

بِسْمِ تَعَالَى

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)

مدرس: دکتر مهدی نعمتی

mnemati.blog.ir

هدف کلی درس

هدف کلی این درس آموزش مباحثی از ریاضیات است که دانشجویان رشته های رشته های علوم انسانی در دروس تخصصی خود به آنها نیاز خواهند داشت.

مباحث کتاب

برای نیل به اهداف کلی، مباحث زیر درشش فصل تدوین شده است.

فصل اول: نظریه مجموعه ها

که شامل 44 اسلاید می باشد.

فصل دوم: دستگاههای مختصات

که شامل ۴۷ اسلاید می باشد.

فصل سوم: رابطه و تابع

که شامل 69 اسلاید می باشد.

فصل چهارم: حد و پیوستگی توابع

که شامل ۷۱ اسلاید می باشد.

فصل پنجم: مشتق

که شامل ۷۱ اسلاید می باشد.

فصل ششم: کاربردهای مشتق

که شامل ۷۴ اسلاید می باشد.

در آغاز هر فصل نکاتی به عنوان راهنمای مطالعه و هدف کلی آمده است، که به شما کمک می کند تا منظور کل آن فصل را دریابید، در قسمتی که با عنوان هدف های رفتاری و آموزشی مشخص شده است، از شما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه هر فصل مطالبی را که یادگرفته اید با توجه به هدف های رفتاری بسنجید.

یادگیری می تواند مثلاً " بیان یک مفهوم، مقایسه دو مفهوم بایکدیگر، توضیح یک قضیه نتیجه گیری از یک مطلب، یا حل یک مسئله باشد. نظر به پیوستگی مفاهیم ریاضی، تا زمانی که به هدف های یک فصل نایل نشده اید، و مسائل آن فصل را حل نکرده اید به فصل بعدی نپردازید.

فصل اول

نظریه مجموعه ها

هدف کلی:

هدف کلی این فصل این است که با مفهوم مجموعه ،انواع آن،اعمال جبری

روی مجموعه ها،و ویژگی های این اعمال آشنا شوید.

هدفهای رفتاری:

از شما انتظار می رود پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

۱. مجموعه هارشناسایی کنید.

۲. عضوهای مجموعه های داده شده را تعیین کنید.

۳. زیرمجموعه های هر مجموعه داده شده را تعیین کنید.

۴. مجموعه تهی را شناسایی کنید. مثال هایی از مجموعه تهی بیاورید.

۵. اعمال جبری روی مجموعه هار تعریف کنید و برای مجموعه های داده شده ، اعمال مورد نظر را انجام دهید.

۶. بازه های باز و بسته را تشخیص دهید و آنها را به صورت مجموعه نمایش دهید.

۷. مفهوم مجموعه جهانی را توضیح دهید.

۸. مکمل هر مجموعه را نسبت به مجموعه جهانی داده شده ،تعیین کنید.

۹. ویژگی های اعمال جبری روی مجموعه ها را بیان کنید و در مسائل به کاربرید.

۱۰. قوانین «دمورگان» را بیان کنید و در مسائل به کاربرید.

۱۱. تعداد عناصر هر مجموعه متناهی داده شده را تعیین کنید.

۲۱. حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه را بیان کنید و آن را برای مجموعه های داده شده محاسبه کنید.

مجموعه یکی از بنیادی ترین مفاهیم در ریاضیات است و غالباً «نقطه آغازی برای ریاضیات پایه و کاربردهای آن در بسیاری از علوم محسوب می شود. مثلاً» در رشته مدیریت در موارد بسیاری صحبت از مجموعه تولیدات یک کارخانه، یا مجموعه کارگران یک کارگاه، یا مجموعه تصمیمهای ممکن برای مدیر یک واحد و نظایر آن به میان می آید. برای درک بسیاری از مطالب ارائه شده در این کتاب، آشنایی با تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه مجموعه ها ضروری است.

در این فصل، مفهوم بنیادی مجموعه و اعمال جبری روی مجموعه ها را مورد بحث قرار می دهیم.

۱- مفهوم مجموعه

۱-۱- مفهوم شهودی مجموعه

مفهوم ریاضی یک مجموعه با مفهوم شهودی (عادی یا روز مره) آن تفاوت دارد. یک مجموعه از نظر ریاضی هنگامی معین است که اشیای تشکیل دهنده آن کاملاً مشخص باشند. به بیان دیگر هنگامی که برای هر شی به دقت بتوان تعیین کرد آن شی به آن مجموعه دارد یا تعلق ندارد.

به طور کلی، صفاتی مانند مهارت، تبحر، زیبایی، زشتی، کوچکی، بزرگی، خوشمزگی، و خوش سلیقگی و... که تعریف دقیقی ندارند، نمی توانند مشخص کننده یک مجموعه باشند.

۱-۱-۲ مثال:

هریک از دسته های زیر یک مجموعه است:

أ- دسته اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰.

ب- دسته حروف الفبای زبان فارسی.

ج- آن دسته از دانشجویان دانشگاه پیام نور که سن آنها کمتر از ۲۵ است.

د- دسته کتاب های درسی سال اول ابتدایی.

ه- دسته شهرهای کشور جمهوری اسلامی ایران.

و- دسته سیارات منظومه شمسی.

۱-۱-۳ اقرار داد:

اگر x ، عضوی از مجموعه S باشد، می نویسیم:

$$x \in S$$

ومی خوانیم « x متعلق به مجموعه S است» یا « x عضوی از S است» یا به طور خلاصه، « x در S است». نقیض $x \in S$ با $x \notin S$ با نماد

$$x \notin S$$

نشان می دهیم و می خوانیم « x عضو S نیست» یا « x به S تعلق ندارد» یا به طور خلاصه، « x در S نیست».

از این پس مجموعه ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A, B, C, D, \dots و عضو های آنها را با حروف کوچک لاتین نظیر a, b, c, d, \dots ، نشان خواهیم داد.

۱-۱-۴ نکته:

مجموعه S زمانی معین است که برای هر شی x بتوان تشخیص داد که x به S تعلق دارد یا نه.

۱-۱-۶ نمایش مجموعه ها:

برای نمایش یک مجموعه تمام عضو های آن را، که با علامت «،» از هم جدا کرده ایم، در داخل ابروی می آوریم:

$$A = \{2,4,6,8\} \quad \text{و} \quad S = \{5,8,26,73\}$$

★ توجه کنید که ترتیب نوشتن اعضای مجموعه ، اهمیتی ندارد. برای مثال دو

مجموعه

$$\{1,2,3\} \quad \text{و} \quad \{3,1,2\}$$

در واقع یک مجموعه را نمایش می دهند.

در مواردی که نوشتن تمام عضو های یک مجموعه غیر عملی باشد، مانند مجموعه

تمرین ۱-۱-۵ (ب)، معمولاً "عضو ها را می توانیم بر حسب خاصیت مشترکی معین

کنیم. فرض می کنیم گزاره $P(x)$ ، بیان کننده این خاصیت مشترک مربوط به x

باشد. در این صورت اگر مجموعه S شامل تمام x هایی باشد که به ازای آنها گزاره

$P(x)$ درست است، می نویسیم:

$$S = \{x | P(x)\}$$

مانند

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | (2x - 1)(3x + 4) = 0\}$$

۱-۱-۷ مثال:

الف) مجموعه اعداد اول بین ۱ تا ۳۰ را می توان به صورت

نشان داد.
 $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$

ب) مجموعه ریشه های حقیقی معادله جبری $x^2 + 4x - 1 = 0$ را می توانیم
به صورت زیر بنویسیم

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x - 1 = 0\}$$

پ) مجموعه اعداد صحیح فرد مثبت را می توانیم به هر یک از صورت های
زیر نشان بدهیم:

$$\{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$$

یا

$$\{1,3,5,7,\dots\}$$

۱-۱-۱۰ تعریف:

مجموعه S رتهی می نامیم، اگر و تنها اگر دارای هیچ عضوی نباشد. مجموعه


تهی را معمولاً "با حرف یونانی ϕ (فی) نشان می دهیم. بنابراین نماد

$$S = \phi$$

«مجموعه S تهی است» خوانده می شود. اگر مجموعه S تهی نباشد، می نویسیم

و می خوانیم « S تهی نیست» یا « S ناتهی است».

$$S \neq \phi$$

در نتیجه، $S \neq \phi$ خواهد بود اگر و تنها اگر حداقل دارای یک عضو باشد. 

۱-۱-۳ تعریف:

دو مجموعه A و B را در نظر می‌گیریم. اگر هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه

B هم باشد، A را یک زیر مجموعه B می‌نامیم و با نماد

$$A \subseteq B$$

نشان می‌دهیم و می‌خوانیم «A زیرمجموعه B است» یا «B شامل A است».

نماد \subseteq را علامت شمول یا جزئیت می‌گوییم.

در صورتیکه A زیر مجموعه ای از B نباشد، می‌نویسیم

$$A \not\subseteq B$$

۱-۱-۴ تعریف:

فرض می کنیم مجموعه A ، زیرمجموعه ای از مجموعه B ، باشد. اگر B حداقل یک عضو داشته باشد که در مجموعه A نباشد، آنگاه مجموعه A را یک زیرمجموعه سره B می نامیم و با نماد زیر نشان می دهیم.

$$A \subset B$$

در صورتیکه مجموعه A زیر مجموعه سره B نباشد می نویسیم

$$A \not\subset B$$

۱-۱-۵ امثال:

مجموعه های زیر را در نظر می گیریم:

$$A = \{x | x \in \mathbb{Z}^+, x \leq 100\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{Z}^+, x \leq 50\}$$

روشن است که هر عضو مجموعه B به مجموعه A نیز تعلق دارد پس

$$B \subseteq A$$

از طرفی $80 \in A$ ولی $80 \notin B$ پس B یک زیر مجموعه سره A است، یعنی

$$B \subset A$$

اکنون فرض می کنیم که

$$C = \{x | x \text{ عدد صحیح مثبتی است که بر } 4 \text{ بخش پذیر است، } x \leq 720\}$$

C زیر مجموعه ای از A نیست، زیرا $180 \in C$ و $180 \notin A$

$$C \not\subset A$$

توجه کنید که A هم زیر مجموعه ای از مجموعه C نیست، زیرا $29 \in A$ ولی

$$A \not\subset C$$

$29 \notin C$ پس

۱-۱-۲۰ قضیه:

اگر تعداد عضوهای مجموعه A برابر عدد طبیعی n باشد، آنگاه تعداد کل زیر مجموعه های A مساوی 2^n است.

۱-۱-۲۲ تعریف:

مجموعه تمام زیر مجموعه های A را **مجموعه توانی** A می نامیم و آن را با نماد $P(A)$ نشان می دهیم.

۱-۱-۲۳ مثال:

فرض کنید $\mathbb{A} = \{a, b\}$ تمام زیر مجموعه های A عبارتند از

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

بنابر این $P(A)$ ، مجموعه توانی A برابر است با

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

بنابر قضیه ۱-۱-۲۰ اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، تعداد عضوهای مجموعه

$P(A)$ ، برابر 2^n خواهد بود.

۱-۱-۲۶ تعریف:

دو مجموعه A و B ، راساوی (یا برابر) می نامیم اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

در این صورت می نویسیم

$$A = B$$

به بیان دیگر ، دو مجموعه راساوی می نامیم، اگر و تنها اگر دارای عضوهای یکسانی باشند.

۱-۱-۳۱ تعریف:

فرض می کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a < b$.

الف) مجموعه تمام اعداد حقیقی x را که $a \leq x \leq b$ ، بازه بسته a و b می نامیم و

با نماد $[a, b]$ نشان می دهیم. پس

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

در شکل ۱-۱ بخشی از خط حقیقی که پررنگ کشیده شده است $[a, b]$ را نشان

می دهد.



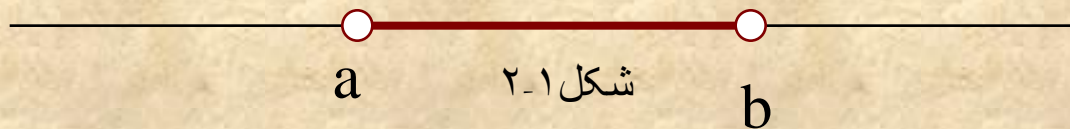
شکل ۱-۱

ب) مجموعه تمام اعداد حقیقی x را که $a < x < b$ ، بازه باز a و b می نامیم و بانماد

(a, b) یا $]a, b[$ نشان می دهیم. بنابراین

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

در شکل ۱-۲ قسمت پررنگ خط حقیقی، نشان دهنده (a, b) است.



★ توجه کنید که خود اعداد a و b به بازه (a, b) تعلق ندارند، و به همین علت در شکل

۱-۲ با دایره های تو خالی نشان داده شده اند.

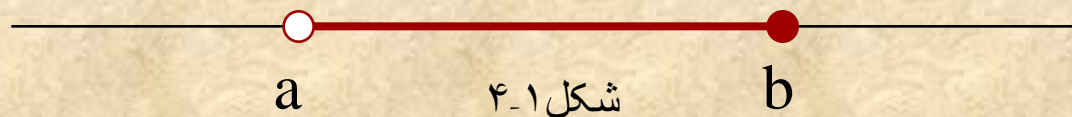
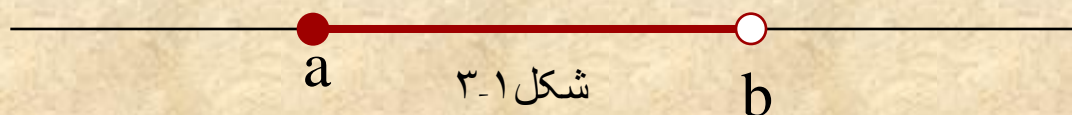
پ) هر يك از مجموعه های

$$\{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

رايك بازه نیمباز a و b می نامیم و به ترتیب بانمادهای $[a, b)$ و $(a, b]$ نشان می دهیم.

به شکل های ۳-۱ و ۴-۱ نگاه کنید.



ت) هنگام استفاده از علامت های $\pm\infty$ باید مواظب باشیم که این نمادها را با اعداد

حقیقی اشتباه نکنیم. زیرا آنها خواص اعداد حقیقی را ندارند. بنابراین بازه های زیر را داریم:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$

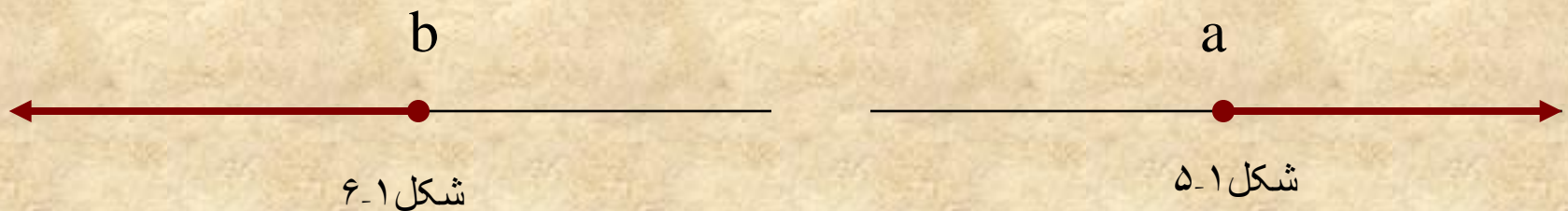
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

شکل ۱-۵ بازه $(a, +\infty)$ و شکل ۱-۶ بازه $(-\infty, b]$ را نمایش می دهد. توجه کنید که

بازه مجموعه تمام اعداد حقیقی را نمایش می دهد.



در هر یک از بازه های (a, b) ، $[a, b)$ ، $[a, b]$ ، $(a, b]$ ، اعداد حقیقی a و b را **نقاط**

انتهایی بازه می نامیم.

۱-۱-۳۲ مثال:

مجموعه جواب نامعادله $2+3x < 5x+6$ را تعیین کنید و آن را روی محور اعداد

حقیقی نمایش بدهید.

حل:

اگر x عددی باشد که در نامساوی صدق می کند، باید داشته باشیم
 $x > -2$ یا $-2x < 4$

چون تمام مرحله های بالا برگشت پذیر هستند، نتیجه می گیریم که

$$x > -2 \Leftrightarrow 2+3x < 5x+6$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله مفروض، بازه $(-2, +\infty)$ است که در شکل ۱-۷

نشان داده شده است.



شکل ۱-۷

۲-۱ اعمال جبري روي مجموعه ها

۱-۲-۱ مقدمه:

تشابهی میان نظریه مجموعه ها و نظریه اعداد حقیقی وجود دارد. با چهار عمل اصلی

جمع، تفریق، ضرب، تقسیم روی مجموعه اعداد حقیقی آشنا هستیم. اعمال جبری

مشابهی را می توان برای مجموعه ها نیز تعریف کرد. در این بخش به معرفی و

بررسی این اعمال می پردازیم.

۱-۲-۲ تعریف:

فرض می کنیم A و B دو مجموعه باشند، مجموعه تمام عضوهایی را که حداقل به

یکی از این دو مجموعه تعلق داشته باشند، اجتماع A و B می نامیم و با نماد $A \cup B$

نشان می دهیم به بیان دیگر

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

۱-۲-۳ مثال:

الف) فرض می کنیم $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, c, d, e\}$ اجتماع دو مجموعه A و B بنا بر تعریف ۱-۲-۲ عبارتست از

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

ب) فرض می کنیم A مجموعه تمام افرادی باشد که روزنامه کیهان را می خوانند و B مجموعه تمام افرادی باشد که روزنامه اطلاعات را می خوانند. $A \cup B$ عبارت است از مجموعه تمام افرادی که حداقل یکی از روزنامه های کیهان یا اطلاعات را می خوانند.

۱-۲-۴ تعریف:

فرض می کنیم A و B دو مجموعه باشند، مجموعه تمام عضوهایی را که به هر دو

مجموعه تعلق داشته باشند، اشتراک A و B می نامیم و با نماد $A \cap B$

نشان می دهیم. به بیان دیگر $A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$

۱-۲-۳ مثال:

الف) فرض می کنیم $A = \{1,2,3,7\}$ و $B = \{0,2,4,7\}$ اشتراک دو مجموعه A

و B بنابر تعریف ۱-۲-۴ عبارتست از

$$A \cap B = \{2,7\}$$

ب) مجموعه $A \cap B$ در مثال ۱-۲-۳ (ب) عبارتست از مجموعه تمام افرادی که

هر دو روز نامه کیهان و اطلاعات را می خوانند.

★ عمل های اجتماع و اشتراک از قوانین خاصی پیروی می کنند. این قوانین غالباً

بدیهی اندوما ، به منظور سهولت کاربرد، آنها را در قالب سه قضیه زیر می آوریم.

۱-۲-۷ قضیه:

برای هر سه مجموعه دلخواه A و B و C و مجموعه جهانی U داریم

۱)

$$A \cup \phi = A$$

۲)

$$A \cup A = A$$

۳)

$$B \cup A = A \cup B$$

۴)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

۵)

$$B \subseteq A \cup B \quad A \subseteq A \cup B$$

۶)

$$A \cup U = U$$

۱-۲-۸ قضیه:

برای هر سه مجموعه دلخواه A ، B و C و مجموعه جهانی U داریم

$$۱) \quad A \cap \phi = \phi$$

$$۲) \quad A \cap A = A$$

$$۳) \quad B \cap A = A \cap B$$

$$۴) \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$۵) \quad A \cap B \subseteq B \quad A \cap B \subseteq A$$

$$۶) \quad A \cap U = A$$

۱-۲-۹ نکته:

با استفاده از قسمت ۴ در قضیه های ۱-۲-۷ و ۱-۲-۸، می توانیم پرانتزها را

حذف کنیم و اجتماع و اشتراک سه مجموعه را به صورت های

$$A \cap B \cap C$$

$$A \cup B \cup C$$

بنویسیم. از قسمت ۵ قضیه های مذکور نتیجه می شود که $A \cap B \subseteq A \cup B$

۱-۲-۱۰ قضیه:

برای هر سه مجموعه دلخواه A و B و C، داریم

$$۱) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

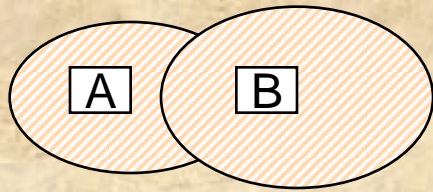
$$۲) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

۱-۲-۲ نمودار ون:

معمولاً برای روشن تر شدن روابط بین مجموعه ها از نمودار ون استفاده می کنیم،

که مثال هایی از آن در شکل ۱-۸ آمده است. در هر یک از این نمودار ها ناحیه سایه

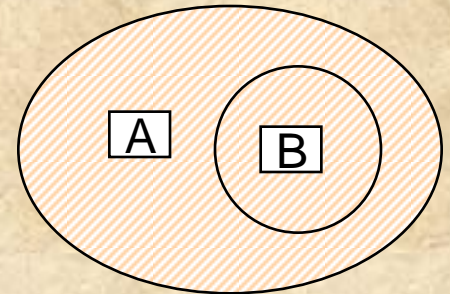
خورده نشان دهنده مجموعه ای است که در زیر نمودار نوشته شده است.



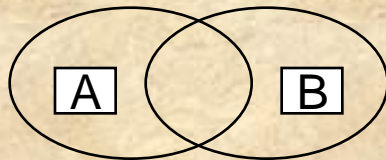
$A \cup B$



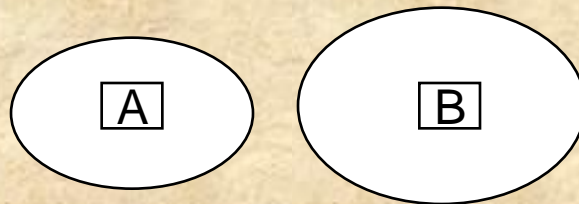
$A \cup B$



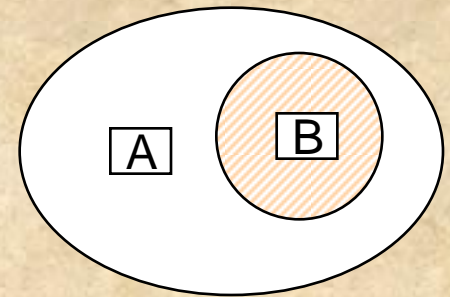
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \cap B$



$A \cap B$

۱-۲-۳ تعریف:

دو مجموعه A و B را **از هم جدا** می نامیم در صورتی که عضو مشترکی نداشته باشند به بیان دیگر، هرگاه $A \cap B = \phi$ نگاه مجموعه A و B را از هم جدا می خوانیم.

۱-۲-۴ مثال:

الف) مجموعه اعداد صحیح فرد و مجموعه اعداد صحیح زوج، دو مجموعه از هم جدا هستند.

$$A \cap B = \phi$$

۱-۲-۵ تعریف:

دو مجموعه A و B را در نظر می‌گیریم. **تفاضل** مجموعه B از مجموعه A، آن را با نماد

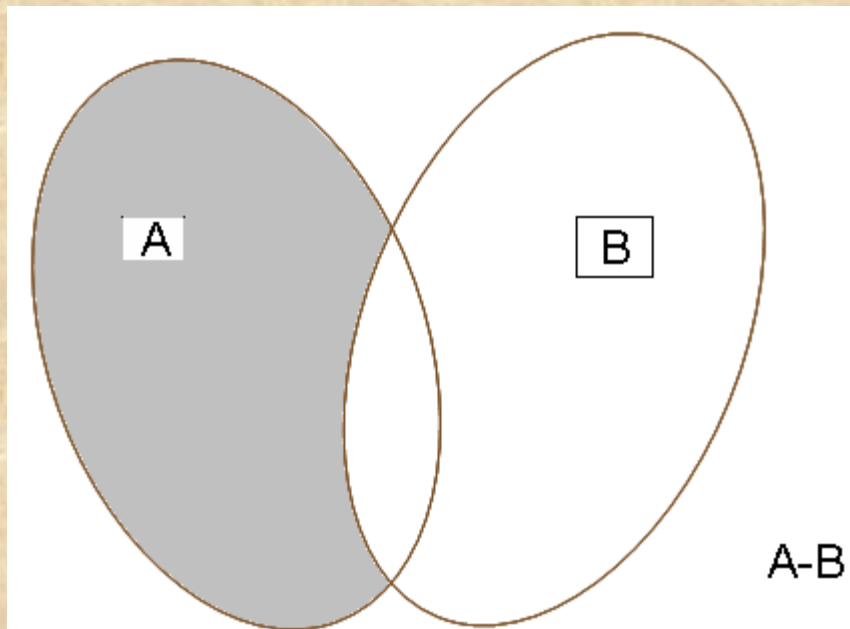
A-B نشان می‌دهیم، عبارتست از تمام عضو هایی از A که عضو B نیستند. به

بیان دیگر

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

در شکل ۹-۱ ناحیه سایه خورده، تفاضل B از A یعنی A-B را برای مجموعه های

دلبخواه A و B نشان می‌دهد.



شکل ۹-۱

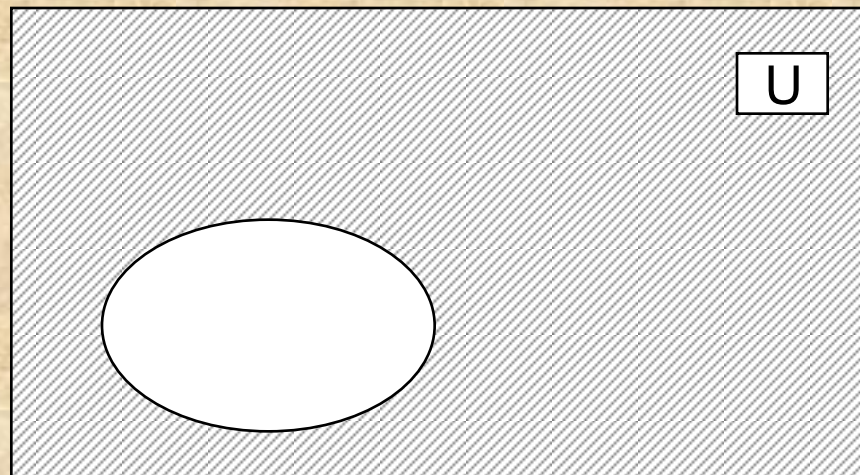
۱-۲-۱ تعریف:

برای هر مجموعه A با مجموعه جهانی U ، مجموعه $U-A$ را **مکمل** مجموعه A می نامیم

و با نماد A' نشان می دهیم. پس

$$A' = \{x | x \in U, x \notin A\}$$

ناحیه سایه خورده در شکل ۱-۱۰ نشان دهنده مکمل مجموعه A است.



A'

شکل ۱-۱۰

۱-۲-۹ مثال:

فرض می کنیم U مجموعه اعداد حقیقی A مجموعه تمام اعداد گنگ (یا اصم)، و B

مجموعه تمام اعداد گویا باشد. بنا بر تعریف ۱-۲-۸ داریم

$$A' = U - A = \{x | x \in R, x \notin A\} = B$$

بنابراین A' برابر مجموعه اعداد گویاست. به همین ترتیب

$$B' = U - B = \{x | x \in R, x \notin B\} = A$$

۱-۲-۲۱ قضیه:

اگر A و B زیرمجموعه از مجموعه جهانی U باشند، آنگاه

$$(A')' = A$$

(پ)

$$\phi' = U \quad (\text{الف})$$

$A \subseteq B$, آنگاه $B' \subseteq A'$ و برعکس

(ت)

$$U' = \phi \quad (\text{ب})$$

۲۲-۲-۱ قضیه قوانین دمورگان:

اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه جهانی U باشند، آنگاه

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{(الف)}$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{(ب)}$$

۲۴-۲-۱ قضیه تعمیم قوانین دمورگان

اگر مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_n زیرمجموعه‌ای از مجموعه جهانی U باشند، آنگاه

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n' \quad \text{(الف)}$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_n' \quad \text{(ب)}$$

۱-۲-۸ تعریف:

فرض می کنیم A و B دو مجموعه باشند. مجموعه تمام عضو هایی را که تنها به A

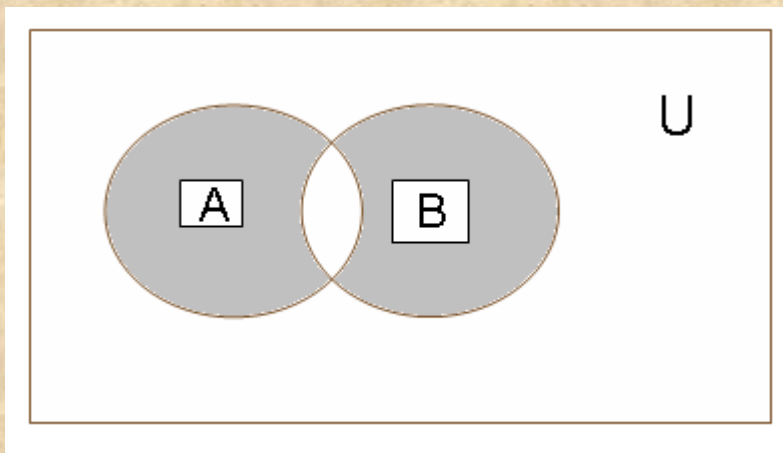
یا تنها به B تعلق دارند، **تفاضل متقارن A و B** می نامیم و بناماد $A \Delta B$

نشان می دهیم. به بیان دیگر

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

تساوی بالا، دلیل انتخاب نام تفاضل متقارن برای $A \Delta B$ را نشان می دهد، زیرا

تفاضل متقارن A و B برابر با اجتماع دو تفاضل $A-B$ و $B-A$ است.



در شکل ۱۲-۱ ناحیه سایه خورده

$A \Delta B$ نشان داده شده است.

۳-۱ حاصل ضرب دکارتی مجموعه ها

پیش از اینکه به تعریف حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه پردازیم، مفهوم

زوج های مرتب را یادآوری می کنیم.

۱-۳-۱ تعریف:

دوتایی (a,b) را که در آن ترتیب عناصر مطرح است، یک دوتایی مرتب یا زوج

مرتب یا جفت مرتب می نامیم. در زوج مرتب (a,b) ، a را مولفه اول و b را مولفه دوم می گوئیم.

۱-۳-۲ تعریف:

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) را **مساوی یا برابر** می گوئیم، اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$a=c, b=d$$

۱-۳-۵ تعریف:

فرض می کنیم A و B دو مجموعه ناتهی دلخواه باشند. حاصل ضرب دکارتی

A و B که با نماد $A \times B$ نشان داده می شود، عبارتست از مجموعه تمام زوج های

مرتبی به صورت (a, b) که در آن $a \in A$ و $b \in B$ یعنی

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

★ توجه کنید که هر عضو مجموعه $A \times B$ یک زوج مرتب است.

۱-۳-۶ مثال:

فرض می کنیم $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{g, h\}$ بنا بر ۱-۳-۵ حاصل ضرب دکارتی

$A \times B$ عبارتست از

$$A \times B = \{(1, g), (1, h), (2, g), (2, h), (3, g), (3, h)\}$$

حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ برابر است با

$$B \times A = \{(g, 1), (g, 2), (g, 3), (h, 1), (h, 2), (h, 3)\}$$

به طوری که مشاهده می کنیم ، حاصل ضرب های دکارتی $B \times A$ و $A \times B$

لزوماً "برابر نیستند".

۴-۱- تعداد عضوها و افراز یک مجموعه

۴-۱-۲-۱- قرار داد:

تعداد عضوهای مجموعه متناهی A را با نماد $n(A)$ نشان می دهیم.

★ مجموعه تهی یک مجموعه متناهی محسوب می شود.

۴-۱-۱- تعریف:

مجموعه ای که تعداد اعضای آن متناهی باشد، مجموعه متناهی یا پایان نامیده

می شود. مجموعه ای که متناهی نباشد، نامتناهی یا بی پایان نامیده می شود.

۱-۴-۳ مثال:

(الف) مجموعه $\{1, 3, 7, 9, 11\}$ متناهی است زیرا دارای ۵ عضو است.

(ب) مجموعه $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$ متناهی است.

(پ) مجموعه $[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ متناهی است.

(ت) هر یک از مجموعه های اعداد طبیعی، صحیح، گویا، گنگ، و حقیقی

نامتناهی است.

(ث) بازه (a, b) که $a < b$ ، مجموعه ای نامتناهی است.

۱-۴-۵ قضیه:

فرض می کنیم A و B و C سه مجموعه دلخواه باشند، همواره داریم

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(الف)

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

(ب)

$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A)$$

(پ)

۱-۴-۶ مثال:

فرض کنید مجموعه A دارای ۴۰ عضو و مجموعه B دارای ۳۵ عضو است

که ۱۰ عضو آنها در A و B مشترک هستند. مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

حل:

چون $n(A \cap B) = 10$ بنابراین ۱-۴-۵ (الف) داریم

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 45 + 35 - 10 = 65$$

۱-۴-۱ تعریف:

مجموعه ناتهی A را در نظر می‌گیریم. مجموعه های ناتهی A_n, \dots, A_2, A_1

رایک **افراز** مجموعه A می‌نامیم، در صورتی که:

(الف) مجموعه های A_n, \dots, A_2, A_1 و به دو از هم جدا باشند، به

بیان دیگر به ازای هر $i \neq j$ داشته باشیم

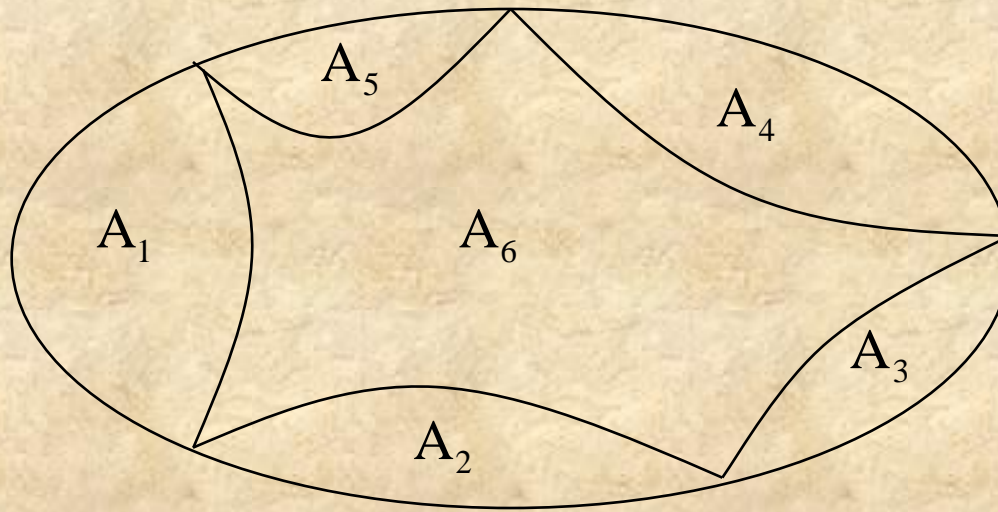
$$A_i \cap A_j = \phi$$

(ب) اجتماع مجموعه های A_n, \dots, A_2, A_1 **مهاوی** A باشد، یعنی

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

در شکل ۱۵-۱ افراز مجموعه A به شش مجموعه $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$

نشان داده شده است.



شکل ۱۵-۱

فصل دوم

دستگاه‌های مختصات

هدف کلی:

هدف کلی فصل این است که بادیستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی آشنا شوید،
و معادلات خطوط را بشناسید و نمودار آنها را رسم کنید.

هدف های رفتاری:

از شما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

۱. مختصات دکارتی هر نقطه رادر صفحه مختصات تعیین کنید.
۲. با داشتن مختصات دکارتی یک نقطه ،موضع نقطه را در صفحه معین کنید.
۳. فاصله دو نقطه رادر صفحه مختصات محاسبه کنید.
۴. مختصات وسط یک پاره خط را با داشتن مختصات ابتدا و انتهای پاره خط پیدا کنید.
۵. مختصات محل تلاقی سه میانه مثلث را با دانستن مختصات دکارتی راس هایمثلث محاسبه کنید.

۶. مختصات نقطه رادر دستگاهی که محور های آن به موازات خود انتقال یافته اند، تعیین کنید.

۷. معادله خط را با استفاده از داده های مسئله بنویسید.

۸. شیب خط را تعریف کنید، رابطه بین شیب های خطوط موازی، متعامد، و متقاطع

را بلد باشید در حل مسائل به کار ببرید.

۹. نمودار خط هایی را که معادله آنها داده شده است، رسم کنید.

۱۰. عرض از مبدا و طول از مبدا خط ها را تعیین کنید.

۱۱. فاصله یک نقطه را از یک خط محاسبه کنید.

۱۲. فاصله دو خط موازی را تعیین کنید.

۱۳. مختصات نقطه تلاقی دو خط را بیابید.

۱۴. دستگاه مختصات قطبی را تعریف کنید و نحوه تعیین مختصات قطبی یک نقطه را بیان کنید.

۱۵. رابطه بین مختصات دکارتی و مختصات قطبی یک نقطه را بدانید و در حل مسائل به کار برید.

مقدمه

در این فصل ابتدا به معرفی دستگاه مختصات دکارتی و دستگاه مختصات قطبی می پردازیم و سپس رابطه بین این دو دستگاه را بررسی می کنیم.

۱-۲ دستگاه مختصات دکارتی

۱-۲-۱ تعریف:

در صفحه هندسی، یک خط مستقیم افقی رسم می کنیم. در روی این خط، نقطه

دلخواه O را به عنوان مبدا و طولی را به عنوان واحد طول اختیار می کنیم. اکنون

این خط را بر حسب این واحد طول به ترتیب اسلاید بعدی مدرج می کنیم:

الف) نقطه 0، یعنی مبدا را به عنوان نمایش عدد صفر اختیار می کنیم.

ب) اگر $a > 0$ ، نقطه ای را به فاصله a برابر واحد طول در سمت راست مبدا به عنوان نمایش a اختیار می کنیم.

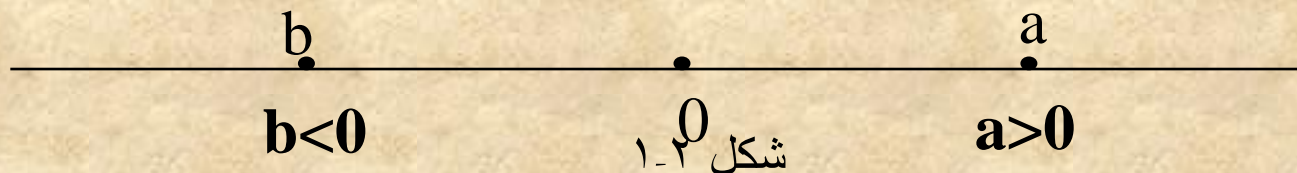
پ) اگر $b < 0$ ، نقطه ای را به فاصله b برابر واحد طول در سمت چپ مبدا به عنوان نمایش b اختیار می کنیم.

به این ترتیب، نقاطی از خط افقی که نمایش اعداد مثبت هستند در سمت راست نقطه 0

و نقاطی که نمایش اعداد منفی هستند، در سمت چپ مبدا قرار دارند. بنابراین، خط

جهت داری به دست می کنیم آوریم که نمایش اعداد حقیقی است. این خط جهت دار

را محور طول ها یا محور x ها می کنیم نامیم. به شکل ۱-۲ نگاه کنید.



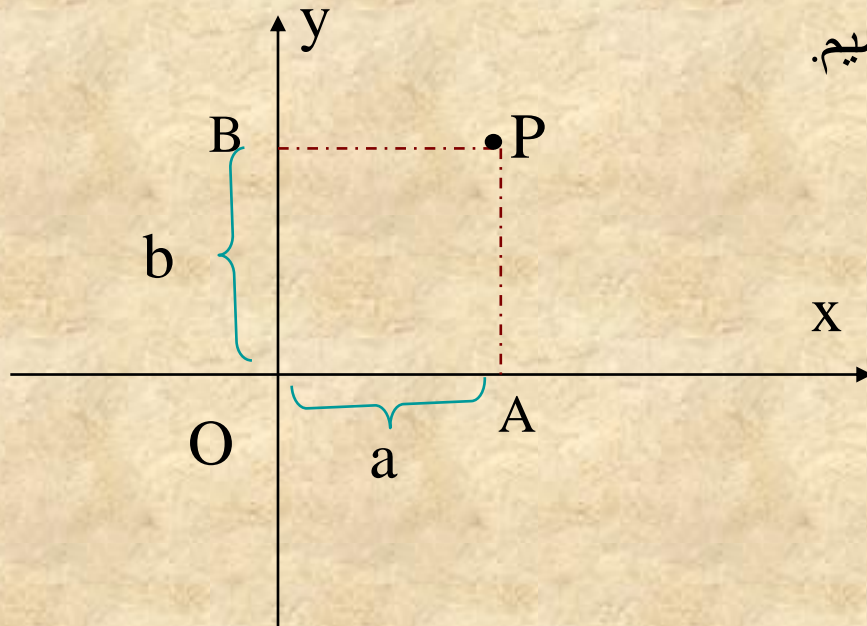
۲-۱-۲ مختصات نقطه در صفحه:

فرض می کنیم P نقطه دلخواهی در صفحه هندسه xoy باشد.

در شکل ۲-۳، خطوط PA و PB را به ترتیب عمود بر محور x ها و عمود بر محور y ها

رسم می کنیم. اندازه جبری OA روی محور x ها را طول نقطه P و اندازه جبری OB

روی محور y ها را عرض نقطه P می نامیم.

