.2}{r}.$$

در این لحظه $N = 5N_0$ و dN/dt مقدار ماکزیمم خود را دارد ، که مساوی $2.5rN_0$ است .

از رابطهٔ (۷) معلوم می‌شود که (۶) را می‌توان به شکل دیگر نوشت:

$$N = \frac{N_1}{1 + e^{-r(t-t_1)}}. \qquad (۶')$$

تابع $N = N(t)$ دارای نقطهٔ عطف در $t = t_1$ اسـت (مشروط براینکه $N_1 > 2N_0$) . در

واقع ،همانطورکه‌مثال ۱ نشان‌داده ، dN/dt ،به‌عنوان تابع N ، بر $[N_0, \frac{1}{2}N_1]$صعودی‌و بر $[\frac{1}{2}N_1, N_1)$ نزولی‌است .اما N یک تابع صعودی از t بر $[0, \infty)$ بوده ، و $N(t_1) = \frac{1}{2}N_1$ پس نتیجه می‌شود کــه dN/dt ، به عنوان تابعی از t ، بر $[0, t_1]$ صعودی و بر $[t_1, \infty)$ نزولی است . بنابراین ،همانطور که شکل ۱۴ در حـــالت $N_1 = 10N_0$ نشان می‌دهد ، N بر $[0, t_1]$ به بالا و بر $[t_1, \infty)$ به پایین مقعر بوده و در $t = t_1$ نقطهٔ عطف دارد .

مثال ۲ . مثال ۳ ، صفحهٔ ۵۴۱ ، را از دیدگاه واقعی‌تری بررسی کرده ، فرض می‌کنیـــم رشد کشت باکتریها به جای نمایی لژیستیک بوده و جرم حدی 3 گرم باشد . چقدر طول می‌کشد تا جرم کشت کسر q $(0 < q < 1)$ از جرم حدی خود را دارا شود ؟

حل . فرض کنیم $m = m(t)$ جرم کشت پس t دقیقه از رشد لژیستیک باشد . در این‌صورت بنابر مشابهٔ فرمول (۶) برای جرم ،

$$m = m(t) = \frac{m_1}{1 + \left(\dfrac{m_1}{m_0} - 1\right) e^{-rt}},$$

که در آن $m_0 = 5 \times 10^{-13}$ g جـرم یک سلول ای‌کولی بوده و $m_1 = 3$ g جرم‌حدی‌است. هنوز داریم

$$r = \frac{\ln 2}{20},$$

زیرا این میزان رشد نسبی در غیاب هر نوع اثر جمعیت بیش از حد است $(s = 0)$. فرض کنیم T_q زمانی باشد که کشت جرم qm_1 را دارد . در این صورت ،

$$m(T_q) = \frac{m_1}{1 + \left(\dfrac{m_1}{m_0} - 1\right) e^{-rT_q}} = qm_1,$$

درنتیجه ،

$$\frac{1}{1 + \dfrac{m_1}{m_0} e^{-rT_q}} = q.$$

در اینجا $(m_1/m_0) - 1$ را با m_1/m_0 عوض کرده‌ایم بی‌آنکه حتی آن را یک تقریب بنامیم ، زیرا m_1/m_0 بی‌اندازه بزرگ اســت (6×10^{12}) . پس نتیجه می‌شود که

$$\frac{m_1}{m_0} e^{-rT_q} = \frac{1}{q} - 1,$$

که ایجاب می‌کند که

$$T_q = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{m_1}{m_0} \frac{q}{1-q}\right) = \frac{1}{r} \ln \frac{m_1}{m_0} + \frac{1}{r} \ln \frac{q}{1-q}. \qquad (۹)$$

اولین جملهٔ سمت راست زمان t_1 است که یک کشت با رشد نمایی لازم دارد تا به جرم m_1 برسد ، که در صفحهٔ ۵۴۱ معلوم شد که تقریباً" 849 min است . یک کشت بارشدلژیستیک هرگز نمی‌تواند کاملاً" به جرم m_1 برسد . در واقع ، درلحظهٔ t_1 ، جرم این کشت صرفاً" مساوی است با $\frac{1}{2}m_1 = 1.5$ g ، و این را می‌توان با فرض $q = \frac{1}{2}$ در (9) ، کـه $T_{1/2} = t_1$ را نتیجه می‌دهد ، مشاهده کرد . مقادیر نوعی T_q که از(۹) حساب می‌شوند در جدول زیر آمده‌اند . توجه کنید که چگونه به ازای q ی کوچک ، جرم کشت تقریباً" در هر 20 دقیقه‌دو

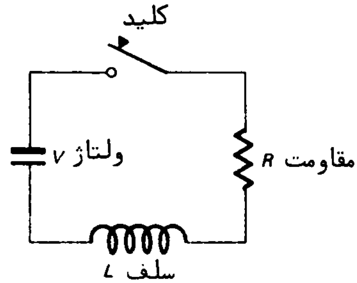
q	T_q	q	T_q
0.0005	629.7	0.25	817.3
0.0010	649.7	0.50	849.0
0.0025	676.2	0.75	880.7
0.005	696.2	0.90	912.4
0.010	716.4	0.95	933.9
0.025	743.3	0.99	981.5
0.05	764.0	0.999	1048.2
0.10	785.6	0.9999	1114.7

برابر می‌شود ، حال آنکه به ازای q های بزرگ ، جرم کشت در 20 دقیقه تغییر مختصری خواهد داشت .

چند کاربرد فیزیکی نماییها . توابع نمایی در مسائل فیزیکی بسیاری غیر از رادیواکتیویته ظاهر می‌شوند . بخصوص ، در مطالعهٔ مدارهای الکتریکی نقش مهمی دارند .

مثال ۳ . بازده شدن کلید ، منبعی (مثلاً" ، یک باطری) ولتاژ ثابت V را در مدار الکتریکی شکل ۱۵ تولید می‌کند ، که مرکب است از یک مقاومت به میزان R اهم که به یک سلف با ضریب القای L هانری به طور سری وصل شده است . شدت جریان $i = i(t)$ مدار را بیابید . (با این واحدها ، i به آمپر می‌باشد .)

حل . بنابر نظریهٔ مدارهای الکتریکی ، ولتاژ دو سر مقاومت مساوی است با Ri (قانون اهم)



شکل ۱۵

و ولتاژ دوسر سلف $L\,di/dt$ است. به‌علاوه، مجموع این دو ولتاژ باید مساوی V باشد. بنابراین، شدت جریان در معادلهٔ دیفرانسیل

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V, \tag{۱۰}$$

یا معادلاً

$$\frac{di}{dt} = \frac{R}{L}\left(\frac{V}{R} - i\right), \tag{۱۱}$$

تحت شرط اولیهٔ

$$i(0) = 0 \tag{۱۱'}$$

صدق می‌کند (قبل از زده شدن کلید در لحظهٔ $t = 0$ جریانی در مدار وجود ندارد). با جداسازی متغیرها در (۱۱) و انتگرالگیری، به دست می‌آوریم

$$\int \frac{di}{(V/R) - i} = \int \frac{R}{L}\,dt + c,$$

که در آن c ثابت انتگرالگیری است. پس نتیجه می‌شود که

$$-\ln\left|\frac{V}{R} - i\right| = \frac{R}{L}t + c.$$

چون $(V/R) - i > 0$ (چرا؟)، می‌توان علامت قدرمطلق را حذف کرده به دست آورد

$$\ln\left(\frac{V}{R} - i\right) = -\frac{R}{L}t - c.$$

بنابراین،

$$\frac{V}{R} - i = ke^{-Rt/L},$$

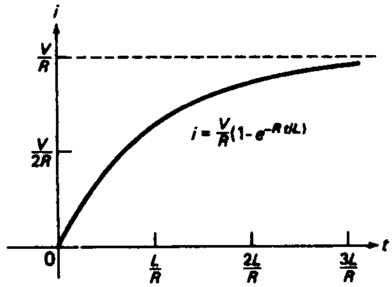
که در آن $k = e^{-c}$ ؛ یعنی ،

$$i = \frac{V}{R} - ke^{-Rt/L}.$$

با اعمال شرط اولیهٔ (۱۱') فورا" به دست می‌آید $k = V/R$. لذا ، مآلا" خواهیم داشت

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}).$$

در شکل ۱۶ رفتار i به صورت تابعی از t نموده شده است . توجه کنید که i تفاضل



شکل ۱۶

بین دو جمله است ، شدت جریان ثابت *حالت پایدار*

$$i_0 = \frac{V}{R},$$

که جواب (۱۰) در غیاب سلف است، و شدت جریان *گذرای* تحلیل به‌طور نمایی

$$i_{tr} = \frac{V}{R} e^{-Rt/L},$$

که به سرعت مستهلک می‌شود . در واقع ، در زمان $T = L/R$ ، به نام *ثابت زمانی* مدار ، تا 37% مقدار اولیه‌اش $100/e \approx$ افت می‌کند . i در تمام مقاصد عملی درمدتی تقریبا" مساوی $5T$ به مقدار حالت پایدار می‌رسد (توجه کنید که $1 - e^{-5} \approx 0.993$) .

مثال زیر طرز ظاهر شدن نماییها در مسائل مکانیک را توضیح می‌دهد .

مثال ۴ . گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ v_0 در محیطی شلیک شده است که با نیرویی متناسب با مجذور سرعت از حرکت آن جلوگیری می‌کند . سرعت v گلوله را پس از آنکه مسافت s را در محیط پیمود پیدا کنید .

