یادآوری: مشتق تابع معمولی نسبت به متغیر x و نحوه برخورد با اعدد یا ثابت‌ها در حالات مختلف:

$$(25 + 73\sin x)' = 0 + 73\cos x;$$

- مشتق عدد ثابت و تنها صفر می‌شود.
- عدد ثابت که به عنوان ضریب می‌باشد، در مشتق‌گیری به عنوان ضریب و بدون تغییر می‌ماند.

یادآوری: به عنوان نماد یا علامت برای مشتق تابع f نسبت به متغیر x از f'، $\frac{df}{dx}$ یا Df استفاده می‌کنیم.

فرمول‌های مشتق‌گیری

توجه کنید که c و n اعداد ثابتحقیقی و a عدد حقیقی و مثبت می‌باشند.

الف. $(c)' = 0;$

ب. $(cu)' = c \cdot u';$

ج. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u';$

د. $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}};$

ه. $(\mathbf{e}^u)' = (\exp u)' = \mathbf{e}^u \cdot u';$

و. $(a^u)' = a^u \cdot u' \ln a;$

ز. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u' = \dfrac{u'}{u};$

ح. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a};$

ط. $(\sin u)' = \cos(u) \cdot u';$

ی. $(\cos u)' = -\sin(u) \cdot u';$

ک. $(\tan u)' = (1 + \tan^2 u) \cdot u' = \sec^2(u) \cdot u';$

ل. $(\cot u)' = -(1 + \cot^2 u) \cdot u' = -\csc^2(u) \cdot u';$

م. $(\sec u)' = \sec(u)\tan(u) \cdot u';$

ن. $(\csc u)' = -\csc(u)\cot(u) \cdot u';$

ص. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}};$

ع. $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2};$

قوانین مشتق‌گیری

برای توابع $f(x)$، $g(x)$ و $u(x)$ داریم:

i. $(f \pm g)' = f' \pm g';$

ii. $(cf)' = cf';$

iii. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g';$

iv. $(\dfrac{f}{g})' = \dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2};$

v. $(f(u))' = f'(u) \cdot u';$ (قاعده زنجیره‌ای)

اگر به جای توابع معمولی $y = f(x)$ (مانند $y = \sin^2(x) + \sqrt{x} - 3$)، تابع ضمنی $f(x, y) = 0$ (مانند $y = \sin^2(xy) + \sqrt{x} - 3y^3$) داشته باشیم برای محاسبه مشتق $y' = \frac{dy}{dx}$ از قاعده زیر استفاده می‌کنیم:

vi $$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق نسبت به } y};$$ (مشتق‌گیری ضمنی)

مثال‌های مشتق‌گیری. از توابع داده شده مشتق بگیرید.

مثال.

$$(x^{3}-3x^{-2}+\frac{1}{x^{5}})' \overset{\text{i، ii}}{=} (x^{3}-3x^{-2}+x^{-5})'$$
$$=3x^{2}+6x^{-3}-5x^{-6};$$ (ب،ج)

$$(x\sin x)' \overset{\text{iii}}{=} (x)'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)';$$
$$=1\cdot\sin x + x\cdot\cos x;$$ (ب،ط)

$$(\frac{x}{\sin x})' \overset{\text{iv}}{=} \frac{(x)'\cdot\sin x - x\cdot(\sin x)'}{\sin^{2}x};$$
$$=\frac{1\cdot\sin x - x\cdot\cos x}{\sin^{2}x};$$ (ب،ط)

$$(-7\tan^{3}x)' \overset{\text{v}}{=} -7\times 3\tan^{3-1}x\cdot(\tan x)'$$ (ج)
$$=-21\tan^{2}x\cdot\sec^{2}x;$$ (ک)

$$(\sqrt{2x+\mathbf{e}^{3x}})' \overset{\text{v}}{=} \frac{(2x+\mathbf{e}^{3x})'}{2\sqrt{2x+\mathbf{e}^{3x}}};$$ (د)
$$=\frac{2+\mathbf{e}^{3x}\cdot 3}{2\sqrt{2x+\mathbf{e}^{3x}}};$$ (ب،ه)

$$(3\sec x + 4^{x}\arcsin(x-1))' \overset{\text{i}}{=} (3\sec x)' + (4^{x}\arcsin(x-1))'$$
$$\overset{\text{iii}}{=} 3\sec x\tan x + ((4^{x})'\arcsin(x-1) + 4^{x}(\arcsin(x-1))')$$ (م)
$$=3\sec x\tan x + \left(4^{x}\ln(4)\times\arcsin(x-1) + 4^{x}(\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^{2}}}\times 1)\right)$$ (و،ص)

$$y=3xy^{2}+x^{5}-3 \Rightarrow 3xy^{2}+x^{5}-3-y=0$$ (تابع ضمنی)
$$\overset{\text{vi}}{\Rightarrow} y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{3y^{2}+5x^{4}-0-0}{6xy+0-0-1}$$ (مشتق‌گیری ضمنی)

$$x^{2}y^{3}+\sin(xy)=3 \Rightarrow x^{2}y^{3}+\sin(xy)-3=0$$ (تابع ضمنی)
$$\overset{\text{vi}}{\Rightarrow} y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^{3}+y\cos(xy)-0}{3x^{2}y^{2}+x\cos(xy)-0}$$ (مشتق‌گیری ضمنی)

□