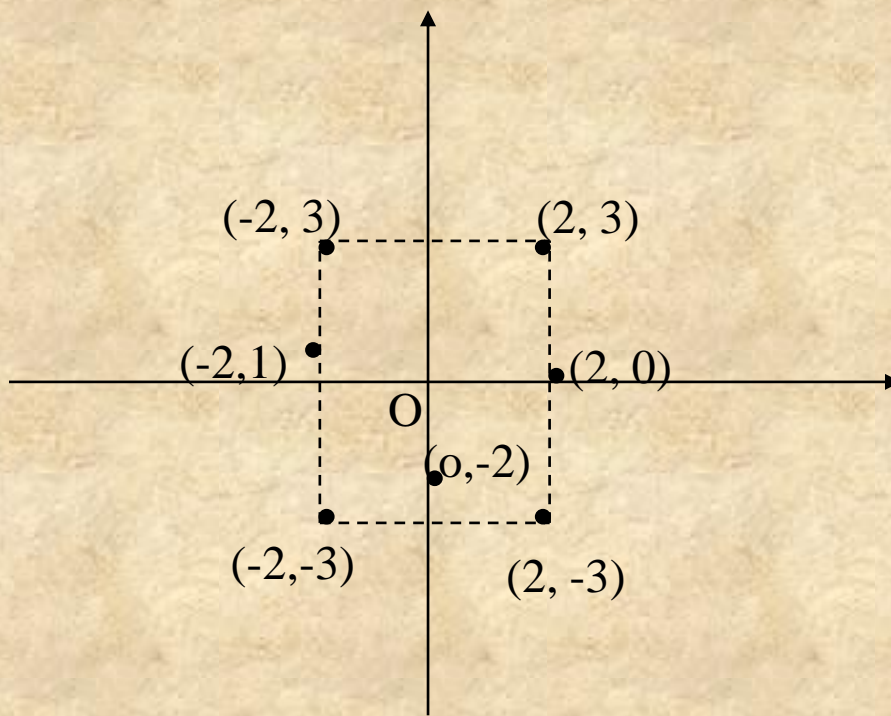


در نتیجه یک تناظر یک به یک بین نقاط صفحه و زوج هایی مانند (a,b) ، که

در آن a و b اعداد حقیقی اند وجود دارد. بنابراین می توان صفحه xoy را با

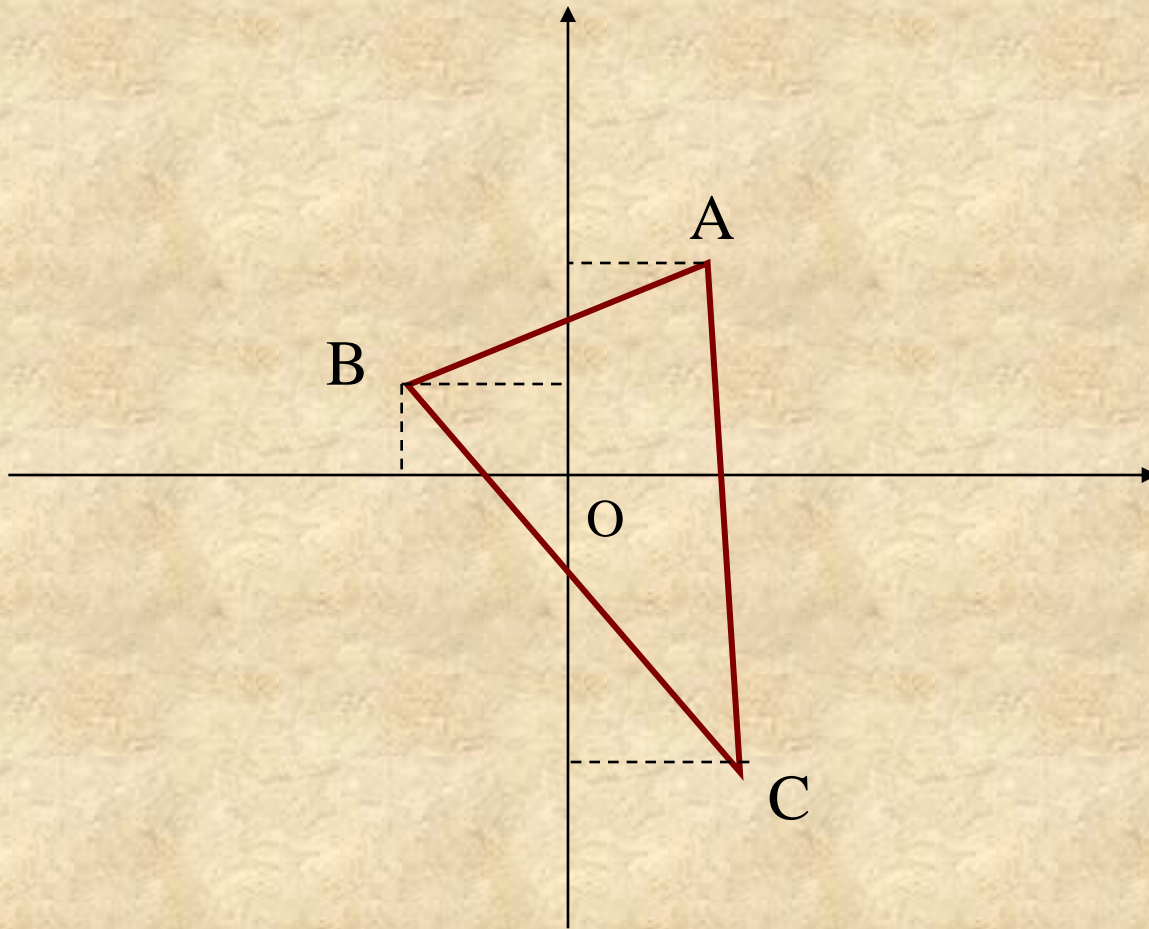
مجموعه $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یکی گرفت. در شکل ۲-۴، یک دستگاه مختصات

دکارتی و چند نقطه در آن نشان داده شده است.



۲-۱-۲ مثال:

مثلثی رسم کنید که مختصات رئوس آن $A(2, 2)$ ، $B(-1, 1)$ و $C(1, -3)$ باشد.



۲-۱-۵ فاصله دو نقطه :

فرض می کنیم A نقطه به مختصات (x_A, y_A) و B نقطه به مختصات (x_B, y_B)

باشد. فاصله دو نقطه A و B را مساوی طول پاره خط AB تعریف می کنیم و با

نماد $d(A, B)$ نشان می دهیم. می توان ثابت کرد که فاصله میان A و B از

رابطه زیر به دست می آید.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

۲-۱-۷ مختصات وسط پاره خط:

دو نقطه A و B را به ترتیب با مختصات (x_A, y_A) و (x_B, y_B) صفحه

در نظر می گیریم. اگر C نقطه وسط پاره خط AB باشد، آنگاه مختصات نقطه

C برابر است با

$$x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$

$$y_C = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$$

۲-۱-۸ مثال:

مختصات نقطه وسط پاره خط BC در مثال ۲-۱-۴ را تعیین کنید.

حل:

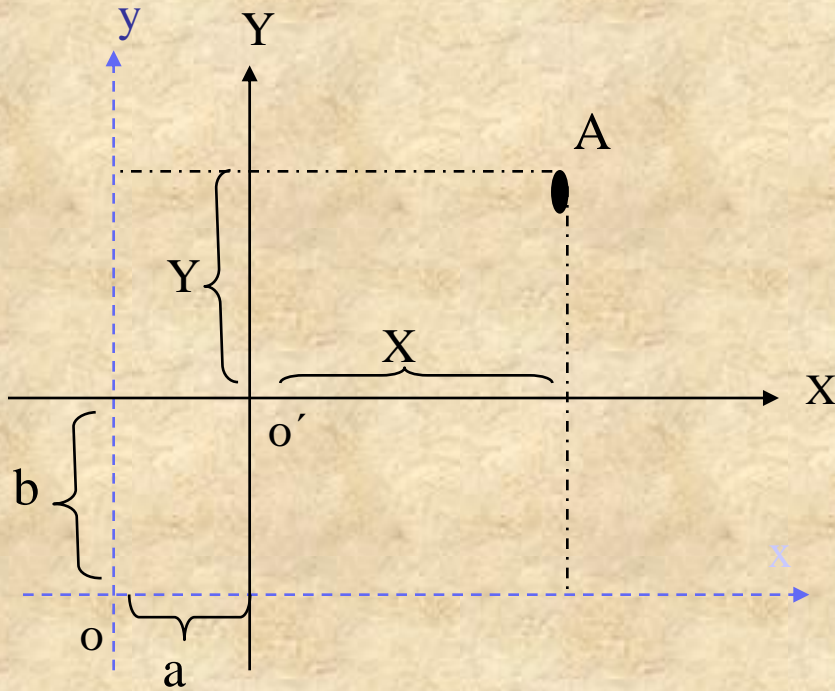
فرض می کنیم D، نقطه وسط پاره خط BC باشد، بنابر ۲-۱-۷ داریم

$$x_D = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$$

$$y_D = \frac{1}{2}(-3+1) = -1$$

بنابر این مختصات نقطه D، $(0, -1)$ است.

۱-۲-۱-۲ انتقال محورهای مختصات :



$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

۲-۲ معادله و نمودار خط

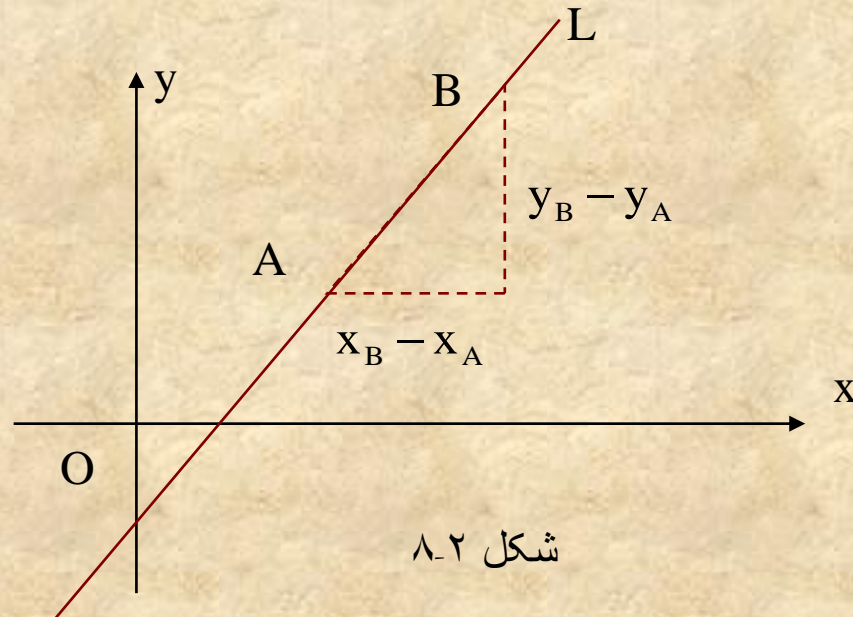
۱-۲-۲ مقدمه:

خط راست L را که، موازی محور y ها نیست (خط غیر قائم)، در نظر می گیریم. اگر

A و B دو نقطه متمایز دلخواه روی خط L باشند، آنگاه شیب یا ضریب زاویه خط

را با حرف m نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



★ دقت کنید که شیب خط بستگی به نقاطی که برای محاسبه آن انتخاب می کنیم

ندارد، و برای تمام نقاط روی هر خط مقداری ثابت است. (چرا؟)

۲-۲-۳ مثال:

شیب خطی که از دو نقطه $A(2, -3)$ و $B(4, 1)$ می گذرد برابر است با

$$m = \frac{1 - (-3)}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

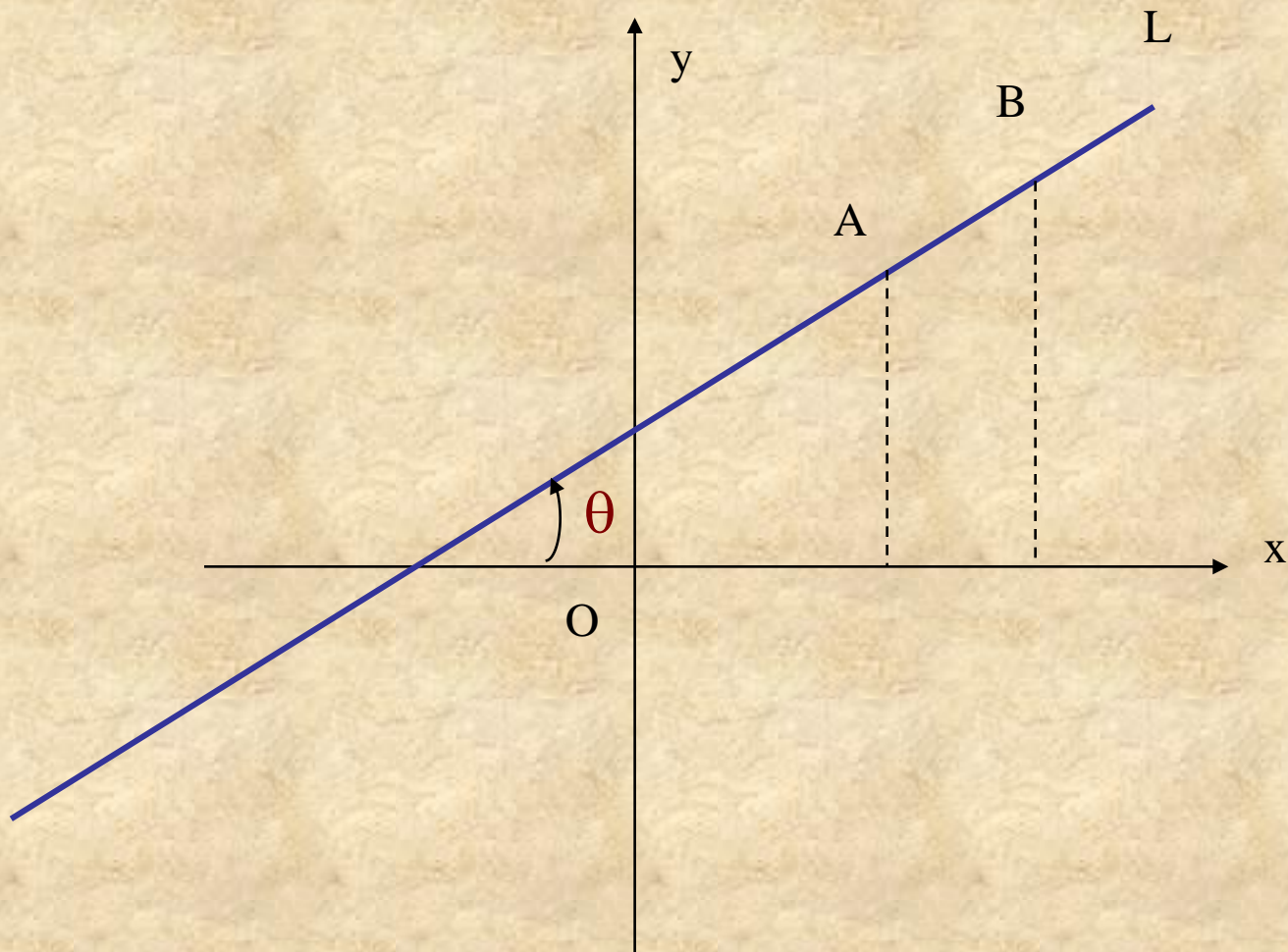
۲-۲-۴ نکته:

شیب خط L را می توان به **تانژانت زاویه ای که این خط با جهت مثبت محور**

X

هامی سازد نیز تعبیر کرد. به بیان دیگر

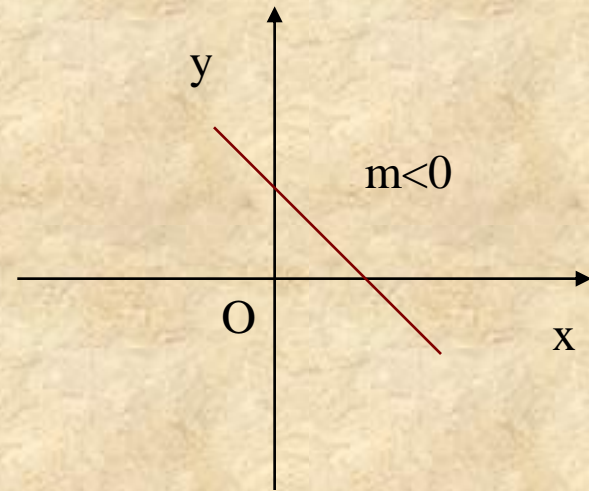
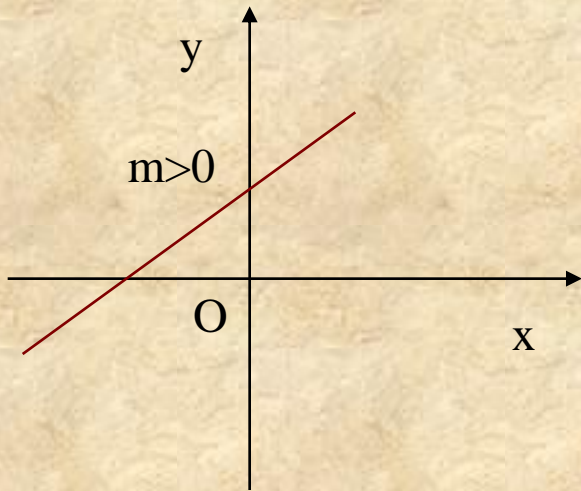
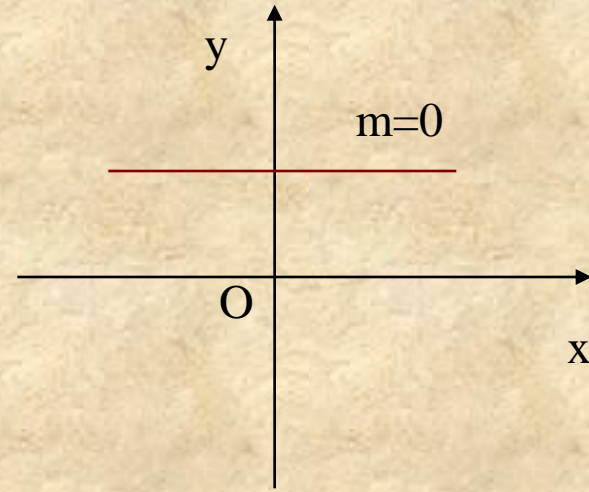
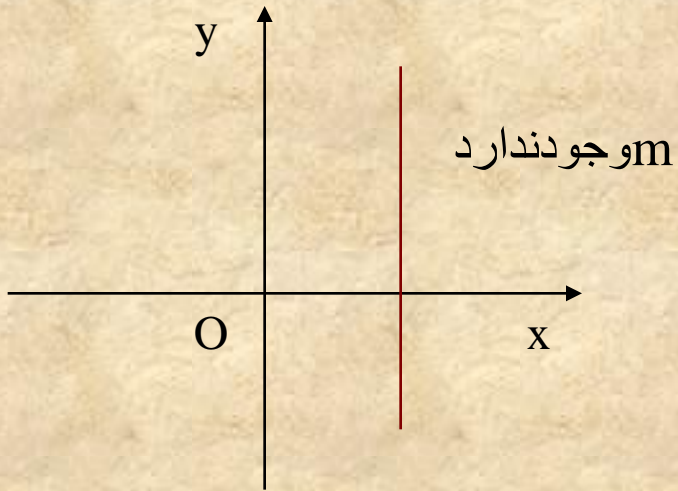
$$m = \tan \theta$$



★ در این جا $0 \leq \theta \leq 180$ زاویه ای است که خط L با جهت مثبت محور x ها

می سازد.

به شکل های ۱۰-۲ توجه کنید.



شکل های ۱۰-۲

۶-۲-۲ قضیه:

سه نقطه A و B و C بر روی یک خط واقع اند اگر و تنها اگر شیب های خطوط AB

و BC مساوی باشند، به عبارت دیگر داشته باشیم

$$m_{AB} = m_{BC}$$

۷-۲-۲ مثال:

عدد a را چنان تعیین کنید که سه نقطه $A(1, -1)$, $B(0, 2)$, $C(a, -2a)$ ، بر روی

یک خط راست واقع باشند.

حل:

بنابر قضیه ۶-۲-۲ باید داشته باشیم

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{2 - (-1)}{0 - 1} = \frac{-2a - 2}{a - 0} \Rightarrow 3a = 2a + 2$$

در نتیجه $a = 2$.

۲-۲-۹ قضیه (شرط توازی و تعامد دو خط):

فرض می کنیم m_1 و m_2 به ترتیب شیب های خط های L_1 و L_2 باشند.

الف) دو خط L_1 و L_2 متوازی اند اگر و تنها اگر $m_1 = m_2$

ب) دو خط L_1 و L_2 برهم عمودند اگر و تنها اگر $m_1 m_2 = -1$

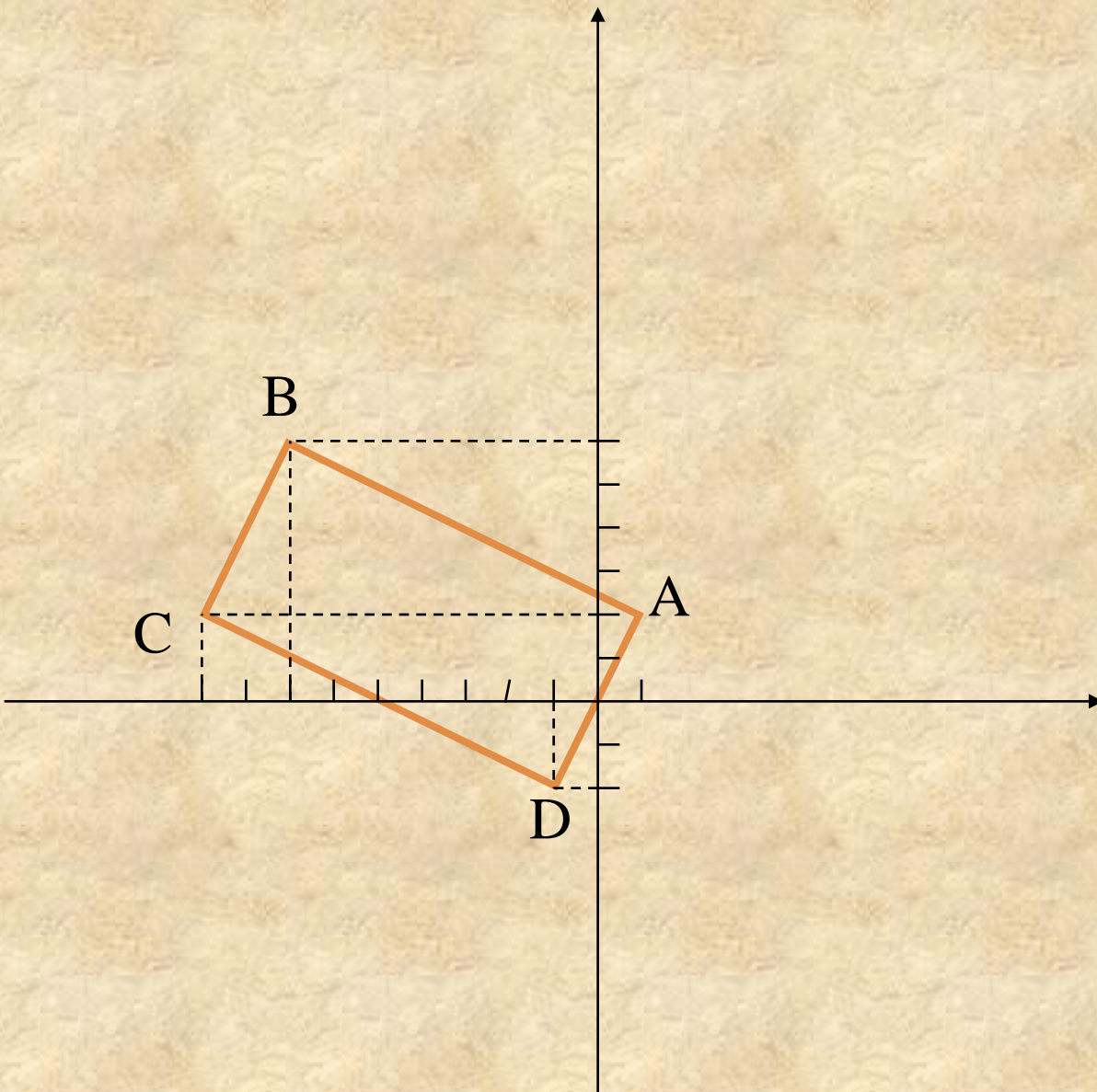
۲-۲-۱۰ مثال:

نشان بدهید که چهار نقطه $A(1,2)$, $B(-7,6)$, $C(-9,2)$, $D(-1,-2)$ راس های یک مستطیل اند.

حل:

می دانیم مستطیل یک چهار ضلعی است که در آن اضلاع دو به دو برهم عمودند

و اضلاع روبه رو با هم مساوی و متوازی اند، به شکل ۲-۱۱ در اسلاید بعدی توجه کنید.



$$m_{AD} = \frac{-2-2}{-1-1} = 2$$

$$m_{AB} = \frac{2-6}{1+7} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{2-6}{-9+7} = 2$$

$$m_{CD} = \frac{-2-2}{-1+9} = -\frac{1}{2}$$

☆ از آن جا که $m_{AD} \cdot m_{AB} = -1$ و $m_{BC} \cdot m_{CD} = -1$ ، خطوط AB و AD و همچنین

خطوط BC و CD دوجه دو برهم عمودند.

☆ از طرفی چون $m_{AD} = m_{BC}$ و $m_{CD} = m_{AB}$ ، خط AD و BC باهم و دو خط AB

و CD باهم متوازی اند.

از مطالب بالا نتیجه می شود که چهار ضلعی ABCD، مستطیل است.

۲-۲-۱ زاویه بین دو خط :

فرض می کنیم m_1 و m_2 به ترتیب شیب های دو خط L_1 و L_2 باشند. زاویه

بین دو خط ، α ، از رابطه زیر به دست می آید.

$$\tan \alpha = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

۲-۲-۱۵ معادله خط راست:

فرض می کنیم $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ نقطه متمایز روی خط L باشند. اگر

$P(x, y)$ نقطه دلخواهی از خط L باشد آنگاه بر حسب اینکه خط L قائم باشد یا نه،

معادله خط L عبارت است از:

حالت اول) اگر خط L قائم نباشد، یعنی $x_1 \neq x_2$ ، آنگاه معادله خط L برابر است با

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{یا}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حالت دوم) اگر خط L قائم باشد، یعنی $x_1 = x_2$ ، آنگاه معادله خط قائم L عبارت است از

$$x = x_1$$

۲-۲-۱۶ مثال:

معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(3, 4)$ و $(-5, 2)$ می‌گذرد.

حل:

$$m = \frac{4-2}{3+5} = \frac{1}{4}$$

شیب خط برابر است با

معادله خط بنابر ۲-۲-۱۵ (الف) عبارت است از

$$y-4 = \frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$x-4y+13=0$$

۲-۲-۱۸ نکته:

به طور کلی هر معادله ای به صورت $Ax+By+C=0$ ، که در آن اعداد حقیقی

A و B هر دو با هم صفر نباشند، نمایشگر یک خط راست است. این معادله را که

شامل توان های اول x و y است، بر حسب x و y ، **خطی** می نامیم.

بنابراین هر خط راست در صفحه به وسیله یک معادله خطی مشخص می شود و

معادله خطی معرف یک خط راست است.

۲-۲-۱۹ طول و عرض از مبدا خط:

معادله خطی $Ax+By+c=0$ ، را که در آن اعداد حقیقی A و B هر دو با هم صفر

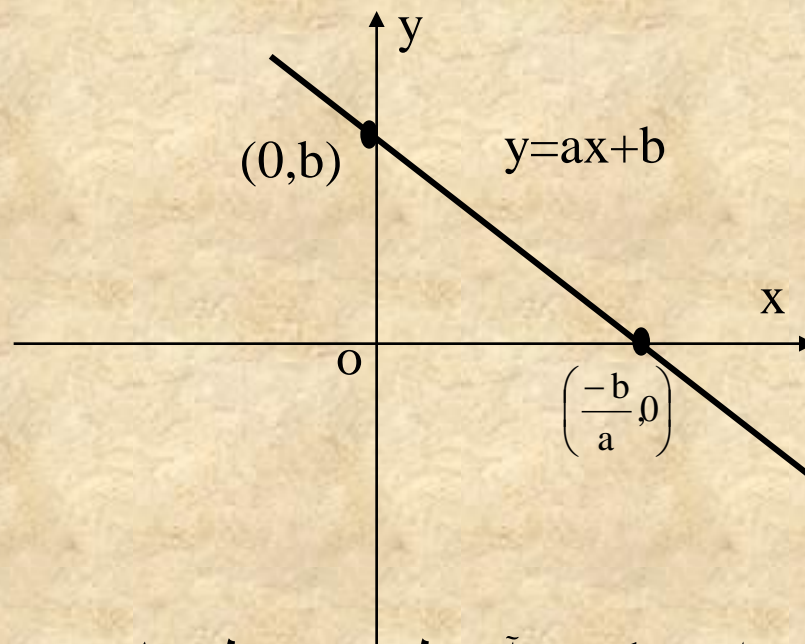
نیستند، می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$y=ax+b$$

که در آن b را عرض از مبدا خط و $\frac{-b}{a}$ را طول از مبدا خط می نامیم.

توجه کنید که اعداد حقیقی b و $\frac{-b}{a}$ به ترتیب به ازای $x=0$ و $y=0$ از معادله

$y=ax+b$ ، به دست می آیند. به شکل ۲-۱۲ نگاه کنید.



در حقیقت $(0, b)$ ، نقطه ای است که در آن خط مورد نظر با محور y ها تلاقی می کند

و $(-\frac{b}{a}, 0)$ نیز نقطه است که در آن خط مورد نظر محور x ها را قطع می کند.

در معادله $y = ax + b$ ، شیب خط برابر a است. چون این معادله بر حسب a ، شیب، و b ،

عرض از مبدا خط، نوشته شده است، آن را معادله شیب و عرض از مبدا خط می نامیم.

۲-۲-۲ مثال:

نمودار خطی با معادله $y = -\frac{2}{3}x + 2$ را رسم کنید.

حل:

چون معادله خط به صورت شیب و عرض از مبدا داده شده است، لذا تعیین نقاط

تلاقی خط با محور های مختصات، یعنی عرض از مبدا و طول از مبدا خط،

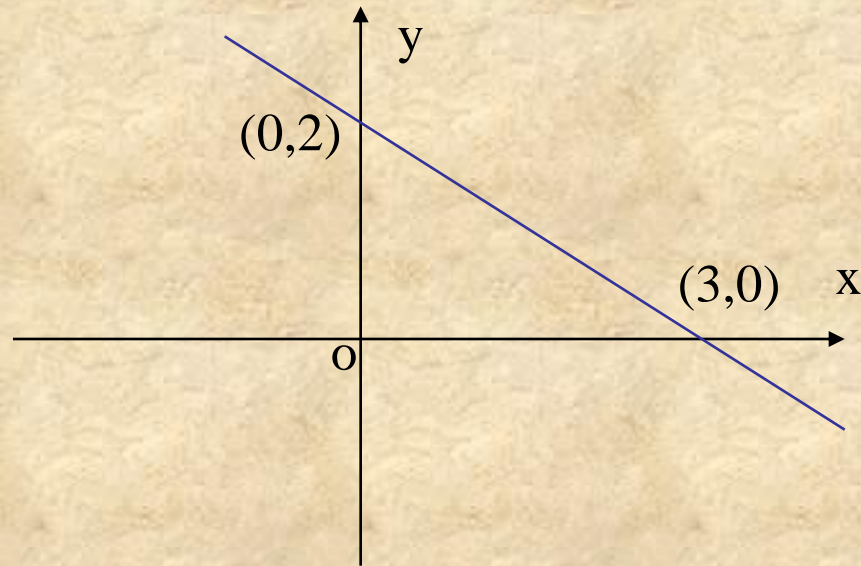
ساده است. داریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون دو نقطه $(0,2)$ و $(3,0)$ روی این خط قرار دارند، خطی که این دو نقطه را به

هم وصل کند، نمودار خط داده شده است. این نمودار در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.



۲-۲-۲۶ فاصله یک نقطه از یک خط:

فاصله نقطه $P(a,b)$ از خط L با معادله $Ax+By+c=0$ برابر است با:

$$d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

۲-۲-۲۷ فاصله دو خط موازی:

فاصله دو خط موازی با معادله های $Ax+By+C=0$ و $Ax+By+D=0$ برابر است با:

$$h = \frac{|C-D|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

۲-۲-۳۱ مختصات نقطه تلاقی دو خط:

نقطه تلاقی دو خط، نقطه ای است که بر هر دو خط واقع است. بنابراین اگر معادله های

دو خط به صورت $Ax+By+C=0$ و $A'x+B'y+C'=0$ باشند، مختصات نقطه

تلاقی این دو خط، از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به دست می آید:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

۲-۲-۳ مثال:

مختصات نقطه تلاقی دو خط با معادله های $3x-4y+6=0$ و $x-2y-3=0$ را به دست آورید.

حل:

بنابر ۲-۲-۳ باید دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} 3x - 4y + 6 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

برای این کار، معادله دوم دستگاه بالا را در (۳-) ضرب و نتیجه را با معادله اول

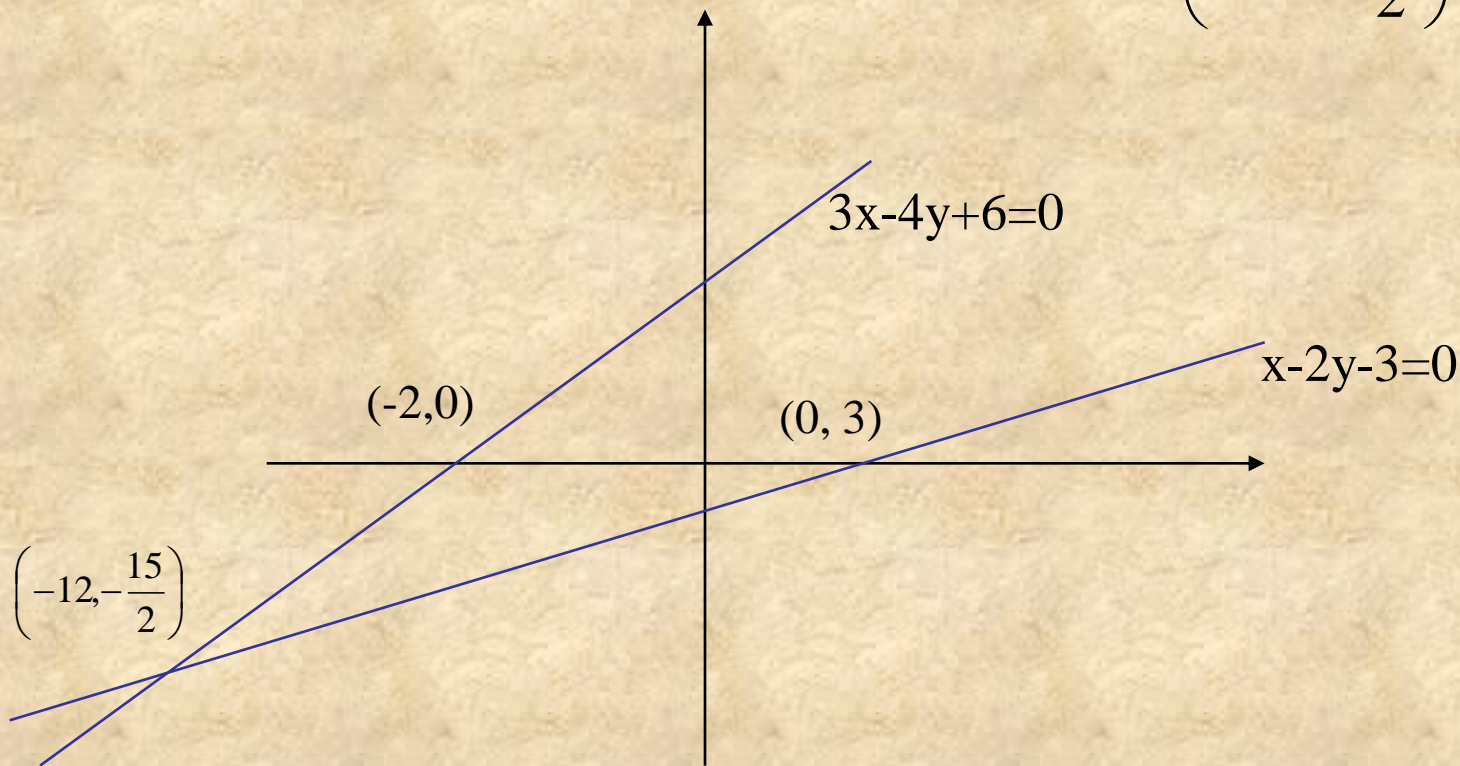
دستگاه جمع می کنیم، یعنی

$$\begin{cases} 3x - 4y + 6 = 0 \\ -3x + 6y + 9 = 0 \\ \hline 0 + 2y + 15 = 0 \end{cases}$$

در نتیجه، $y = -\frac{15}{2}$ با قرار دادن در معادله دوم دستگاه به دست می آوریم

$$x - 2\left(\frac{-15}{2}\right) - 3 = 0 \Rightarrow x = -12$$

بنا بر این $\left(-12, -\frac{15}{2}\right)$ نقطه تلاقی دو خط است



۲-۳ دستگاه مختصات قطبی

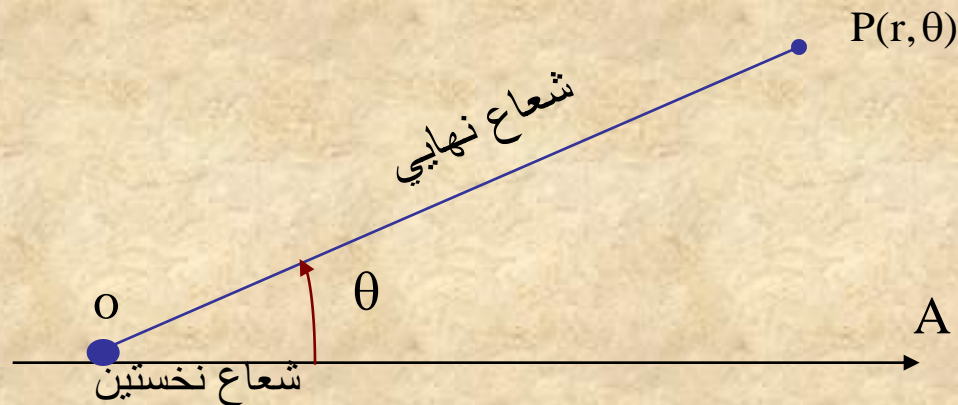
۲-۳-۱ مقدمه:

در بخش ۱-۲ دیدیم که مکان یک نقطه از صفحه را می توانیم با طول و عرض آن نقطه در دستگاه مختصات دکارتی مشخص کنیم. روش دیگری برای تعیین محل یک نقطه در صفحه وجود دارد که به کمک دستگاه مختصات قطبی انجام می شود.

در این بخش، دستگاه مختصات قطبی را معرفی می کنیم و سپس به بررسی مختصات قطبی یک نقطه و رابطه آن با مختصات دکارتی آن نقطه می پردازیم.

۳-۳-۲ تعریف:

فرض می کنیم P نقطه ای ثابت باشد که بر O ، قطب، منطبق نیست. اگر θ زاویه جهت دار AO باشد، r شعاع نخستین و OP شعاع نهایی زاویه θ می نامیم. جهت مثبت در اندازه گیری زاویه θ ، برخلاف عقربه های ساعت (پادساعتگرد) در نظر گرفته می شود. اگر r فاصله جهت دار O از P باشد، زوج مرتب (r, θ) مختصات قطبی نقطه P در صفحه می نامیم، و می نویسیم $P(r, \theta)$ به شکل ۱۶-۲ نگاه کنید.



معمولاً "زاویه θ بر حسب درجه یا رادیان اندازه گیری می شود. بین درجه و رادیان،

رابطه زیر برقرار است.

$$1 \text{ رادیان} = \frac{\pi}{180} \text{ درجه}$$

شعاع نهایی oP را **شعاع حامل** نقطه P نیز می نامند.

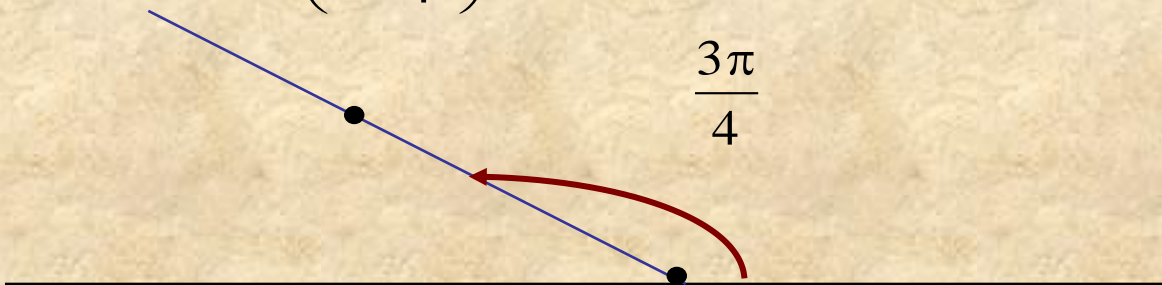
۲-۳-۴ مثال:

برای تعیین مکان نقطه P به مختصات قطبی $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ ، ابتدا نیم خطی از o

رسم می کنیم به طوری که زاویه AoP برابر $\frac{3\pi}{4}$ باشد. نقطه ای که روی شعاع

نهایی این زاویه و در فاصله ۳ از o قرار دارد همان نقطه P است.