حل . فرض کنیم m جرم گلوله باشد . بنابرقانون دوم حرکت نیوتن ،

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

که در آن F نیروی مقاومت محیط در برابر گلوله است . چون F با v^2 متناسب است و در جهت مخالف سرعت v عمل می‌کند ، خواهیم داشت $F=-bv^2$ ، که در آن b یک ثابت مثبت می‌باشد . بنابراین ،

$$m\frac{dv}{dt}=-bv^2,$$

درنتیجه ،

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{b}{m}v^2=-kv^2,$$

که در آن $k=b/m>0$. برای بیان v به عنوان تابعی از s ، یعنی فاصلهٔ نفوذ گلوله در محیط ، از قاعدهٔ زنجیره‌ای به همان صورت صفحهٔ ۴۲۹ استفاده کرده ، می‌نویسیم

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds}.$$

پس از دو معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که

$$v\frac{dv}{ds}=-kv^2,$$

یا معادلا "

$$\frac{dv}{ds}=-kv. \qquad (۱۲)$$

شرط اولیهٔ مناسب عبارت است از

$$v|_{s=0}=v_0, \qquad (۱۲')$$

زیرا گلوله باسرعت v_0 وارد محیط می‌شود . جواب (۱۲) صادق در (۱۲') مساوی است با

$$v=v_0e^{-ks},$$

که با امتحان یا جداسازی متغیرها به دست آمده است . لذا ، سرعت گلوله به‌طور نمایی با فاصلهٔ نفوذ s افت می‌کند . به تشابه کامل ریاضی موجود بین این مسئله و مسئلهٔ فیزیکی تحلیل رادیواکتیو توجه نمایید .

مسائل

یک جمعیت از حشرات بەطور لژیستیک و با اندازهٔ اولیهٔ 100 و اندازهٔ حدی 10,100 رشد می‌کند . فرض کنید جمعیت پس از 20 روز رشد به اندازهٔ 5050 برسد .

۱ . اندازهٔ جمعیت پس از 25 روز چقدر است ؟

۲ . اندازهٔ جمعیت پس از 30 روز چقدر است ؟

۳ . چقدر طول می‌کشد تا جمعیت به اندازهٔ 10,000 برسد ؟

۴ . زمان مضاعف سازی جمعیت در مراحل اولیهٔ رشد چقدر است ؟

یک کشت باکتری بەطور لژیستیک با جرم اولیهٔ 10^{-6} g و جرم حدی m_1 رشد می‌کند . کشت در 10 ساعت به جرم $\frac{1}{2}m_1$ و در 12 ساعت به جرم $\frac{15}{16}m_1$ می‌رسد .

۵ . جرم حدی m_1 چقدر است ؟

۶ . چه وقت کشت به 99% جرم حدی خود می‌رسد ؟

۷ . چقدر طول می‌کشد تا یک باکتری انشقاق دوبی خود را انجام دهد ؟

۸ . فرض کنید در یک جمعیت N نفرهٔ درحال رشد ،هر فرد با ریختن مواد زاید متابولیک یا مواد آلوده‌ساز دیگر در محیط‌آن را زهرآگین سازد . نشان دهید کهاثر ترکیبی این زهر ممکن است میزان رشد dN/dt را به اندازه‌ای متناسب با N^2 ، یعنی مجذور اندازهٔ جمعیت ، کاهش دهد .

راهنمایی . تعویض r با $r - sN$ در معادلهٔ (۱) را توجیه کنید .

۹ . فرض کنید اندازهٔ اولیهٔ N_0 یک جمعیت تحت تسلط معادلهٔ دیفرانسیل (۳) از $N_1 = r/s$ **تجاوز نماید** . نشان دهید که اندازهٔ جمعیت تابعی **نزولی** است‌که وقتی $t \to \infty$ ، بە مقدار حدی N_1 نزدیک می‌شود . در اینجا N_1 ***ظرفیت قابل حمل*** محیط نام دارد .

۱۰ . تابع لژیستیک (۶) را به ازای چهار مقدار $N_0 = \frac{1}{4}N_1, \frac{1}{2}N_1, N_1, 2N_1$ در یک دستگاه مختصات رسم کنید . چهار منحنی حاصل چه تفاوتی باهم دارند ؟

۱۱ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt} = sN^2 - rN, \qquad \text{(یک)}$$

که با معادلهٔ (۳) در علامت طرف راست فرق دارد ، به عنوان مدلی برای مطالعهٔ رشد جمعیت نمونه‌های به خطر افتاده به کار می‌رود . دلیلش این است که‌میزان تولد با تعداد برخوردهای بین نر و ماده‌ها در نمونه‌ها متناسب است ، کە این خود در صورتی که برخوردها تصادفی بوده و اندازه‌های جمعیت نر و ماده مساوی باشند با N^2

متناسب است. این با جملهٔ sN^2 حساب می‌شود، و جملهٔ $rN-$ نظیر ثابت سرانهٔ میزان مرگ (در غیاب اثرات جمعیت بیش از حد) می‌باشد. نشان دهید که جمعیت با اندازهٔ N تحت تسلط (یک)، اگر اندازهٔ اولیه‌اش N_0 کوچکتر از *اندازهٔ* **جمعیت بحرانی** $N_1 = r/s$ باشد، محکوم به فناست. اگر $N_0 > N_1$ چه رخ می‌دهد؟

۱۲. معادلهٔ (یک) را برای حالت $N_0 = \frac{1}{2}N_1$ حل کرده، و جواب را رسم نمایید.

۱۳. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dN}{dt} = rN - s, \qquad N(0) = N_0 \qquad \text{(دو)}$$

$(r > 0, s > 0)$ را حل کنید، که در رابطه با رشد نمایی جمعیت با میزان **مهاجرت** ثابت s است. چه شرطی بر s به " انفجار جمعیت " منجر می‌شود؟ جمعیت را در اندازهٔ ثابت نگه می‌دارد؟ به " نابودی جمعیت " منجر می‌شود؟

۱۴. جذب نور توسط آب دریا با قانون نمایی $I = I_0e^{-kx}$ توصیف می‌شود، که در آن I_0 شدت نور در سطح دریابوده و $I = I(x)$ شدت آن در عمق x است. I جواب چه مسئلهٔ مقدار اولیه است؟ ضریب k، به نام **ضریب جذب**، را درصورتی بیابید که شدت نور در عمق 5 متر یکهزارم شدت نور در سطح دریا باشد. در چه عمقی شدت نور یکصد هزارم شدت نور در سطح دریاست؟

۱۵. بنابر **قانون تبرید نیوتن**، یک جسم در دمای T به میزانی متناسب با تفاضل بین T و دمای T_1 هوای اطراف سرد می‌شود؛ یعنی،

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1) \qquad (k > 0).$$

جواب این معادلهٔ دیفرانسیل صادق در شرط اولیهٔ $T = T_0$ در لحظهٔ $t = 0$ را بیابید.

۱۶. فرض کنید دمای هوا $20°$ (سلسیوس[1]) بوده، و یک جسم گرم شده ظرف 10 دقیقه از $140°$ به $80°$ سرد شده است. چه مدت بعد جسم به $35°$ می‌رسد؟

۱۷. یک دماسنج از اطاقی که دمای $72°$ (فارنهایت[2]) دارد به خارج برده شده است. یک دقیقه بعد دماسنج $56°$ را نشان می‌دهد، و پس از یک دقیقه دیگر $44°$ را نشان می‌دهد. خارج اطاق چقدر سرد است؟ دماسنج 5 دقیقه بعد چه درجه‌ای را نشان می‌دهد.

---

1. Celsius

2. Fahrenheit

۱۸ . بشکه‌ای از آب نمک ابتدا شامل 50 lb نمک حل شده در 240 گالن آب است . برای تمیز کردن بشکه آب به میزان 6 گالن بر دقیقه وارد آن شده و محلول باهمان میزان خارج می‌شود و ضمن این محتویات بشکه را مدام هم می‌زنیم تا محلول یکنواخت داشته باشیم . چقدر طول می‌کشد تا نمک بشکه به 1 oz برسد؟

۱۹ . حرکت یک کشتی در اثر مقاومت آب که با نیرویی متناسب با سرعت کشتی از حرکت ممانعت می‌کند کند می‌شود .فرض کنید سرعت اولیهٔ کشتی (در $t = 0$) 12 ft/sec بوده ، و سرعتش در $t = 10$ sec مساوی 8 ft/sec باشد . چه وقت سرعت کشتی به 1 ft/sec افت می‌کند؟ .

۲۰ . گلوله‌ای باسرعت v_0 ft/sec یک تخته به ضخامت h فوت را سوراخ کرده و از آن با سرعت v_1 ft/sec خارج می‌شود . فرض کنید تخته در مقابل گلوله با نیرویی متناسب‌با مجذور سرعت گلوله مقاومت کند . نشان دهید که

$$T = \frac{h(v_0 - v_1)}{v_0 v_1 \ln (v_0/v_1)}$$

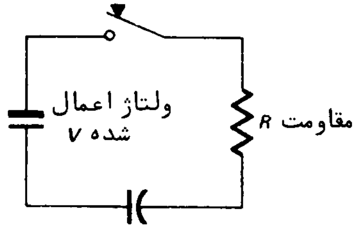
ثانیه طول می‌کشد تا گلوله‌تخته را طی‌کند . T را درصورتی بیابید که $v_0 = 600$ ft/sec ، $v_1 = 200$ ft/sec ، و $h = 6$ in .