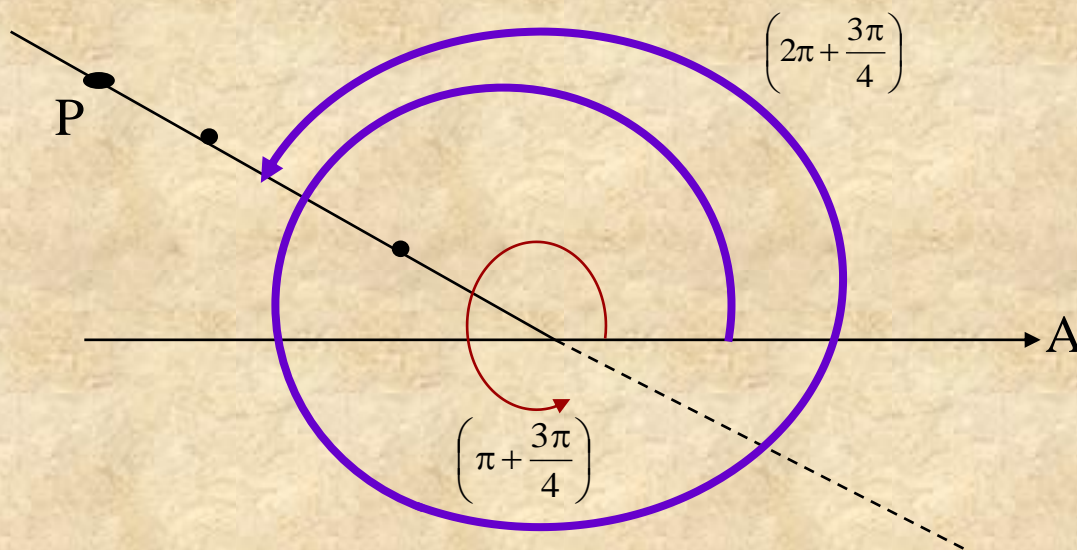
$$P\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$$



۲-۳-۵ نکته:

در دستگاه مختصات قطبی، نقاط $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\left(-3, \pi + \frac{3\pi}{4}\right)$ $\left(3, 2\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$ طور

کلی به ازلی هر عدد صحیح k ، نقطه $\left(3(-1)^k, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$ بر هم منطبق هستند.



۲-۳-۱ رابطه میان دستگاه مختصات دکارتی و قطبی :

فرض می کنیم محور x ها منطبق بر محور قطبی و O ، مبدا دستگاه مختصات دکارتی

روی قطب واقع باشد. محور y ها را منطبق بر شعاع $\theta = \frac{\pi}{2}$ اختیار می کنیم.

فرض می کنیم مختصات قطبی نقطه P نسبت به محور OX و قطب O ، زوج مرتب

(r, θ) و مختصات دکارتی این نقطه نسبت به دستگاه مختصات دکارتی xOy ،

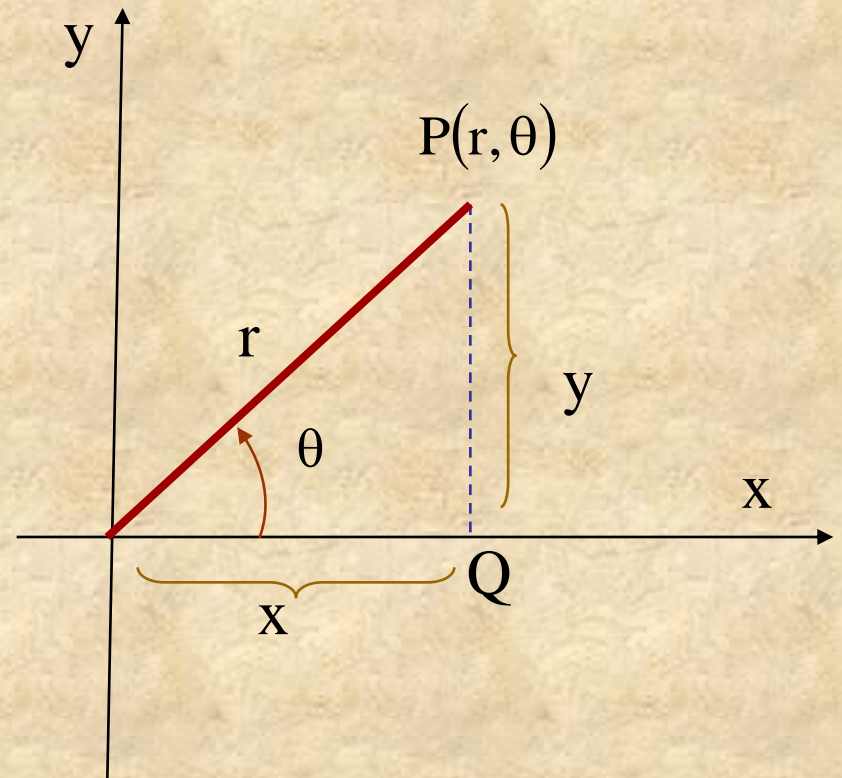
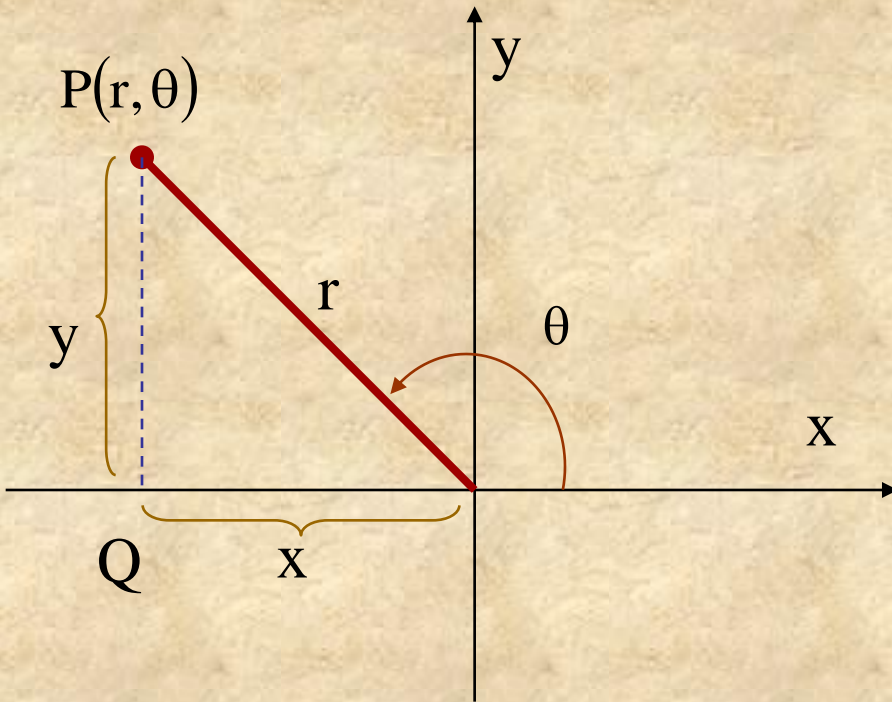
زوج مرتب (z, y) باشد. در تعیین رابطه بین x, y, r و هسته به علامت r دو حالت

تشخیص می دهیم:

۱) اگر $r > 0$ ، نقطه P رویشعاع نهایی زاویه θ واقع لست به طوری که در شکل های

زیر دیده می شود، در مثلث قائم از اویه PQ داریم:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



پس

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

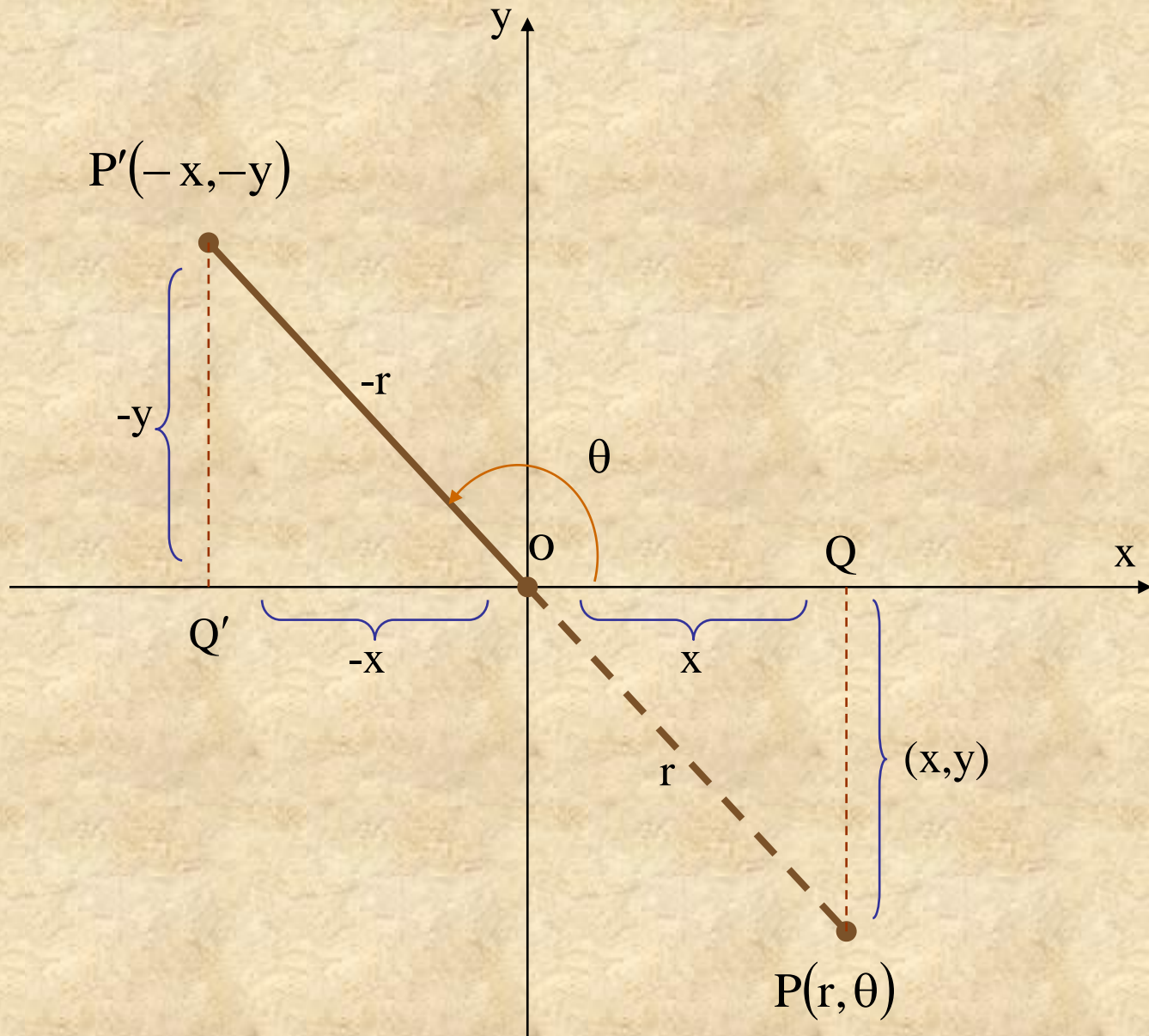
$$= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

بنابراین

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

۲) اگر $r < 0$ ، نقطه P روی ادامه شعاع نهایی زاویه θ واقع است.

شکل اسلاید بعدی را ببینید.



در مثلث قائم الزاویه $OP'Q'$ داریم:

$$\cos \theta = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}$$

$$\sin \theta = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}$$

با توجه به حالت های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

که از آن نتیجه می شود.

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

۲-۳-۲ مثال:

فرض کنید مختصات قطبی نقطه P، زوج مرتب $(-3, \frac{\pi}{6})$ باشد، مختصات دکارتی P را تعیین کنید.

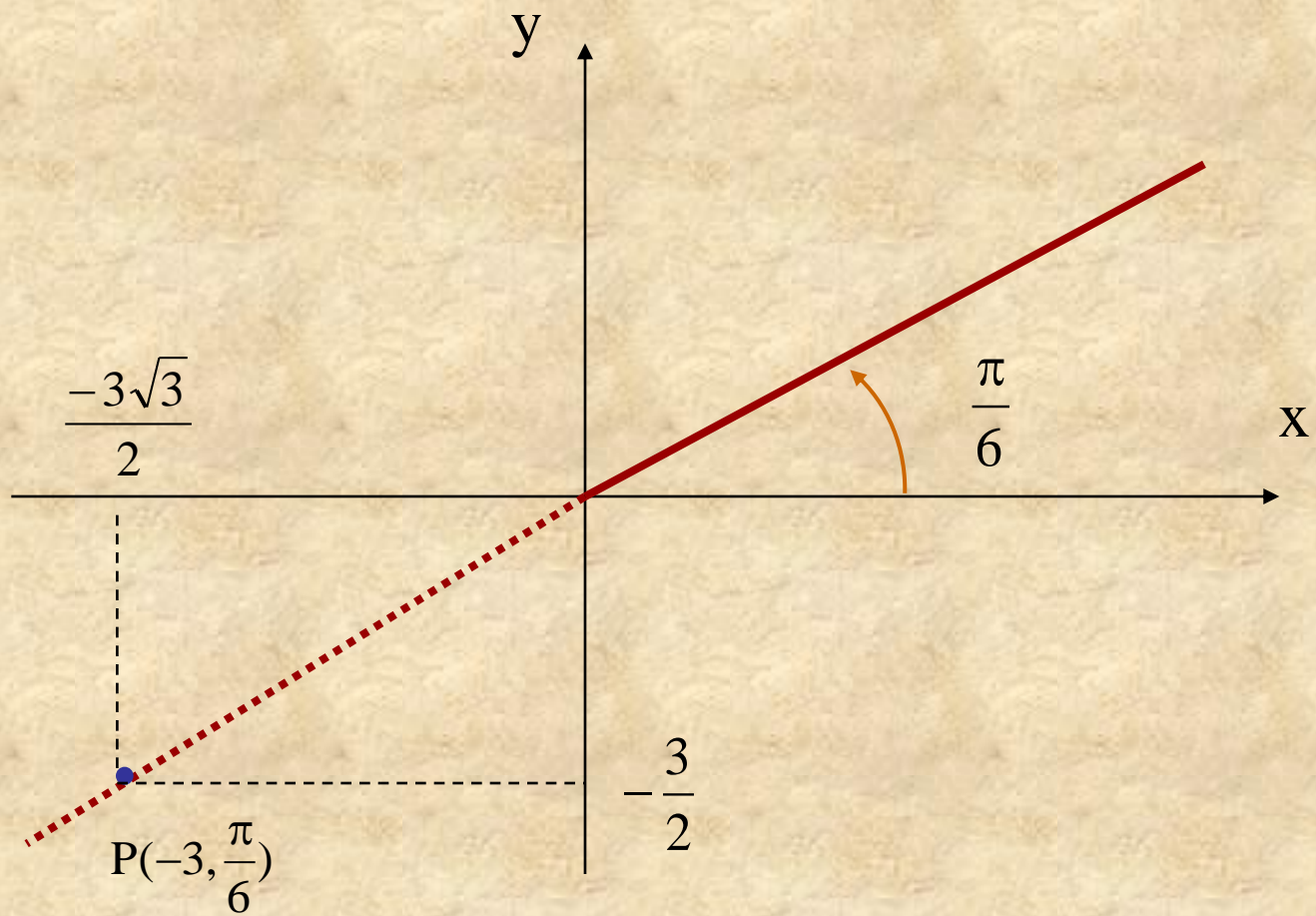
حل:

بنابر ۲-۳-۱ مختصات دکارتی P عبارت است از

$$x = r \cos \theta = -3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r \sin \theta = -3 \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2}$$

بنابراین مختصات دکارتی P، زوج مرتب $(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$ است.



۲-۳-۱۳ مثال:

فرض کنید مختصات دکارتی نقطه P، زوج مرتب $(1, \sqrt{3})$ باشد. با فرض $r > 0$ و

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ مختصات قطبی نقطه P را تعیین کنید.

حل:

بنابر روابط بین دستگاه های مختصات دکارتی و قطبی در ۲-۳-۱۱ داریم

$$\begin{cases} 1 = r \cos \theta \\ \sqrt{3} = r \sin \theta \end{cases}, \quad r = \pm \sqrt{1+3} = \pm 2$$

از $r > 0$ نتیجه باشد که $r = 2$ برای تعیین از معادله های

$$\begin{cases} 1 = 2 \cos \theta \\ \sqrt{3} = 2 \sin \theta \end{cases}$$

به دست می آوریم

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

بنابر این مختصات قطبی نقطه P، زوج مرتب $(2, \frac{\pi}{3})$ است.

۱۶-۳-۲ تعریف:

فرض کنیم (r, θ) مختصات قطبی یک نقطه در صفحه باشد. معادله ای به

صورت $r = f(\theta)$ را **معادله قطبی** می نامیم.

۲-۳-۱۸ مثال:

معادله قطبی $r = \cos^2 \theta + \sin 2\theta$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم معادله دکارتی

آن را تعیین کنید.

حل:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

با شرط $r \neq 0$ قرار می‌دهیم

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$r^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 2\cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta$$

$$x^2 + y^2 = 2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right) + \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

پس

$$= \frac{2xy + x^2}{x^2 + y^2}$$

در نتیجه بدست می آوریم.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy + x^2$$

فصل سوم

رابطه و تابع

هدف کلی

هدف کلی فصل این است که با مفاهیم رابطه و تابع، انواع توابع، توابع خاص، اعمال جبری روی توابع، و وارون تابع آشنا شوید.

هدفهای رفتاری

از شما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

- ۱) مفهوم رابطه را توضیح دهید.
- ۲) تابع را تعریف کنید و تفاوت آن را با رابطه توضیح دهید.
- ۳) دامنه تابعی را که ضابطه تعریف آن داده شده است، تعیین کنید.

۴) نمودار توابع را با روش نقطه یابی رسم کنید.

۵) اعمال جبری روی توابع را تعریف کنید و در حل مسائل بکار ببرید.

۶) انواع توابع جبری معرفی شده در کتاب را بشناسید ، ویژگیهای

هر یک را بشناسید و این ویژگیها را در حل مسائل به کار ببرید.

۷) انواع توابع غیر جبری معرفی شده در کتاب را بشناسید ،

ویژگیهای هر یک را بشناسید و این ویژگیها را در حل مسائل به کار ببرید.

۸) تعیین کنید که هر تابع معلوم زوج است یا فرد، یا هیچکدام.

۹) تعیین کنید که تابع معلوم کراندار است یا بیکران.

۱۰) تعیین کنید تابع پوشاست یا نه.

۱۱) تعیین کنید تابع یک به یک است یا نه.

۱۲) شرایط وارون پذیری تابع را توضیح دهید و وارون آن هر تابع معلوم

را ، در صورت وجود ، تعیین کنید.

۱۳) نشان بدهید که توابع نمایی و لگاریتمی وارون همدیگرند.

۱۴) وارون توابع مثلثاتی را توضیح بدهید.

مقدمه:

در علوم گوناگون ، مجموعه هایی که عضوهای آنها زوج مرتب اند اهمیت

خاصی دارند. در این فصل به معرفی و مطالعه این گونه مجموعه ها می پردازیم.

۳-۱-۱ رابطه

۳-۱-۱ مقدمه:

در بسیاری از توابع با مجموعه هایی از زوجهای مرتب سروکار داریم .

برای مثال ، هنگامی که متحرکی روی خط مستقیم حرکت می کند، فاصله

آن از مبدا را در هر لحظه می توان بوسیله زوج مرتب (s, t) نشان داد

که در آن $t \geq 0$ و s فاصله متحرک از مبدا است .

۳-۱-۲ تعریف :

هر مجموعه ای از زوج مرتب را یک رابطه دوتایی یا بطور خلاصه یک

رابطه می نامیم.

۳-۱-۴ تعریف :

فرض می کنیم R یک رابطه باشد و $(x, y) \in R$ در این صورت می نویسیم

xRy و می خوانیم « x رابطه R دارد با y » یا « بین x و y رابطه R

برقرار است » یا « رابطه R ، x را به y نسبت می دهد(نظیر می کند)»

۳-۱-۵ مثال :

رابطه های مثال ۳-۱-۳ را در نظر می گیریم بنابر ۳-۱-۴ داریم :

$1S_12$ یا $(1,2) \in S_1$

$2S_24$ یا $(2,4) \in S_2$

$2S_35$ یا $(2,5) \in S_3$

ایران S_4 تهران یا $(\text{ایران، تهران}) \in S_4$

۳-۱-۶ تعریف :

مجموعه تمام مختص های اول زوج مرتب یک رابطه **دامنه** یا **قلمرو** یک رابطه و مجموعه تمام مختصهای دوم عضوهای رابطه را **هم دامنه** رابطه می نامیم

۳-۱-۷ مثال :

رابطه های مثال ۳-۱-۳ را در نظر می گیریم.

دامنه S_1 مجموعه $\{۱ و ۲\}$ و هم دامنه آن مجموعه $\{۲ و ۳ و ۸\}$ است .

دامنه و هم دامنه S_2 ، مجموعه تمام اعداد حقیقی است .

دامنه S_3 مجموعه تمام اعداد حقیقی و هم دامنه آن مجموعه $\{y | y \geq 1\}$ است.

دامنه S_4 مجموعه $\{تهران، کابل، اسلام آباد\}$ و هم دامنه آن $\{ایران، پاکستان،$

افغانستان} است .

۲ - ۳ تابع

۱-۲-۳ مقدمه:

در این بخش دسته خاصی از رابطه ها را ، که تابع نامیده می شوند و اهمیت ویژه ای دارند، معرفی می کنیم.

۲-۲-۳ تعریف :

فرض می کنیم دامنه رابطه f مجموعه A و هم دامنه آن مجموعه C باشد که

زیر مجموعه ای از B است ($C \subseteq B$) رابطه f را یک تابع از A به B

می نامیم اگر دو شرط زیر برقرار باشد :

الف) برای هر عضو $x \in A$ عضوی مانند $y \in B$ وجود داشته باشد به گونه

ای که $(x, y) \in f$ به بیان دیگر f باید هر عضو A را به عضوی از B نسبت دهد.

ب) اگر $(x, y) \in f$ آنگاه $y = f(x)$ یعنی f هر عضو A را تنها

به یک عضو از B نسبت بدهد.

به طور خلاصه رابطه f را یک تابع می گوئیم در صورتی که f هر

عضو A را فقط و فقط به یک عضو از B نسبت بدهد.

۳-۲-۳ تعریف :

اگر f تابعی از A به B باشد، می نویسیم:

$$f: A \rightarrow B$$

مجموعه A را دامنه تابع f می نامیم و با نماد D_f نشان می دهیم، و مجموعه

B را برد تابع f و با نماد R_f نشان می دهیم. بنابراین :

$$D_f = A \quad , \quad R_f = B$$

۳-۲-۴ تعریف :

چون بنابر تعریف تابع ، به ازای هر x از دامنه f تنها یک عضو از برد

مانند y وجود دارد به گونه ای که $(x, y) \in f$ معمولا y را مقدار f در x

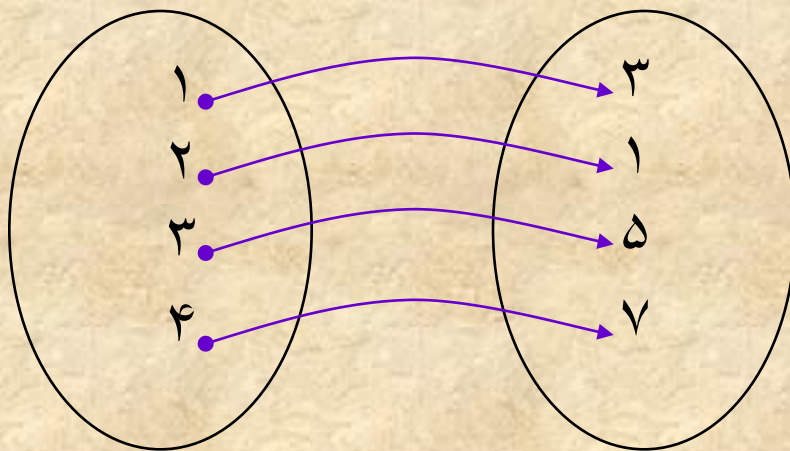
می نامیم و بجای $(x, y) \in f$ می نویسیم: $y=f(x)$

x را متغیر و $f(x)$ را **تصویر x توسط f** می نامیم. معادله $y=f(x)$ را **ضابطه تعریف تابع** می نامیم.

۳-۲-۶ مثال :

نشان بدهید که رابطه $g = \{(2,1), (1,3), (3,5), (4,7)\}$ یک تابع است .

حل: دامنه رابطه g ، مجموعه $\{2,1,3,4\}$ و هم دامنه آن $\{1,3,5,7\}$ است .



مشاهده می کنیم که هر عضو از دامنه g فقط و فقط به یک عضو

از هم دامنه g توسط رابطه g نسبت داده شده است . بنابراین g

یک تابع است .

۷-۲-۳ نکته:

در مثال ۶-۲-۳ ، تابع بودن رابطه g را با بررسی تمام زوج های مرتب

آن انجام دادیم، در حالی در مثال ۵-۲-۳ که رابطه f با ضابطه ای تعریف

شده است ، برای تشخیص تابع بودن f از تعریف تابع استفاده کردیم.

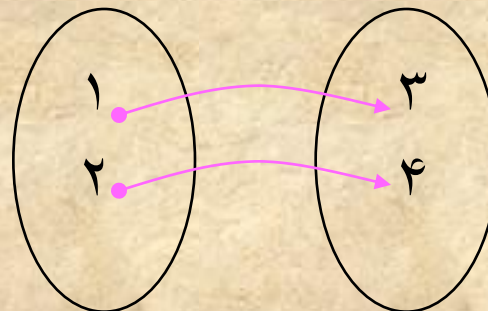
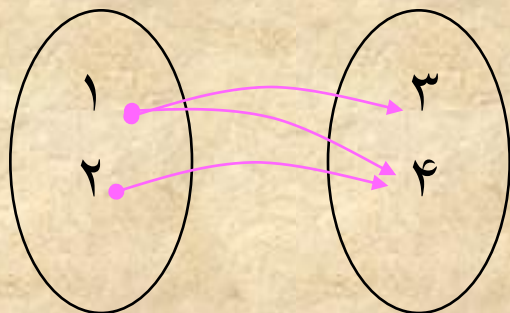
۸-۲-۳ مثال :

تحقیق کنید کدام یک از رابطه های زیر تابع است .

$$R_1 = \{(1,3), (1,4), (2,4)\}$$

حل:

$$R_2 = \{(1,3), (2,4)\}$$



۳-۲-۱۰ تعیین دامنه تابع:

هر تابع با ضابطه تعریف و مجموعه های دامنه و برد مشخص می شود.

معمولا روش کلی برای مشخص کردن یک تابع این است که نخست دامنه

تابع را تعریف کنند ، به این ترتیب با ضابطه تعریف تابع ، مقدار تابع به

ازای هر عضو دامنه مشخص می شود.

اگر دامنه تابعی مشخص نشده باشد ، آن را مجموعه تمام اعدادی در نظر

می گیریم که به ازای آنها ضابطه تعریف تابع با معنی باشد.

مثلا برای تابع

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

چون تقسیم بر صفر مجاز نیست، دامنه تابع مجموعه تمام اعداد حقیقی ناصفر است، یعنی

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

به همین ترتیب، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x}$ مجموعه تمام عدد حقیقی نامنفی است ، یعنی

$$D_g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

زیرا ریشه دوم عدد حقیقی x فقط وقتی تعریف می شود که داشته باشیم:

$$x \geq 0$$

۳-۲-۱۴ مثال :

فرض کنید $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ مقادیر $f(1)$, $f(-x)$, $f(x-1)$

را تعیین کنید.

حل:

داریم :

$$f(1) = \frac{2(1)}{1+1} = 1$$

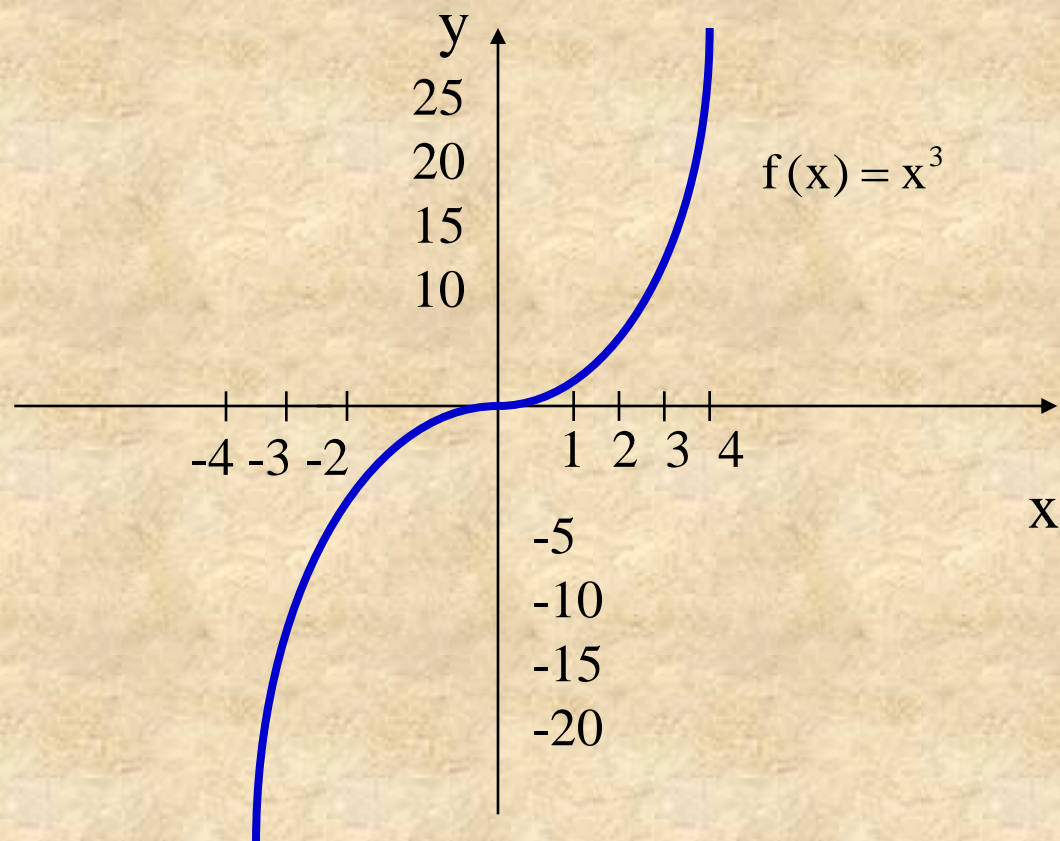
$$f(-x) = \frac{2(-x)}{-x+1} = \frac{-2x}{-x+1} = \frac{2x}{x-1}$$

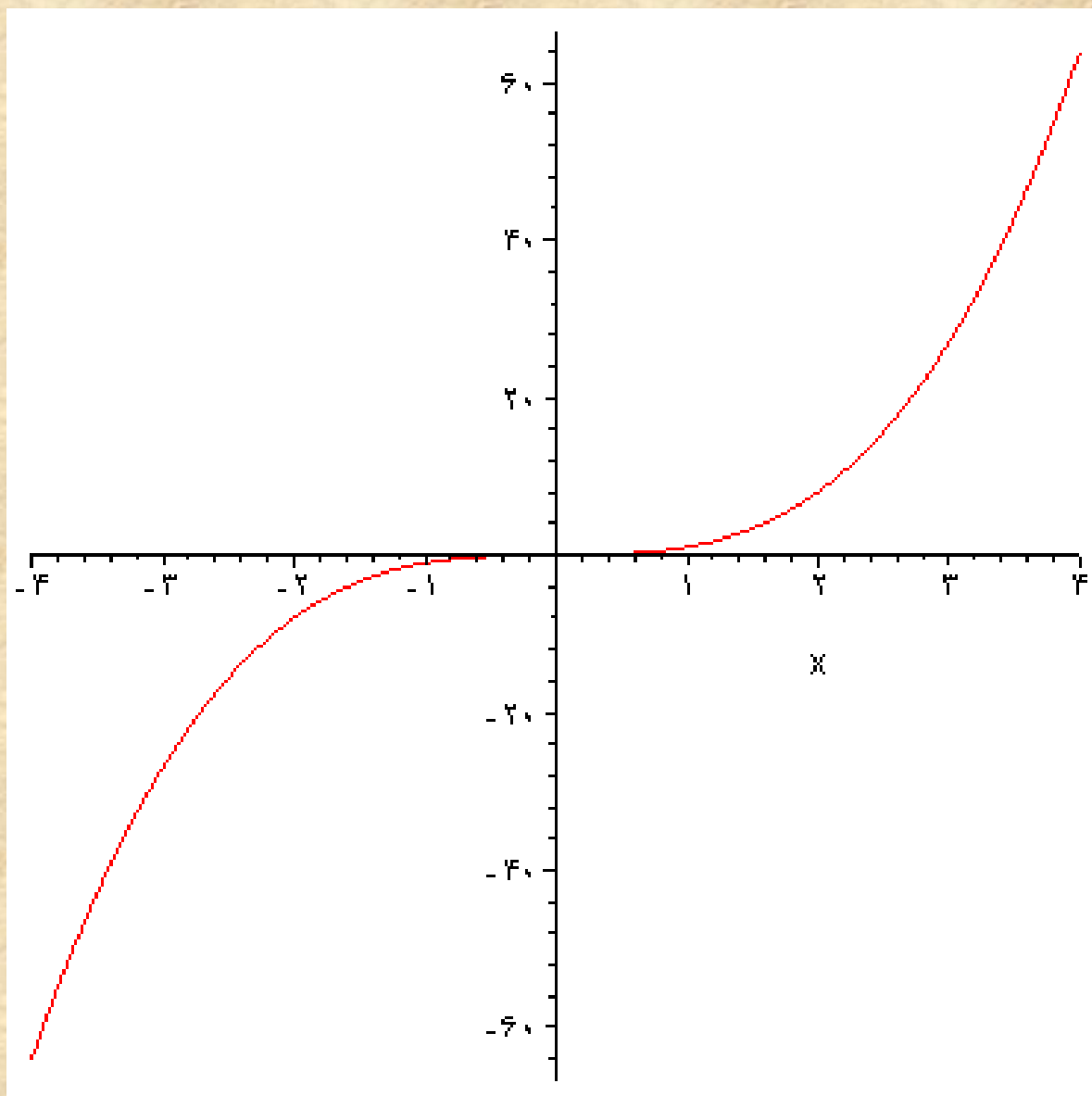
$$f(x-1) = \frac{2(x-1)}{(x-1)+1} = \frac{2(x-1)}{x}$$

۳-۲-۱۷ مثال :

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

| x | f(x) |
|----|------|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |
| 3 | 27 |
| -1 | -1 |
| -2 | -8 |
| -3 | -27 |

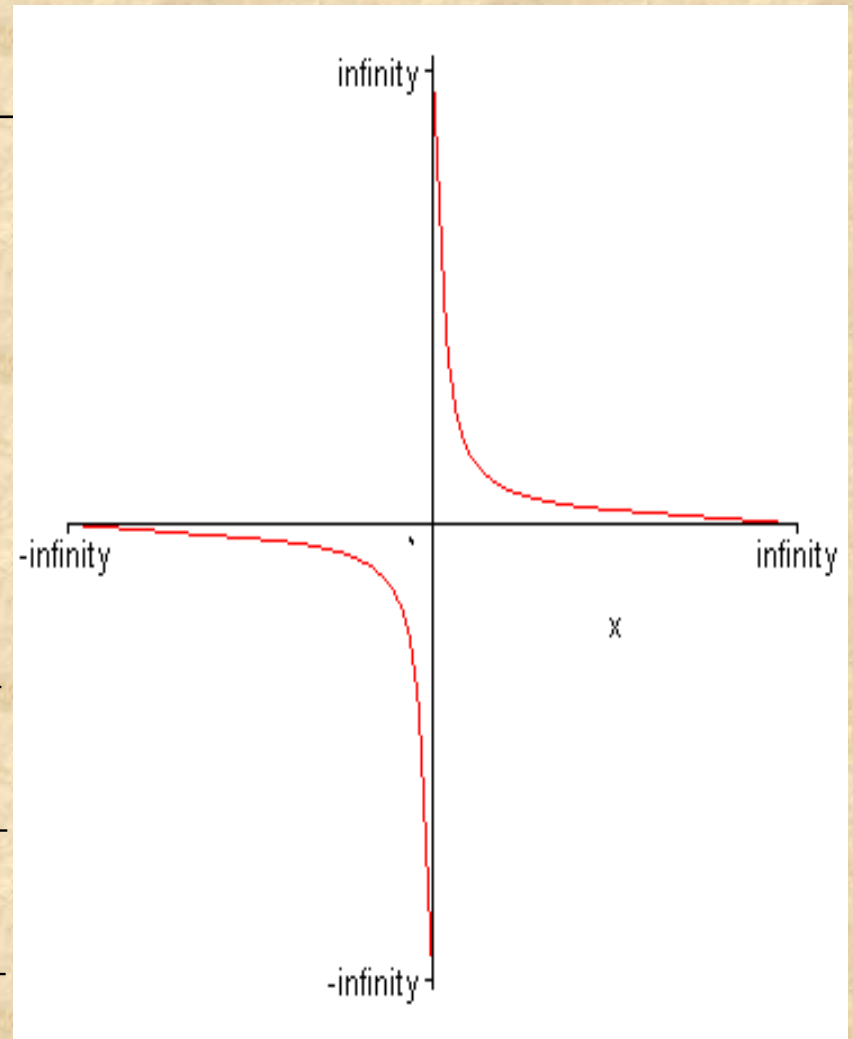




۳-۲-۱۸ مثال :

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را رسم کنید.

| x | f(x) | x | f(x) |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{4}$ | 4 | $-\frac{1}{4}$ | -4 |
| $\frac{1}{2}$ | 2 | $-\frac{1}{3}$ | -2 |
| 1 | 1 | -1 | -1 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | -2 | $-\frac{1}{2}$ |
| 3 | $\frac{1}{3}$ | -3 | $-\frac{1}{3}$ |
| 4 | $\frac{1}{4}$ | -4 | $-\frac{1}{4}$ |



۳-۳ جبر توابع

۳-۳-۱ مقدمه:

بسیاری از توابعی که در مسائل مطرح می شوند ممکن است ترکیبی از توابع دیگر باشند. برای مثال، فرض کنید $P(x)$ مقدار سودی باشد که یک شرکت از فروش x عدد از کالا یی بدست می آورد. اگر $R(x)$ از فروش x واحد و $C(x)$ هزینه تولید x واحد کالا باشد، داریم:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$(هزینه) - (درآمد) = (سود)$$

به این ترتیب می توان رفتار تابع $P(x)$ را با استفاده از ویژگیهای توابع $P(x)$ و $C(x)$ پیش بینی کرد. در این بخش به بررسی اعمال جبری روی توابع می پردازیم.

۳-۳-۲ تعریف :

دو تابع f و g را برابر یا مساوی می نامیم ، در صورتی که

(الف) دامنه های f و g مساوی باشند، یعنی $D_f = D_g$

(ب) به ازای هر x از دامنه مشترک f و g ، تساوی $f(x)=g(x)$ برقرار باشد.

۳-۳-۳ مثال :

(الف) دو تابع با ضابطه های تعریف $f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x}$ ، $g(x) = 2x + 5$

برابر نیستند ، زیرا مجموعه های $D_g = \mathbb{R}$ ، $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ مساوی نیستند.

(ب) دو تابع با ضابطه های تعریف $f(x) = \frac{(2x+5)(x^2+1)}{x^2+1}$ ، $g(x) = 2x+5$

برابرند، زیرا همواره $x^2+1 \neq 0$ ، $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ، به علاوه، به

ازای هر عدد حقیقی داریم:

$$f(x) = g(x) = 2x + 5$$

۳-۳-۵ تعریف :

فرض می کنیم f و g توابعی با دامنه های D_f, D_g باشند. توابع جدید

$f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

(الف) تابع حاصل جمع $f+g$ روی $D_f \cap D_g$ با ضابطه

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; x \in D_f \cap D_g$$

(ب) تابع تفاضل $f-g$ روی $D_f \cap D_g$ با ضابطه

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad ; x \in D_f \cap D_g$$

پ) تابع حاصل ضرب fg روی $D_f \cap D_g$ با ضابطه

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad ; x \in D_f \cap D_g$$

ت) تابع خارج قسمت $\frac{f}{g}$ روی نقاطی از $D_f \cap D_g$ که در آن $g(x) \neq 0$

با ضابطه

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; x \in D_f \cap D_g \quad ; g(x) \neq 0$$

۳-۳-۶ مثال :

فرض می کنیم $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{4-x}$ دامنه های f و g

عبارتند از

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty)$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x \geq 0\} = (-\infty, 4]$$

بنابراین دامنه توابع fg , $f+g$, $f-g$ عبارتند از

$$D_f \cap D_g = [2, +\infty) \cap (-\infty, 4] = [2, 4]$$

چون $x=4$ ریشه معادله $g(x)=0$ است. دامنه تابع $\frac{f}{g}$ برابر با بازه

$[2, 4)$ است و داریم:

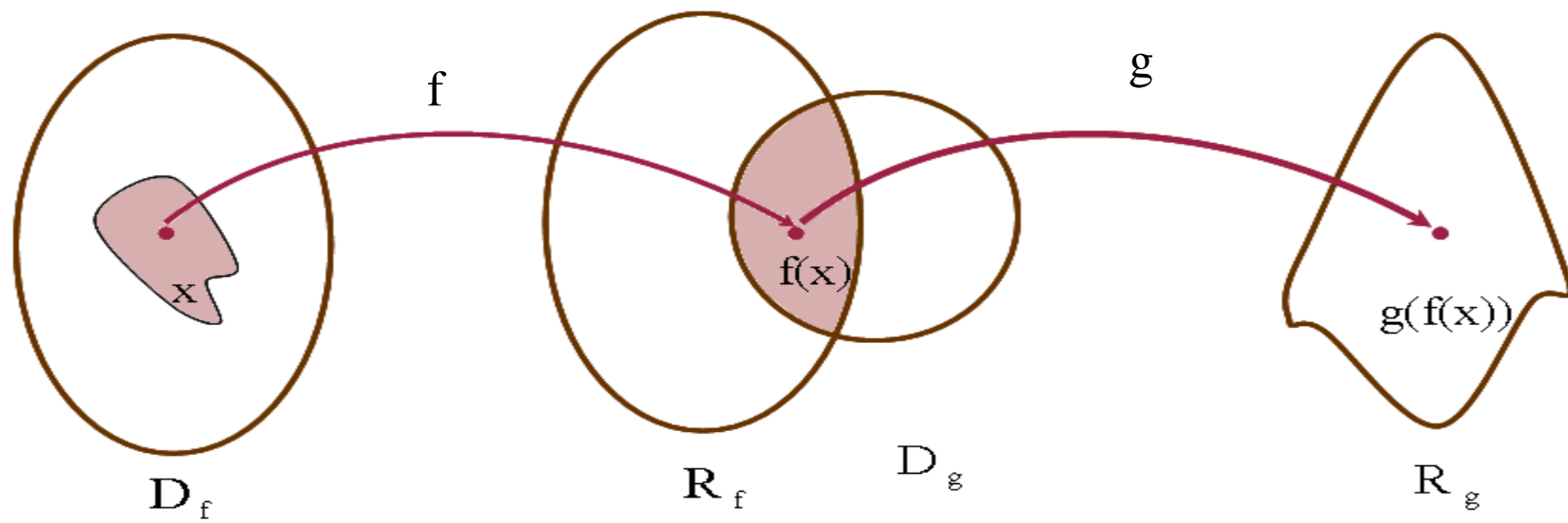
$$(f + g)(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} \quad , \quad x \in [2,4]$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x} \quad , \quad x \in [2,4]$$

$$(fg)(x) = \sqrt{x - 2}\sqrt{4 - x} \quad , \quad x \in [2,4]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x - 2}{4 - x}} \quad , \quad x \in [2,4)$$

$D_{g \circ f}$



۴-۳ توابع جبری

۳-۴-۱ مقدمه:

در این بخش به معرفی توابعی می پردازیم که در مباحث مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال نقش مهمی دارند.

۳-۴-۲ تعریف:

اگر دامنه و برد تابع f زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی باشند، f را یک تابع حقیقی می نامیم. برای مثال $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ؛ f ضابطه تعریف

$f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ یک تابع حقیقی است.

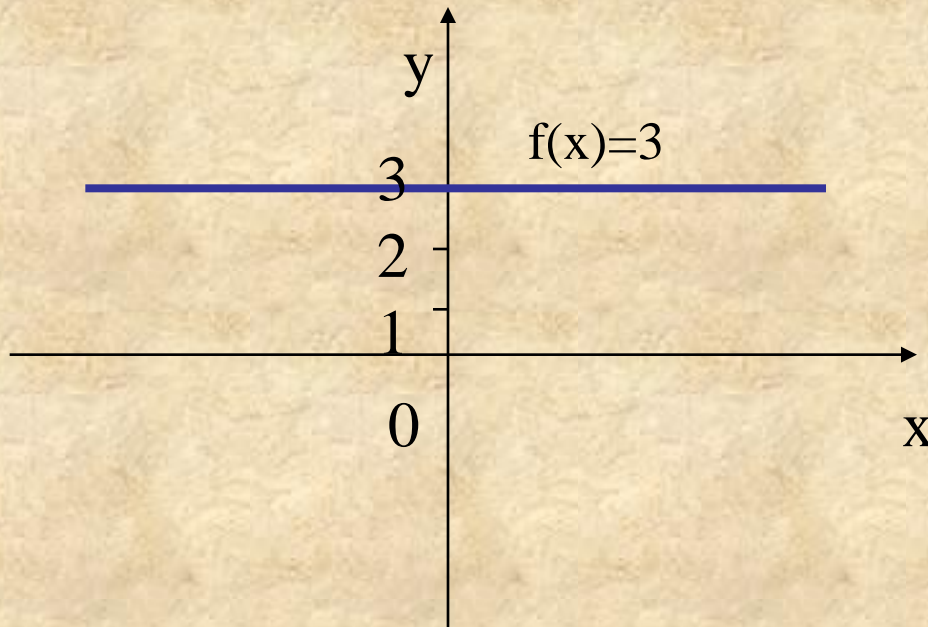
۳-۴-۳ تعریف :

اگر برد تابع حقیقی f ، مجموعه ای یکانی باشد آنگاه f را یک **تابع ثابت**

می نامیم. برای مثال تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \{3\}$ با ضابطه تعریف $f(x)=3$ یک

تابع ثابت است و داریم $f(0)=3$, $f(1)=3$, $f(-5)=3$. نمودار

$f(x)=3$ در شکل زیر رسم شده است .



۳-۴-۴ تعریف :

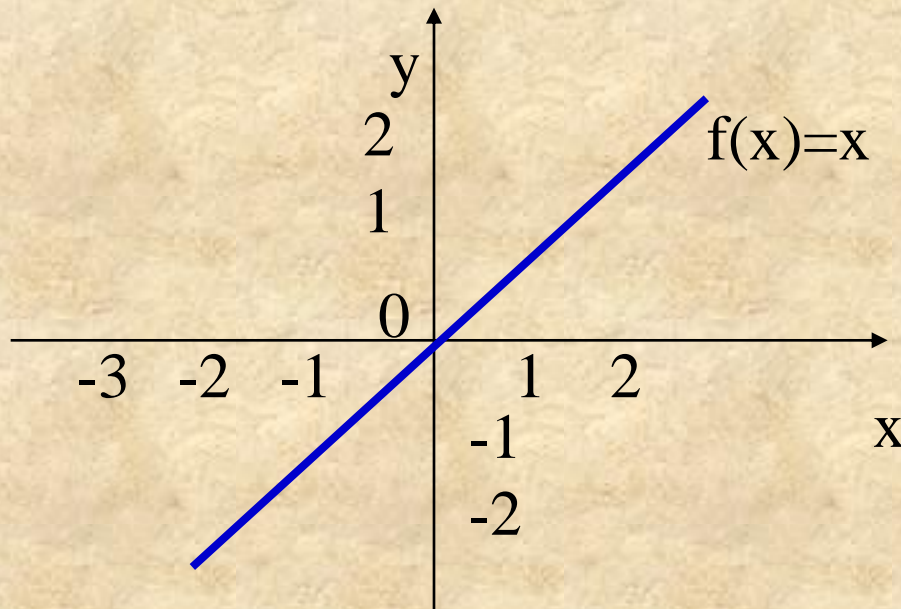
اگر دامنه و برد تابع f مجموعه عدد حقیقی و برای هر عدد حقیقی x

داشته باشیم $f(x)=x$ ، آنگاه f را **تابع همانی** می نامیم. بعضی مقادیر این

تابع عبارت اند از:

$$f(0)=0 , f(-3)=-3 , f(2)=2$$

نمودار تابع همانی در شکل زیر رسم شده است .



۳-۴-۵ تعریف :

تابع فاکتوریل تابعی مانند $N \rightarrow N \cup \{0\}$ با ضابطه تعریف $f(n)=n!$ است.

چند تایی از مقادیر تابع فاکتوریل عبارت اند از:

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 2! = 1 \times 2 = 2$$

$$f(3) = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$f(4) = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$f(5) = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

۳-۴-۶ تعریف :

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ با ضابطه تعریف $f(x) = |x|$ تابع قدر مطلق

می نامیم. یادآوری می کنیم که قدر مطلق عدد حقیقی x را با نماد $|x|$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

* از تعریف بالا نتیجه می شود که قدر مطلق هر عدد حقیقی x عددی

نامنفی است. یعنی $|x| \geq 0$

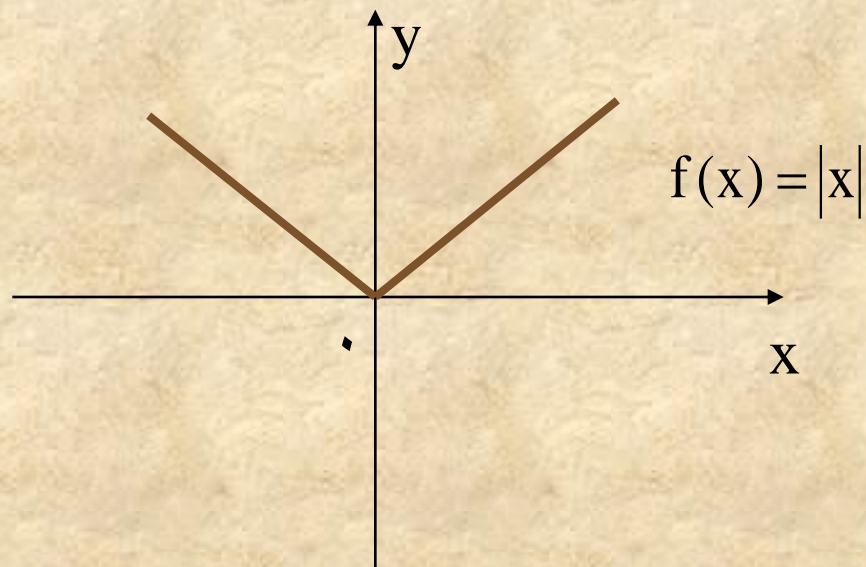
بعضی مقادیر این تابع عبارت اند از:

$$f(0) = |0| = 0$$

$$f(-2) = |-2| = -(-2) = 2$$

$$f(\sqrt{2}) = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

نمودار تابع قدر مطلق در شکل زیر رسم شده است:



۳-۴-۸ تعریف :

تابع حقیقی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ با ضابطه تعریف $f(x)=[x]$ را **تابع جزء صحیح** می نامیم.

توجه کنید که برای هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح x را با نماد $[x]$

نشان می دهیم و برابر است با بزرگترین عدد حقیقی صحیح نابیشتر از

(کوچکتر یا مساوی) x تعریف می کنیم. بنابراین $[x] \leq x \leq [x] + 1$

چند تا از مقادیر این تابع عبارت اند از:

$$f(0) = [0] = 0$$

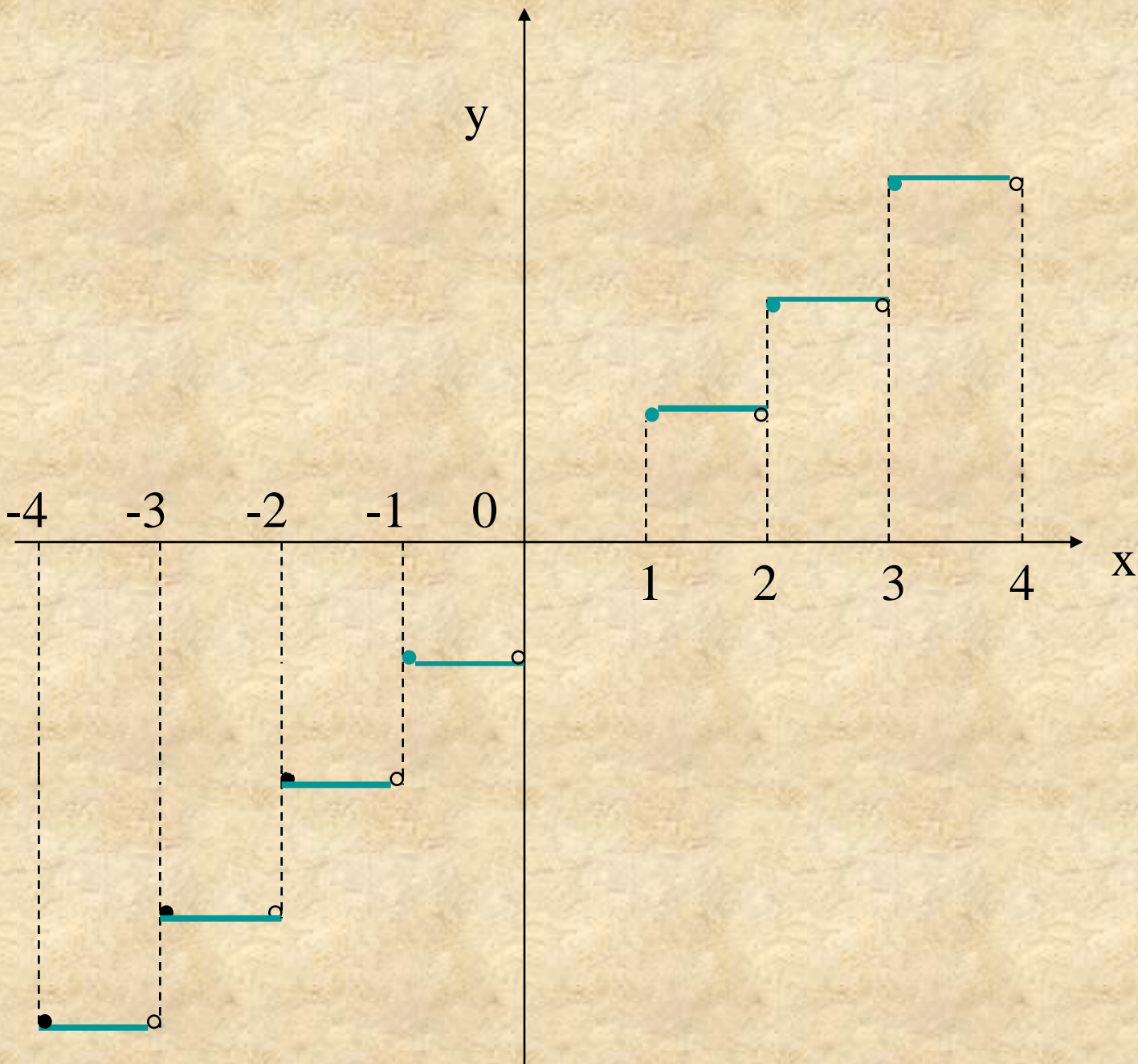
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[-\frac{3}{2}\right] = -2$$

$$f(-5) = [-5] = -5$$

* دقت کنید که جزء صحیح هر عدد حقیقی ، عددی صحیح است و جزء صحیح هر عدد صحیح با خود آن برابر است . برای رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ ، از مقادیر زیر استفاده می کنیم:

| | | | |
|-----|---------------------|-------|---------------|
| اگر | $-4 \leq x \leq -3$ | آنگاه | $f(x)=[x]=-4$ |
| اگر | $-3 \leq x < -2$ | آنگاه | $f(x)=[x]=-3$ |
| اگر | $-2 \leq x < -1$ | آنگاه | $f(x)=[x]=-2$ |
| اگر | $-1 \leq x < 0$ | آنگاه | $f(x)=[x]=-1$ |
| اگر | $0 \leq x < 1$ | آنگاه | $f(x)=[x]=0$ |
| اگر | $1 \leq x < 2$ | آنگاه | $f(x)=[x]=1$ |
| اگر | $2 \leq x < 3$ | آنگاه | $f(x)=[x]=2$ |
| اگر | $3 \leq x < 4$ | آنگاه | $f(x)=[x]=3$ |



۹-۴-۳ تعریف :

تابع خطی f تابعی است که دامنه و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است ، و

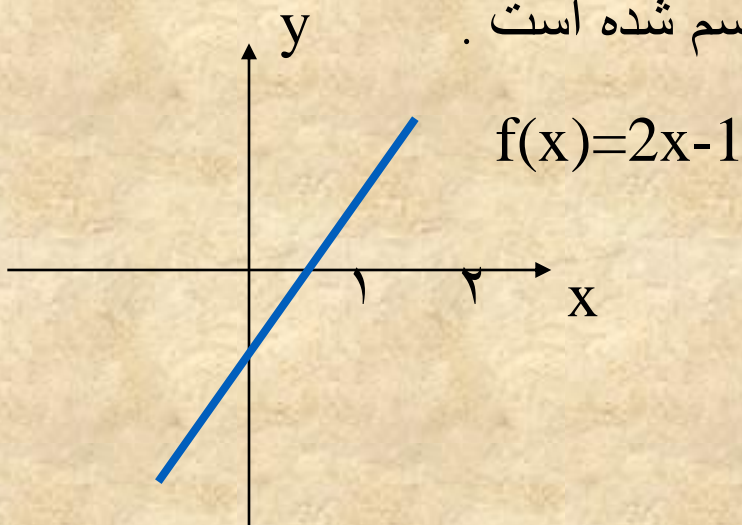
برای هر عدد حقیقی x با ضابطه :

$$f(x) = ax + b$$

تعریف می شود ، که در آن a و b عدد حقیقی ثابتی هستند .

نمودار هر تابع خطی ، یک خط راست است .

نمودار تابع خطی $f(x)=2x-1$ در شکل زیر رسم شده است .



۳-۴-۱۰ تعریف :

تابع چند جمله ای p تابعی است که دامنه و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است و برای عدد حقیقی x با ضابطه

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

تعریف می شود. در اینجا n یک عدد صحیح نامنفی است و a_n, \dots, a_1, a_0

عدد حقیقی اند و $na_0 \neq 0$ را درجه چند جمله ای $P(x)$ و $P(x)$ را یک

چند جمله ای از n می نامیم.

تابع $P(x) = -3x^2 + 2x + 7$ یک تابع چند جمله ای درجه دوم و تابع

یک تابع چند جمله ای از درجه چهار است. $q(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$

۵-۳-۳ توابع غیر جبری

۳-۵-۱ مقدمه :

در بخش ۳-۴ با توابع جبری آشنا شدیم . اما توابع دیگری نیز در ریاضیات مطرح می شود که جبری نیستند . این دسته توابع را توابع غیر جبری یا متعالی می نامیم . از جمله توابع غیر جبری می توان از توابع نمایی ، توابع لگاریتمی ، و توابع مثلثاتی نام برد که در این بخش به معرفی آنها می پردازیم .

2-5-3 تعریف :

برای هر عدد حقیقی ثابت $a > 0, a \neq 1$ ، تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ با ضابطه تعریف

$$f(x) = a^x$$

را یک **تابع نمایی** می نامیم.

بنا بر تعریف بالا روشن است که برای هر عدد حقیقی x داریم $a^x > 0$

یادآوری می کنیم که بنا بر خواص توان اعداد ، برای هر دو عدد حقیقی x و y روابط زیر برقرارند :

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (\text{الف})$$

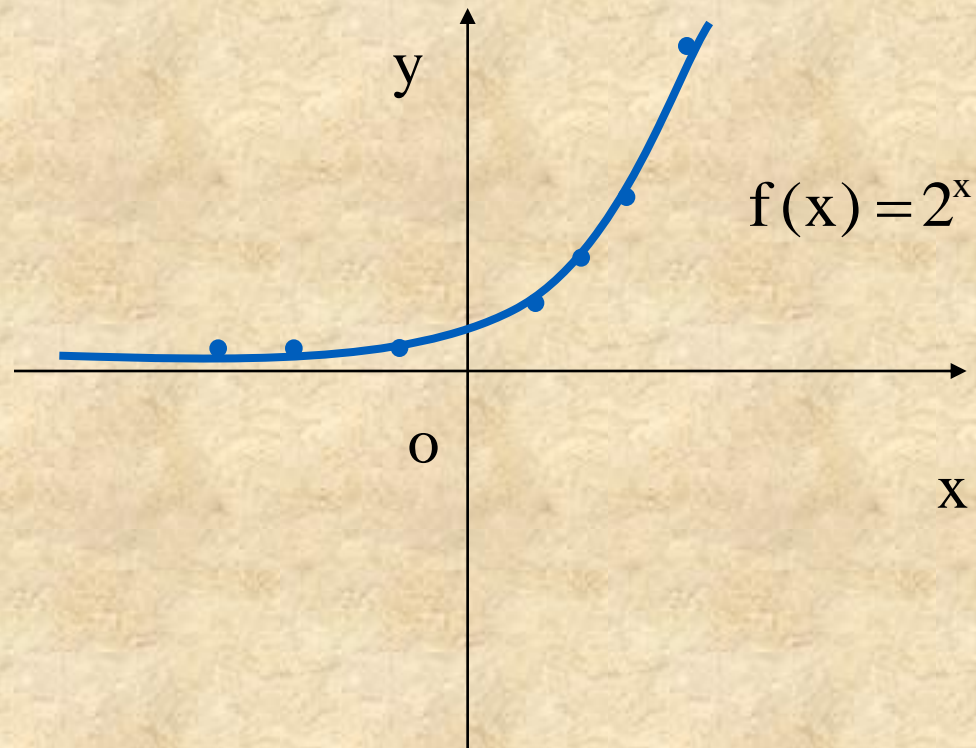
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (\text{ب})$$

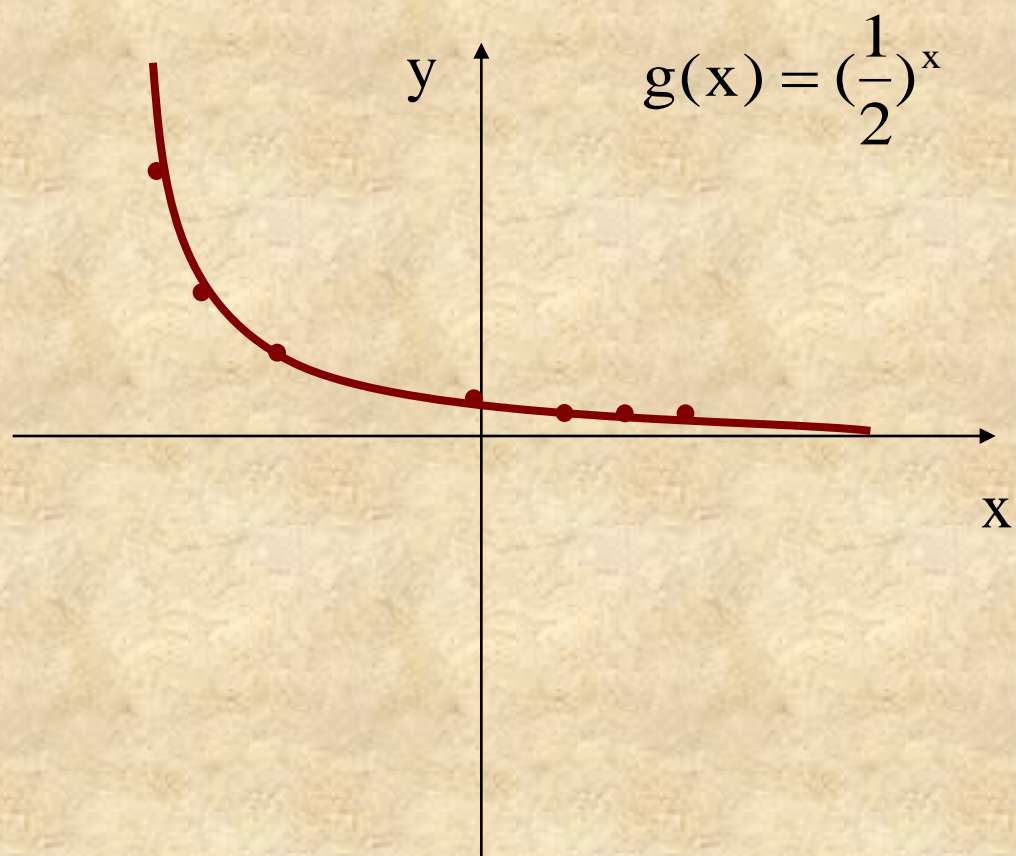
هر یک از توابع $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $f(x) = 2^x$ توانی نمایشی اند، که

نمودارهای آنها در شکل‌های زیر رسم شده است:

| x | $f(x) = 2^x$ |
|----|---------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| -1 | $\frac{1}{2}$ |
| -2 | $\frac{1}{4}$ |



| x | $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ |
|----|--|
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ |
| -1 | 2 |
| -2 | 4 |
| -3 | 8 |



۳-۵-۳ تابع نمایی e^x

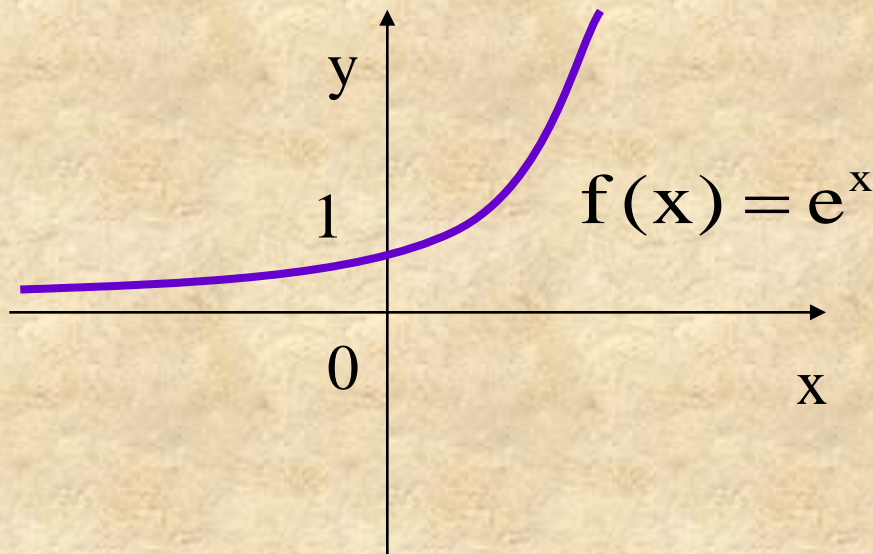
در تعریف تابع $f(x) = a^x$ اگر a برابر عدد گنگ e انتخاب کنیم که

مقدار تقریبی آن تا نه رقم برابر $۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸$ است، تابع نمایی $f(x) = e^x$

بدست می آید، این تابع را با نماد

$$e^x = \exp(x)$$

نیز نشان می دهند. نمودار تابع $f(x) = e^x$ شکل زیر رسم شده است.



۳-۵-۴ تعریف:

فرض می کنیم a عددی مثبت باشد و $a \neq 1$ تابع حقیقی $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

ضابطه تعریف $f(x) = \log_a x$ **تابع لگاریتم در مبنای a** می نامیم .

یادآوری می کنیم که منظور از لگاریتم عدد مثبت x در مبنای a ، عددی

است مانند y به طوری که $a^y = x$. لگاریتم x در مبنای a را با نماد

$\log_a x$ نشان می دهیم . بنابر این همواره داریم

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

✳ توجه کنید که لگاریتم اعداد منفی و صفر تعریف نشده است .

۳-۵-۵ مثال : داریم

$$5^2 = 25 \Leftrightarrow \log_5 25 = 2$$

$$2^{-4} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{16} = -4$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \log_{10} \frac{1}{1000} = -3$$

$$3^0 = 1 \Leftrightarrow \log_3 1 = 0$$

$$7^1 = 7 \Leftrightarrow \log_7 7 = 1$$

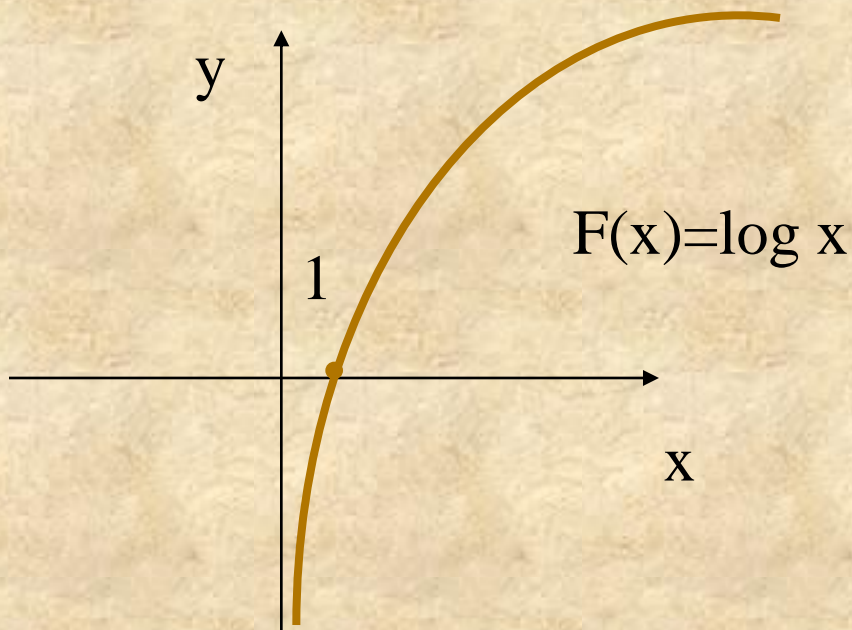
۳-۵-۱۲ نمودار تابع لگاریتمی:

اگر مبنای لگاریتم را عدد ۱۰ اختیار کنیم ، لگاریتم را **لگاریتم معمولی** یا

اعشاری می نامیم. در لگاریتم معمولی ، عدد مبنا را معمولاً نمی نویسند،

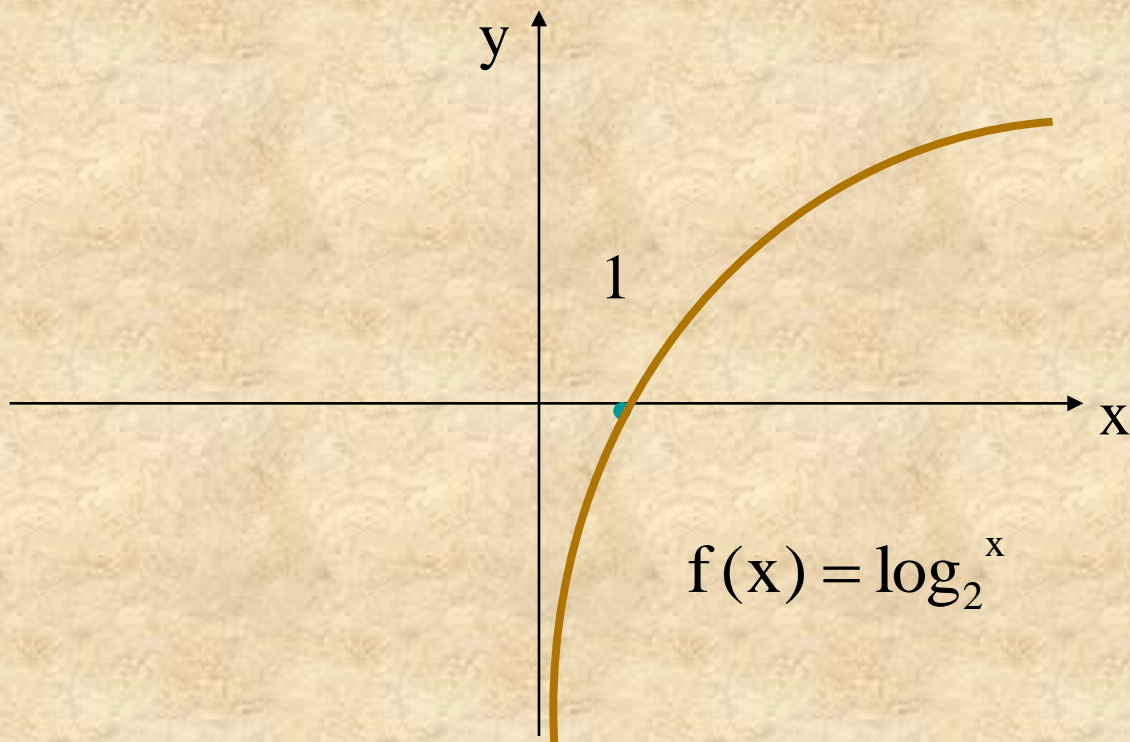
به عبارت دیگر:

$$\log_{10}^x = \log x$$



نمودار تابع لگاریتم معمولی در شکل
زیر رسم شده است .

نمودار تابع $f(x) = \log_2 x$ در شکل زیر رسم شده است.



۳-۵-۱۳ تابع لگاریتم طبیعی:

در محاسبات لگاریتمی اگر مبنا را عدد گنگ e اختیار کنیم، لگاریتم را

لگاریتم طبیعی یا لگاریتم نپری می نامیم. معمولاً لگاریتم طبیعی را با

نماد \ln نمایش می دهند. به عبارت دیگر:

$$\log_e^x = \ln x$$

۶-۳ توابع خاص

در این بخش برخی از ویژگی های توابع را بررسی می کنیم.

2-6-3 مثال :

الف) اگر $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ چون دامنه f مجموعه تمام اعداد حقیقی است، داریم

$$f(-x) = 5(-x)^4 - 3(-x)^2 + 1$$

$$= 5x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$$

بنابراین f ، یک تابع زوج است

ب) فرض می کنیم $g(x) = -2x^5 + 3x^3 - 7x$ چون دامنه تابع g

مجموعه تمام اعداد حقیقی است، داریم

$$g(-x) = -2(-x)^5 + 3(-x)^3 - 7(-x)$$

$$= 2x^5 - 3x^3 + 7x$$

$$= -g(x)$$

بنا بر این g یک تابع فرد است.

(پ) تابع $h(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ در نظر می گیریم ، داریم

$$h(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^3 + (-x)^2 - 1$$

$$= 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$$

چون $h(-x) \neq -h(x), h(-x) \neq h(x)$ تابع h نه زوج است نه فرد

۳-۶-۵ تعریف :

الف) اگر عددی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر x

از دامنه f داشته باشیم. $f(x) \leq M$

آنگاه f را از **بالا کراندار** می نامیم .

ب) اگر عددی مانند N وجود داشته باشد به گونه ای که برای هر x از

دامنه f داشته باشیم : $f(x) \geq N$

آنگاه f را از **پایین کراندار** می نامیم.

پ) اگر عددی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر x دامنه f

داشته باشیم

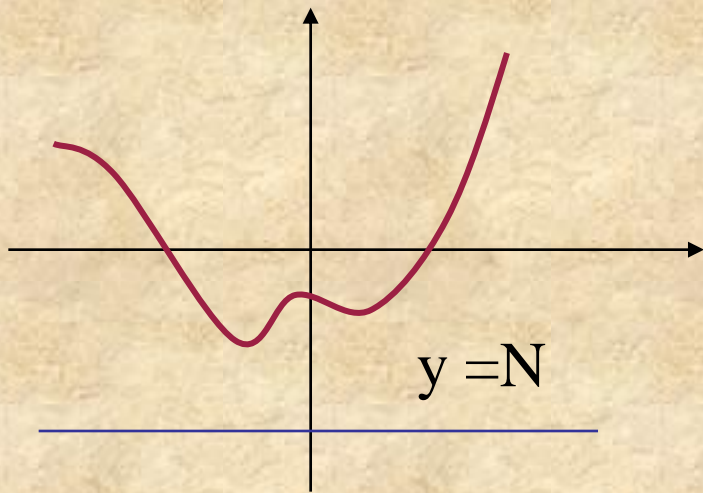
$$-M \leq f(x) \leq M$$

یا

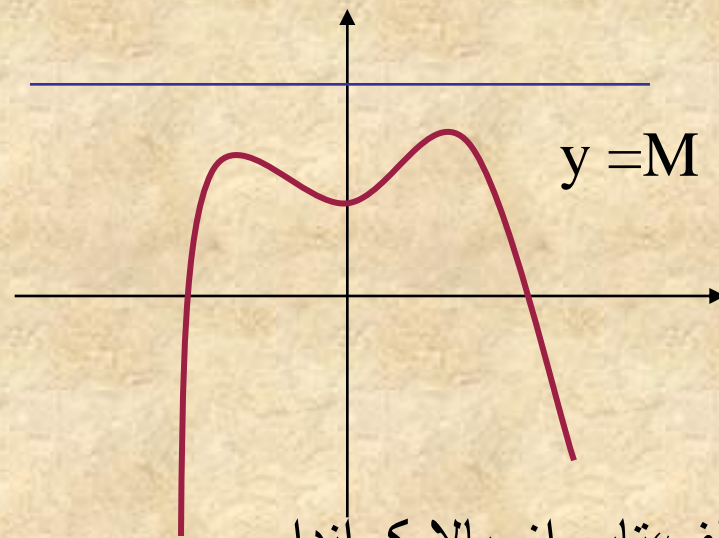
$$|f(x)| \leq M$$

آنگاه f را کراندار می نامیم .

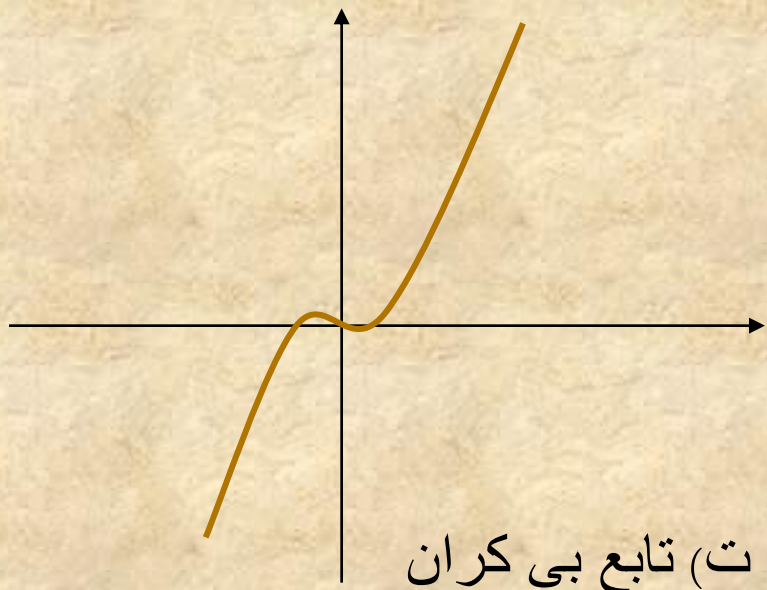
ت) اگر تابع f کراندار باشد ، آن را **بی کران** می نامیم .



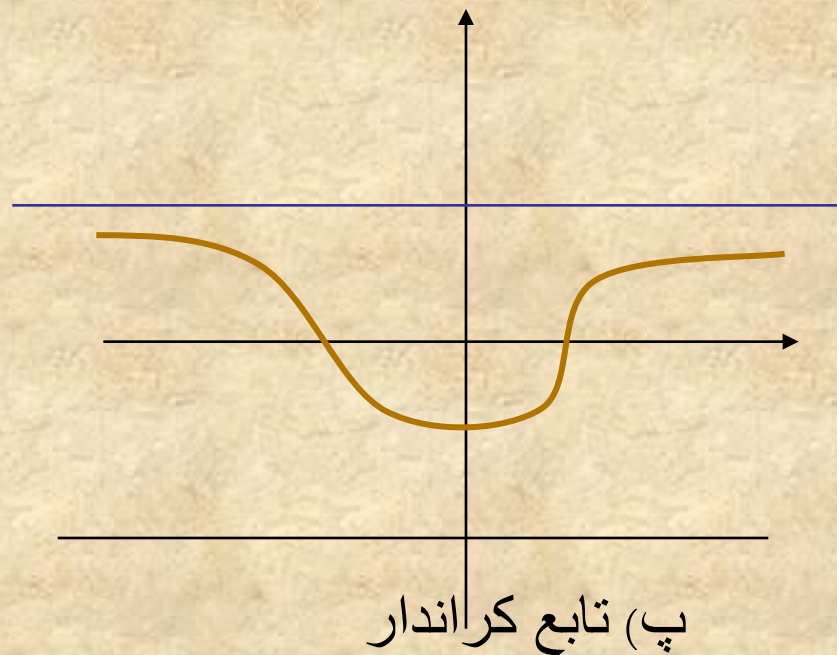
ب) تابع از پایین کراندار



الف) تابع از بالا کراندار



ت) تابع بی کران



پ) تابع کراندار

۳-۶-۷ مثال :

الف) اتوابع سینوس و کسینوس کراندار است ، زیرا به ازای هر عدد حقیقی x داریم

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{و} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

ب) تابع $f(x) = 2x^2 + 1$ از پایین کراندار است ، زیرا برای هر عدد حقیقی x داریم

$$f(x) = 2x^2 + 1 \geq 1$$

پ) تابع $g(x) = 1 - x^2$ از بالا کراندار است ، زیرا برای هر عدد حقیقی x

$$g(x) = 1 - x^2 \leq 1 \quad \text{داریم}$$

ت) تابع $h(x) = x^3 + 2$ که نه از بالا کراندار است نه از پایین بی کران

است زیرا هر دو خط افقی $y = M$ و $y = -M$ را که در نظر بگیریم ،

نقطه روی نمودار تابع h وجود دارد که در خارج ناحیه بین این دو خط

واقع است . مثلا نقطه $(\sqrt[3]{M+1}, M+3)$ ی نمودار تابع h قرار دارد

ولی بیرون از ناحیه بین دو خط $y = \pm M$ است .