۲۱ . حجم ، و درنتیجه جرم ، یک گلولهٔ نفتالین به میزانی متناسب با مساحت سطح‌آن کاهش می‌یابد . فرض‌کنید یک گلولهٔ نفتالین 8 گرمی در روز اول 1 گرم جرم‌خود را از دست می‌دهد . چند روز طول می‌کشد تا گلوله نصف جرم خود را از دست بدهد؟ به جرم 1 گرم برسد؟ آیا گلوله هرگز ناپدید می‌شود؟ آیا این مسئله مستلزم نماییهاست؟

۲۲ . یک باطری 12 ولتی‌ناگهان به یک مقاومت 20 اهمی و یک سلف 5 هانریی به‌طور سری وصل می‌شود . چقدر طول می‌کشد تا شدت جریان به 99% مقدار حالت پایدار خود برسد؟ آیا جواب با کهنه‌شدن باطری و از دست دادن ولتاژ خود تغییر می‌کند؟

۲۳ . با زدن کلید ولتاژ ثابت V در مدار الکتریکی شکل ۱۷ برقرار می‌شود ، که‌مرکب است از یک مقاومت به میزان R اهم که به طور سری به یک خازن به ظرفیت C فاراد وصل شده است . بار $q = q(t)$ روی خازن و شدت جریان $i = i(t)$ مدار را بیابید . (با این واحدها q به کولن و i به آمپر است .) با این مطلب شروع کنید که ولتاژ دوسر خازن q/C است .

۲۴ . یک خازن 5 میکروفاراد را با وصل یک مقاومت 2 مگ اوهم به دوسر آن خالی می‌کنیم چقدر طول می‌کشد تا به 10% مقدار اولیه‌اش افت نماید؟ آیا جواب به بار اولیهٔ



شکل ۱۷

خازن بستگی دارد؟ (10^{-6} فاراد = 1 میکروفاراد ، 10^6 اهم = 1 مگاوهم .)

۲۵ . فرض کنید هر عضو جمعیتی متعلق به یکی از دو ردهٔ A و B بوده ، و اعضای ردهٔ A بتوانند اعضای ردهٔ B را " بیمار سازند " . مثلا " ، A ممکن است مرکب از افرادی باشد که بیماری خاصی دارند و B مرکب از افرادی باشد که این بیماری را ندارند ، یا A ممکن است مرکب از افرادی باشد که شایعه‌ای را شنیده‌اند و B مرکب از افرادی باشد که این شایعه را نشنیده‌اند . فرض کنید N_A اندازهٔ ردهٔ A ، N_B اندازهٔ ردهٔ B ، و N اندازهٔ کل جمعیت باشد ؛ درنتیجه ، $N_A + N_B = N$. پس N_A در اثر تماس بین‌اعضای دورده افزایش می‌یابد ،و می‌توان انتظار داشت که میزان تغییر N_A با تعداد این تماسها متناسب است ، که این خود با حاصل‌ضرب $N_A N_B = N_A(N - N_A)$ متناسب می‌باشد .این‌امر ما را به‌معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN_A}{dt} = kN_A(N - N_A)$$

می‌رساند ، که در آن k یک ثابت مثبت است ، یا معادلا "

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - y),$$

که در آن $y = N_A/N$ کسری از جمعیت کل است که به ردهٔ A تعلق دارد . این معادله را با شرط اولیهٔ $y = y_0 < 1$ در لحظهٔ $t = 0$ حل کرده ، و نشان دهید که بیماری یا شایعه مآلا " به تمام جمعیت گسترش خواهد یافت . زمان T لازم برای آنکه نیمی از جمعیت بیمار شوند و یا شایعه را بشنوند را با این فرض که $y_0 < \frac{1}{2}$ بیابید . نقص این مدل در رابطه با مثلا " شیوع بیماری چیست ؟

۲۶ . مقدار خاکروبه یا آشغال L (مادهٔ اورگانیک مرده) در یک واحد فاعله از معادلهٔ

دیفرانسیل زیر تبعیت می‌کند:

$$\frac{dL}{dt} = I - kL,$$

که در آن I میزان ورودی‌به چینهٔ آشغال‌بوده و k میزان ثابت‌تجزیهٔ آشغال‌می‌باشد. نشان دهید که، حتی اگر تولید آشغال کم باشد، در صورت کوچک بودن k مقادیر زیادی آشغال جمع خواهد شد. (مثلاً، در جنگلهای کاج $k \approx 0.02$ ،که در آنها دماهای پایین از تجزیهٔ متابولیسم جلوگیری کرده و انباشتگی برگهای سوزنی کاج را اجازه می‌دهد.)

۸.۶ توابع هذلولوی

کسینوس و سینوس هذلولوی. حال چند تابع مربوط به نمایی را درنظر می‌گیریم که‌شایستهٔ نام خاص و مطالعهٔ جداگانه‌اند، زیرا در مسائل مربوط به محاسبهٔ انتگرالهاوحل معادلات دیفرانسیل مکرر ظاهر می‌شوند.[۱] دو تا از مهمترین این توابع عبارتند از **کسینوس هذلولوی**

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{۱}$$

و **سینوس هذلولوی**

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \tag{۲}$$

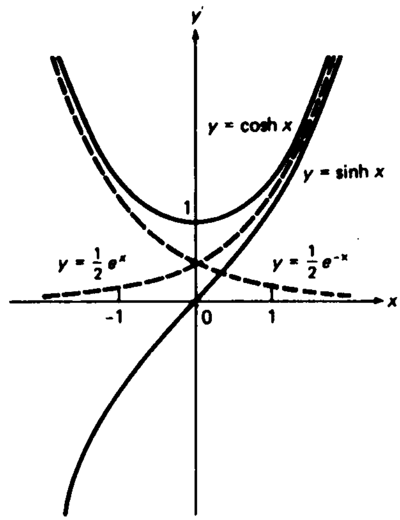
(علامت sinh معمولاً " سینه " تلفظ می‌شود). هر دوتابع e^x و e^{-x} بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و مشتقپذیر اند؛ و درنتیجه، توابع $\cosh x$ و $\sinh x$ نیز چنین‌اند. درشکل ۱۸ نمودار $\cosh x$ و $\sinh x$ همراه با نمودارهای $\frac{1}{2}e^x$ و $\frac{1}{2}e^{-x}$ برای مقایسه رسم شده‌اند. باافزودن و سپس کاستن مختصات y منحنیهای $y = \frac{1}{2}e^x$ و $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ ، ملاحظه می‌کنیم‌که $\cosh x$ به ازای هر x مثبت‌است،حال آنکه $\sinh x$ به ازای $x > 0$ مثبت و به ازای $x < 0$ منفی است. به‌علاوه، با قرار دادن $x = 0$ در فرمولهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\cosh 0 = 1, \qquad \sinh 0 = 0.$$

همچنین، توجه کنید که $\cosh x$ زوج است، زیرا

---

۱. *مثلاً ، ر.ک. مثال ۷، صفحهٔ ۱۱۱۳، که در آن با استفاده از این توابع شکل زنجیر آویزان از دو نقطهٔ آویزان به‌دست می‌آید.*



شکل ۱۸

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh x,$$

حال آنکه $\sinh x$ فرد است ، زیرا

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -\sinh x.$$

مشتقات $\cosh x$ و $\sinh x$ به آسانی به دست می‌آیند . در واقع ،

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^{x} + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}),$$

یعنی ،

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \tag{۳}$$

حال آنکه

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^{x} - e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}),$$

یعنی ،

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x. \tag{۴}$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C \tag{۳'}$$

و

$$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C. \tag{۴'}$$

چون $D_x \cosh x = \sinh x$ به ازای $x > 0$ مثبت، به ازای $x = 0$ صفر، و به ازای $x < 0$ منفی است، از آزمون یکنوایی معلوم می‌شود که $\cosh x$ بر $[0, \infty)$ صعودی و بر $(-\infty, 0]$ نزولی است. از اینرو، تابع $\cosh x$ ماکزیمم ندارد، و مینیمم مطلق خود، که مساوی 1 است، را در $x = 0$ می‌گیرد. به همین نحو، چون به ازای هر x، $D_x \sinh x = \cosh x > 0$، $\sinh x$ بر تمام بازهٔ $(-\infty, \infty)$ صعودی و بدون اکسترمم می‌باشد. این خواص $\cosh x$ و $\sinh x$ از شکل ۱۸ واضح‌اند، که شکل همچنین نشان می‌دهد که

$$\lim_{x \to \pm\infty} \cosh x = \infty,$$

حال آنکه

$$\lim_{x \to \infty} \sinh x = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty.$$

لذا، برد $\cosh x$ مساوی $[1, \infty)$ است، حال‌آنکه برد $\sinh x$ مساوی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد. لازم است برقراری این فرمولهای حدی با نتیجه‌گیری مستقیم آنها از تعاریف (۱) و (۲) تحقیق شود.

مثال ۱. از $\sinh(\cosh x)$ مشتق بگیرید.

حل. با استفاده از (۳) و (۴)، و به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم

$$\frac{d}{dx}\sinh(\cosh x) = \cosh(\cosh x)\frac{d}{dx}\cosh x = \cosh(\cosh x)\sinh x,$$

مثال ۲. $\int_0^{\ln 2} \cosh x\, dx$ را محاسبه کنید.

حل. با استفاده از (۴')، معلوم می‌شود که

$$\int_0^{\ln 2} \cosh x\,dx = \sinh(\ln 2) - \sinh 0 = \sinh(\ln 2)$$
$$= \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

مثال ۳. تقعر $\cosh x$ و $\sinh x$ را بررسی کنید .

حل. چون به ازای هر x ،

$$\frac{d^2}{dx^2}\cosh x = \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x > 0$$

از آزمون تقعر نتیجه می‌شود که $\cosh x$ بر $(-\infty, \infty)$ به بالا مقعر است . به همین نحو ، چون

$$\frac{d^2}{dx^2}\sinh x = \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

به ازای $x > 0$ مثبت، به ازای $x = 0$ صفر ، و به ازای $x < 0$ منفی است ، پس $\sinh x$ بر $[0, \infty)$ به بالا مقعر و بر $(-\infty, 0]$ به پایین مقعر است ، و یک نقطهٔ عطف در $x = 0$ دارد (ر.ک. شکل ۱۸) .

اتحادهای هذلولوی. توابع هذلولوی در چند فرمول صدق می‌کنند که با فرمولهای برقرار به وسیلهٔ توابع مثلثاتی تشابه نزدیکی دارند . مهمترین آنها عبارتنداز

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad (۵)$$

و

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \qquad (۶)$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \qquad (۷)$$

این فرمولها را می‌توان با مراجعه به تعاریف (۱) و (۲) به آسانی ثابت کرد . مثلاً ،

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(4) = 1,$$

که فرمول (۵) را ثابت می‌کند . به همین نحو ،

$$\begin{aligned}
&\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
&\quad = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) \\
&\quad = \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}) \\
&\quad = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh (x + y),
\end{aligned}$$

که (۶) را ثابت می‌کند. برهان (۷) به همین سرراستی است، و آن را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

اگر در (۶) و (۷) y را با $y-$ عوض کرده، و از زوج بودن کسینوس هذلولوی و فرد بودن سینوس هذلولوی استفاده کنیم، درمی‌یابیم که

(۶')
$$\sinh (x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$$

(۷')
$$\cosh (x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y.$$

همچنین، از تعویض y با x در (۶) و (۷) فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

(۸)
$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

تشابه بین (۶) و فرمول مثلثاتی نظیر

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

کامل است؛ برای تغییر این فرمول به (۶) کافی است sin را به sinh و cos را به cosh تغییر دهیم. از آن سو، برای به دست آوردن (۵) و (۷) از فرمولهای مثلثاتی نظیر

(۹)
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

و

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

باید علایم جملات شامل حاصل‌ضربهای سینوسها را تغییر داده و نیز sin و cos را با sinh و cosh عوض نماییم. تغییرات مشابه فرمولهای زاویهٔ مضاعف مثلثاتی

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

را به مشابه‌های هذلولوی (۸) تبدیل می‌کنند.

توابع هذلولوی از جنبه‌ای دیگر نیز شبیه توابع مثلثاتی‌اند. از فرمول (۹) معلوم می‌شود که نقطهٔ $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ بر دایرهٔ یکهٔ

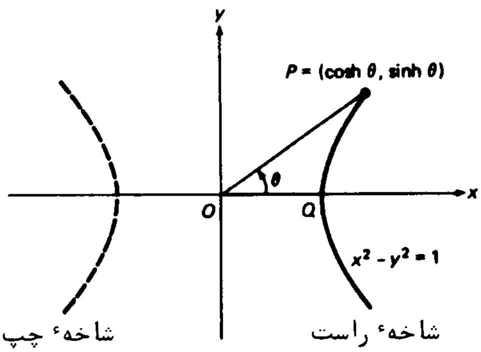
$$x^2 + y^2 = 1$$

قرار دارد [ر.ک. شکل ۱۹ (آ)]؛ ودر واقع، θ زاویهٔ بین‌شعاع OP و محور x مثبت‌است.

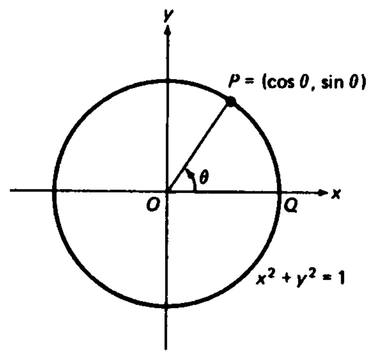
هرگاه θ به‌رادیان‌بوده‌و $0 \le \theta \le 2\pi$ ،آنگاه θ دو برابر مساحت قطاع مستدیر POQ است که به شعاع OP ، محور x ،و دایرهٔ یکه محدود است (ر.ک. فرمول (۸) ، صفحهٔ ۹۰) . به همین نحو ، از فرمول (۵) معلوم می‌شود که نقطهٔ $P = (\cosh\theta, \sinh\theta)$ بر منحنی

$$x^2 - y^2 = 1$$

قرار دارد . این منحنی ، که **هذلولی یکه** نام دارد ، دارای دو قسمت مجزا یا **شاخه**می‌باشد [ر.ک. شکل ۱۹ (ب)] ، ولی به‌خاطر شرط $\cosh\theta > 0$ می‌توان به شاخهٔ راست محدود



(ب)



(آ)

شکل ۱۹

شد . حال طبیعی است که θ را در این حالت تعبیر هندسی کنیم ، و با کمال تعجب معلوم می‌شود (ر.ک. مسئلهٔ ۳۷، صفحهٔ ۶۳۷) که θ درست دوبرابر مساحت سایه‌دار " قطاع هذلولوی" POQ است که به پاره‌خط OP ، محور x ، و هذلولی‌یکه محدود شده است. این توضیح می‌دهد که چرا $\sinh x$ ، $\cosh x$ ، و غیره را توابع هذلولوی می‌نامیم (و ضمنا" چرا $\sin x$ ، $\cos x$ ، و غیره گاهی به جای توابع مثلثاتی **توابع مستدیر** نامیده می‌شوند) .

تبصره. البته ، تا اینجا فقط تشابه بین توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی ذکر شده است. مثلا" ، $\cosh x$ و $\sinh x$ ، برخلاف $\cos x$ و $\sin x$ ، نه کراندارند نه متناوب .

حال به معرفی چهار تابع دیگر هذلولوی می‌پردازیم؛ یعنی ، **تانژانت هذلولوی**

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

کتانژانت هذلولوی

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

سکانت هذلولوی

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

و کسکانت هذلولوی

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

به تشابه بین این تعاریف و تعاریف نظیر برای توابع مثلثاتی توجه نمایید .

تانژانت هذلولوی. توابع $\sinh x$ و $\cosh x$ هر دو بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و مشتقپذیرند، و $\cosh x$ هرگز صفر نیست . لذا ، $\tanh x$ ، یعنی خارج‌قسمت $\sinh x$ و $\cosh x$ ، نیز بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و مشتقپذیر است . همچنین، قبلاً " گفتیم که $\sinh x$ به ازای $x > 0$ مثبت ، به ازای $x = 0$ صفر، و به ازای $x < 0$ منفی است؛ و لذا ، همین امر برای $\tanh x$ درست‌است ،زیرا $\cosh x$ همواره‌مثبت‌می‌باشد. مشتق $\tanh x$ را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ خارج‌قسمت به‌آسانی محاسبه نمود . در واقع ، به‌کمک (۳) ، (۴) ، و (۵) ، داریم

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\dfrac{d\sinh x}{dx}\cosh x - \sinh x\dfrac{d\cosh x}{dx}}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

درنتیجه ،

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x. \tag{۱۰}$$

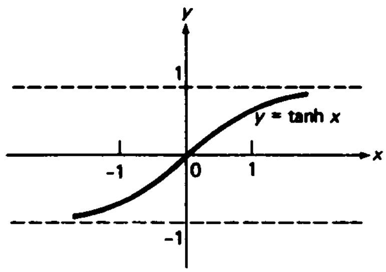
چون $\operatorname{sech}^2 x$ به ازای هر x مثبت است ، از رابطهٔ (۱۰) معلوم می‌شود که $\tanh x$ بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است ، و بخصوص اکسترمم ندارد . به‌علاوه ،

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x,$$

$$\lim_{x\to\infty}\tanh x = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{t\to\infty} \tanh(-t) = -\lim_{t\to\infty} \tanh t = -1$$

(وقتی $x \to \infty$ ، $e^{-2x} \to 0$) . بنابراین ، $\tanh x$ یک تابع فرد با برد $(-1, 1)$ است که خطوط $y = \pm 1$ مجانبهای افقی آن می‌باشند . نمودار $\tanh x$ در شکل ۲۰ نموده و این ویژگیها مجسم شده است .



شکل ۲۰

مثال ۴ . $\int \tanh x\, dx$ را حساب کنید .

حل . باتوجه به اینکه

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x},$$

فرمول (۳) ، صفحهٔ ۴۹۷ ، را به کار برده و به دست می‌آوریم

$$\int \tanh x\, dx = \ln \cosh x + C.$$

مثال ۵ . $\int_0^{1/2} \operatorname{sech}^2 x\, dx$ را حساب کنید .

حل . از رابطهٔ (۱۰) معلوم می‌شود که $\tanh x$ یک پادمشتق $\operatorname{sech}^2 x$ است . بنابراین ،

$$\int_0^{1/2} \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh \frac{1}{2} - \tanh 0 = \tanh \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{e^{1/2} + e^{-1/2}} = \frac{e-1}{e+1} \approx 0.46.$$

فرمولهای مشتق توابع هذلولوی عبارتنداز

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x,$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x,$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

(تشابهات و تفاوتهای بین این فرمولها و فرمولهای نظیر برای مشتق توابع مثلثاتی را توصیف نمایید.) سه فرمول اول قبلاً ثابت شده‌اند، و برای اثبات سه فرمول دیگر، از قاعدهٔ مشتقگیری از متقابل یک تابع چند بار استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}\coth x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\tanh x} = -\frac{1}{\tanh^2 x}\frac{d}{dx}\tanh x = -\frac{1}{\tanh^2 x}\operatorname{sech}^2 x$$

$$= -\frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x}\frac{1}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cosh x} = -\frac{1}{\cosh^2 x}\frac{d}{dx}\cosh x = -\frac{1}{\cosh^2 x}\sinh x$$

$$= -\frac{1}{\cosh x}\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sinh x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}\frac{d}{dx}\sinh x = -\frac{1}{\sinh^2 x}\cosh x$$

$$= -\frac{1}{\sinh x}\frac{\cosh x}{\sinh x} = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

مثال ۶. تقعر $\tanh x$ را مورد بررسی قرار دهید.

حل. مشتق دوم

$$\frac{d^2}{dx^2}\tanh x = \frac{d}{dx}\operatorname{sech}^2 x = 2\operatorname{sech} x\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -2\operatorname{sech}^2 x \tanh x$$

به ازای $x > 0$ مثبت، به ازای $x = 0$ صفر، و به ازای $x < 0$ منفی است. لذا، طبق آزمون تقعر، $\tanh x$ بر $(-\infty, 0]$ به بالا مقعر و بر $[0, \infty)$ به پایین مقعر است، و در $x = 0$ نقطهٔ عطف دارد (ر.ک. شکل ۲۰).