۳-۶-۹ تعریف:

(الف) تابع f را صعودی می نامیم اگر به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f که داشته باشیم

(ب) تابع f را نزولی می نامیم اگر به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f که

داشته باشیم $x_1 < x_2$ و $f(x_1) > f(x_2)$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

(پ) در صورتی که تابع f در هیچ یک از ویژگیهای (الف) و (ب) صدق

نکند، می گوئیم f نه صعودی است نه نزولی.

۱۲-۶-۳ تعریف :

تابع $f: A \rightarrow B$ را **یک به یک** می نامیم اگر به ازای هر x_1 و x_2

دامنه f تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ ايجاب کند که $x_1 = x_2$

۱۳-۶-۳ مثال :

الف) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه تعریف $f(x) = 2x^3 - 5$ یک به یک است ، زیرا

به ازای هر x_1 و x_2 از \mathbb{R} ، اگر داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2)$

$$2x_1^3 - 5 = 2x_2^3 - 5$$

آنگاه بدست می آوریم

$$x_1^3 = x_2^3 \implies x_1 = x_2$$

(ب) تابع $R \rightarrow R$ با ضابطه تعریف $g(x) = x^2 - 7$ یک به یک نیست ،

زیرا از تساوی $g(x_1) = g(x_2)$ دست می آوریم

$$x_1^2 - 7 = x_2^2 - 7$$

که از آن نتیجه می شود $x_1^2 = x_2^2$ یا $x_1 = \pm x_2$ بنابراین این x_1 و x_2 با هم

مساوی نیستند ، مثلا

$$g(-2) = (-2)^2 - 7 = -3$$

$$g(2) = 2^2 - 7 = -3$$

می بینیم که $g(-2) = g(2)$ در حالی که $-2 \neq 2$ و بنابراین این g یک به یک نیست

۱۴-۶-۳ تعریف :

تعریف ۱۲-۶-۳ را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم :

تابع $f: A \rightarrow B$ **یک به یک** می نامیم اگر به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه

تابع f که $x_1 \neq x_2$ داشته باشیم

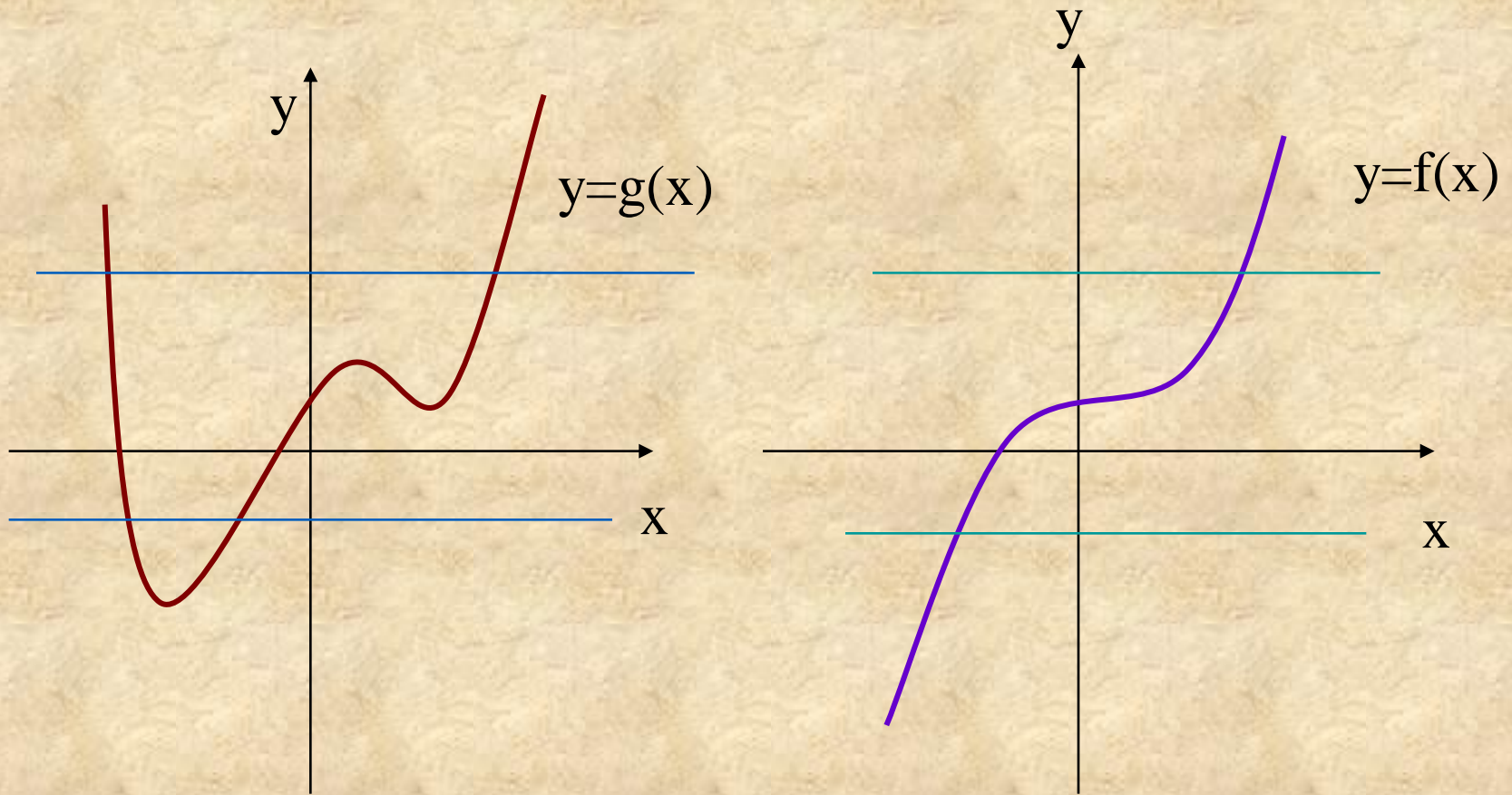
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

۱۵-۶-۳ مثال :

تابع $f(x) = |x|$ یک به یک نیست، زیرا $f \neq -1$ در حالی که $|1| = |-1|$

، یعنی $f(1) = f(-1)$

۱۶-۶-۳ تعبیر هندسی یک به یک بودن :



۱۸-۶-۳ قضیه :

اگر تابع f صعودی یا نزولی باشد، آنگاه f یک به یک خواهد بود.

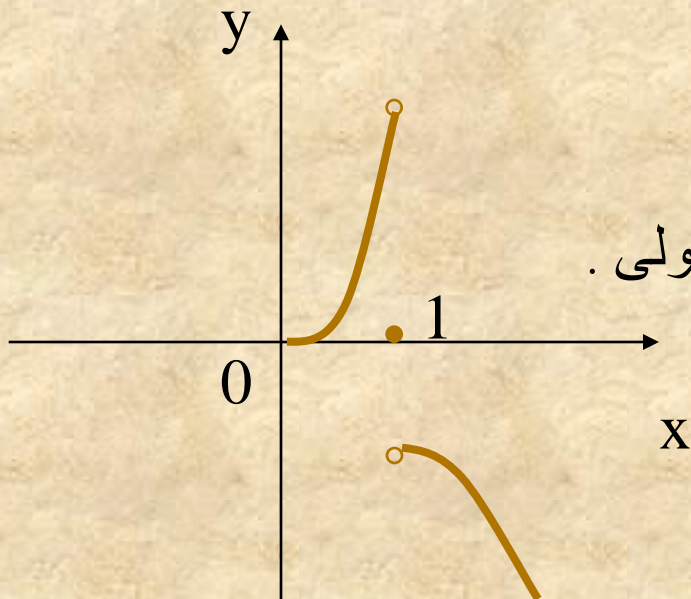
۲۰-۶-۳ نکته:

عکس قضیه ۱۸-۶-۳ برقرار نیست ، به بیان دیگر ، اگر تابعی یک به

یک باشد ، الزاما صعودی یا نزولی نیست. برای مثال تابع:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ x^3 & x > 1 \end{cases}$$

یک به یک است در حالی که نه صعودی است نه نزولی .



۳-۶-۲۱ تعریف :

تابع $f: A \rightarrow B$ **پوشا** می نامیم اگر به ازای هر b از برد تابع f ، عضوی

مانند a از دامنه f وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم :

$$b=f(a)$$

۳-۶-۲۲ مثال :

الف) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه تعریف $f(x) = 2x^3 - 5$ پوشاست. زیرا برای

هر b از برد تابع f یعنی \mathbb{R} ، معادله $b=f(a)$ یا

$$b = 2a^3 - 5$$

دارای یک ریشه حقیقی $a = \sqrt[3]{\frac{b+5}{2}}$ است و داریم:

$$f(a) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{b+5}{2}}\right)^3 - 5 = 2\left(\frac{b+5}{2}\right) - 5 = b$$

چون برای هر عضو برد f مانند b ، عضوی از دامنه f مانند a وجود دارد به گونه ای که $b=f(a)$ پس f تابعی پوشاست.

(ب) تابع $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه تعریف ، $g(x) = 2x^2 - 1$ پوشا نیست، زیرا

اگر عضو دلخواهی از برد g باشد از $b=g(a)$ یا $b=2a^2 - 1$ نتیجه

$$a = \pm \sqrt{\frac{b+1}{2}}$$

می گیریم که :

از اینجا مثلا به ازای $b=-5$ جوابی برای a بدست نمی آید، پس g پوشا

نیست. به عبارت دیگر ۵- عضوی از برد g است که تصویر هیچ عضوی

از دامنه g نیست.

۷-۳ وارون تابع

در این بخش وارون تابع را تعریف می کنیم و به بررسی خواص آن می پردازیم.

۳-۷-۱ وارون تابع:

تابع $f: R \rightarrow R$ را در نظر می گیریم و آن را به صورت مجموعه ای

از زوجهای مرتب می نویسیم:

$$f = \{(x, y) | y = f(x)\}$$

رابطه g را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g = \{(y, x) | y = f(x)\}$$

روشن است که اعضای رابطه g از تعویض مولفه های اول و دوم

اعضای تابع f به دست می آیند .

اکنون می خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی g تابعی از B به A خواهد بود .

الف) برای هر $b \in B$ باید عضوی مانند a در A وجود داشته باشد به طوری

که $(b, a) \in g$ در این صورت خواهیم داشت $b=f(a)$. پس f باید پوشا باشد.

ب) اگر $(y, x_1) \in g$ $(y, x_2) \in g$ داشته باشیم x_1 و x_2 به عبارت دیگر

باید بتوان از تساوی $f(x_1)=f(x_2)$ نتیجه گرفت که $x_1 = x_2$ پس f باید یک

به یک باشد ، پس برای آنکه g تابعی از B به A باشد ، باید f تابعی یک

به یک و پوشا باشد . بر عکس ، به آسانی می توان نشان داد که اگر f یک

به یک و پوشا باشد ، g تابعی از B به A خواهد بود.

۳-۷-۲ تعریف :

اگر $f: R \rightarrow R$ تابعی یک به یک و پوشا باشد رابطه:

$$g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

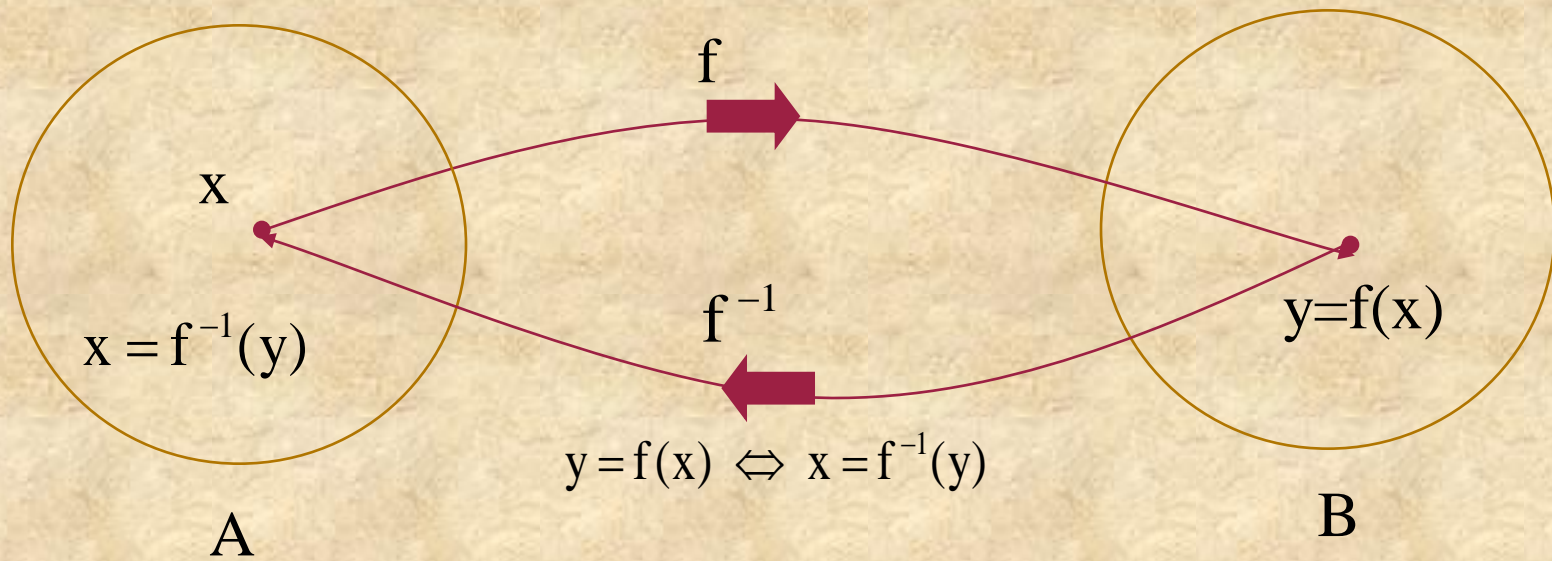
را که تابعی از B به A است **وارون تابع f** می نامیم و با نماد f^{-1}

نشان می دهیم پس

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\} \quad , \quad f^{-1}: B \rightarrow A$$

دقت کنید که دامنه f^{-1} برابر با برد f و برد f^{-1} برابر با دامنه f است.

در شکل زیر وارون تابع توضیح داده شده است.



۳-۷-۴ مثال :

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ها ضابطه تعریف $f(x) = x^3$ یک به یک و پوشاست (چرا؟)

پس دارای وارون است . برای محاسبه وارون این تابع ، معادله $y = x^3$

را بر حسب x حل می کنیم و به دست می آوریم:

$$x = \sqrt[3]{y}$$

در تساوی اخیر، جای x و y را عوض می کنیم ، خواهیم داشت:

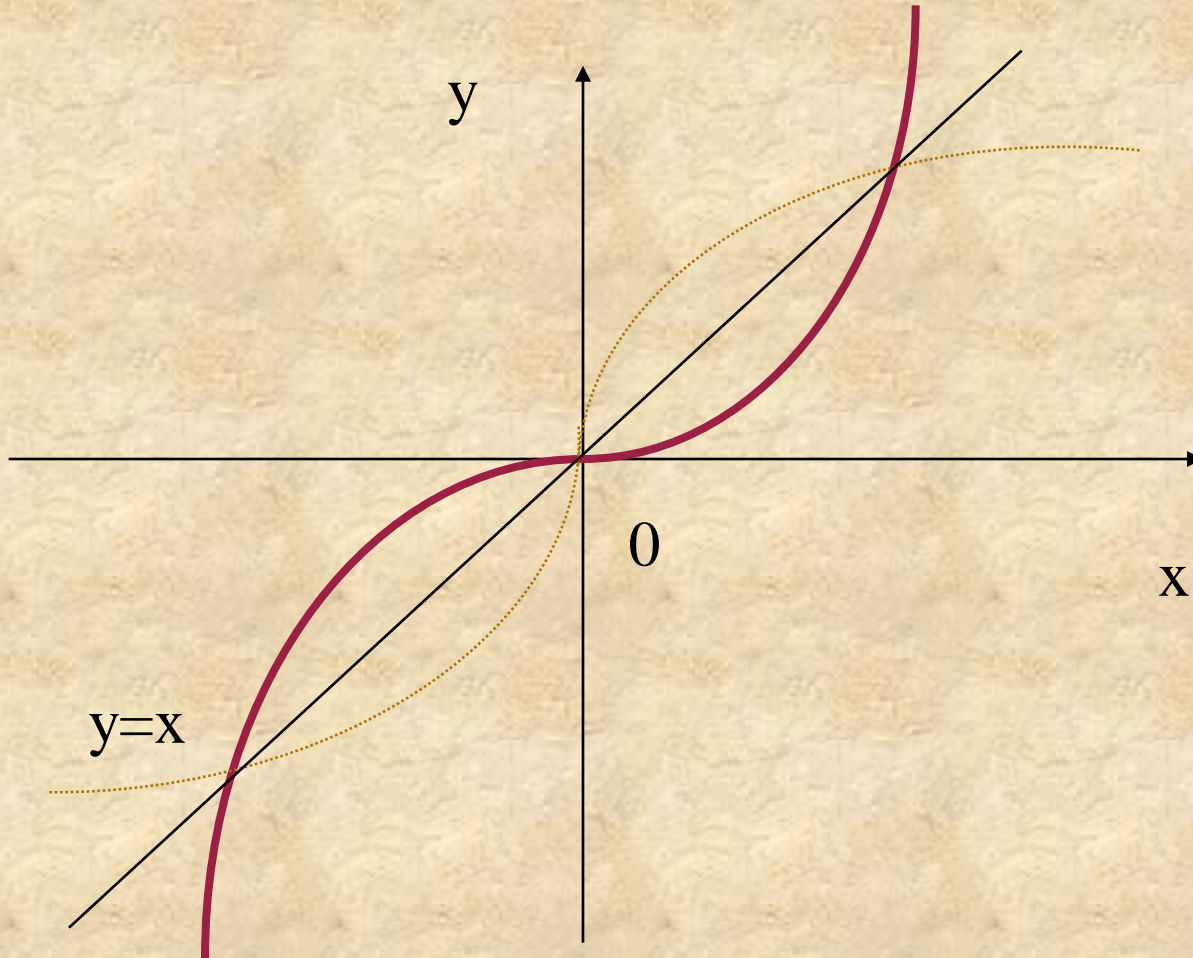
$$y = \sqrt[3]{x}$$

پس وارون f عبارت است از:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} , f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

نمودار های توابع f و f^{-1} در شکل زیر رسم شده است .

توجه کنید که نمودار های f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه اند.



۳-۷-۶ وارون تابع نمایی a^x

فرض می کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن $a > 0$ و $a \neq 1$ تعریف می شود.

(الف) تابع f یک به یک است، زیرا تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ $a^{x_1} = a^{x_2}$ نتیجه می شود

(ب) تابع f پوشاست، زیرا اگر b عضو دلخواهی از برد f باشد، از

$b = f(x)$ یا $b = a^x$ نتیجه می شود $x = \log_a b$ داریم:

$$f(x) = a^{\log_a b} = b$$

از (الف) و (ب) نتیجه می شود که تابع f دارای وارون است.

برای محاسبه وارون f ، از معادله $y = a^x$ مقدار x را بر حسب y تعیین می کنیم :

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y = f^{-1}(y)$$

اکنون در تساوی اخیر جای x و y را عوض می کنیم، خواهیم داشت:

$$y = \log_a x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

بنابراین ، وارون تابع نمایی a^x تابع لگاریتمی $\log_a x$ است و بر عکس.

۷-۷-۳ نتیجه :

(۱) دو تابع $y = \ln x$ و $y = e^x$ بنابر ۷-۷-۳ وارون یکدیگرند.

(۲) دو تابع $y = \log x$ و $y = 10^x$ بنابر ۷-۷-۳ وارون یکدیگرند.

فصل چهارم

حد و پیوستگی توابع

هدف کلی:

هدف کلی فصل این است که با مفهوم حد تابع، قضیه های حدی، حدهای چپ و راست تابع، حد در بینهایت، و پیوستگی تابع در بینهایت و پیوستگی تابع در یک نقطه حقیقی و در یک بازه آشنا شوید.

هدفهای رفتاری:

از شما انتظار می رود پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

- ۱) مفهوم حد را توضیح دهید.
- ۲) حد تابع را در نقطه متناهی یا در ∞ تعریف کنید.
- ۳) حد تابع را در نقطه متناهی یا در ∞ محاسبه کنید.
- ۴) قضایای حد را بیان کنید و آنها را در محاسبه حد به کار ببرید.
- ۵) صورتهای مبهم یا نامعین حدی را تشخیص دهید و مقدار واقعی حد داده شده را محاسبه کنید.

۶) حدهای راست و چپ را تعریف کنید و رابطه میان حدهای یک طرفه و

حد تابع را توضیح دهید و آن را در حل مسائل به کار ببرید

۷) مفهوم پیوستگی تابع را در یک نقطه توضیح دهید.

۸) رابطه بین پیوستگی تابع در یک نقطه و حد تابع در آن نقطه را بیان کنید.

۹) نقاط پیوستگی و ناپیوستگی توابع داده شده را تعیین کنید.

۱۰) پیوستگی از راست و از چپ را توضیح دهید.

۱۱) پیوستگی تابع را در بازه‌های باز و بسته تعریف کنید.

۱۲) قضیه‌های پیوستگی را تعریف کنید و آنها را در حل مسائل به کار ببرید.

مقدمه:

مفهوم حد یکی از مفاهیم اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال است. در این فصل ابتدا با مفهوم حد به طور شهودی آشنا می شویم و سپس پیوستگی تابع را بررسی می کنیم

۱-۴ حد تابع

۱-۱-۴ مقدمه:

گاهی لازم است رفتار تابعی را در نزدیکی نقطه ای بررسی کنیم تا معلوم شود

که وقتی متغیر مستقل به آن نقطه نزدیک می شود مقادیر تابع به عدد ثابتی

نزدیک می شوند یا نه. ابتدا با یک مثال مفهوم شهودی حد را توضیح می دهیم.

۴-۱-۲ مثال:

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه تعریف $f(x)=2x-3$ را در نظر می‌گیریم.

می‌خواهیم رفتار این تابع را هنگامی که x به عدد ۲ نزدیک می‌شود بررسی کنیم.
حل:

به این منظور جدولی از مقادیر f را به ازای x هایی که به اندازه دلخواه به

عدد ۲ نزدیک باشند تشکیل می‌دهیم:

| | | | | | |
|--------|-----|------|-------|--------|---|
| x | 1/9 | 1/99 | 1/999 | 1/9999 | 2 |
| $F(x)$ | 0/8 | 0/98 | 0/998 | 0/9998 | 1 |

| | | | | |
|--------|--------|-------|------|-----|
| x | 2/0001 | 2/001 | 2/01 | 2/1 |
| $F(x)$ | 1/0002 | 1/002 | 1/02 | 1/2 |

جدول بالا نشان می دهد هر قدر x به عدد ۲ نزدیکتر باشد مقدار $f(x)$

به عدد یک نزدیکتر می شود . به عبارت دیگر می توانیم مقادیر $f(x)$

را تا هر اندازه که بخواهیم به عدد ۱ نزدیک کنیم به شرطی که x را به

اندازه کافی نزدیک به عدد ۲ نه لزوماً برابر با ۲ انتخاب کنیم. به بیان

ریاضی $|f(x) - 1|$ می توانیم به دلخواه کوچک کنیم مشروط بر اینکه

$|x - 2|$ را به اندازه کافی کوچک انتخاب کنیم.

۳-۱-۴ تعریف:

عدد L را حد تابع f در a می نامیم اگر برای هر $\delta > 0$ عدد مثبتی مانند δ

(معمولا وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که

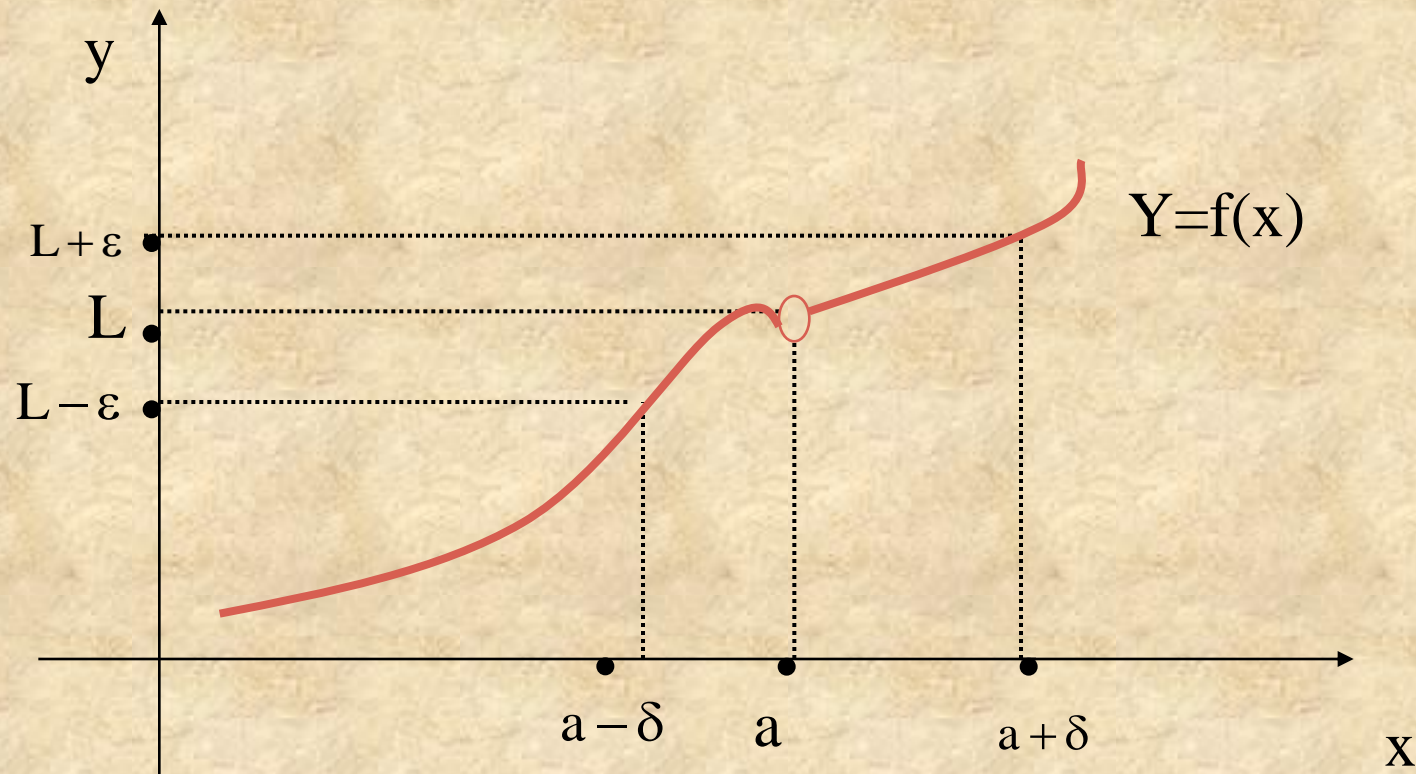
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

در این صورت می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

و می خوانیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می کند برابر L است.

★ توجه کنید که $0 < |x - a| < \delta$ معنای $x \neq a$ و $|x - a| < \delta$ است.



بنابر شکل ۱-۴ اگر حد تابع f وقتی که x به a میل میکند برابر L باشد

آنگاه وقتی x بر محور افقی بین $a-\delta$ و $a+\delta$ واقع باشد $f(x)$ بر محور

قائم بین $L-\varepsilon$ و $L+\varepsilon$ قرار خواهد داشت.

نشان بدهید که تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 0 \\ 3x-1 & x < 0 \end{cases}$ در $x=0$ حد ندارد.

حل:

فرض می‌کنیم حد تابع f در $x=0$ برابر L باشد (فرض خلف). پس بنابر

تعریف حد برای هر $\varepsilon > 0$ از جمله $\varepsilon = \frac{1}{2}$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به

گونه ای که:

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

اما $0 < |x| < \delta$ معادل با $x \neq 0$ و $x < \delta$ است. اکنون اگر $x < 0$ آن‌گاه

$f(x) = 3x - 1$ در نتیجه بنابر (۱) داریم:

$$|f(x) - L| = |3x - 1 - L| < \frac{1}{2}$$

و اگر $0 < X < \delta$ آنگاه $f(x) = 3x + 1$ و در نتیجه بنابر (۱) داریم:

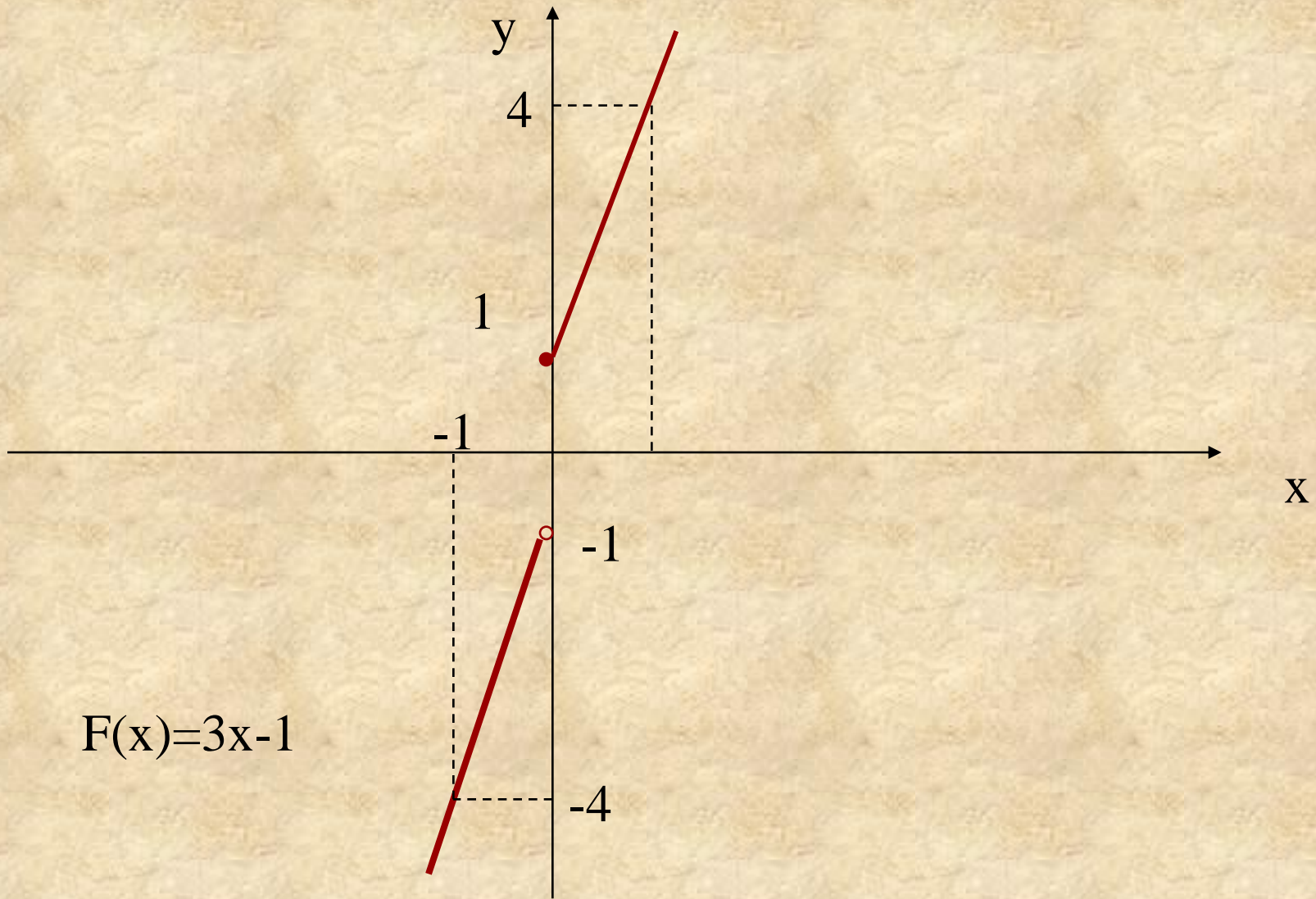
$$|f(x) - L| = |3x + 1 - L| < \frac{1}{2}$$

از روابط بالا به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} 2 &= |1+1| = |1+1+(3x+L)-(3x+L)| \\ &= |(3x+1-L)+(-3x+1+L)| \\ &\leq |3x+1-L| + |-3x+1+L| \\ &= |3x+1-L| + |3x-1-L| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

که این یک تناقض است. بنابر این فرض خلف باطل است و f در $x=0$

حد ندارد. به شکل اسلاید بعدی نگاه کنید:



$$F(x) = 3x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 4$$

۲-۴ قضایایی در باره حد تابع

۱-۲-۴ مقدمه:

محاسبه مقدار حد تابع با استفاده از تعریف حد و به کمک ϵ غالباً طولانی و پیچیده است. در این بخش قضیه هایی را در مورد حد بیان می کنیم و با روشهای محاسبه حدهای توابع آشنا می شویم. از اثبات این قضیه ها صرف نظر کرده ایم.

۲-۲-۴ قضیه :

فرض می کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ هر دو موجود باشند. در این صورت:

(الف) اگر c عدد ثابتی باشد آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(ب) اگر r عدد حقیقی مثبت باشد آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^r$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$$

(ث)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

(ج) اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ آنگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$$

(چ)

(ح) اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

★ در این رابطه اگر n زوج باشد، $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ باید مثبت باشد.

۴-۲-۳ قضیه :

اگر m, n و a سه عدد دلخواه باشند ، آنگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = ma + n$$

۴-۲-۸ نکته:

بنابر نتیجه ۴-۲-۷ برای تعیین حد یک تابع چند جمله ای یا تابع گویا،

کافی است مقدار تابع را در نقطه مورد نظر محاسبه کنیم. البته مشروط

بر اینکه تابع در آن نقطه تعریف شده باشد. برای مثال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 2) = 2(-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 - 5(-1) + 2 \\ = 13$$

همچنین چون $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{4x^3 - 3x + 7}$ تابعی گویاست، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 4}{4x^3 - 3x + 7} = \frac{(1)^2 - 3(1) + 4}{4(1)^3 - 3(1) + 7} \\ = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۹-۲-۴ تذکر:

در اکثر موارد ، قبل از اینکه بتوانیم قضیه های حد را به کار ببریم ، لازم است که ضابطه تعریف تابع داده شده را ساده کنیم به مثال زیر توجه کنید:

۱۰-۲-۴ مثال :

حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad (\text{الف})$$

حل:

$$\frac{(3)^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0} \quad (\text{الف}) \text{ تابع } f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \text{ در } x=3 \text{ تعریف نشده است. زیرا}$$

نامعین است. این امر مشکلی به وجود نمی آورد. زیرا حد این تابع وقتی x

به ۳ میل می کند تنها به مقادیر x در نزدیکی ۳ بستگی دارد و مقدار $x=3$

را شامل نمی شود. از طرفی می دانیم :

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

پس به ازای $x \neq 0$ داریم :

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

(ب) چون به ازای $x=0$ مخرج کسر به صفر میل می کند نمی توانیم قضیه

۲-۲-۴ (ج) را مستقیماً به کار ببریم ، ولی با استفاده از یک فن جبری

می توانیم این حد را قابل محاسبه کنیم. به این منظور، صورت و مخرج کسر

را در مزدوج صورت یعنی $3 + \sqrt{x+9}$ ضرب می کنیم و به دست می آوریم:

$$\frac{(\sqrt{x+9}-3)}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

که به ازای $x \neq 0$ داریم:

$$= \frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

اکنون بنابر قضیه ۲-۲-۴ (ج) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+9} + 3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x+9)} + \lim_{x \rightarrow 0} 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9} + 3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

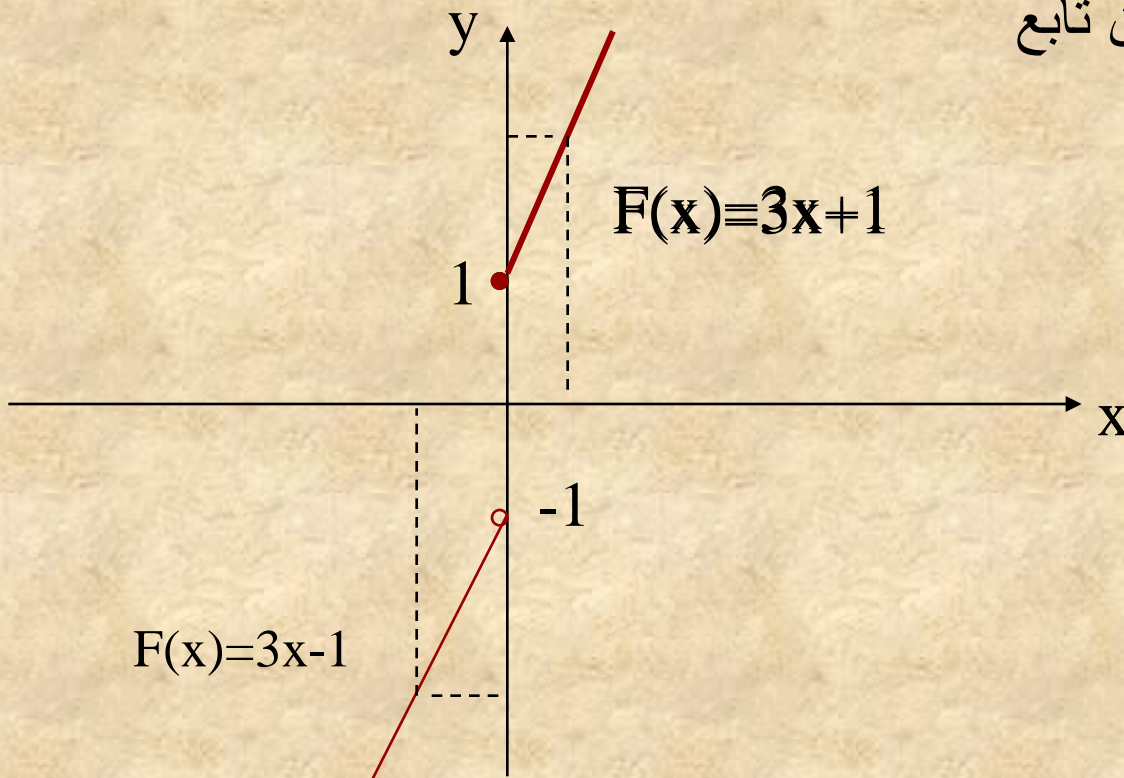
۳-۴ حد‌های یک طرفه

۳-۴-۱ مقدمه

تابع f را با ضابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 0 \\ 3x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

در ۳-۴-۱ نشان دادیم که این تابع در $x=0$ حد ندارد.



چنان که در شکل دیده می شود، وقتی که x از سمت راست به صفر نزدیک

می شود، $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می شود، و هنگامی که x از سمت چپ (از

طرف اعداد منفی) به صفر نزدیک می شود، $f(x)$ به عدد (-۱) نزدیک

می شود. در این صورت می گوئیم **حد راست** تابع f در نقطه ۰ برابر با ۱ و

حد چپ تابع f در نقطه ۰ برابر با (-۱) است.

اکنون به تعریف حدهای راست و چپ تابع که حدهای یک طرفه نامیده

می شوند می پردازیم.

۴-۳-۲ تعریف :

فرض می کنیم تابع f در بازه (a, b) تعریف شده باشد ، اگر برای هر

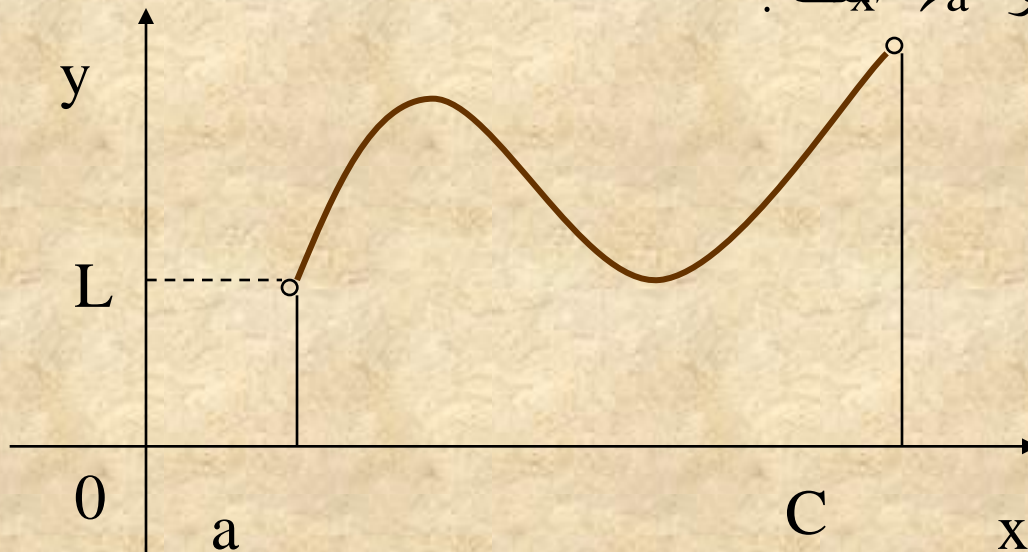
عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه عدد L را **حد راست تابع در نقطه $x=a$** می نامیم. و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

نماد $x \rightarrow a^+$ به معنای $x > a$ و $x \rightarrow a$ است .