توابع $\coth x$ ، $\operatorname{sech} x$ ، و $\operatorname{csch} x$ در مقایسه با $\sinh x$ ، $\cosh x$ ، و $\tanh x$ از اهمیت کمتری برخوردارند. لذا، بررسی این توابع به مسائل ۳۰ تا ۳۲ محول شده است.

مسائل

عبارات زیر را بدون استفاده از توابع هذلولوی بیان کنید.

۱. $\cosh x + \sinh x$
۲. $\cosh x - \sinh x$
۳. $\cosh (\ln x)$
۴. $\tanh (\ln 2x)$
۵. $\sinh (\frac{1}{2} \ln x)$
۶. $\cosh^2 (\ln x) + \sinh^2 (\ln x)$

نشان دهید که

۷. $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$
۸. $\sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$
۹. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
۱۰. $1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$
۱۱. $\tanh (x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

مقادیر پنج تابع دیگر هذلولوی را در نقطهٔ c درصورتی بیابید که

۱۲. $\cosh c = 2$
۱۳. $\sinh c = -1$
۱۴. $\tanh c = \frac{1}{2}$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱۵. $\sinh^2 x + \cosh^2 x$
۱۶. $\cosh^3 x$
۱۷. $\sqrt{\cosh 2x}$
۱۸. $\tanh x^2$
۱۹. $\ln (\operatorname{sech} x)$
۲۰. $\coth (\tan x)$
۲۱. $\operatorname{csch} \sqrt{x}$
۲۲. $\sinh e^x$
۲۳. $\tanh (\ln x)$
۲۴. $\log_2 (\cosh x)$
۲۵. $e^{\coth x}$
۲۶. $3^{\sinh x}$

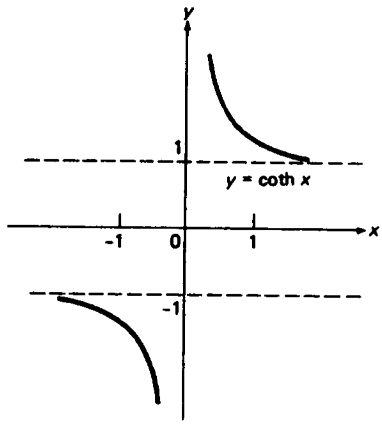
۲۷. یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم ساده بیابید که تابع $y = a \sinh cx + b \cosh cx$ ،

به ازای ثابتهای دلخواه a ، b ،و c ، در آن صدق کند . همین کار را بــرای تابع $y = a\sin cx + b\cos cx$ انجام دهید .

۲۸ . مساحت A تحت منحنی $y = \cosh x$ از $x = \ln 3$ تا $x = \ln 4$ را بیابید .

۲۹ . آیا توابع $\cosh x$ یا $\sinh x$ مجانب دارند؟ جواب خود را توضیح دهید .

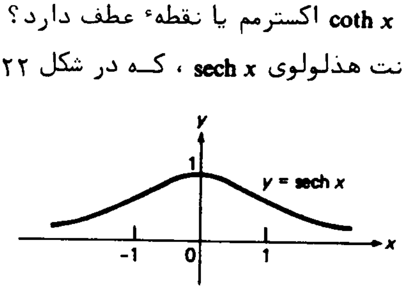
۳۰ . نشان‌دهید که کتانژانت‌هذلولوی $\coth x$ ،که در شکل ۲۱ رسم شده است ،بــر $(0, \infty)$



شکل ۲۱

مثبت ، نزولی ، و به بالا مقعر است ، و بر $(-\infty, 0)$ منفی ، نزولی ، و به پایین مقعر است . نشان دهیدکه $\coth x$ یک تابع فرد است با مجانبهای افقی $y = \pm 1$ ومجانب قائم محور y . آیا $\coth x$ اکسترمم یا نقطهٔ عطف دارد؟

۳۱ . نشان دهید که سکانت هذلولوی $\operatorname{sech} x$ ، کــه در شکل ۲۲ نموده شده است ،یک‌تابع

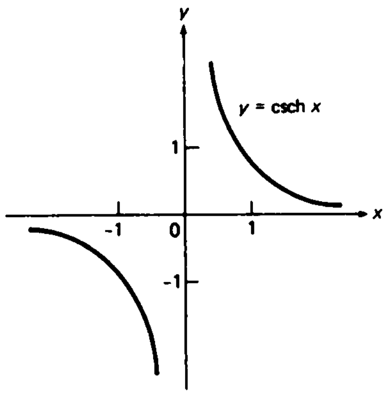


شکل ۲۲

زوج مثبت است که محور x مجانب افقی آن می‌باشد . نشان دهید که $\operatorname{sech} x$ بر $(-\infty, 0]$ صعودی و بــر $[0, \infty)$ نزولی است ، و ماکزیمم مطلقی مســاوی 1 در $x = 0$ داشته و مینیمم ندارد .تقعر $\operatorname{sech} x$ را بررسی‌کنید .نقاط عطف $\operatorname{sech} x$ چه‌هستند؟

۳۲ . نشان دهید که کسکانت هذلولوی $\operatorname{csch} x$ ، کــه در شکل ۲۳ نمــوده شــده است،بر

$(0, \infty)$ مثبت ، نزولی ، و به بالا مقعر است ، و بر $(-\infty, 0)$ منفی ، نزولی ، و به‌پایین مقعر است . نشان‌دهید که $\operatorname{csch} x$ یک‌تابع فرد است که محور x مجانب افقی و محور y مجانب قائم آن است . آیا $\operatorname{csch} x$ اکسترمم یا نقطهٔ عطف دارد ؟



شکل ۲۳

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۳۳. $\int \cosh^2 x \, dx$

۳۴. $\int \sinh^2 x \, dx$

۳۵. $\int \coth x \, dx$

۳۶. $\int \frac{dx}{\sinh x \cosh x}$

۳۷. $\int \operatorname{sech} (\ln x) \, dx$

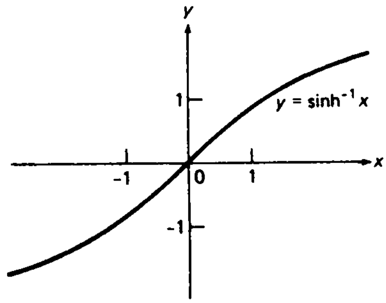
۳۸. $\int \frac{\sinh x}{3 \cosh x + 2} \, dx$

۹.۶ توابع هذلولوی معکوس

حال دو تابع از شش تابع هذلولوی معکوس را بررسی می‌کنیم که بیش از همه با آنها مواجه می‌شویم و این دو عبارتنداز سینوس هذلولوی معکوس و تانژانت هذلولوی معکوس. چهار تابع هذلولوی معکوس دیگر در مسائل ۱۱ و ۱۳ تا ۱۵ مطرح خواهند شد .

سینوس هذلولوی معکوس. برای تعریف‌سینوس هذلولوی‌معکوس ، از روندی استفاده می‌کنیم که قبلاً " در حالت توابع مثلثاتی معکوس به کار بردیم (ر.ک. بخش ۳.۵) . فرض کنیم $x = \sinh y$. تابع پیوستهٔ $\sinh y$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ صعودی و درنتیجه یک به یک است ، و این بازه را به‌روی خودش $(-\infty, \infty)$ می‌نگارد . بنابراین ، $x = \sinh y$ دارای‌تابع

معکوس $y = \sinh^{-1} x$ است، به نام **سینوس هذلولوی معکوس**، که بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و صعودی می‌باشد. نمودار این تابع، که در شکل ۲۴ نموده شده، را می‌توان از انعکاس نمودار $\sinh x$ نسبت به خط $y = x$ به دست آورد.



شکل ۲۴

برای مشتقگیری از سینوس هذلولوی معکوس، می‌نویسیم $y = \sinh^{-1} x$ ، $x = \sinh y$ ، و قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۴۶۰، را به کار برده به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y}.$$

ولی، طبق فرمول (۵)، صفحهٔ ۵۶۴،

$$\cosh y = \pm\sqrt{\sinh^2 y + 1} = \pm\sqrt{x^2 + 1},$$

که در آن باید علامت به‌علاوه اختیار شود زیرا $\cosh y$ مثبت است. بنابراین،

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \tag{۱}$$

حال فوراً از (۱) نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sinh^{-1} x + C. \tag{۲}$$

به‌علاوه، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقگیری از $\sinh^{-1}(x/a)$ ، که $a > 0$ ، داریم

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1/a}{\sqrt{(x/a)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad (۲')$$

که تعمیمی از رابطهٔ (۲) می‌باشد.

مثال ۱. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$ را حساب کنید.

حل. بنابر فرمول (۲′) به ازای $a = \frac{2}{3}$ ،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{9}}} = \frac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{3x}{2} + C.$$

بین سینوس هذلولوی معکوس و لگاریتم رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد. فرض کنیم $x = \sinh y$. در این صورت، چون

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sinh y + \cosh y \\ &= \sinh y + \sqrt{\sinh^2 y + 1} = x + \sqrt{x^2+1}, \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \qquad (۳)$$

بنابراین، اگر $a > 0$ ،

$$\sinh^{-1}\frac{x}{a} = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \ln a, \qquad (۳')$$

و حال می‌توان (۲′) را، پس از جذب $-\ln a$ در ثابت انتگرالگیری C ، به شکل مفیدتری نوشت:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C. \qquad (۴)$$

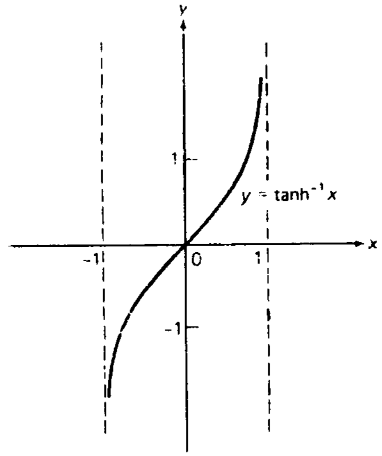
لازم است اعتبار (۴) را با مشتقگیری از عبارت سمت راست تحقیق نمایید.