۳-۳-۴ تعریف :

فرض می کنیم تابع f در بازه (a, b) تعریف شده باشد. اگر برای هر $\epsilon > 0$

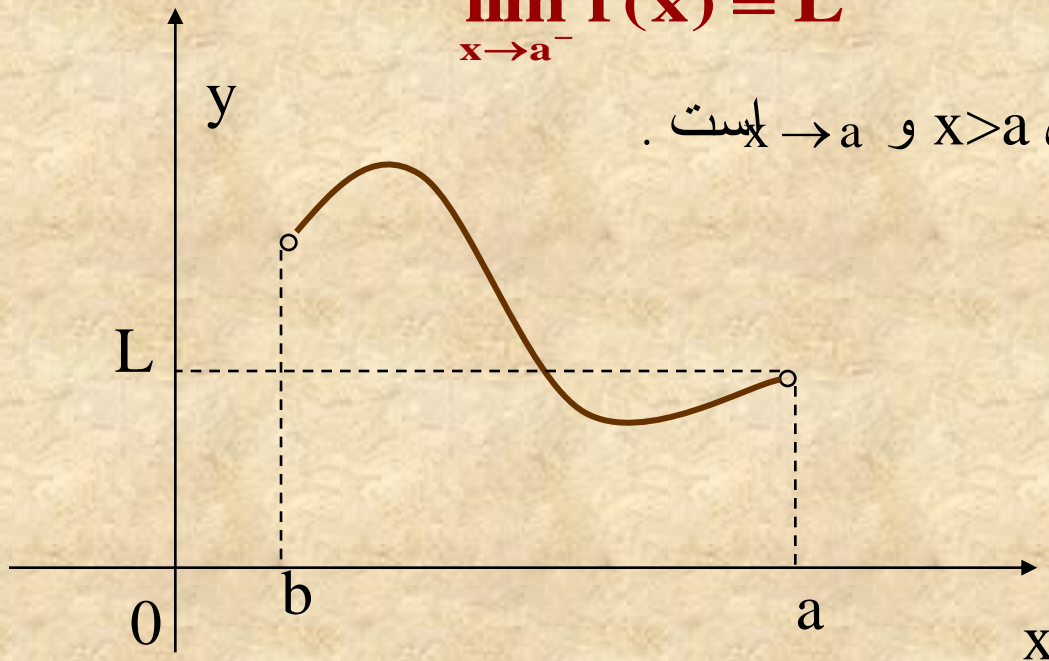
عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که:

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

آنگاه عدد L را حد چپ تابع در نقطه $x=a$ می نامیم. و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

نماد $x \rightarrow a^-$ به معنای $x > a$ و $x \rightarrow a$ است.



۴-۳-۴ نکته:

تمام قضیه هایی که در بخش ۲-۴ بیان کردیم با قرار دادن $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ به جای $x \rightarrow a$ همچنان معتبرند.

۴-۳-۵ مثال :

تابع f با ضابطه تعریف زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x \geq 1 \\ 5x - 2 & x < 1 \end{cases}$$

حد چپ و حد راست تابع f را در صورت وجود در $x=1$ تعیین کنید.

حل:

برای محاسبه حد راست تابع f در $x=1$ یعنی $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ چون $x \rightarrow 1^+$

پس $x \rightarrow 1$ و $x > 1$. در این حالت داریم $f(x) = 3x + 2$ و بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 2) = 3(1) + 2 = 5$$

برای محاسبه حد چپ تابع f در $x=1$ یعنی $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ چون $x \rightarrow 1^-$ پس

$x \rightarrow 1$ و $x < 1$. در این حالت داریم $f(x) = 5x - 2$ و بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x - 2) = 5(1) - 2 = 3$$

به طوری که ملاحظه می شود حد چپ و حد راست تابع f در $x=1$ با هم برابر نیستند.

۴-۳-۸ مثال :

بنابر نتیجه ۴-۳-۷ (الف) تابع f در مثال ۴-۳-۵ در نقطه $x=1$ حد ندارد.

روشن است که این تابع در هر نقطه حقیقی به استثنای $x=1$ دارای حد است.

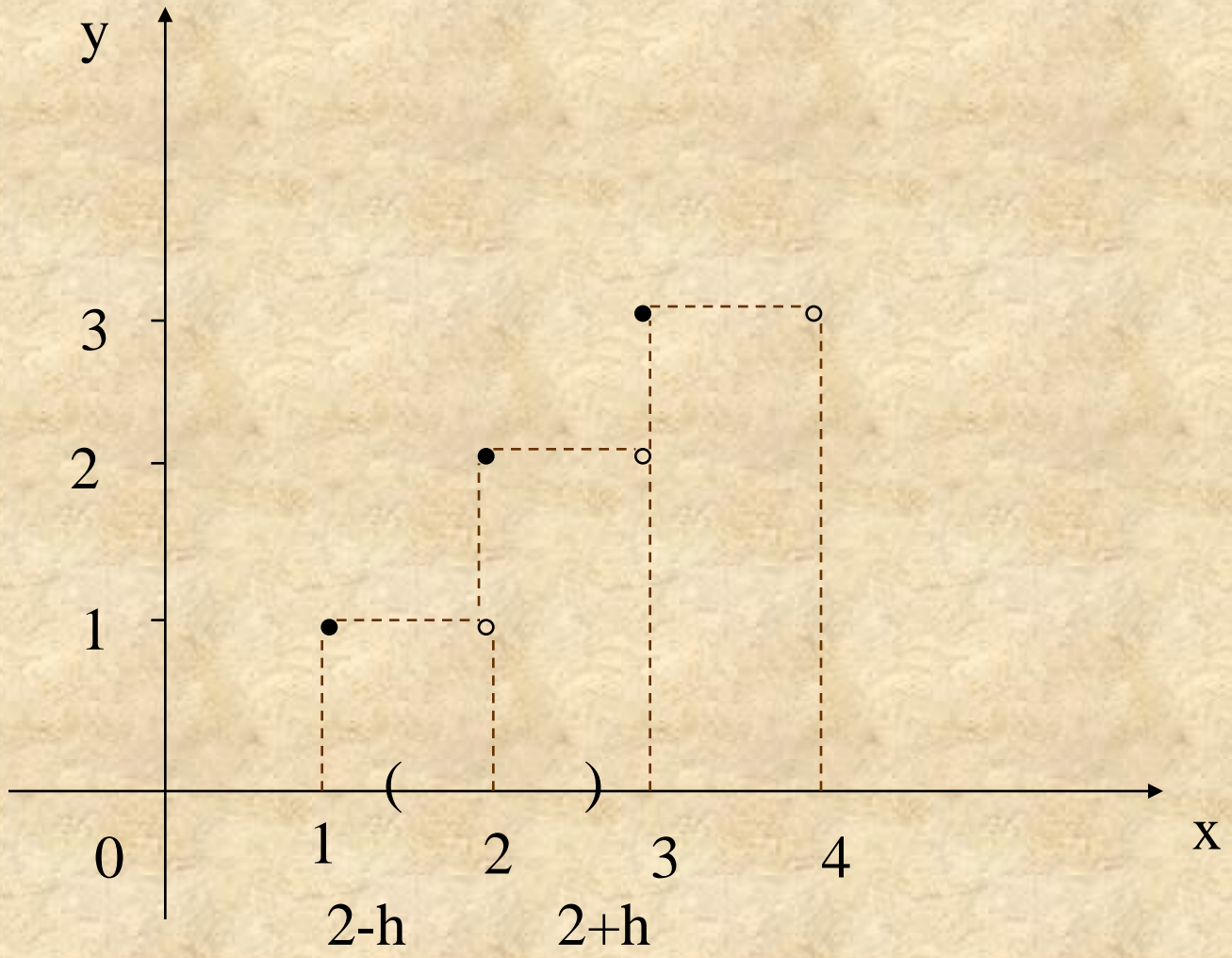
۴-۳-۹ نکته:

تابع جزء صحیح $f(x) = [x]$ ، $x \in \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم حد چپ

و حد راست f را در نقطه $x=2$ تعیین کنیم.

یادآوری می‌کنیم که منظور از جزء صحیح x ، بزرگترین عدد صحیح

نا بزرگتر از x است .



به طوری که در شکل دیده می شود، تابع f هنگامی که x به سمت ۲ میل

می کند دارای حد نیست زیرا وقتی که x برابر ۲ یا کمی بزرگتر از ۲

اختیار شود مقادیر تابع f بسیار نزدیک به ۲ خواهند بود. اما هنگامی که

x اندکی کوچکتر از ۲، مثلاً $۹۹۹/۱$ باشد داریم $[x]=1$ به عبارت دیگر

اگر h عددی مثبت و کوچکتر از یک باشد، یعنی $0 < h < 1$ ، آنگاه:

به ازای هر x که $2-h < x < 2$ داریم: $[x]=1$

به ازای هر x که $2 < x < 2+h$ داریم: $[x]=2$

در نتیجه بنابر تعریف های ۴-۳-۳ و ۴-۳-۲، حد چپ و حد راست f

در $x=2$ برابرند با:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$$

چون حد چپ و حد راست تابع جزء صحیح در $x=2$ برابر نیستند، این

تابع بنابر نتیجه ۴-۳-۷ (الف) در $x=2$ حد ندارد.

به همین ترتیب به ازای هر عدد صحیح n می توان نشان داد که تابع $[x]$ در $x=n$ حد ندارد و داریم :

$$\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n \quad n \in \mathbb{Z}$$

روشن است که تابع جزء صحیح در هر عدد حقیقی غیر صحیح دارای حد است . برای مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 2/5^-} [x] = 2 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 2/5^+} [x] = 2$$

در نتیجه، بنابر قضیه ۴-۳-۶ داریم :

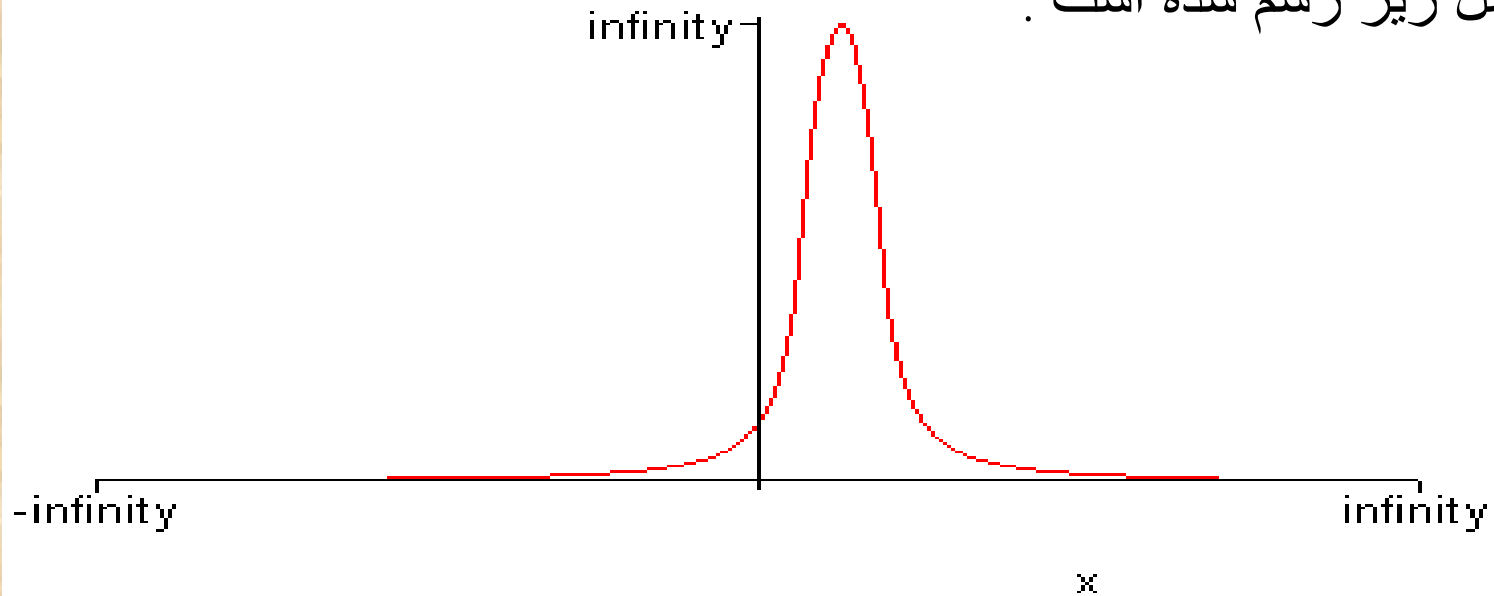
$$\lim_{x \rightarrow 2/5} [x] = 2$$

۴-۴-۴ حد‌های بینهایت

۴-۴-۱ مثال:

تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع در

شکل زیر رسم شده است.



اکنون مقادیر f را هنگامی که x نزدیک به یک باشد بررسی می کنیم.
 به جدول زیر توجه کنید:

| | | | | | | | |
|--------|---|-----|-----------------|-----|--------|--------|--------|
| X | 2 | 1/5 | 1/3 | 1/1 | 1/01 | 1/001 | 1/0001 |
| $F(x)$ | 1 | 4 | $\frac{9}{100}$ | 100 | 10^4 | 10^6 | 10^8 |

به طوری که در جدول بالا می بینیم، هر قدر x از سمت راست به ۱

نزدیکتر شود، مقدار $f(x)$ بزرگتر می شود. به این ترتیب می توان

$f(x)$ را بی اندازه بزرگ کرد مشروط بر آنکه x بی اندازه از سمت

راست به یک نزدیک شود. این خاصیت را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

اکنون مقادیر $f(x)$ را هنگامی که x از سمت چپ نزدیک به یک باشد بررسی می کنیم. به جدول زیر توجه کنید:

| | | | | | | | |
|--------|---|-----|-----------------|-----|--------|--------|--------|
| x | 0 | 0/5 | 0/7 | 0/9 | 0/99 | 0/999 | 0/9999 |
| $F(x)$ | 1 | 4 | $\frac{9}{100}$ | 100 | 10^4 | 10^6 | 10^8 |

به طوری که در جدول بالامی بینیم هر قدر x از سمت چپ به نزدیکتر

شود، مقدار $f(x)$ بزرگتر می شود. این خاصیت را با نماد زیر نشان

می دهیم :

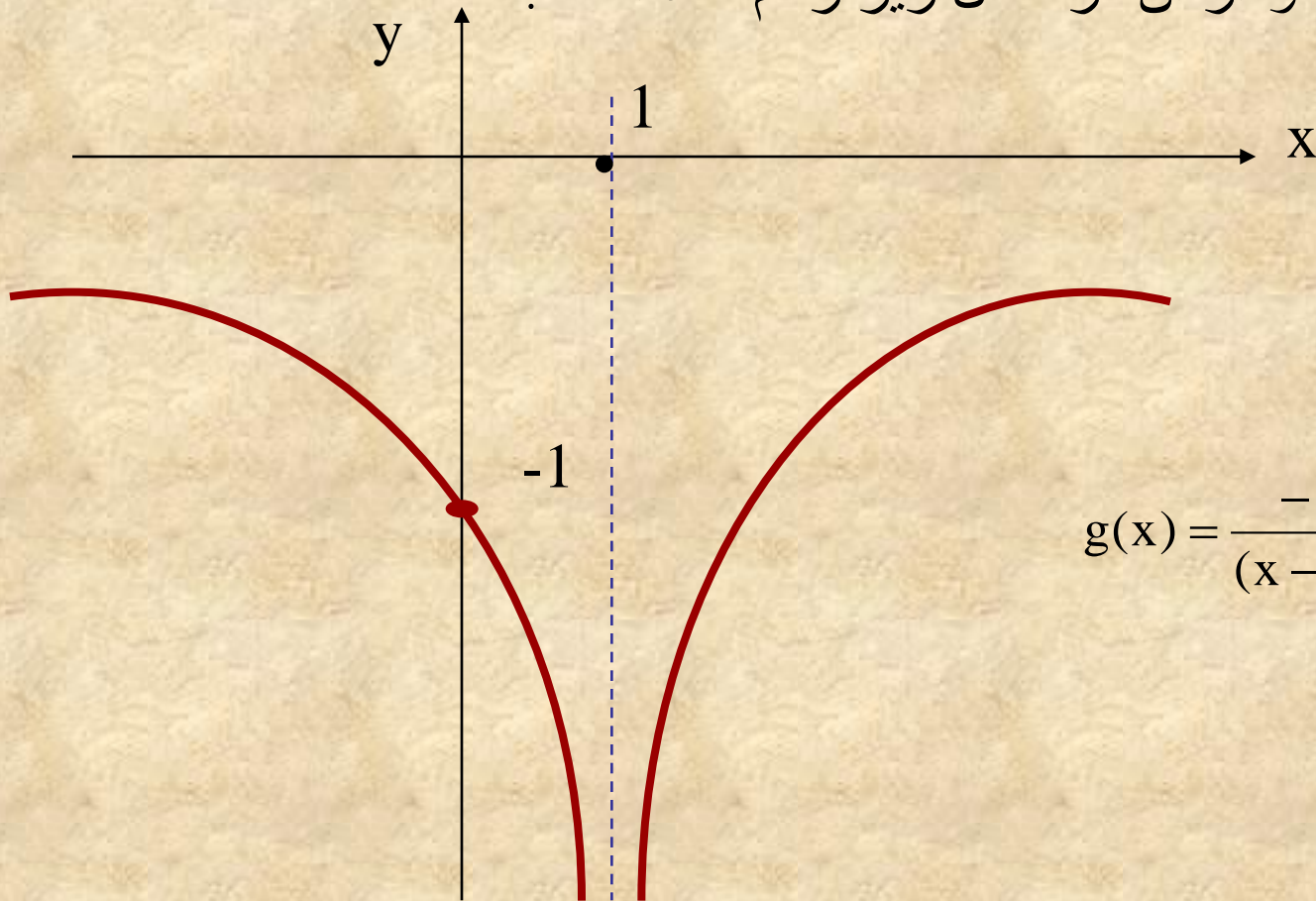
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

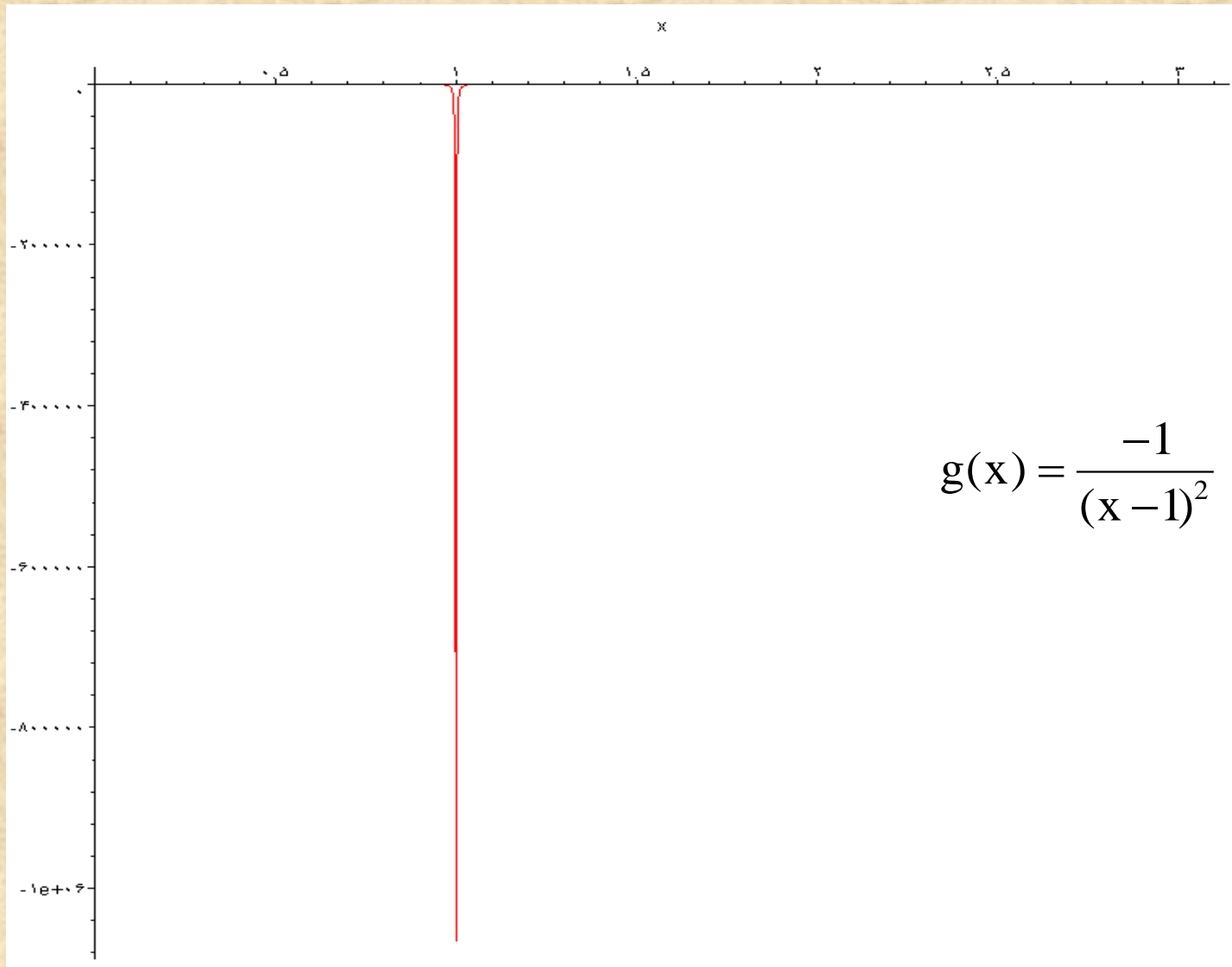
۳-۴-۴ مثال :

با روشی مشابه مثال ۱-۴-۴ می توان رفتار تابع
نقطه یک بررسی کرد.

$$g(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

تابع g که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است .





$$g(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

مشاهده می کنیم هنگامی که x نزدیک به عدد یک شود مقدار $g(x)$

بی اندازه کوچک می شود. این خاصیت را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

۴-۴-۴ تعریف :

اگر برای هر $M < 0$ ، عدد مثبتی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد. به طوری که

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$$

آنگاه حد تابع f را هنگامی که x به سمت a میل می کند، بینهایت منفی

می نامیم و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

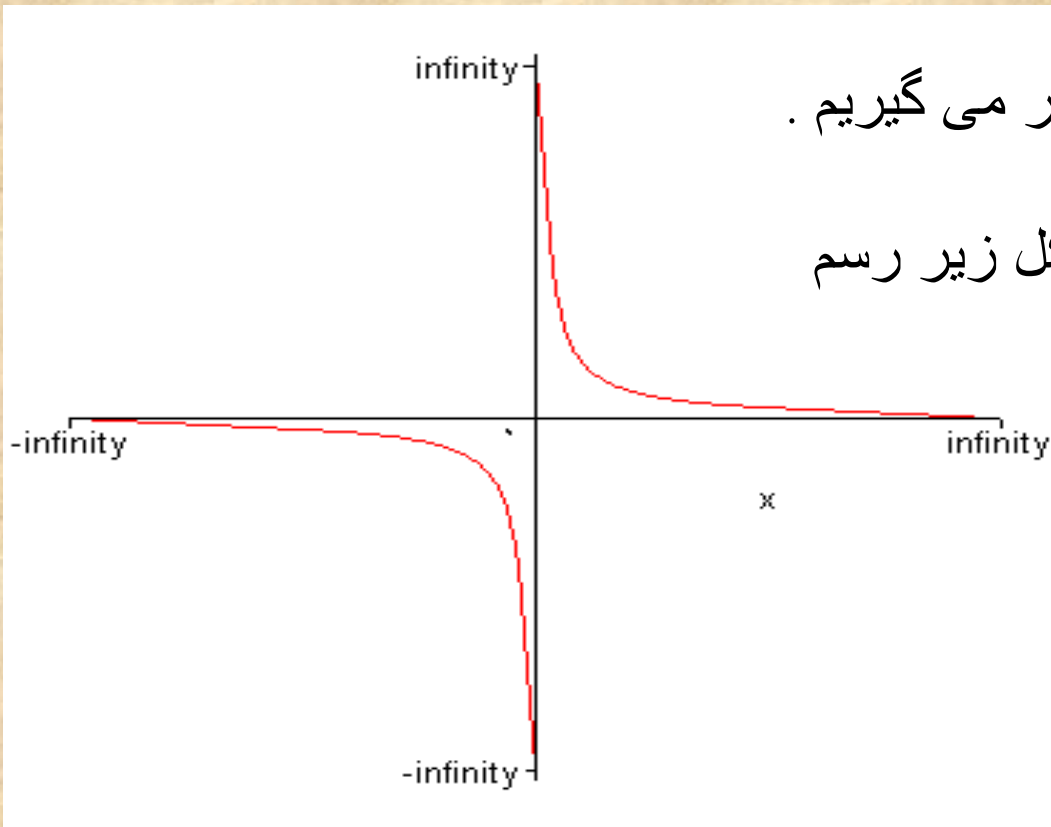
۴-۴-۵ تذکر:

وقتی که داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ اعدادی حقیقی نیستند.

۴-۴-۶ مثال:

تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می گیریم.

نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است.



چنان که در شکل دیده می شود، هنگامی که x از سمت راست به صفر نزدیک می شود، مقادیر تابع بزرگ و بزرگتر می شوند، یعنی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

اگر x از سمت چپ به صفر نزدیک شود، مقادیر تابع منفی اند و کوچک و کوچکتر می شوند، یعنی داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

8-4-4 قضیه :

اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد ، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ +\infty & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

قضیه بالا را می توان به صورت زیر تعمیم داد.

۴-۴-۹ قضیه :

(الف) اگر تابع f در حالی که همواره مثبت است ، به سمت صفر میل کند آنگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

(ب) اگر تابع f در حالی که همواره منفی است ، به سمت صفر میل کند آنگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

۱۳-۴-۴ مثال :

حد $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$ محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2^-} (4-x^2)} = \sqrt{0} = 0$$

داریم :

و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0$$

چون $x \rightarrow 2^-$ پس $x < 2$ و در نتیجه $x^2 < 4$ و $4 - x^2 > 0$ داریم :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2-x)(2+x)}{-(2-x)\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{-(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$ در حالی که همیشه مثبت است به سمت

صفر میل می کند ، بنابر قضیه ۴-۴-۹ (الف) داریم :

در نتیجه به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} -(2+x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) = -4(+\infty) = -\infty$$

۵-۴ حد در بینهایت

۴-۵-۱ مقدمه:

در این بخش به بررسی رفتار تابعی مانند f هنگامی که x به اندازه کافی

بزرگ شود، می پردازیم. وقتی می گوئیم x مقادیر بزرگ را به دلخواه

اختیار می کند، منظور این است که x از هر مقدار مثبت دلخواه مانند

M بزرگتر باشد، و در این صورت می نویسیم:

$$x \rightarrow +\infty$$

هر گاه x هر مقدار دلخواه کوچکتر از هر عدد منفی مانند $N < 0$ را

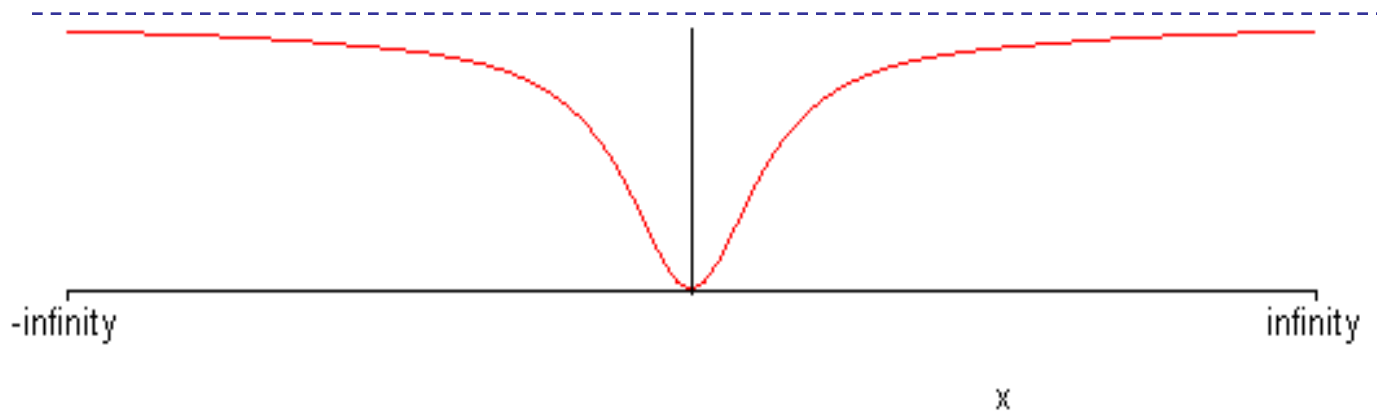
اختیار کند، می گوئیم x به بینهایت میل می کند و می نویسیم:

$$x \rightarrow -\infty$$

۴-۵-۲ مثال :

تابع $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$ را در نظر می گیریم . نمودار این تابع در شکل زیر

رسم شده است .



در جدول زیر مقادیر $f(x)$ ، برای بعضی مقادیر بزرگ x محاسبه شده است .

| x | ۱۰ | 100 | 1000 | 10000 |
|--------|-------------------|------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| $F(x)$ | $\frac{300}{101}$ | $\frac{30000}{100001}$ | $\frac{3000000}{1000001}$ | $\frac{300000000}{100000001}$ |

به طوری که در جدول بالا می بینیم ، به تدریج که مقادیر مثبت x بزرگتر

می شوند ، مقادیر $f(x)$ به عدد ۳ نزدیکتر می شوند . این خاصیت را به

صورت زیر نشان می دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1} = 3$$

در جدول زیر مقادیر $f(x)$ برای بعضی مقادیر کوچک و منفی x محاسبه کرده ایم:

| x | -10 | -100 | -1000 | -10000 |
|--------|-------------------|------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| $F(x)$ | $\frac{300}{101}$ | $\frac{30000}{100001}$ | $\frac{3000000}{1000001}$ | $\frac{300000000}{100000001}$ |

توجه کنید که برای هر عدد حقیقی x داریم $f(-x)=f(x)$ ، یعنی f تابعی زوج

است. بنابراین به تدریج که مقادیر منفی x کوچکتر می شوند، مقادیر $f(x)$

به عدد ۳ نزدیک می شوند. این خاصیت را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1} = 3$$

۴-۵-۴ تعریف :

اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند M (معمولا وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه عدد L را حد تابع f ، هنگامی که x به سمت بینهایت مثبت میل می کند، می نامیم و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

۴-۵-۴ تعریف :

اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد مانند $N < 0$ (معمولا وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

$$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه عدد L را حد تابع f ، هنگامی که x به سمت بینهایت منفی میل می کند، می نامیم و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

۴-۵-۵ قضیه :

اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه داریم :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{(ب)}$$

تعمیم قضیه بالا به صورت زیر است .

۴-۵-۶ قضیه :

فرض می کنیم a عددی حقیقی یا یکی از نمادهای ∞ یا $+\infty$

باشد. در این صورت اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{آنگاه :}$$

۴-۵-۷ تذکر:

تمام قضیه هایی که درباره حد در بخشهای ۲-۴ و ۴-۴ دیدیم در

مورد حدهایی که در آنها $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ نیز صدق می کند.

۴-۵-۸ مثال:

را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{2x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{2 - \frac{1}{x}}$$

حل:

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} [3 + \frac{4}{x}]}{\lim_{x \rightarrow +\infty} [2 - \frac{1}{x}]} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{3 + 4(0)}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

۴-۵-۱۰ مثال :

حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{2x + 1}$ را محاسبه کنید.

حل:

برای محاسبه حد داده شده ، صورت و مخرج کسر را بر x^2 تقسیم می کنیم.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{3}{x}}{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{3}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}\end{aligned}$$

اکنون حد صورت و مخرج را جداگانه در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{3}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 - 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \\ &= 5 - 3(0) = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \\ &= 2(0) + 0 = 0\end{aligned}$$

حد صورت عدد مثبت ۵ است و مخرج در حالی که همواره مثبت است

به صفر میل می کند ، در نتیجه بنا بر قضیه ۴-۴-۹ (الف) داریم :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{2x + 1} = +\infty$$

نتایج حاصل از سه مثال اخیر را می توان به صورت زیر خلاصه کرد.

۴-۵-۲ مثال :

را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}}$$

حل:

از $x \rightarrow +\infty$ نتیجه می شود $x > 0$ یعنی
و بنابراین داریم:

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}$$

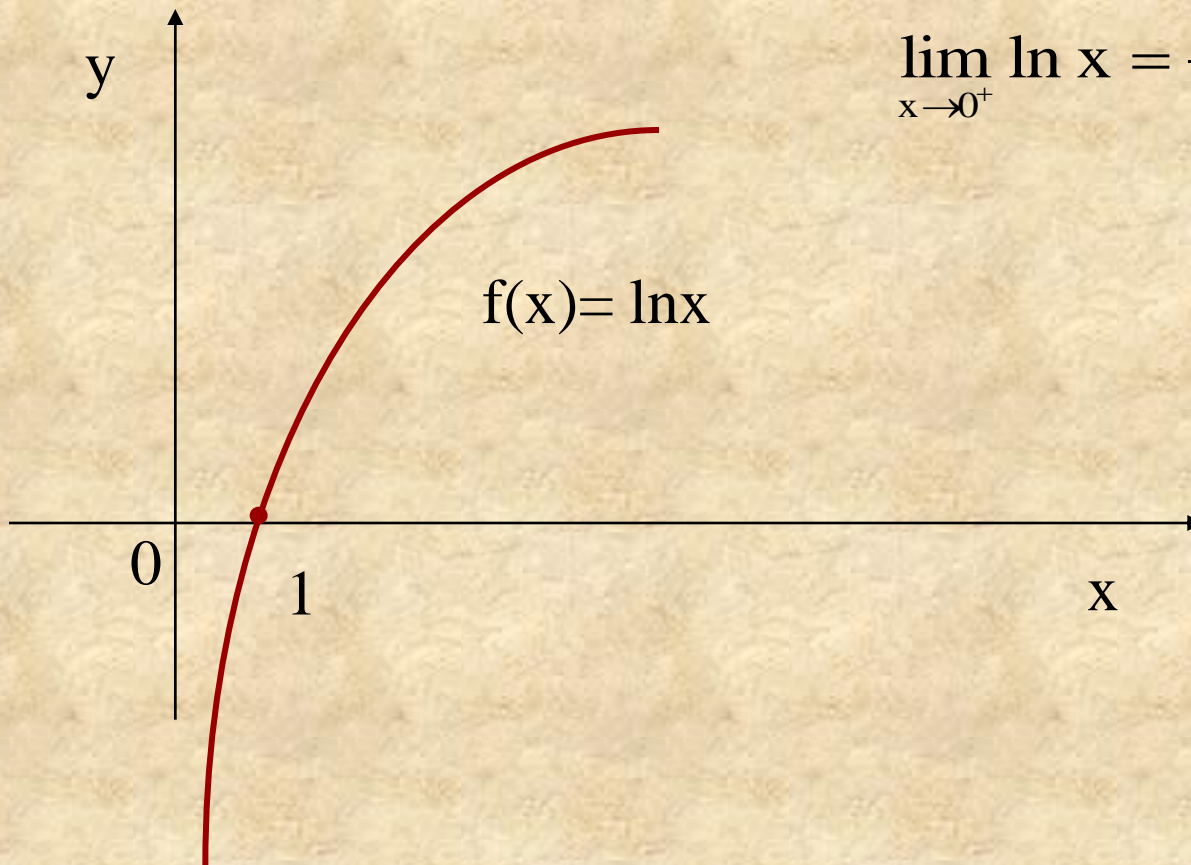
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}} = 2$$

۴-۵-۱۸ حد تابع لگاریتمی:

با توجه به نمودار تابع لگاریتم طبیعی $x > 0$ ، $f(x) = \ln x$ حد های زیر را داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (\text{ب})$$



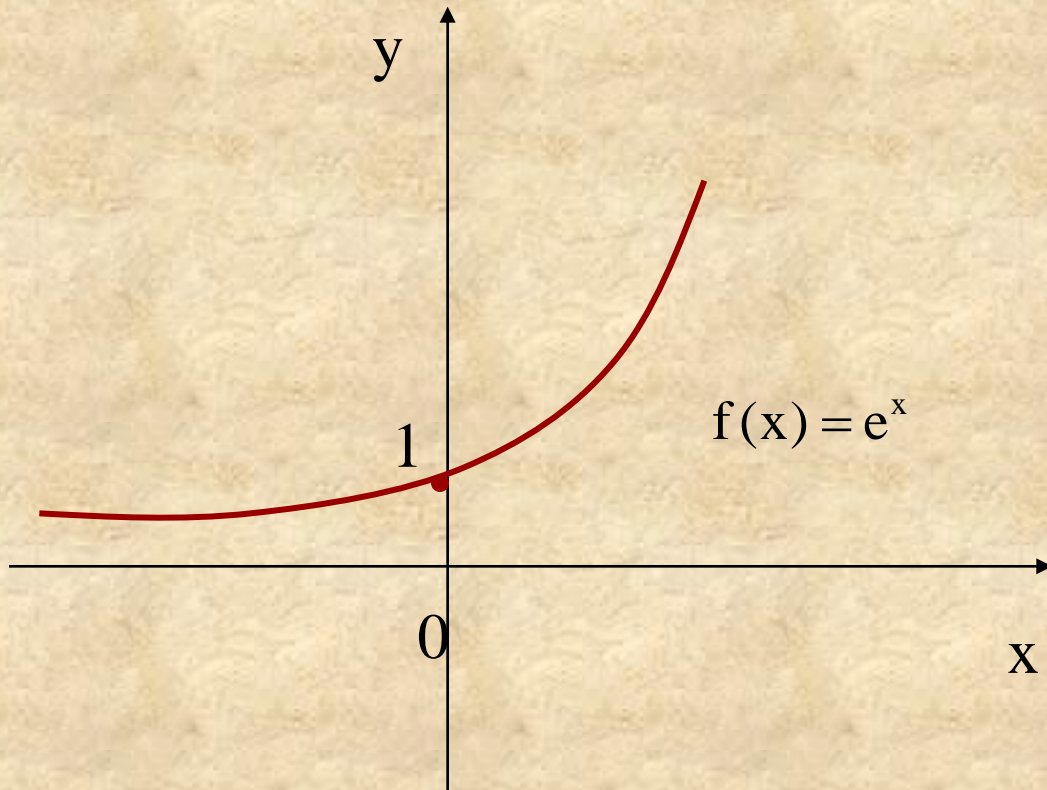
۴-۵-۱۹ حد تابع نمایی:

با توجه با نمودار تابع نمایی $f(x) = e^x$ حدهای زیر را داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \quad (\text{پ})$$



۶-۲ پیوستگی تابع

۱-۲-۲ مقدمه:

در این بخش به معرفی مفهوم **پیوستگی تابع** ، که شرط قویتری از حد

داشتن تابع است ، می پردازیم.

۲-۶-۴ تعریف :

تابع f را در $x=a$ **پیوسته** می نامیم در صورتی که سه شرط زیر برقرار باشد:

(الف) f در a تعریف شده باشد، یعنی $f(a)$ وجود داشته باشد .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(ب) f در a حد داشته باشد، یعنی وجود داشته باشد .

(پ) حد تابع f در $x=a$ برابر مقدار تابع در این نقطه باشد، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

هرگاه یکی از شرایط بالا در $x=a$ برقرار نباشند، f را در a

ناپیوسته می نامیم. اگر f در a پیوسته نباشد، f را **یک نقطه**

ناپیوستگی f می نامیم.

۴-۶-۴ مثال :

پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x \geq 1 \\ 4x-2 & x < 1 \end{cases}$ در $x=1$ بررسی کنید.

حل:

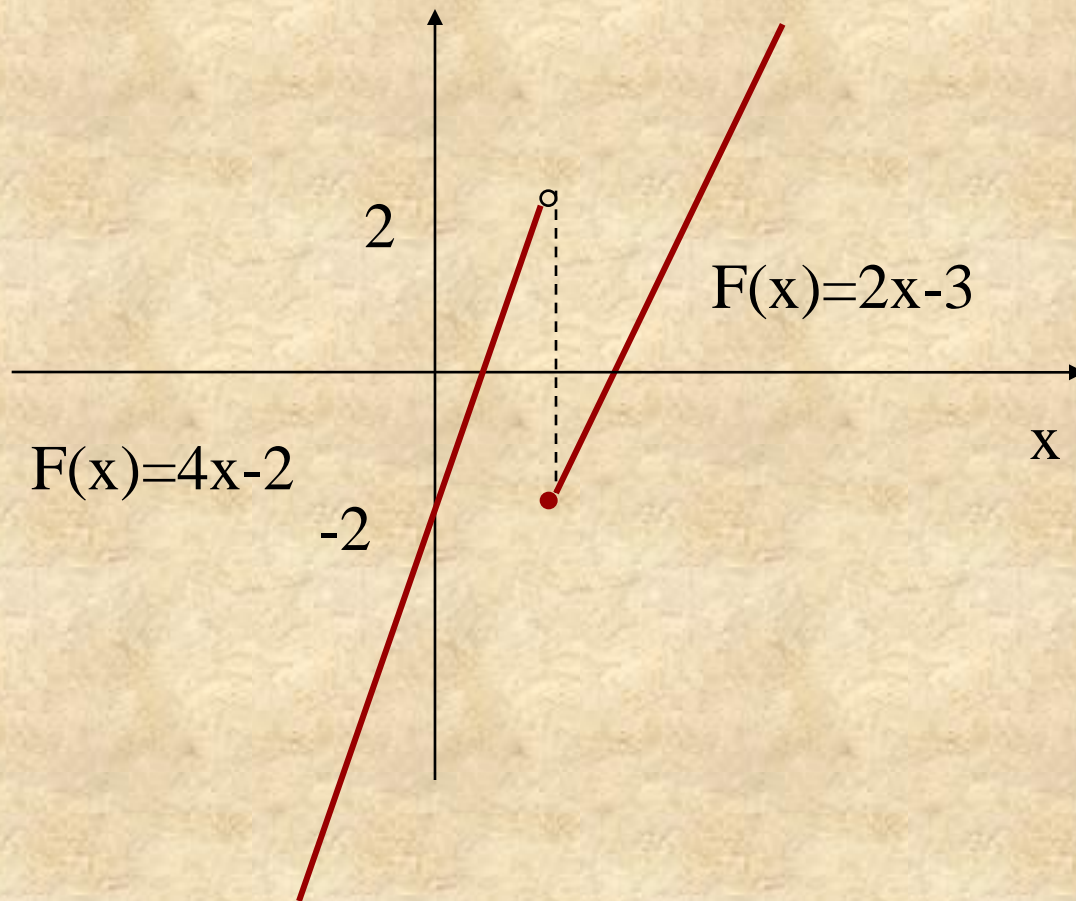
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x - 2) = 2$$

چون حد چپ و حد راست تابع در $x=1$ برابر نیستند، حد تابع f در $x=1$

وجود ندارد. بنابراین شرط (ب) تعریف پیوستگی برقرار نیست. در نتیجه

F در $x=1$ ناپیوسته است. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.



۴-۶-۵ مثال :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 3x + 1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{پیوستگی تابع}$$

بررسی کنید.

حل:

چون $f(0)=2$ پس شرط (الف) تعریف ۴-۶-۲ برقرار است ، از طرفی داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

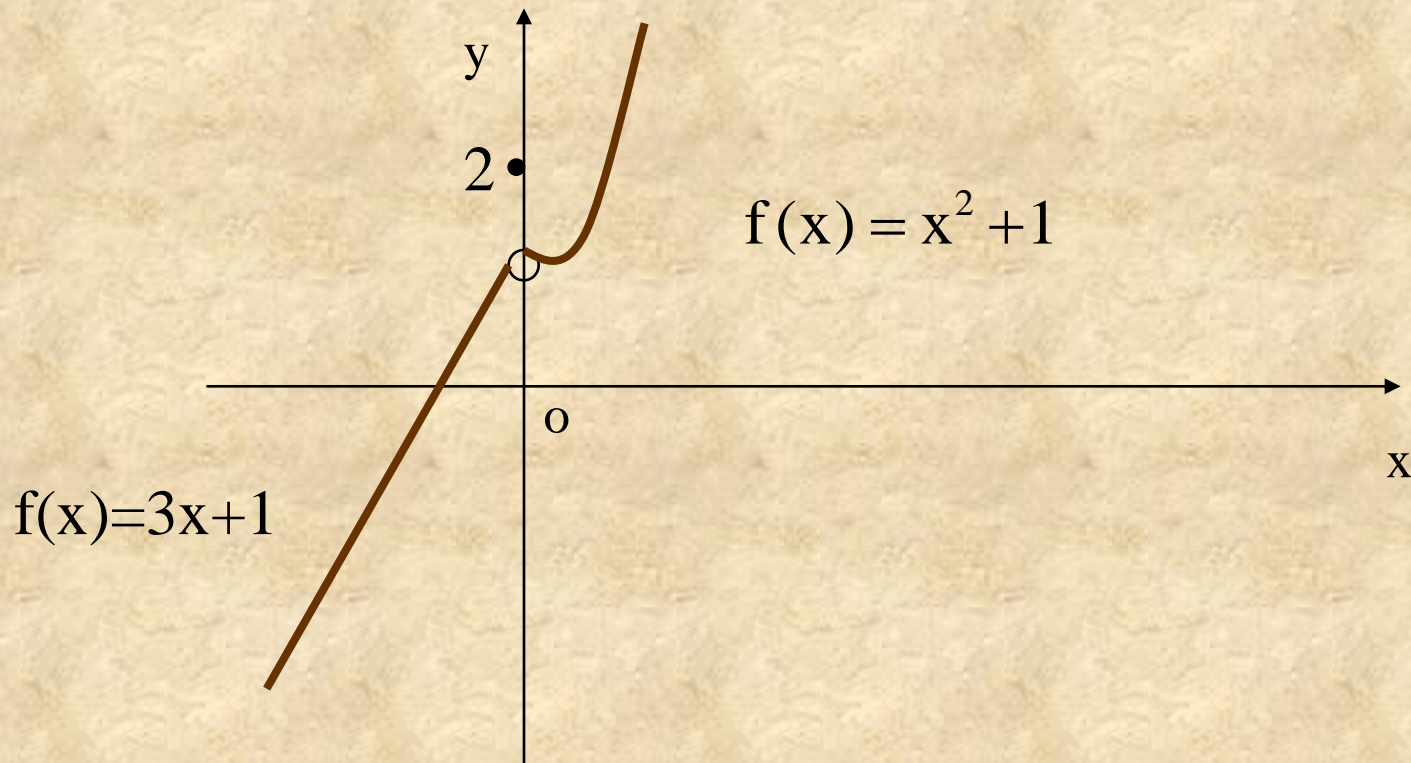
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 1) = 1$$

پس $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ یعنی شرط (ب) ۴-۶-۲ نیز برقرار است، اما

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

پس شرط (پ) تعریف پیوستگی برقرار نیست. در نتیجه f در $x=0$

ناپیوسته است. نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است.



۴-۶-۸ تعریف :

(الف) می گوییم تابع f در a پیوستگی راست دارد، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

(ب) می گوییم تابع f در a پیوستگی چپ دارد، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

۴-۶-۱۱ قضیه :

هرگاه توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند ، آنگاه :

(الف) تابع $f(x) \pm g(x)$ در $x=a$ پیوسته است .

(ب) تابع $kf(x)$ در $x=a$ پیوسته است . (k عددی ثابت است .)

(پ) تابع $f(x)g(x)$ در $x=a$ پیوسته است .

(ت) تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$ پیوسته است . ($g(a) \neq 0$)

(ث) تابع $|f(x)|$ در $x=a$ پیوسته است .

۱۲-۶-۴ نکته:

در نتیجه ۷-۲-۴ (الف) دیدیم که هر تابع چند جمله ای در هر نقطه

حقیقی حد دارد و این حد برابر با مقدار چند جمله ای در آن نقطه

است. بنابراین هر تابع چند جمله ای

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

در هر نقطه حقیقی پیوسته است.

همچنین بنابر نتیجه ۷-۲-۴ (ب)، هر تابع گویای $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

در همه دامنه اش پیوسته است، زیرا به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ که $q(a) \neq 0$ داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$$

۴-۶-۱۳ مثال :

نشان بدهید که تابع $f(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 9}$ همه نقاط دامنه اش

پیوسته است .

حل:

دامنه f مجموعه تمام اعداد حقیقی که به ازای آنها مخرج صفر نمی شود

چون به ازای $x = \pm 3$ مخرج کسر صفر می شود، دامنه f عبارت است از:

$$D_f = \{x \mid x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

فرض می کنیم $a \in D_f$ داریم :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{5x - 3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 9} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (5x^3 - 3x^2 + 4x + 1)}{\lim_{x \rightarrow a} (x^2 - 9)} \\ &= \frac{5a^3 - 3a^2 + 4a + 1}{a^2 - 9} \\ &= f(a)\end{aligned}$$

در نتیجه f در هر نقطه از دامنه اش پیوسته است .

۴-۶-۴ قضیه :

اگر تابع f در $x=b$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ آنگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

به بیان دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

۴-۶-۲۰ تعریف :

تابع f را بر بازه باز (a, b) پیوسته می نامیم هر گاه f در هر نقطه

از این بازه پیوسته باشد. در صورتی که f دست کم در یک نقطه از

بازه (a, b) پیوسته نباشد ، f را در بازه (a, b) ناپیوسته می نامیم .

۴-۶-۲۱ مثال:

تابع $f(x) = \frac{5x^3 - 1}{(x-1)(x+3)}$ در نظر می گیریم. این تابع در هر نقطه

حقیقی به استثنای ۱ و ۳- پیوسته است و در نتیجه ، بنابر تعریف

۴-۶-۲۰ ، در هر بازه بازی که شامل ۱ و ۳- نباشد ، پیوسته خواهد بود.

۲۲-۶-۴ تعریف :

تابع f را در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته می نامیم هر گاه شرایط زیر برقرار باشند:

الف) f را در بازه باز (a, b) پیوسته باشد.

ب) f در a پیوستگی راست داشته باشد ، یعنی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

پ) f در b پیوستگی چپ داشته باشد ، یعنی $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

در صورتی که دست کم یکی از شرایط بالا برقرار نباشد، f را در

بازه بسته $[a, b]$ ناپیوسته می نامیم.

۴-۶-۲۳ مثال :

پیوستگی تابع f با ضابطه تعریف زیر را در بازه بسته $[-2, 2]$ بررسی کنید .

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & -2 \leq x < 1 \\ x+4 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

حل:

$$\text{چون } f(1) = 1 + 4 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 4) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 2) = 5$$

پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 = f(1)$ در $x=1$ ، یعنی f در $x=1$ پیوسته است .

بنابراین f در بازه $(-2, 2)$ پیوسته است. از طرفی داریم :

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (3x + 2) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 4) = 6$$

در نتیجه بنابر ۲۲-۶-۴، f در بازه $[-2, 2]$ پیوسته است.

فصل پنجم

مشتق

هدفهای کلی :

هدف کلی فصل این است که با مفهوم بنیادی مشتق تابع ، قضیه های مشتق گیری ، مشتق توابع جبری و غیر جبری ، مشتق گیری از توابع ضمنی ، و با مفهوم دیفرانسیل آشنا شوید.

هدفهای رفتاری

از شما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

- (۱) مفهوم مشتق را توضیح بدهید.

- (۲) قضیه های مشتق را بیان کنید و آنها را در حل مسائل به کار ببرید.

- (۳) مشتق های چپ و راست تابع را در یک نقطه تعریف کنید. و برای توابع داده شده ، وجود مشتق های یک طرفه را که در نقاط خواسته شده تحقیق کنید.

۴) رابطه بین مشتقهای یک طرفه و مشتق تابع در یک نقطه را بیان کنید و آن را در حل مسائل به کار ببرید.

۵) قاعده زنجیری در مشتق گیری را توضیح بدهید و مشتق توابع مرکب را به کمک این قاعده محاسبه کنید .

۶) روش مشتق گیری از توابع ضمنی را بیان کنید و مشتق توابعی را که به صورت غیر صریح بیان شده اند محاسبه کنید .

۷) مشتق توابع مثلثاتی و توابع وارون مثلثاتی داده شده را به دست آورید

۸) رابطه بین مشتق تابع و مشتق وارون تابع را بیان کنید و به کمک این رابطه ، مشتق تابع داده شده را با استفاده از مشتق وارن آن ، و بر عکس ، تعیین کنید .

۹) مشتق توابع نمایی و لگاریتمی داده شده را محاسبه کنید .

۱۰) روش مشتق گیری لگاریتمی را توضیح بدهید و مشتق توابع داده شده را با استفاده از این روش محاسبه کنید.

۱۱) روش محاسبه مشتق توابعی به صورت $(x^v)^{v(x)}$ را توضیح بدهید و از آن در حل مسائل استفاده کنید .

۱۲) مفهوم دیفرانسیل تابع و دیفرانسیل متغیر را توضیح بدهید و برای تابع داده شده ، مقدار دیفرانسیل تابع را محاسبه کنید .

۱۳) روش محاسبه مشتق های مرتبه های بالاتر از یک را بیان کنید و در حل مسائل به کار ببرید.

۱۴) با استفاده از مفهوم دیفرانسیل ، مقدار تقریبی اعداد رادیکالی را محاسبه کنید.

۱۵) با استفاده از مفهوم دیفرانسیل ، خطای مطلق ، خطای نسبی و درصد خطای محاسبه را تعیین کنید.

۱۶) دیفرانسیل کل تابع n متغیره را تعریف کنید و آن را برای توابع داده شده ، محاسبه کنید .

۱۷) روش محاسبه مشتق توابعی را به صورت پارامتری بیان می شوند توضیح بدهید و آن را در محاسبه مشتق توابع داده شده بکار ببرید.

مقدمه

در فصل چهارم با مفهوم حد آشنا شدیم. در این فصل با استفاده از این مفهوم اساسی، به معرفی مفهوم مهم مشتق می پردازیم. مشتق یک ابزار ریاضی برای اندازه گیری تغییرات متغیرها نسبت به هم است. با مطالعه مشتق می توانیم آهنگ تغییراتی را که در مسائل مختلف پیش می آید تعیین کنیم. علاوه بر این، به کمک مشتق می توانیم ماکسیمم و مینیمم توابع را نیز بررسی کنیم.

۱-۵ مفهوم مشتق

۵-۱-۱ مثال:

وزن کودک با گذشت زمان تغییر می کند ، پس می توانیم آن را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیریم . اگر این تابع را $w(t)$ بنامیم ، آنگاه تغییر وزن کودک در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ برابر است با

$$w(t_2) - w(t_1)$$

آهنگ متوسط تغییر وزن کودک در این بازه زمانی ، از تقسیم تغییر وزن او بر طول این بازه به دست می آید . بنا براین

$$\frac{w(t_2) - w(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ آهنگ متوسط تغییر } w(t) \text{ در بازه زمانی}$$

۵-۱-۲ تعریف :

فرض کنیم تابع f در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد. برای هر دو عدد x_0 و x_1 در

بازه (a,b) که $a < x_0 < x_1 < b$ تغییر مقدار $f(x)$ هنگامی که x از x_0 تا x_1 تغییر

کند برابر $f(x_1) - f(x_0)$ است و آهنگ تغییر f در بازه $[x_0, x_1]$ برابر $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

۵-۱-۳ مثال :

فرض کنید $f(r)$ مساحت دایره ای به شعاع r باشد، پس

$$f(r) = \pi r^2$$

آهنگ متوسط تغییر مساحت این دایره، هنگامی که شعاع آن از r_1 به r_2 تغییر کند برابر است با

$$\frac{f(r_2) - f(r_1)}{r_2 - r_1} = \frac{\pi r_2^2 - \pi r_1^2}{r_2 - r_1} \\ = \pi(r_2 + r_1)$$

بنابراین ، اگر شعاع دایره از $r_1 = 2$ به $r_2 = 4$ تغییر کند ، آهنگ متوسط تغییر مساحت آن برابر است با

$$\pi(4 + 2) = 6\pi$$

اکنون با استفاده از آهنگ متوسط تغییر یک تابع به تعریف مشتق تابع در یک نقطه می پردازیم .

۵-۱-۴ تعریف :

تابع $y=f(x)$ و نقطه a در دامنه f را در نظر می گیریم . اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

وجود داشته باشد ، آن را **مشتق تابع f در نقطه a** می نامیم و با $f'(x)$ نشان می دهیم .

اگر تابع f در نقطه a مشتق داشته باشد ، f را در $x=a$ **مشتق پذیر** می گوئیم .

اگر تابع f در همه نقاط دامنه اش مشتق داشته باشد ، f را **مشتق پذیر** می نامیم .

۵-۱-۵ مثال :

مشتق تابع $f(x) = 3x^2 - 4x$ در نقطه $x=2$ با استفاده از تعریف به دست آورید .

حل:

داریم :

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x^2 - 4x) - (12 - 8)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x + 2)(x - 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$$

۵-۱-۷ نکته :

در تعریف ۵-۱-۴ دیدیم که مشتق تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (۱)$$

اگر قرار بدهیم $h=x-a$ ، به دست آوریم $x=a+h$ ، پس $f(x)=f(a+h)$. از طرفی

$x \rightarrow a$ اگر و تنها اگر $h \rightarrow 0$ در نتیجه (۱) را می توان به صورت

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (۲)$$

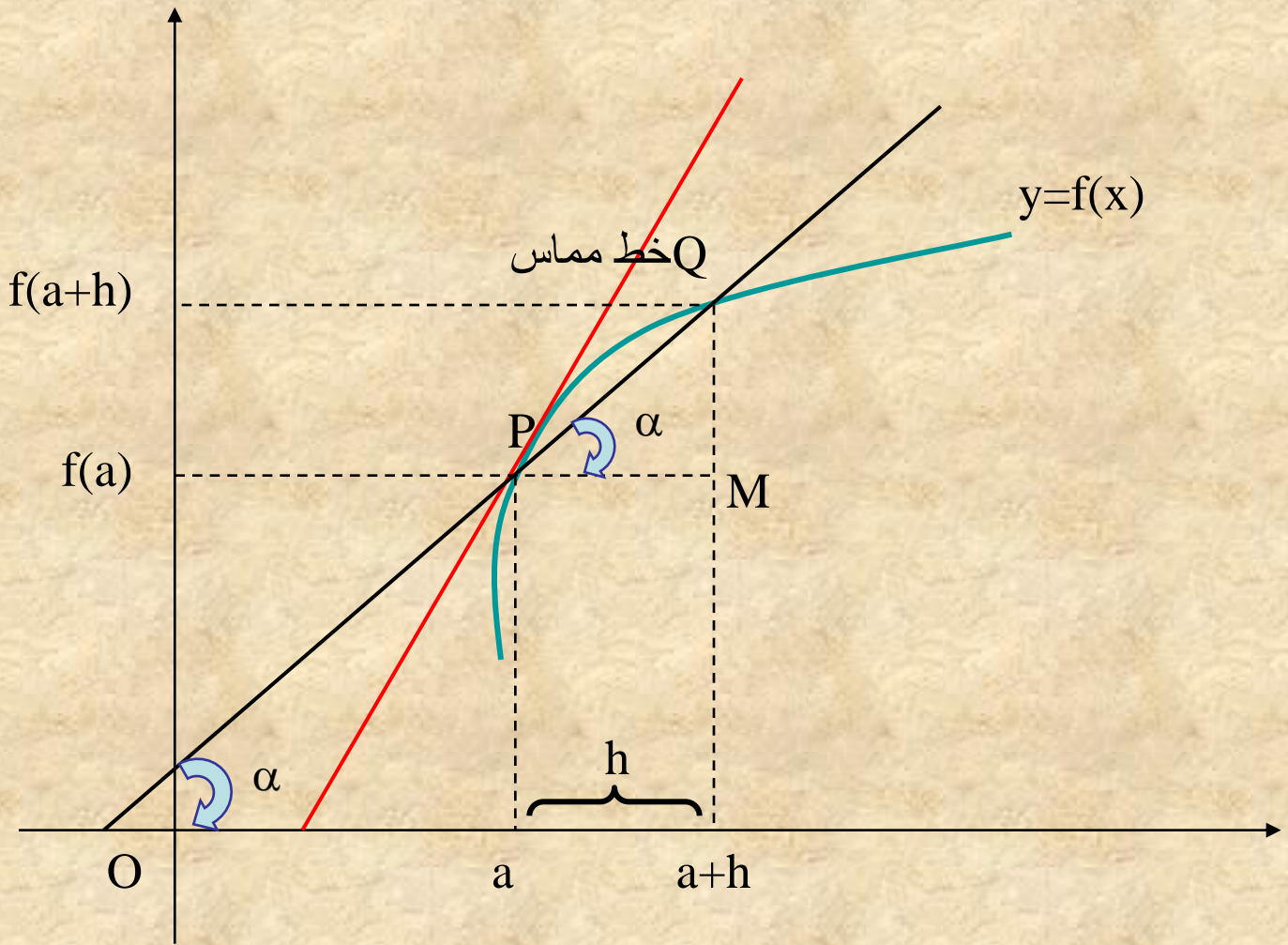
نوشت . بنابراین ، مشتق تابع f در نقطه a را می توان از رابطه (۲) نیز به دست آورد .

۵-۱-۸ تعبیر هندسی مشتق :

مفهوم مشتق یک تابع در یک نقطه را می توان به شیب خط مماس در آن نقطه

تعبیر کرد . برای روشن شدن مطلب ، تابع $y=f(x)$ و دو نقطه $P(a, f(a))$ و

$Q(a+h, f(a+h))$ را روی نمودار f در نظر می گیریم . به شکل زیر توجه کنید.



۵-۱-۹ نتیجه :

(۱) شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه $x=a$ که آن را با $m(a)$ نشان می دهیم

برابر است با مشتق تابع f در نقطه $x=a$ ، به عبارت دیگر

$$m(a) = f'(a)$$

(۲) خط عمود بر نمودار f در نقطه $x=a$ خطی است که بر خط مماس بر نمودار

در این نقطه عمود است . پس اگر $m'(a)$ شیب خط عمود بر نمودار در این نقطه

باشد ، داریم

$$m'(a) = -\frac{1}{m(a)}$$

۱-۱-۵-۱ تعریف:

بنابر ۱-۱-۵-۷ ، مشتق تابع f در نقطه x برابر است با

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

در این رابطه ، h را ، که ممکن است مثبت یا منفی باشد ، نمو متغیر می نامیم

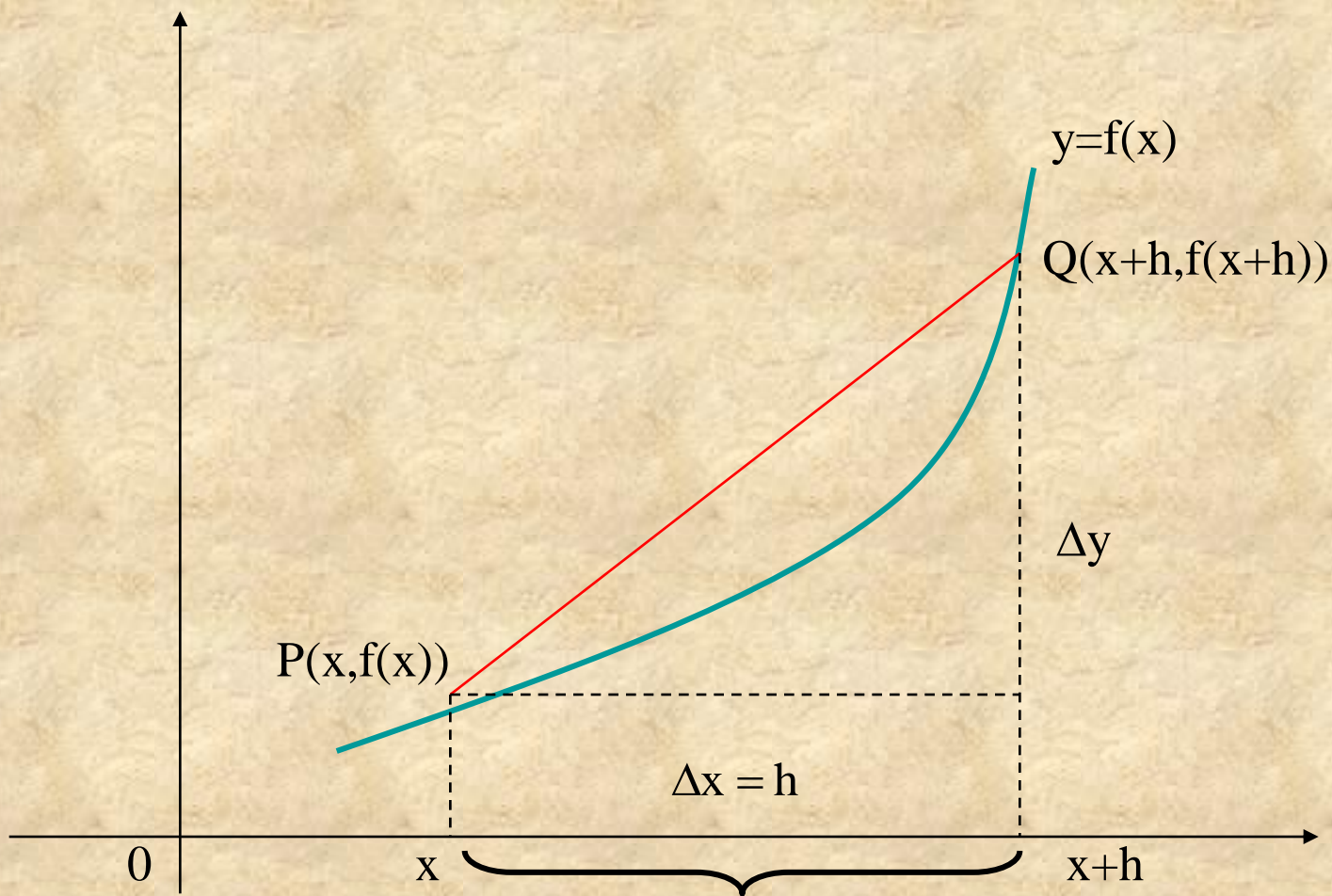
و آن را با نماد Δx نشان می دهیم. تفاضل $f(x+h) - f(x)$ را نمو تابع f به ازای h

می نامیم و با Δy یا Δf نشان می دهیم . بنابر این می نویسیم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

۱-۱-۵-۲ نماد گذاری :

مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه x را با نمادهای دیگری نیز نشان می دهند ، مانند



$$y' , \frac{dy}{dx} , \frac{df}{dx} , D_x^y$$

* توجه کنید که نمادهای $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{df}{dx}$ کسر نیستند. این نمادها و نماد $\frac{dy}{dx}$ به معنای مشتق

تابع $y=f(x)$ نسبت به متغیر x اند.

۵-۱-۳ تعریف:

فرض می کنیم معادله حرکت جسم P در روی محور OS ، به صورت $S=S(t)$ بیان شده است.



سرعت متحرک p لحظه $t=a$ برابر است با

$$V(a) = S'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

۵-۱-۱۴ مثال :

فرض کنید $S(t) = t^3 + 2t^2$ معادله حرکت جسمی روی خط مستقیمی باشد. سرعت

این متحرک را در لحظه $t=1$ به دست آورید .

$$\begin{aligned} V(1) = S'(1) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^3 + 2t^2) - 3}{t - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^2 + 3t + 3)(t - 1)}{t - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} (t^2 + 3t + 3) \\ &= 7 \end{aligned}$$

قضیه زیر رابطه مشتق پذیری تابع و پیوستگی آن را در یک نقطه بیان می کند .

۵-۱-۱۵ قضیه :

اگر تابع f در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشد ، آنگاه در این نقطه پیوسته است .

۵-۱-۱۷ نکته :

توجه کنید که عکس قضیه ۵-۱-۱۵ درست نیست . یعنی ممکن است تابعی

در نقطه ای پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد . برای مثال

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید . $f(x) = 0 = f(0)$ نتیجه می شود که تابع f در $x=0$

پیوسته است ، اما این تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست ، زیرا داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$= \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

اکنون به تعریف مشتقهای یک طرفه یعنی ، مشتقهای چپ و راست تابع در یک

نقطه ، می پردازیم .

۵-۱-۱۸ تعریف :

فرض می کنیم $y=f(x)$ و a متعلق به دامنه تابع f باشد . **مشتقهای راست و چپ**

تابع f در $x=a$ را به ترتیب با نمادهای $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشروط بر اینکه این حدها وجود داشته باشند . **مشتقهای چپ و راست را**

مشتقهای یک طرفه می نامیم .

۵-۱-۱۹ قضیه :

$f'(a)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و مساوی باشند .

۵-۱-۲۰ مثال :

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 1 \\ 2x^2 + 2 & x < 1 \end{cases}$$

نشان بدهید که تابع
این نقطه مشتق پذیر نیست .

حل :
داریم

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + 2) = 4$$

از $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 = f(1)$ نتیجه می شود که f در $x = 1$ پیوسته است. اکنون

مشتقهای راست و چپ f در $x = 1$ را محاسبه می کنیم .

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h) + 1 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{3} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+h)^2 + 2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h^2 + 4h}{1} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (2h + 4) = 4$$

مشتق‌های راست و چپ f در $x=1$ برابر نیستند ، پس بنابر قضیه ۵-۱-۹ تابع f

در $x=1$ مشتق پذیر نیست .

۵-۱-۲۲ تعریف :

تابع f را در بازه بسته $[a,b]$ مشتق پذیر می نامیم اگر
(۱) f در بازه باز (a,b) مشتق پذیر باشد .

(۲) مشتقهای یک طرفه $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ داشته باشند .

۲-۵ قضیه های مشتق

۱-۲-۵ قضیه :

مشتق تابع ثابت $f(x) = c$ که در آن c عدد حقیقی ثابتی است ، برابر صفر است ، یعنی

$$f'(x) = 0$$

۲-۲-۵ قضیه :

تابع خطی $f(x) = ax + b$ در هر عدد حقیقی مشتق پذیر است و داریم

$$f'(x) = a$$

۴-۲-۵ قضیه :

تابع $f(x) = x^r$ که در آن r عددی حقیقی است ، روی دامنه تابع f مشتق پذیر است و داریم

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

۵-۲-۵ مثال:

فرض کنید $f(x) = \sqrt{x}$ ، $f'(x)$ به دست آورید .

حل :

چون $f(x) = \sqrt{x}$ ، قضیه ۴-۲-۵ را به ازای $\frac{1}{2}$ به کار می‌بریم برای هر $x > 0$ داریم

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۵-۲-۷ قضیه :

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ مشتق پذیر باشند آنگاه

الف) مجموع $f(x)+g(x)$ مشتق پذیر است و داریم

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

ب) تفاضل $f(x)-g(x)$ مشتق پذیر است و داریم

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

پ) برای هر عدد حقیقی k ، تابع $kf(x)$ مشتق پذیر است و داریم

$$[kf(x)]' = kf'(x)$$

ت) حاصل ضرب $f(x)g(x)$ مشتق پذیر است و داریم

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ث) خارج قسمت $\frac{f(x)}{g(x)}$ (مشتق پذیر است و $g(x) \neq 0$ داریم)

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ج) برای هر عدد طبیعی n ، تابع $f^n(x)$ مشتق پذیر است و داریم

$$[f^n(x)]' = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

۵-۲-۸ قضیه تابع چند جمله ای

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

در تمام اعداد حقیقی مشتق پذیر است و داریم

$$p'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

۵-۲-۱۱ قضیه (قاعده زنجیری):

اگر توابع $y=f(u)$ و $u=g(x)$ مشتق پذیر باشند ، آنگاه تابع مرکب

$$y=(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(u)$$

مشتق پذیر است و داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (f \circ g)(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

در رابطه بالا ، $\frac{df}{du}$ به معنای مشتق تابع f نسبت به متغیر u و $\frac{du}{dx}$ به معنای

مشتق u نسبت به x است. این رابطه را می توان به صورت زیر نوشت

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u$$

۵-۲-۱۲ مثال :

فرض کنید $f(u) = 2u^4 - 3u^2 + 7$ و مشتق تابع f را نسبت به x به

دست آورید .

حل :

بنابر قاعده زنجیری داریم

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

از طرفی

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{du} (2u^4 - 3u^2 + 7) = 8u^3 - 6u$$

$$= 8(2x^3 - x + 5)^3 - 6(2x^3 - x + 5)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (2x^3 - x + 5) = 6x^2 - 1$$

در نتیجه به دست می آوریم

$$\frac{df}{dx} = [8(2x^3 - x + 5)^3 - 6(2x^3 - x + 5)](6x^2 - 1)$$

۵-۲-۱۳ مثال :

$$f(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}\right)^5$$

با استفاده از قاعده زنجیری مشتق تابع

با استفاده از قاعده زنجیری مشتق تابع

حل :

قرار می دهیم $u = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ بنابر قاعده زنجیری داریم

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{df(u^5)}{du} = 5u^4 = 5\left(\frac{x^2+1}{x^3+1}\right)^4$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x(x^3+1) - 3x^2(x^2+1)}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3+1)^2}$$

در نتیجه به دست می آوریم

$$\frac{df(x)}{dx} = 5\left(\frac{x^2+1}{x^3+1}\right)^4 \left(\frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3+1)^2}\right)$$

$$= \frac{5(x^2+1)^4(-x^4 - 3x^2 + 2x)}{(x^3+1)^6}$$

۵-۲-۱۵ نتیجه :

بنابر قضیه ۴-۲-۵ وقاعده زنجیری و با فرض $u=f(x)$ و u^r برای هر عدد گویای r خواهیم داشت

$$[f^r(x)]' = rf^{r-1}(x) \cdot f'(x)$$

۵-۲-۱۷ مشتق گیری ضمنی :

اگر $y = 4x^3 - 3x^2 + 5$ ، آنگاه معادله $f = \{(x, y) | y = 4x^3 - 3x^2 + 5\}$ تابع f را
به طور **صریح** تعریف می کند . ولی همه توابع به طور صریح به صورت $y=f(x)$ بیان نمی شوند . مثلاً معادله

$$F(x, y) = x^7 - 3x^4y^6 + 5y^3x - 4e^{2x}y = 0 \quad (۱)$$

را نمی توان بر حسب y یا بر حسب x حل کرد .

$$F(x,y)=0 \quad (۲)$$

به طور **ضمنی** تعریف شده است اگر بخواهیم مشتق y نسبت به x را بیابیم ، از دستور

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$$

استفاده می کنیم که در آن مشتق تابع F نسبت به x با فرض ثابت بودن y ، F_y مشتق تابع F نسبت به y با فرض ثابت بودن x است ؛ این روش محاسبه مشتق را مشتق گیری **ضمنی** می نامیم . به مثال زیر توجه کنید

۵-۲-۱۸ مثال :

تابع $y=f(x)$ به طور ضمنی توسط معادله $F(x,y) = 2x^3 + xy^2 + y^4 - 3 = 0$ بیان

شده است، $f'(x)$ را محاسبه کنید .

حل :

F_x مشتق F نسبت به x با فرض ثابت بودن y برابر است با

$$F_x = 6x^2 + y^2 + 0 + 0 = 6x^2 + y^2$$

F_y ، مشتق F نسبت به y با فرض ثابت بودن x برابر است با

$$F_y = 0 + 2xy + 4y^3 + 0 = 2xy + 4y^3$$

بنابراین ، طبق ۱۷-۲-۵ داریم

$$f'(x) = -\frac{6x^2 + y^2}{2xy + 4y^3}$$

مشتق این تابع را می توان به روش دیگری نیز محاسبه کرد . در این روش از دو

طرف تساوی

$$2x^3 + xy^2 + y^4 - 3 = 0$$

نسبت به x مشتق می گیریم ، و البته باید توجه کنیم که مشتق y نسبت به x برابر y' است . نتیجه می شود

$$6x^2 + y^2 + 2xyy' + 4y^3y' = 0$$

معادله اخیر را نسبت به حل می کنیم . به دست می آوریم

$$y' = -\frac{6x^2 + y^2}{2xy + 4y^3}$$

مشاهده می کنیم که نتیجه حاصل از دو روش یکسان است .

۳-۵ مشتق توابع مثلثاتی

۵-۳-۱ مشتق تابع سینوس :

فرض می کنیم $f(x)=\sin x$ ، در این صورت مشتق تابع $\sin x$ برابر $\cos x$ است، یعنی

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

۵-۳-۲ تعمیم :

فرض می کنیم $u=g(x)$ تابع مشتق پذیری از x باشد و $f(u)=\sin u$. با استفاده از قاعده زنجیری و ۵-۳-۱ به دست می آوریم

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\sin u)}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

۵-۳-۳ مثال :

فرض کنید $f(x) = \sin(5x^3 + 2x - 1)$ مشتق f را نسبت به x محاسبه کنید .

حل:

قرار می دهیم $u = 5x^3 + 2x - 1$ بنابر ۵-۳-۲ داریم

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot \frac{d}{dx} (5x^3 + 2x - 1)$$

$$= \cos(5x^3 + 2x - 1) \cdot (15x^2 + 2)$$

۵-۳-۴ مشتق تابع کسینوس :

فرض می کنیم $(x) = \cos x$.

در این صورت

$$\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$$

۵-۳-۵ تعمیم :

اگر $u = g(x)$ تابع مشتق پذیری از x و $f(u) = \cos u$ باشد با استفاده از قاعده زنجیری

و ۵-۳-۴ نتیجه می گیریم

$$\frac{d}{dx} (\cos u) = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

۵-۳-۶ مشتق تابع تانژانت:

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، می توان مشتق تابع تانژانت را به دست آورد .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

در نتیجه داریم

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

۵-۳-۷ تعمیم:

اگر $u=g(x)$ تابع مشتق پذیری از x و $f(u)=\tan u$ باشد، آنگاه با استفاده از ۵-۳-۶ و قاعده زنجیری به دست می آوریم

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = (1 + \tan^2 u) \frac{du}{dx}$$

$$= \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

۵-۵ مشتق توابع لگاریتمی و نمایی

۵-۵-۱ قضیه :

الف) مشتق تابع $f(x)=\ln x$ که $x>0$ ، برابر است با

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

ب) اگر $u(x)>0$ تابع مشتق پذیری از x باشد آنگاه

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

۲-۵-۵ مشتق تابع نمایی

$$\text{هرگاه } y = e^x \text{ آنگاه } y' = e^x$$

* به عبارت دیگر مشتق تابع e^x برابر با خودش است.

۴-۵-۵ نتیجه :

اگر $u(x)$ تابع مشتق پذیری از x باشد، آنگاه بنا بر ۲-۵-۵ و قاعده زنجیری داریم

$$\frac{d}{dx} e^{u(x)} \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

۵-۵-۵ مثال :

الف) اگر $y = \ln(3x^2 + 4x)$ ، آنگاه بنابر ۵-۵-۱ (ب) داریم

$$y' = \frac{1}{3x^2 + 4x} (6x + 4)$$

ب) اگر $y = \ln(1 + \sin^2 x)$ آنگاه

$$y' = \frac{1}{1 + \sin^2 x} (2 \sin x \cdot \cos x)$$

$$= \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$$

پ) اگر $y = e^{3 + \tan x}$ ، آنگاه

$$y' = e^{3 + \tan x} \frac{d}{dx} (3 + \tan x)$$

$$= e^{3 + \tan x} (1 + \tan^2 x)$$

۵-۵-۷ مشتق: تابع a^x

فرض می کنیم $y = a^x$ که $a > 0$, $a \neq 1$ برای محاسبه مشتق از روش مشتق گیری

لگاریتمی استفاده می کنیم . به این منظور از دو طرف $a^x = \ln a$ لگاریتم طبیعی

می گیریم :

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

سپس از دو طرف رابطه اخیر نسبت به x مشتق می گیریم . توجه کنید که $\ln a$

مقداری ثابت است . به دست می آوریم

$$\frac{y'}{y} = \ln a$$

یا

$$y' = y \ln a = a^x \cdot \ln a$$

در نتیجه داریم

$$\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a$$

۵-۵-۸ نتیجه :

از ۷-۵-۵ و قاعده زنجیری نتیجه می شود که اگر $u(x)$ تابع مشتق پذیری از x باشد،
آنگاه

$$\frac{d}{dx} a^{u(x)} = a^{u(x)} \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

۵-۵-۹ مثال :

الف) مشتق تابع $y = 2^{3x^2+5x}$ برابر ۵-۵-۸ برابر است با

$$y' = 2^{3x^2+5x} \cdot \ln 2 \frac{d}{dx} (3x^2 + 5x)$$

$$= 2^{3x^2+5x} \cdot \ln 2 (6x + 5)$$

(ب) مشتق تابع $y = 3^{\cos x + \sin x}$ برابر ۵-۵-۸ برابر است با

$$\begin{aligned} y' &= 3^{\cos x + \sin x} \ln 3 \frac{d}{dx} (\cos x + \sin x) \\ &= 3^{\cos x + \sin x} \ln 3 (-\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

۵-۵-۱۰ مشتق تابع $\log_a^{v(x)}$

در دستور ۵-۵-۸ اگر $u(x) = \log_a^{v(x)}$ اختیار شود که در آن تابع مشتق پذیری از x است، به دست می آوریم

$$\frac{d}{dx} a^{\log_a^{v(x)}} \cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx} (\log_a^{v(x)})$$

از طرفی با توجه به $a^{\log_a v(x)} = v(x)$ رابطه بالا به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{d}{dx} v(x) = v(x) \cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx} (\log_a^{v(x)})$$

که از آن به دست می آوریم

$$\frac{d}{dx} (\log_a^{v(x)}) = \frac{1}{v(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{dv(x)}{dx}$$

این رابطه را می توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم

$$\frac{d}{dx} (\log_a^{v(x)}) = \frac{v'(x)}{v(x)} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

۵-۵-۱۱ مثال :

الف) مشتق تابع $y = \log_2(x^3 + 5x^2 + 4)$ بنابر ۵-۵-۱۰ برابر است با

$$y' = \frac{(x^3 + 5x^2 + 4)'}{x^3 + 5x^2 + 4} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{3x^2 + 10x}{x^3 + 5x^2 + 4} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

ب) مشتق تابع $y = \log_3(2 + 3 \cos^2 x)$ بنابر ۵-۵-۱۰ برابر است با

$$y' = \frac{(2 + 3 \cos^2 x)'}{2 + 3 \cos^2 x} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{-6 \sin x \cdot \cos x}{2 + 3 \cos^2 x} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

۵-۵-۱۳ مثال :

مشتق $y = (4 + x^2)^{5x^3 + 2x}$ را محاسبه کنید .