مثال ۲. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ را حساب کنید.

حل. بنابر فرمول (۴) به ازای $a = \sqrt{2}$ ،

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \left[\ln(x+\sqrt{x^2+2})\right]_0^3 = \ln(3+\sqrt{11}) - \ln\sqrt{2}$$
$$= \ln\frac{3+\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \approx 1.5$$

تانژانت هذلولوی معکوس. برای تعریف تانژانت هذلولوی معکوس، فرض کنیم $x = \tanh y$. تابع پیوستهٔ $\tanh y$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ صعودی و درنتیجه یک به یک است، که آن را به روی بازهٔ $(-1, 1)$ می‌نگارد. لذا، $x = \tanh y$ دارای تابع معکوس x، $y = \tanh^{-1} x$، به نام ***تانژانت هذلولوی معکوس***، است که بر $(-1, 1)$ پیوسته و صعودی است. نمودار این تابع، که در شکل ۲۵ نموده شده، را می‌توان از انعکاس نمودار $\tanh x$ نسبت به خط $y = x$ به دست آورد.



شکل ۲۵

مثل حالت $\sinh^{-1} x$، رابطهٔ ساده‌ای بین تابع $\tanh^{-1} x$ و لگاریتم وجوددارد. با نوشتن $x = \tanh y$، داریم

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}.$$

بنابراین،

$$(e^y + e^{-y})x = e^y - e^{-y},$$

یا معادلاً

$$(e^{2y} + 1)x = e^{2y} - 1.$$

این یک معادلهٔ خطی نسبت به e^{2y} با جواب

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

است . پس نتیجه می‌شود که

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad (-1 < x < 1). \tag{۵}$$

بخصوص،

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\ln (1+x) - \ln (1-x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1+x)(1-x)},$$

و درنتیجه ،

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \qquad (-1 < x < 1). \tag{۶}$$

مثال ۳. از $\tanh^{-1} (\sin x)$ مشتق بگیرید .

حل. با استفاده از (۶) معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} (\sin x) = \frac{1}{1-\sin^2 x} \frac{d}{dx} \sin x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

مثال ۴. $\int_0^{\pi/6} \sec x \, dx$ را حساب کنید .

حل. بنابر مثال قبل، $\tanh^{-1} (\sin x)$ یک پادمشتق $\sec x$ است . بنابراین، به‌کمک (۵) داریم

$$\int_0^{\pi/6} \sec x \, dx = \tanh^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) - \tanh^{-1} (\sin 0)$$

$$= \tanh^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0.55$$

مسائل

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۱. $x \sinh^{-1} x$

۲. $\sin(\sinh^{-1} x)$

۳. $\sinh^{-1}(\cos x)$

۴. $x^2 \tanh^{-1} x$

۵. $\tanh^{-1}(\ln x)$

۶. $\sinh^{-1}(\tanh^{-1} x)$

۷. فرمول (۱) را به کمک فرمول (۳) تحقیق کنید .

۸. فرمول (۶) را به کمک قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۴۶۰، تحقیق کنید .

۹. کوچکترین مقداری که تابع $\sinh x + 2\cosh x$ می‌گیرد چیست ؟

۱۰. آیا تابع $2\sinh x + \cosh x$ دارای کوچکترین مقدار است ؟

۱۱. معکوس تابع $x = \cosh y$ $(0 \le y < \infty)$ ، که **کسینوس هذلولوی معکوس** نام دارد ، با $y = \cosh^{-1} x$ نموده شده و نمودارش در شکل ۲۶ رسم شده است . نشان دهید که

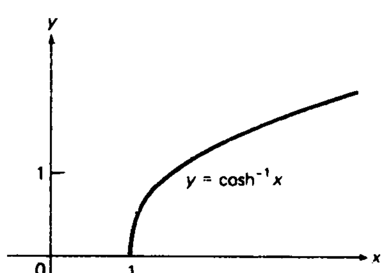
$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad (x \ge 1),$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1),$$

و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C \qquad (x > a > 0). \qquad \text{(یک)}$$



شکل ۲۶

۱۲. نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\frac{a + x}{a - x} + C \qquad (|x| < a), \qquad \text{(دو)}$$

که صورت دیگری است از فرمول (۶)، صفحهٔ ۴۹۹.

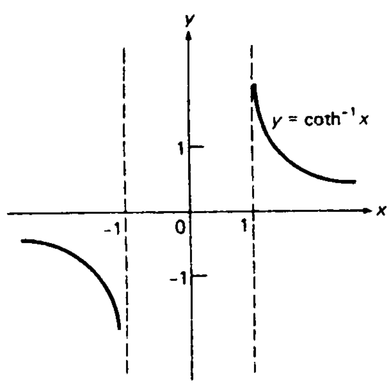
۱۳. معکوس تابع $x = \coth y$ **کتانژانت هذلولوی معکوس** نام دارد و با $y = \coth^{-1} x$ نموده می‌شود، و دارای نمودار به شکل ۲۷ می‌باشد. نشان دهید که

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \tanh^{-1} \frac{1}{x} \qquad (|x| > 1),$$

$$\frac{d}{dx} \coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \qquad (|x| > 1),$$

و

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a} + C \qquad (|x| > a > 0), \tag{سه}$$



شکل ۲۷

که در آن (سه) صورت دیگری است از فرمول (۶)، صفحهٔ ۴۹۹.

۱۴. معکوس‌تابع $x = \operatorname{sech} y$ $(0 \le y < \infty)$ **سکانت هذلولوی معکوس** نام دارد و با $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ نموده می‌شود و نمودارش به شکل ۲۸ می‌باشد. نشان دهید که

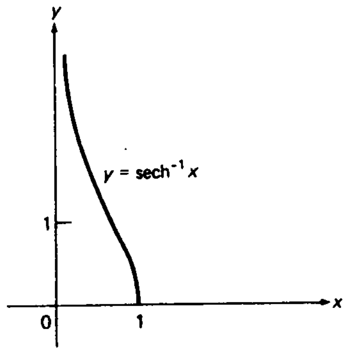
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} = \cosh^{-1} \frac{1}{x} \qquad (0 < x \le 1),$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad (0 < x < 1),$$

و

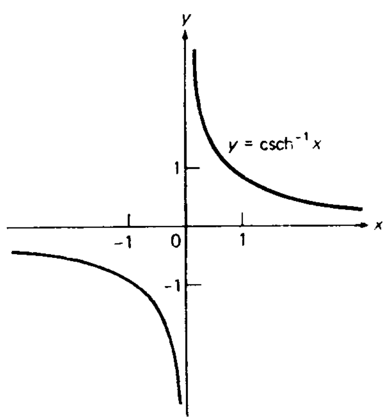
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{|x|}{a} + C$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{|x|} + C \qquad (0<|x|<a). \qquad \text{(چهار)}$$



شکل ۲۸

۱۵. معکوس تابع $x = \operatorname{csch} y$ **کسکانت هذلولوی معکوس** نامیده و با $y = \operatorname{csch}^{-1} x$ نموده می‌شود و نمودارش در شکل ۲۹ رسم شده است. نشان دهید که



شکل ۲۹

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) = \sinh^{-1}\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0).$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \qquad (x \neq 0).$$

و

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\frac{|x|}{a} + C$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{|x|} + C \qquad (a>0, x\neq 0). \qquad \text{(پنج)}$$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱۶. $\dfrac{\cosh^{-1} x}{x}$ ✓
۱۷. $\cosh^{-1}(\cos x)$ ✓
۱۸. $\ln(\coth^{-1} x)$ ✓
۱۹. $\coth^{-1}\sqrt{x}$ ✓
۲۰. $\operatorname{sech}^{-1}(e^{-x})$ ✓
۲۱. $\operatorname{csch}^{-1}(\ln x)$ ✓

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۲۲. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ ✓
۲۳. $\displaystyle\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ✓
۲۴. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ ✓
۲۵. $\displaystyle\int_{2/3}^1 \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$ ✓
۲۶. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{9-x^2}$ ✓
۲۷. $\displaystyle\int_4^6 \frac{dx}{9-x^2}$ ✓
۲۸. $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ ✓
۲۹. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ ✓
۳۰. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$ ✓

۳۱. سه تا از شش تابع هذلولوی معکوس نقطهٔ عطف دارند. اینها کدامها هستند، و نقاط عطف آنها کجاست؟

اصطلاحات و مباحث کلیدی

تعریف لگاریتم طبیعی به عنوان انتگرال
لگاریتم حاصلضرب و توان
تعریف عدد e
مشتقگیری لگاریتمی، انتگرالگیری از مشتق لگاریتمی
تعریف نمایی به عنوان معکوس لگاریتم

نمایی یک مجموع
قوانین نماییها برای نماهای حقیقی دلخواه
نماییها و لگاریتمها در پایهٔ a
تابع توانی کلی x^a
صور مبهم 0^0 ، ∞^0 ، و 1^∞
ریاضیات سود مرکب ، ترکیب پیوسته
معادلات دیفرانسیل جدایی‌پذیر ، جداسازی متغیرها
رشد و تحلیل نمایی
رشد جمعیت ، تحلیل رادیواکتیو
زمان مضاعف سازی ، نیمه‌عمر
رشد لژیستیک
توابع هذلولوی و مشتقات آنها
توابع هذلولوی معکوس

فرمولهای مشتقگیری در رابطه با لگاریتمها و نماییها

تابع	مشتق	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(x > 0)$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$(x \neq 0)$
$\ln \lvert f(x) \rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a x$	$(a > 0)$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$(a > 0)$
x^a	ax^{a-1}	$(x > 0)$
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	

فرمولهای کلیدی دیگر

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0), \quad \ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \quad \ln e^x = x \quad (\text{all } x)$$

$$\ln xy = \ln x + \ln y, \quad e^x e^y = e^{x+y}$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty, \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0), \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a > 0)$$

$$x^a = e^{a \ln x} \quad (x > 0), \quad \ln x^a = a \ln x$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

مسائل تکمیلی

معادلات زیر را نسبت به x حل کنید.

۱. $\ln x = \frac{1}{2}(\ln 4 + \ln 9)$

۲. $\ln x^3 - \ln x = \ln 32 - \ln 8$

۳. $\log_2 x = \log_2 4 + \log_4 8 + \log_{16} 64$

۴. $\log_{100} x + \log_{0.1} x = 1$

۵. آیا تابع $\log_a \frac{1-x}{1+x}$ زوج است یا فرد؟

۶. بدون محاسبات عددی، نشان دهید که $\pi^e < e^\pi$ و $\sqrt{10}^\pi < \pi^{\sqrt{10}}$

راهنمایی. ابتدا نشان دهید که $(\ln x)/x$ بر $[e, \infty)$ نزولی است.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۷. $\int_0^{\pi/4} \tan s\, ds$

۸. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot t\, dt$

۹. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{du}{\sin u \cos u}$

۱۰. نشان دهید که

$$\sum_{n=10}^{29} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 3.$$

از عبارات زیر مشتق بگیرید.

۱۱. $e^{\cosh x}$

۱۲. $\pi^{\ln x}$

۱۳. 2^{3^x}

۱۴. $\ln(\tanh^{-1} x)$

۱۵. $x^{\sinh x}$

۱۶. $[\ln(\ln x)]^x$

اکسترممهای موضعی تابع داده شده را بیابید.

۱۷. $f(x) = (x+1)^{10} e^{-x}$

۱۸. $f(x) = ae^{cx} + be^{-cx} \quad (a^2 + b^2 \neq 0, c \neq 0)$

۱۹. $f(x) = x^e 2^{-x}$

۲۰. نشان دهید که تابع $f(x) = e^x + cx^3$ به ازای $-e/6 \leq c \leq 0$ نقطهٔ عطف ندارد، به ازای $c > 0$ یک نقطهٔ عطف دارد، و به ازای $c < -e/6$ دو نقطهٔ عطف دارد.

آیا تابع داده شده نقطهٔ عطف دارد، و اگر دارد کجاست؟

۲۱. $f(x) = x^2 + \ln x$

۲۲. $f(x) = x^4 + x^2 + e^x$

۲۳. $f(x) = x^x$

۲۴. $f(x) = e^{\arctan x}$

۲۵. $f(x) = e^{x^{1/3}}$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید.

۲۶. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$

۲۷. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

۲۸. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\tan x}}{x}$

۲۹. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x \ln x}{\sin x}$

۳۰. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$

۳۱. $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+\pi) - \ln x]$

۳۲. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x}\right)^{x-1}$

۳۳. $\lim\limits_{x\to(1/4)\pi} (\tan x)^{\tan 2x}$

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را با جداسازی متغیرها حل کنید.

۳۴. $\dfrac{dy}{dx}\cot x = y \ln y,\ y(0) = e$

۳۵. $\sqrt{x^2+1}\,\dfrac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 1$

۳۶. $\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{dy}{dx} = y^2+1,\ y(0) = 0$

۳۷. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y},\ y(0) = 0$

۳۸. $(x+\sqrt{x})\dfrac{dy}{dx} + y = 0,\ y(1) = (\frac{1}{4})$

۳۹. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = 0,\ y(\frac{5}{3}) = 2$

۴۰. ابتدا جانشانی $z = 2x - y - 1$ را انجام داده و سپس، با جداسازی متغیرها، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $dy/dx = 2x - y - 1,\ y(0) = 1$ را حل کنید.

۴۱. یک منحنی دارای این خاصیت است که شیبش در هر نقطهٔ P، n برابر شیب خط واصل بین مبداء و P است. این منحنی چیست؟

۴۲. چقدر طول می‌کشد تا پول با نرخ سود سالانهٔ ‎10%‎ و به طور پیوسته مرکب سه برابر شود؟

۴۳. کمترین پولی که می‌توان با نرخ سود سالانهٔ ‎9%‎ و به‌طور پیوسته مرکب سرمایه‌گذاری کرد به‌طوری که بتوان مدام (یعنی، برای همیشه) سالانهٔ ‎$10,000‎ برداشت کرد چقدر است؟

۴۴. ‎$50,000‎ را با نرخ سالانهٔ ‎6%‎ که در ماه مرکب می‌شود به بانک سپرده‌ایم. چه‌وقت این پول از ‎$75,000‎ بیشتر می‌شود؟

۴۵. سپردهٔ اولیهٔ به‌طور پیوسته مرکب ‎$1250‎ طی 5 سال به ‎$2000‎ بالغ می‌شود. نرخ سود سالانه چقدر است؟

۴۶. مقدار فعلی ‎$25,000‎ که 6 سال با نرخ سود سالانهٔ ‎7.5%‎ و به طور پیوسته مرکب در پس‌انداز بوده چقدر است؟ با همان نرخ ولی ترکیب ماهانه چقدر است؟

۴۷. شخصی هر 3 ماه ‎$125‎ در بانک می‌گذارد که نرخ سود سالانه‌اش ‎8%‎ و هر سه‌ماه‌مرکب می‌شود. مقدار سپرده را درست پیش از بیست یکمین بار سپردن یعنی پس‌از 5 سال پیدا کنید.

۴۸. جمعیت یک شهر طی 15 سال از 125,000 تا 180,000 افزایش می‌یابد. میزان رشد سالانهٔ جمعیت چقدر است؟

۴۹. یک کشت باکتری با رشد نمایی ظرف 4 ساعت از 2×10^5 سلول به 8×10^7 سلول می‌رسد. زمان بین انشقاقهای دوبی متوالی (تقسیم سلولی) را بیابید.

۵۰. در یک کشت 1024 سلولی با رشد نمایی و زمان مضاعف‌سازی 1 ساعت دگرگونی رخ می‌دهد. سلولهای شورشی دارای زمان مضاعف‌سازی 30 دقیقه‌اند. چه وقت جمعیت سلولهای شورشی مساوی جمعیت سلولهای اولیه است؟ چه وقت به ازای هر سلول از نوع اولیه 16 سلول شورشی وجود دارد؟

۵۱. آزمایش نشان می‌دهد که وقتی باکتریها در یک محیط کشت رشد می‌کنند، میزان **بازده غذایی**، یعنی میزان تغییر غلظت C غذا در باکتریها، با $C_1 - C$ متناسب است، که در آن C_1 غلظت نهایی غذا است (معلوم شده که C_1 خیلی از غلظت در خود محیط بزرگتر است). بنابراین،

$$\frac{dC}{dt} = k(C_1 - C).$$

این معادلهٔ دیفرانسیل را با شرط اولیهٔ $C = 0$ در لحظهٔ $t = 0$ حل کنید.

۵۲. یک کشت باکتری به‌طور لژیستیک و با اندازهٔ اولیهٔ $N_0 = 4000$ و اندازهٔ حدی N_1 رشد می‌کند. کشت در 12 ساعت به $\frac{1}{2}N_1$ و در 15 ساعت به $\frac{9}{10}N_1$ می‌رسد. اندازهٔ حدی N_1 چقدر است؟

۵۳. رشد تومورهای جامد دقیقا " با معادلهٔ دیفرانسیل

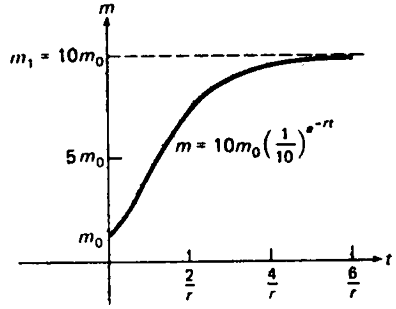
$$\frac{dm}{dt} = rm \ln \frac{m_1}{m} \qquad (\text{یک})$$

توصیف می‌شود، که در آن r و m_1 ثابتهای مثبتی بوده، و $m = m(t)$ جرم تومور در لحظهٔ t است. نشان دهید جواب (یک) که در شرط اولیهٔ $m(0) = m_0\ (m_0 < m_1)$ صدق می‌کند از تابع

$$m = m_1 \exp\left(e^{-rt} \ln \frac{m_0}{m_1}\right) = m_1 \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{e^{-rt}} \qquad (\text{دو})$$

به نام **قانون رشد گومپرتز**[1]، به دست می‌آید. تحقیق کنید که (دو) یک تابع صعودی از t بوده و وقتی $t \to \infty$، $m \to m_1$؛ درنتیجه، m_1 جرم حدی تومور می‌باشد. شکل ۳۰ قانون گومپرتز (دو) را درحالت $m_1 = 10m_0$ نشان می‌دهد. توجه کنید که منحنی به شکل S بوده و با منحنی لژیستیک شکل ۱۴، صفحهٔ ۵۵۰، شباهت نزدیکی دارد.

1. Gompertz



شکل ۳۰

۵۴. نشان دهید که اگر $m_1 > em_0$ ، قانون گومپرتز (دو) یک نقطهٔ عطف در $t = t_1$ دارد، که در آن t_1 زمانی است که m در آن مساوی m_1/e می‌باشد.

۵۵. برای توضیح اینکه قانون گومپرتز چگونه در کار می‌آید، مسئلهٔ رشد نمایی ناشی از معادلهٔ دیفرانسیل $dm/dt = km$ و شرط اولیهٔ $m(0) = m_0$ را حل می‌کنیم، که در آن میزان رشد نسبی k، به جای ثابت بودن، یک تابع به طور نمایی نزولی k_0e^{-rt} است. نشان دهید که جواب این مسئله عبارت است از

$$m = m_0 \exp\left[\frac{k_0}{r}(1 - e^{-rt})\right], \tag{دُو}$$

که در آن وقتی $t \to \infty$ ، $m \to m_0e^{k_0/r}$. نشان دهید که اگر $m_1 = m_0e^{k_0/r}$ ، (دو) و (دُو) یکی هستند.

۵۶. یکچهارم مادهٔ رادیواکتیو طی 15 سال ناپدید می‌شود. نیمه‌عمر ماده چقدر است؟

۵۷. اورانیوم طبیعی از دو ایزوتوپ رادیواکتیو تشکیل شده است، یکی اورانیوم 238 با نیمه عمر تقریبی 4.5×10^9 سال و دیگری اورانیوم 235 با نیمه‌عمر تقریبی 7×10^8 سال. در نمونه‌های فعلی، اورانیوم 238 تقریباً 137.8 برابر از اورانیوم 235 بیشتر است. با این فرض که در زمان خلق اورانیوم، احتمالاً درنتیجهٔ انفجار ستارهٔ سوپرنوا، دو ایزوتوپ به یک مقدار موجود بوده‌اند، سن اورانیوم چقدر است؟

۵۸. یک نوترون در هستهٔ اتم پایدار است، ولی پس از آزاد شدن با نیمه‌عمر 12.8 دقیقه به یک پروتون، یک الکترون، و یک آنتی نوترینو تجزیه می‌شود. فرض‌کنید شعاعی از نوترونها با سرعت 25 km/sec به فضا فرستاده شود. شعاع در زمان تحلیل یکدهم نوترونها چه مسافتی را طی خواهد کرد؟

۵۹. فرض‌کنید N تعداد نوترونهای آزاد در یک کرهٔ جامد از اورانیوم 235 به شعاع R

باشد . در این صورت ، N در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt} = aN - \frac{bN}{R}, \qquad \text{(سه)}$$

با ثابتهای $a \approx 2 \times 10^8/\text{sec}$ و $b \approx 17 \times 10^8\ \text{cm/sec}$ صدق می‌کند . جملهٔ aN "تکثیر" نوترونهاکه‌ناشی‌ازانشقاق‌هسته‌است‌راتوصیف‌می‌کند (اکثرهسته‌های‌اورانیوم که با نوترون برخورد می‌کنند تجزیه‌شده‌وهریک‌دو یا سه‌نوترون "جدید "آزادمی‌سازند)، حال آنکه‌جمله $-bN/R$ نوترونهایی را که از سطح کره فرار می‌کنند توصیف می‌نماید(نسبت سطح به حجم کره با $1/R$ متناسب است) . نشان دهید وقتی شعاع R به مقدار معینی چون R_{cr} ، به نام **شعاع بحرانی**، برسد یا معادلا" وقتی جرم کره به مقدار معینی مانند m_{cr} ، به‌نام **جرم بحرانی** برسد ، N افزایش زیادی خواهدداشت . R_{cr} و m_{cr} را درصورتی بیابید که چگالی اورانیوم ۲۳۵ مساوی $18.7\ \text{g/cm}^3$ باشد . این یک‌مدل ساده شده " واکنش زنجیره‌ای " است که در بمب اتم رخ می‌دهد .

۶۰ . یک واکنش شیمیایی درنظر بگیرید که درآن یک مولکول مادهٔ A با یک مولکول مادهٔ B ترکیب شده و یک مولکول از مادهٔ سوم C را تولید می‌کنند . فرض کنید a و b غلظتهای اولیهٔ A و B بوده ، و $y = y(t)$ غلظت C در لحظهٔ t باشد . در این‌صورت غلظتهای A و B در لحظهٔ t به ترتیب عبارتنداز $a - y$ و $b - y$ ، و میزان واکنش با حاصل‌ضرب این غلظتها متناسب است . این ما را به معادلهٔ زیر می‌رساند :

$$\frac{dy}{dt} = k(a - y)(b - y)$$

$(k > 0)$ ، کـه به **قانون میزان** واکنش معروف می‌باشد . به فرض آنکه $y(0) = 0$ ، y را به‌صورت‌تابعی‌از t بیابید .نشان‌دهیدکه‌اگر $a \neq b$ ،وقتی $t \to \infty$ ، $y \to \min\{a, b\}$. در حالت $a = b$ چه رخ می‌دهد ؟ فرض کنید T زمانی باشد که 99% واکنش کامل‌شده است . T را در حالت $a = b$ و در حالت $a = \frac{1}{2}b$ حساب کنید . کـدام زمان بیشتر است و چرا ؟

۶۱ . جسمی به جرم m که ابتدا در حالت سکون است در محیطی سقوط می‌کند که‌بانیرویی متناسب با مجذور سرعتش $v = v(t)$ در برابر حرکت مقاومت دارد . لذا ، طبق قانون دوم نیوتن ،

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv^2,$$

که در آن g شتاب ثقل بوده و b ثابت مثبتی می‌باشد . نشان دهید که جسم دارای

سرعت حدی یا *نهایی* v_1 است که به آن نزدیک می‌شود ولی هرگز از آن رد نمی‌شود. نشان دهید که v_1 با جذر جرم جسم متناسب است. موضع جسم را به صورت تابعی از زمان بیابید.

۶۲. سنگی به جرم m با سرعت اولیهٔ v_0 به بالا پرتاب می‌شود. فرض کنید حرکت سنگ با مقاومت هوا که با مجذور سرعت سنگ متناسب، با ثابت تناسب b، است روبرو باشد. نشان دهید که سرعت (بی‌علامت) سنگ در بازگشت به موضع اولیه مساوی است با

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{mg}{mg + bv_0^2}}.$$

۶۳. جسمی به جرم m که ابتدا در حال سکون است در محیطی سقوط می‌کند که با نیرویی متناسب با سرعت $v = v(t)$، به جای مجذور سرعت مثل مسئلهٔ ۶۱، در برابر حرکت مقاومت دارد. (این برای یک شئی به‌قدر کافی کوچک مانند قطرهٔ باران یا یک محیط به‌قدر کافی چسبنده مانند روغن سنگین رخ می‌دهد.) نشان دهید که، درست مثل قانون مجذور مقاومت، جسم دارای سرعت حدی یا *نهایی* v_1 است که به آن نزدیک می‌شود ولی هرگز از آن رد نمی‌شود. نشان دهید که v_1 با جرم جسم متناسب است. موضع s جسم را به صورت تابعی از زمان بیابید.

۶۴. با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز (مسئلهٔ ۳۵، صفحهٔ ۳۶۶)، مشتق صدم $x \sinh x$ را بیابید.

نشان دهید که

۶۵. $$\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

۶۶. $$\sinh x - \sinh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

۶۷. $$\sinh^2 x - \sinh^2 y = \sinh(x+y)\sinh(x-y)$$

۶۸. $$(\cosh x + \sinh x)^a = \cosh ax + \sinh ax$$ (a دلخواه)

۶۹. $$\sinh 3x = 3\sinh x + 4\sinh^3 x$$

۷۰. $$\cosh 4x = 8\cosh^4 x - 8\cosh^2 x + 1$$

حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید.

۷۱. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}$$

۷۲. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}$$

۷۳. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^2}$$

۷۴. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x - x}{x^3}$$

۷۵. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sinh^{-1} x}{x^3}$

۷۶. $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh^{-1} x}{\sinh^{-1} x}$

۷۷. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sinh x}$

۷۸. $\lim_{x\to 0^+} (\tanh x)^{\tan x}$

۷۹. $\lim_{x\to 0} (1 + \sinh x)^{\operatorname{csch} x}$

فرض کنید تابع $y = f(x)$ به ازای هر x در قلمرو خود در معادله‌ای به شکل

$$P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2 + \cdots + P_n(x)y^n = 0 \qquad \text{(چهار)}$$

صدق کند، که در آن $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x) \not\equiv 0$ همه چندجمله‌ایهایی از x اند. در این صورت، گوییم تابع f **جبری** است. نشان دهید که

۸۰. توابع گویـــا جبری‌اند.

۸۱. تابع $y = \sqrt[3]{x - 2\sqrt{x}}$ جبری است.

۸۲. معکوس یک تابع جبری یک به یک خود جبری است.

تذکار. تابعی که جبری نباشد **متعالی** نام دارد. می‌دانیم که توابع نمایی، مثلثـــاتی، و هذلولوی متعالی‌اند. از مسئلهٔ ۸۲ معلوم می‌شود که این امر برای توابع لگاریتمی، توابع مثلثاتی معکوس، و توابع هذلولوی معکوس نیـــز درست است.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۸۳. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 16}}$

۸۴. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 4x^2}}$

۸۵. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9 + 49x^2}}$

۸۶. *شناسهٔ هذلولوی* یا *گودرمانیان* تابعی است مانند $y = \operatorname{gd} x$ که با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$y = \operatorname{gd} x = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t}.$$

نشان دهید که

$$\operatorname{gd} x = \arctan(\sinh x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2},$$

$$\sinh x = \tan(\operatorname{gd} x), \qquad \cosh x = \sec(\operatorname{gd} x),$$
$$\tanh x = \sin(\operatorname{gd} x).$$

همچنین، نشان دهید که $y = \mathrm{gd}\, x$ یک تابع یک به یک است با معکوس

$$x = \mathrm{gd}^{-1}\, y = \int_0^y \sec t\, dt.$$