حل :

از دو طرف معادله ، لگاریتم طبیعی می گیریم

$$\ln y = (5x^3 + 2x) \cdot \ln(4 + x^2)$$

از دو طرف رابطه اخیر نسبت به x مشتق می گیریم

$$\frac{y'}{y} = (15x^2 + 2) \ln(4 + x^2) + \frac{2x}{4 + x^2} (5x^3 + 2x)$$

در نتیجه ، مشتق تابع عبارت است از

$$y' = (4 + x^2)^{5x^3 + 2x} \left[(15x^2 + 2) \ln(4 + x^2) + \frac{2x}{4 + x^2} (5x^3 + 2x) \right]$$

۵-۶ مشتق مرتبه های بالاتر

۵-۶-۱ تعریف :

فرض می کنیم تابع $y=f(x)$ در نقطه a مشتق پذیر باشد . **مشتق اول** $f'(a)$ وجود دارد این صورت تابعی روی A است و می توانیم در مورد مشتق در نقطه f' صحبت کنیم . مشتق a در نقطه a را **مشتق دوم f در نقطه a** می نامیم و با $f''(a)$ نشان می دهیم (به همین ترتیب مشتقهای مرتبه های بالاتر در نقطه a را در صورتی که وجود داشته باشند با $f^{(3)}(a)$ ، $f^{(4)}(a)$ ، ... و $f^{(n)}(a)$ نشان می دهیم و آنها را به ترتیب **مشتق های مرتبه سوم ، چهارم ، ... و n ام تابع در نقطه a** می گوئیم . بنابراین برای هر عدد طبیعی n ، اگر مشتق اول تابع وجود داشته باشد آن را مشتق n ام تابع f می نامیم و با نماد $f^{(n)}(a)$ نشان می دهیم .

۵-۶-۲ نماد گذاری :

الف) گاهی f' را با $f^{(1)}$ و f'' را با $f^{(2)}$ نشان می دهند .

ب) همان طور که f' را با نماد $\frac{df}{dx}$ نشان می دادیم ، f'' را که برابر $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$ است

با $\frac{d^2f}{dx^2}$ نشان می دهیم . به همین ترتیب $f^{(n)}$ را با نماد $\frac{d^n f}{dx^n}$ می توان نشان داد .

پ) همچنان که f' را با $D_x f$ نشان می دادیم ، $f^{(2)}$ ، $f^{(3)}$ ، ... و $f^{(n)}$ می توان به

ترتیب با نمادهای f'' ، $D_x^3 f$ ، ... و $D_x^n f$ نشان داد .

۵-۶-۳ مثال :

مشتق های اول تا سوم تابع $f(x) = e^{5x^2+3} + \sin(2x+1)$ را محاسبه کنید .

حل :

$$f'(x) = 10xe^{5x^2+3} + 2\cos(2x+1)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = 10e^{5x^2+3} + 10x(10x)e^{5x^2+3} - 2(2)\sin(2x+1) \\ &= 100e^{5x^2+3} + 100x^2e^{5x^2+3} - 4\sin(2x+1) \end{aligned}$$

$$f^{(3)}(x) = (f''(x))'$$

$$= 10(10x)e^{5x^2+3} + 100(2x)e^{5x^2+3} + 100x^2(10x)e^{5x^2+3} - 4(2)\cos(2x+1)$$

$$= 10xe^{5x^2+3}(3+10x^2) - 8\cos(2x+1)$$

۷-۵ دیفرانسیل

۷-۵-۱ مقدمه :

فرض می کنیم $y=f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد بنابر تعریف مشتق داریم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بنابر تعریف حد به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که

$$0 < |\Delta x - 0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

یا

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} \right| < \varepsilon$$

پس $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ را مقایسه با $|\Delta x|$ کوچک است. به عبارت دیگر اگر $|\Delta x|$ به اندازه کافی کوچک باشد، $f'(x)\Delta x$ تقریب مناسبی برای Δy است، یعنی می توانیم بنویسیم

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

یا

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

بنابراین

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

۲-۷-۵ تعریف :

هرگاه تابع $y=f(x)$ مشتق پذیر باشد ، دیفرانسیل y را با dy نشان می دهیم و با رابطه زیر تعریف می کنیم

$$dy = f'(x)\Delta x$$

۳-۷-۵ دیفرانسیل متغیر :

اگر $f(x)=x$ باشد ، آنگاه خواهیم داشت $f'(x)=1$ و رابطه ۲-۷-۵ به صورت ساده $dx = \Delta x$ می آید . یعنی اگر x متغیر مستقل باشد دیفرانسیل x با نمو x برابر خواهد بود . در نتیجه تعریف ۲-۷-۵ به صورت زیر بیان می شود :

$$dy = f'(x)dx$$

بنابراین ، دیفرانسیل هر تابع مشتق پذیر برابر با حاصل ضرب مشتق آن در دیفرانسیل متغیر مستقل است .

۵-۷-۴ مثال :

دیفرانسیل تابع $y = \ln(3x+4)$ برابر است با

$$dy = y'dx = \frac{3}{3x+4} dx$$

۵-۷-۵ مثال :

Δy و dy را برای تابع $f(x) = 3x^2 + 4x - 7$ در نقطه $x=0$ با فرض $\Delta x = dx = 0/1$ محاسبه کنید .

حل :

داریم

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= [3(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) - 7] - [3x^2 + 4x - 7]$$

$$= 3(\Delta x)^2 + 6x\Delta x + 4\Delta x$$

به ازای هر $x=0$ و $\Delta x=0$ به دست می آوریم

$$\Delta y = 3(0/1)^2 + 0 + 4(0/1) = 0/43$$

همچنین داریم

$$dy = f'(x)dx = (6x + 4)dx$$

به ازای $x=0$ و $dx=0/1$ به دست می آوریم

$$\Delta y = (6(0) + 4)(0/1) = 0/4$$

معمولاً برای محاسبات تقریبی از مفهوم دیفرانسیل استفاده می شود. به مثالهای زیر توجه کنید .

۵-۷-۶ مثال :

با استفاده از مفهوم دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt[4]{18}$ محاسبه کنید .

حل :

تابع $f(x) = \sqrt[4]{x}$ را در نظر می گیریم . بنابر ۵-۷-۱ داریم

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (۱)$$

از طرفی داریم

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

بنابراین ، رابطه (۱) به صورت زیر در می آید .

$$\sqrt[4]{x + \Delta x} \approx \sqrt[4]{x} + \frac{\Delta x}{4\sqrt[4]{x^3}} \quad (۲)$$

اکنون فرض می کنیم $x=16$ و $\Delta x=2$ از رابطه (۲) نتیجه می شود .

$$\sqrt[4]{18} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{2}{4\sqrt[4]{16^3}} = 2 + \frac{1}{4\sqrt[4]{2^{12}}}$$

$$\approx 2 + \frac{1}{16} = 2 + 0/0625$$

$$\approx 2/0625$$

۷-۷-۵ مثال :

با استفاده از مفهوم دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sin 46^\circ$ را حساب کنید .

حل :

فرض کنید $f(x) = \sin x$ ، بنابر ۵-۷-۱ داریم

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

پس $f'(x) = \cos x$ رابطه بالا به صورت زیر در می آید .

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$$

اکنون فرض می کنیم $x = 45^\circ$ و $\Delta x = 1^\circ$ یعنی $\frac{\Delta x}{\text{رادیان}} = \frac{\pi}{180} = \frac{3/14}{180}$.
به دست می آوریم

$$\sin(45 + 1)^\circ \approx \sin 45^\circ + \cos 45^\circ \times \frac{3/14}{180}$$

$$\approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3/14}{180}$$

$$\approx 0/7071 + 0/0123$$

$$\approx 0/7194$$

۵-۷-۱۰ مفهوم خطا :

در اندازه گیریها معمولاً مقدار اندازه گیری شده با مقدار واقعی متفاوت است. این

تفاوت را با Δx نشان داده می شود ، اعم ز اینکه مثبت باشد یا منفی ، **خطای مطلق**

اندازه گیری x می نامیم . با معیاری بانام **خطای نسبی** ، می توان دقت اندازه گیری

را بهتر سنجید . این خطا که بیشتر به صورت درصد بیان می شود ، **خطای درصد**

یا در **صد خطا** نامیده می شود. به تعریف زیر توجه کنید .

۵-۷-۱۱ تعریف :

اگر du مقدار خطایی باشد که در محاسبه u مرتکب شده ایم، مقدار $\frac{du}{u}$

خطای نسبی و $100\frac{du}{u}$ را خطای درصد یا درصد خطا می نامیم .

۵-۷-۱۲ مثال :

طول ضلع مربعی با حداکثر خطای 0/05 سانتی متر برابر ۱/۵ سانتی متر اندازه گیری شده است . خطای نسبی و خطای درصد در محاسبه مساحت این مربع را محاسبه کنید .

حل :

فرض می کنیم x طول ضلع مربع و s مساحت مربع باشد پس $ds=2xdx$ و $s=x^2$.

بنابر فرض مسئله داریم $dx=0/05$ و $x=5/1$. بنابراین ، خطای نسبی در محاسبه

مساحت این مربع برابر است با

$$\text{خطای نسبی} = \frac{ds}{s} = \frac{2xdx}{x^2} = \frac{2dx}{x} = \frac{2(0/05)}{5/1} = 0/0196$$

$$\text{خطای درصد} = 100 \frac{ds}{s} = 100(0/0196) = 1/96$$

اکنون با معرفی توابع چند متغیره به تعریف مشتقهای جزئی و دیفرانسیل کل تابع می پردازیم .

۵-۷-۱۶ تعریف :

تا کنون با توابعی سر و کار داشتیم که تنها به یک متغیر وابسته بودند ، این دسته توابع را توابع یک متغیره می نامیم . در صورتی که تابعی به بیش از یک متغیر بستگی داشته باشد، آن تابع چند متغیره می گوئیم .

برای مثال ، می دانیم که حجم یک مکعب مستطیل بستگی به طول ، عرض ،
و ارتفاع آن دارد . به عبارت دیگر V ، حجم مکعب مستطیل ، تابعی از طول x
عرض y و ارتفاع z آن است پس

$$V = f(x, y, z)$$

از طرفی حجم مکعب مستطیل برابر حاصل ضرب طول ، عرض ، و ارتفاع آن
است ، پس داریم

$$f(x, y, z) = xyz$$

بنابراین $f(x, y, z)$ ، تابع حجم مکعب مستطیل ، یک تابع سه متغیره است .

۵-۷-۱۷ مثال :

فرض کنید در زمان معینی تعداد تولیدات کارخانه ای با x واحد نیروی کار و y

واحد سرمایه ، برابر $F(x, y) = 70x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ باشد .

الف) با به کارگیری ۲۷ واحد نیروی کار و ۸ واحد سرمایه ، چند واحد محصول

تولید می شود؟

ب) نشان دهید که اگر مقادیر نیروی کار و سرمایه دو برابر شود ، تعداد تولیدات

کارخانه نیز دو برابر خواهد شد .

حل :

الف) تعداد تولیدات کارخانه به ازای ۲۷ واحد نیروی کار و ۸ واحد سرمایه برابر است با

$$f(27,8) = 70(27)^{\frac{2}{3}}(8)^{\frac{1}{3}} = 70(9)(2) = 1260$$

ب) مقدار تولید حاصل از به کارگیری a واحد نیروی کار و b واحد سرمایه برابر

$$f(a, b) = 70a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$$

مقدار تولید حاصل از به کارگیری $2a$ واحد نیروی کار و $2b$ واحد سرمایه برابر $f(2a, 2b)$ است و داریم

$$f(2a, 2b) = 70(2a)^{\frac{2}{3}}(2b)^{\frac{1}{3}} = 70(2)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}(2)^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$$

$$= 70(2)^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2f(a, b)$$

۵-۷-۱۸ مثال :

فروشنده یک نوع ماشین حسابگر الکترونیکی در می یابد که تحت شرایط خاصی، تعداد ماشینهای حسابگری که می تواند بفروشد از معادله

$$f(p,t)=-p+60t-0/02pt$$

به دست می آید که در آن p قیمت یک ماشین حسابگر و t مبلغی به تومان است که صرف تبلیغات می شود. اگر قیمت هر دستگاه ماشین حسابگر ۱۰۰۰ تومان و هزینه تبلیغات ۲۵۰ تومان باشد، فروشنده چند ماشین حسابگر می تواند بفروشد؟

حل :

تعداد ماشین حسابهایی که می تواند بفروشد برابر است با

$$f(1000 و 250)=-1000+60(250)-0/02(1000)(250)$$

۵-۷-۱۹ مشتقهای جزئی تابع دو متغیره :

فرض می کنیم $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره از متغیرهای x و y باشد، مشتق جزئی

تابع $f(x,y)$ نسبت به متغیر x با نماد f_x یا نشان $\frac{\partial f}{\partial x}$ می دهیم و برابر مشتق

$f(x,y)$ نسبت به x تعریف می کنیم. هنگامی که y ثابت و $f(x,y)$ تنها تابعی از x در نظر گرفته

شود. مشتق جزئی تابع $f(x,y)$ نسبت به y را با f_y نشان می دهیم که بنابر تعریف

برابر است با مشتق تابع $f(x,y)$ نسبت به y هنگامی که x ثابت و $f(x,y)$ تنها تابعی از y فرض شود .

۵-۷-۲۰ مثال :

فرض کنید $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 5y^3$ مشتقهای جزئی f را محاسبه کنید .

حل :

مشتق جزئی f نسبت به x برابر است با

$$f_x = 6x + 2y + 0 = 6x + 2y$$

مشتق جزئی f نسبت به y برابر است با

$$f_y = 0 + 2x + 15y^2 = 2x + 15y^2$$

۵-۷-۲۲ مثال :

مشتق های جزئی $f(x, y, z) = ye^x + ze^y + xe^z$ را محاسبه کنید .

حل :

مشتق جزئی f نسبت متغیر x برابر است با

$$f_y = e^x + ze^y + 0 = e^x + ze^y$$

مشتق جزئی f نسبت به متغیر z برابر است با

$$f_z = 0 + e^y + xe^z = e^y + xe^z$$

فصل ششم:

کاربردهای مشتق

هدف کلی:

هدف کلی فصل این است که با بعضی از کاربردهای مشتق از جمله تعیین

توابع صعودی یا نزولی، ماکسیموم و مینیموم نسبی و مطلق تابع، رسم نمودار تابع،

تقریب و محذب و نقطه عطف نمودار تابع، و روش رفع ابهام از صورت‌های مبهم

حدی آشنا شوید.

هدفهای رفتاری:

از شما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:
(۱) برای تابع داده شده، بازه هایی را که تابع در آنها صعودی یا نزولی است تعیین کنید.

(۲) نقاط بحرانی توابع داده شده را تعیین کنید.

(۳) ماکسیموم و مینیموم نسبی توابع داده شده را با استفاده از آزمون های مشتق اول و دوم به دست آورید.

(۴) ماکسیموم و مینیموم مطلق توابع داده شده را در بازه های مورد نظر تعیین کنید.

(۵) تقعر و تحدب و نقطه عطف احتمالی نمودار تابع داده شده را مشخص کنید.

(۶) مجانبهای افقی و قائم نمودار تابع داده شده در صورت وجود را تعیین کنید.

۷) مجانبهای مایل نمودار تابع داده شده را در صورت وجود تعیین کنید.

۸) محورهای تقارن و مرکز تقارن نمودار تابع داده شده را، در صورت وجود، تعیین کنید.

۹) نمودار توابع داده شده را رسم کنید.

۱۰) از صورتهای مبهم حدی داده شده رفع ابهام کنید.

۱۱) قضیه هوییتال را در حالت های مختلف توضیح بدهید و در مسائل مربوط به کار ببرید.

مقدمه:

در فصل پنجم با برخی از کاربردهای مشتق آشنا شدیم. در این فصل کاربردهای دیگری از مشتق را در تعیین بازه های صعودی و نزولی، نقاط ماکسیموم و مینیموم، تقعر و تحدب نمودار تابع، و در رفع ابهام از صورتهای مبهم بیان می کنیم.

۶-۱-۱ قضیه (آزمون یکنوایی):

فرض می کنیم تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق پذیر باشند.

(۱) اگر برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ ، آنگاه f صعودی است.

(۲) اگر برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، آنگاه f ، نزولی است.

۶-۱-۲ مثال:

تابع $f(x) = 3x^2 + 5$ را روی \mathbb{R} در نظر بگیرید. تعیین کنید f روی چه بازه هایی صعودی و روی چه بازه هایی نزولی است.

حل:

چون $f'(x) = 6x$ روشن است که برای هر $x > 0$ ، داریم $f'(x) > 0$ و برای

هر $x < 0$ داریم $f'(x) < 0$ پس f روی \mathbb{R}^+ صعودی و روی \mathbb{R}^- نزولی است. توجه

کنید که به ازای $x=0$ داریم $f'(x)=0$! مطالب بالا را می توانیم در جدول زیر

خلاصه کنیم:

| | | | |
|---------------------------|-----------|----------|-----------|
| \otimes | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | نزولی | | صعودی |

مثال:

نقاط بحرانی توابع

الف) $f(x) = 2x^3 - 4$ (ب) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ را تعیین کنید.

حل:

الف)

$$f'(x) = 6x^2 = 0 \implies 6x^2 = 0 \implies x = 0$$

ب) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \implies x = 0, x = -2$

۶-۱-۶ نتیجه:

باتوجه به قضیه ۶-۱-۱- و تعریف ۶-۱-۴ برای تعیین بازه هایی که تابع

روی آنها صعودی و یا نزولی است ، باید نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را به دست

آورد و علامت $f'(x)$ را تعیین کرد.

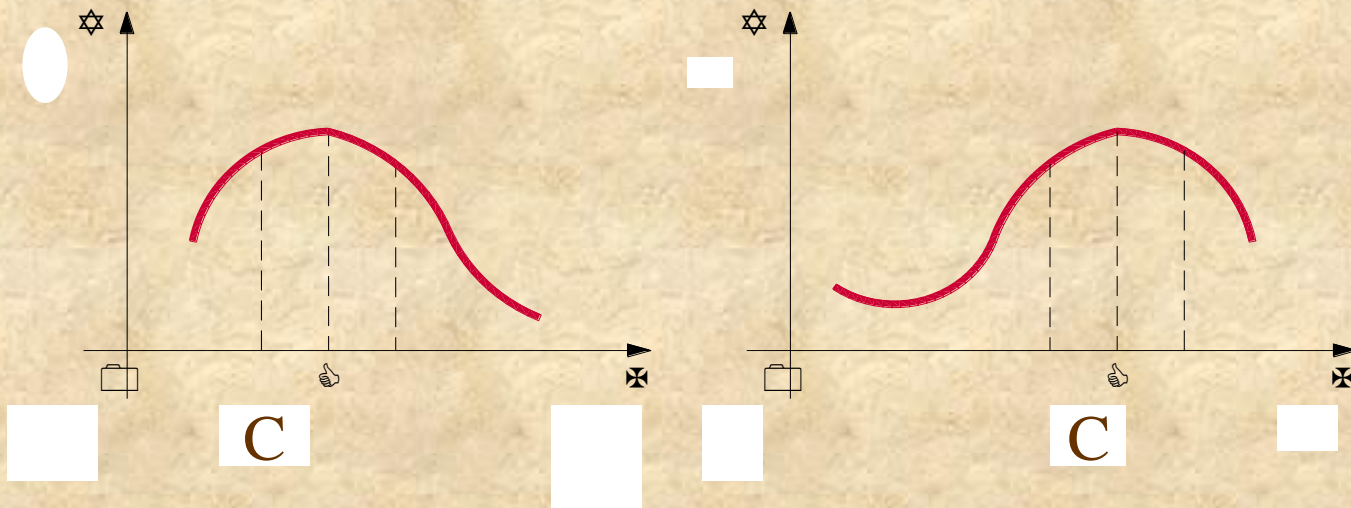
۶-۲ ماکسیموم و مینیموم تابع

۱-۲-۶ تعریف: می گوئیم تابع f در $x=c$ یک ماکسیموم نسبی یا ماکسیموم موضعی

دارد اگر برای هر x از بازه بازی که شامل c باشد داشته باشیم

$$f(c) \geq f(x)$$

شکلهای ۱-۶ و ۲-۶ نمودارهای توابعی را نشان می دهند که در c ماکسیموم نسبی دارند.

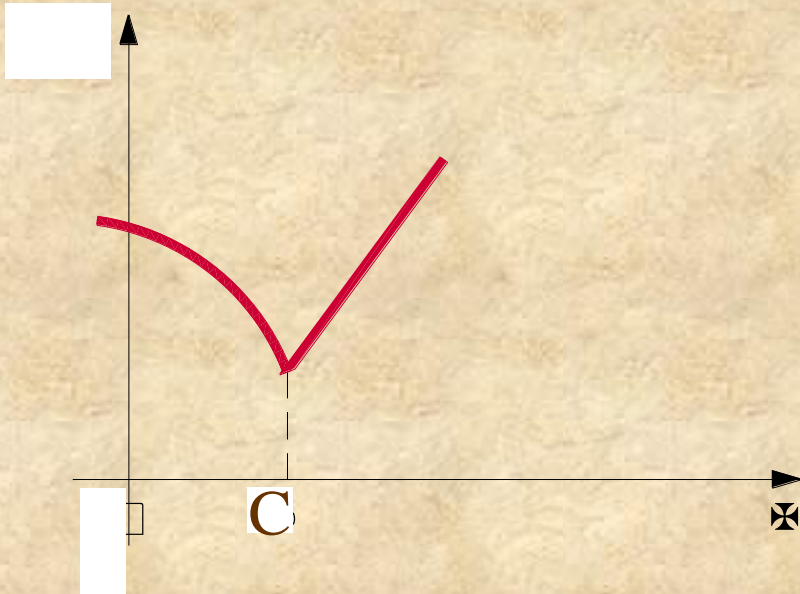


۲-۲-۶ تعریف:

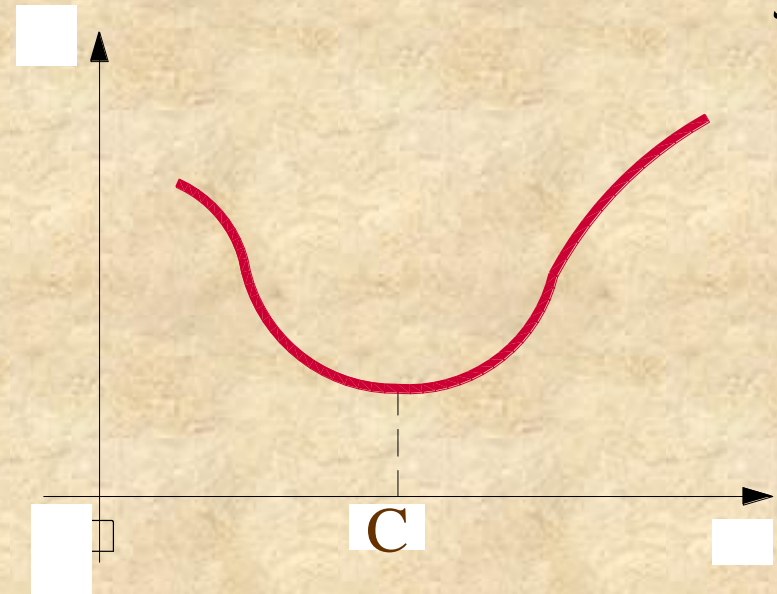
می‌گوییم تابع f در $x=c$ یک **مینیموم نسبی** یا **مینیموم موضعی** دارد اگر برای هر x از بازه بازی که شامل c باشد داشته باشیم

$$f(c) \leq f(x)$$

شکل‌های ۳-۶ و ۴-۶ نمودارهای توابعی را نشان می‌دهند که در c مینیموم نسبی دارند



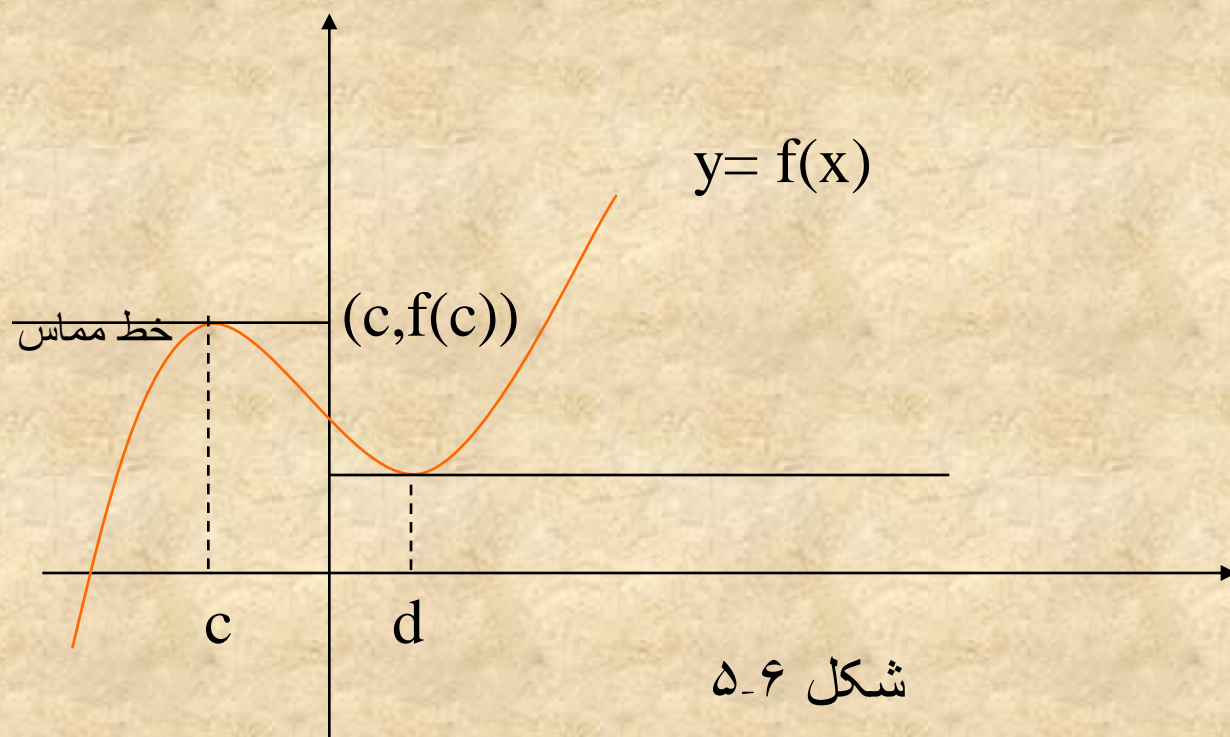
شکل ۴-۶



شکل ۳-۶

۶-۲-۶ تعبیر هندسی نقاط اکسترموم:

تعبیر هندسی قضیه ۶-۲-۴ این است که اگر تابع f در c مشتق پذیر باشد و در این نقطه اکسترموم نسبی داشته باشد، آنگاه مماس بر $y=f(x)$ در نقطه $(c, f(c))$ افقی است. به شکل ۶-۵ توجه کنید.



۶-۲-۷ تذکر: عکس قضیه ۶-۲-۴ درست نیست، یعنی تابعی مانند f وجود

دارد به طوری که $f'(x)$ از ای مقادیری از x صفر است ولی این تابع در این نقاط

ماکسیموم یا مینیموم نسبی ندارد. برای مثال فرض کنید $f(x) = (x-1)^3$ داریم

$$f'(x) = 3(x-1)^2$$

از معادله $f'(x) = 0$ نتیجه می شود $x=1$ ، پس $f'(1) = 0$ اما به ازای $x < 1$ ،

داریم $f(x) < 0$ و به ازای $x > 1$ داریم $f(x) > 0$. در نتیجه در $x=1$ نه ماکسیموم نسبی

دارد و نه مینیموم نسبی.

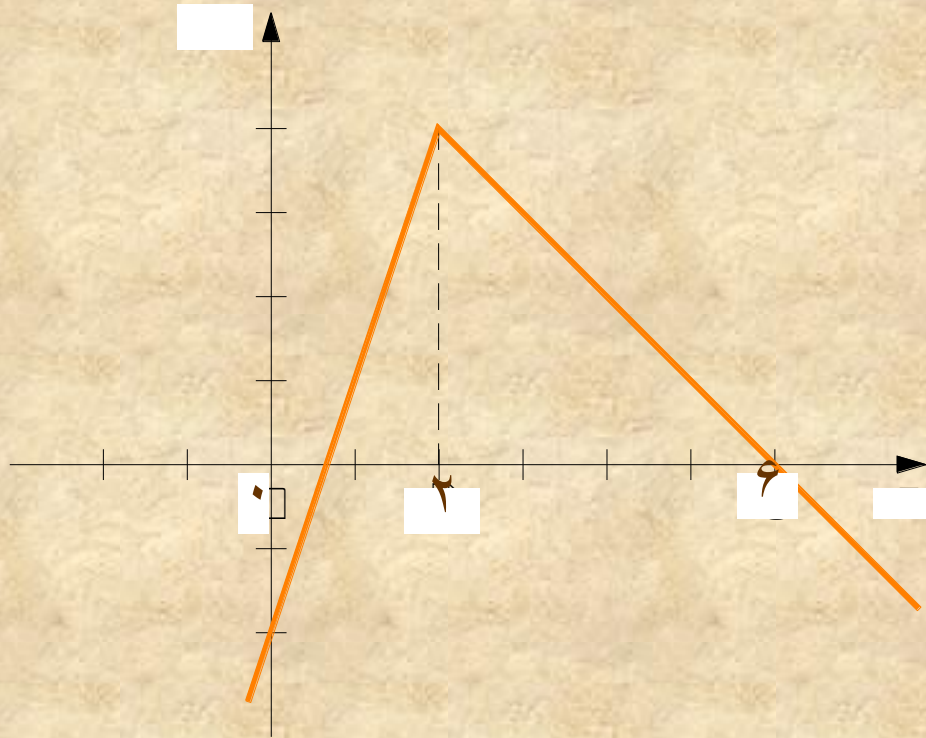
۶-۲-۸ نکته: ممکن است تابعی در نقطه ای اکسترموم نسبی داشته باشد اما در آن نقطه مشتق پذیر نباشد. برای مثال فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x \leq 2 \\ 6 - x & x > 2 \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۶-۶ رسم شده است.

تابع f در $x=2$ ماکسیموم نسبی دارد، اما چون $f'_-(2) = 3$ و $f'_+(2) = -1$ است،

در نتیجه $f'(2)$ وجود ندارد.



۹-۲-۶ نتیجه:

فرض می کنیم تابع f در نقطه c تعریف شده باشد، شرط لازم برای اینکه تابع

f در نقطه c اکسترموم نسبی داشته باشد این است که c یک نقطه بحرانی

تابع f باشد، به عبارت دیگر $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

۱۰-۲-۶ قضیه (آزمون مشتق اول برای اکسترموم های نسبی):

فرض می کنیم تابع f در بازه بازی از نقطه بحرانی c مانند (a, b) پیوسته باشد

و در تمام نقاط آن جز احتمالاً در c مشتق پذیر باشد.

(۱) اگر $f'(x)$ در بازه باز (a, c) مثبت و در بازه باز (a, b) منفی باشد آنگاه

در $x=c$ یک ماکسیموم نسبی دارد.

۲) اگر $f'(x)$ در بازه باز (a,c) منفی و در بازه باز (c,b) مثبت باشد آنگاه

F در $x=c$ یک مینیموم نسبی دارد.

۳) اگر هیچ کدام از (۱) و (۲) برقرار نباشد، آنگاه f در $x=c$ ماکسیموم

یا مینیموم نسبی ندارد.

۶-۲-۱۲ مثال:

با استفاده از آزمون مشتق اول، ماکسیموم و مینیموم نسبی تابع

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 12 \text{ بدست آورید.}$$

حل:

مشتق این تابع برابر است با $f'(x) = x^2 - 5x + 6$

ریشه های معادله $f'(x) = 0$ عبارت اند از $x=2$ و $x=3$. بنابراین ۲ و ۳ نقاط بحرانی تابع f اند.
نقاط بحرانی تابع را در جدول قرار می دهیم و آزمون مشتق اول را به کار می بریم.

نتیجه می گیریم مقادیر ماکسیموم و مینیموم نسبی تابع به ترتیب عبارتند از:

$$f(3) = \frac{33}{2} \quad \text{و} \quad f(2) = \frac{50}{3}$$

| x | $-\infty$ | ۲ | ۳ | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------------|--------------|-----------|
| $f'(x)$ | + | • | • | + |
| $f(x)$ | صعودی | ماکسیموم نسبی | مینیموم نسبی | صعودی |

۶-۲-۶ قضیه (آزمون مشتق دوم برای اکسترموم های نسبی):

فرض می کنیم c یک نقطه بحرانی تابع f باشد و $f'(c) = 0$ همچنین

فرض می کنیم f' در بازه بازی شامل c وجود

داشته باشند.

(۱) اگر $f''(c) < 0$ ، آنگاه f در c ماکسیموم نسبی دارد.

(۲) اگر $f''(c) > 0$ ، آنگاه f در c مینیموم نسبی دارد.

۶-۲-۱۸ مثال:

فرض کنید $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ استفاده از آزمون مشتق دوم ماکسیموم

و مینیموم نسبی تابع f را به دست آورید.

حل:

مشتق اول تابع f برابر است با:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

ریشه های معادله $f'(x) = 0$ عبارت اند از $x=1$ و $x=3$. بنابراین ۱ و ۳ نقاط

بحرانی تابع f اند. مشتق دوم این تابع برابر است با:

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 6 - 12 = -6 < 0$$

مقادیر تابع f'' در ۱ و ۳ عبارت اند از:

$$f''(x) = 6(3) - 12 = 6 > 0$$

در نتیجه بنابر آزمون مشتق دوم، این تابع در $x=1$ ماکسیموم نسبی و در $x=3$ مینیموم نسبی دارد. مقادیر ماکسیموم و مینیموم نسبی عبارت اند از:

$$f(1)=7 \quad , \quad f(3)=3$$

۶-۲-۱۹ نکته:

اگر در مورد تابع f داشته باشیم $f''(c) = 0$ آزمون مشتق دوم اطلاعاتی از ماکسیموم نسبی یا مینیموم نسبی بودن c به دست نمی دهد.

در چنین مواردی باید از آزمون مشتق اول استفاده کرد.

برای مثال، فرض می‌کنیم $f(x) = (x-2)^4 + 1$ مشتق‌های اول و دوم f عبارت‌اند از:

$$f'(x) = 4(x-2)^3$$

$$f''(x) = 12(x-2)^2$$

از $f'(x) = 0$ نتیجه می‌شود $x=2$ پس $x=2$ نقطه بحرانی تابع f است. از طرفی داریم برای تعیین ماکسیموم یا مینیموم نسبی تابع باید از آزمون

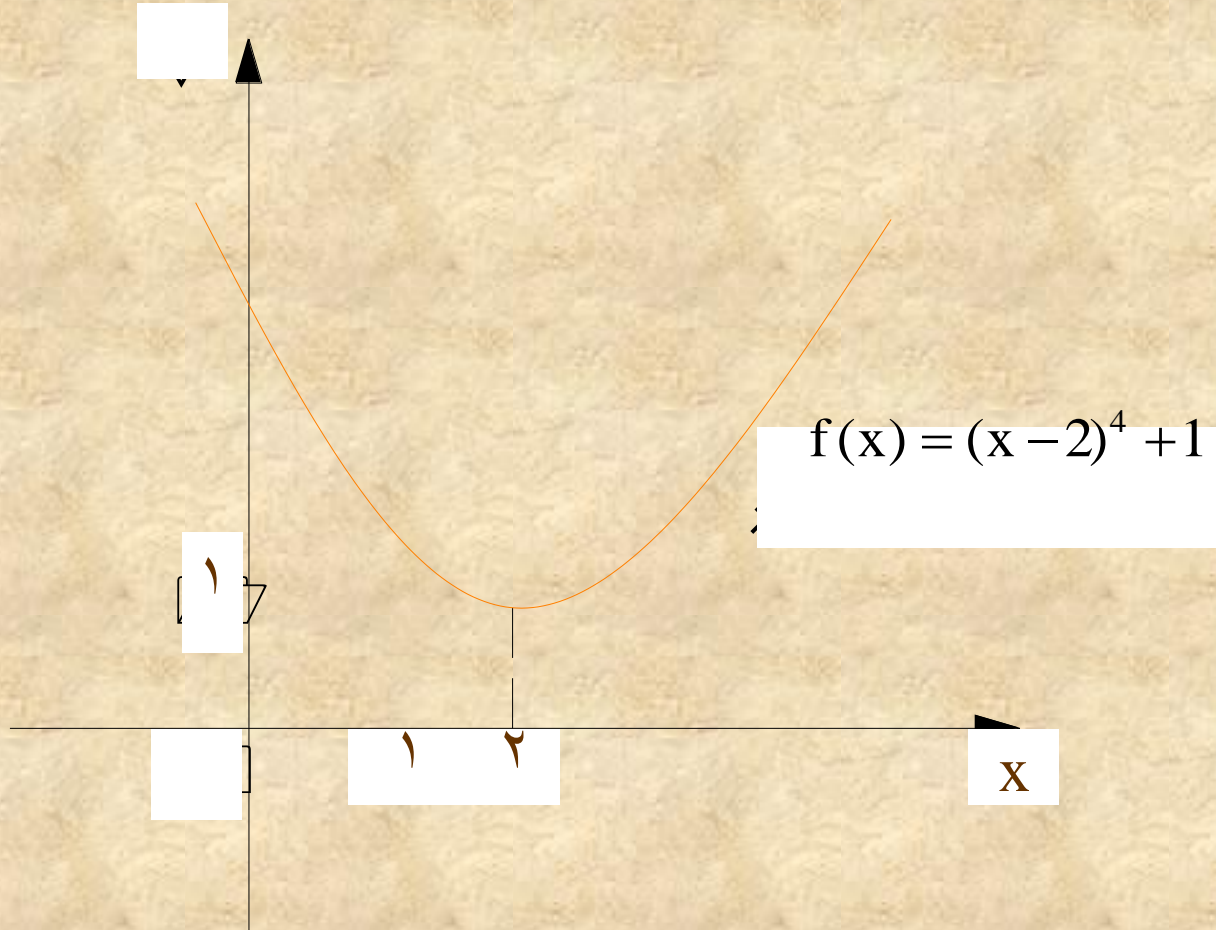
مشتق اول استفاده کرد.

| | | | |
|--------------|-----------|---|-----------|
| X | $-\infty$ | ۲ | $+\infty$ |
| f'(x) | — | ۰ | — |
| f(x) | نزولی | | صعودی |

مینیموم نسبی

تابع f در $x=2$ مینیموم نسبی دارد. مقدار این مینیموم برابر است با:
 $f(2)=1$

نمودار تابع f در شکل ۶-۱۰ رسم شده است.



۶-۲-۲۲ تعریف:

تابع f و اعداد c و d را در دامنه تابع f در نظر می‌گیریم.

الف) $f(c)$ را **ماکسیموم مطلق تابع f روی دامنه اش** می‌نامیم، اگر برای هر x

از دامنه تابع f داشته باشیم:

$$f(c) \geq f(x)$$

ب) $f(d)$ را **مینیموم مطلق تابع f روی دامنه اش** می‌نامیم، در صورتی که برای

هر x از دامنه تابع f داشته باشیم:

$$f(d) \leq f(x)$$

ماکسیموم مطلق یا مینیموم مطلق تابع را اکسترموم مطلق تابع نیز می‌گوییم.

★ توجه کنید که می توان تابعی مانند f با دامنه I یافت که f روی I اکستریموم

مطلق نداشته باشد. ولی اگر f و I دارای شرایط خاصی باشند، آنگاه تابع f روی I

دارای اکستریموم مطلق خواهد بود.

قضیه زیر این شرایط را معرفی می کند. از اثبات این قضیه صرف نظر می کنیم.

۶-۲-۲۳ قضیه:

اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی این بازه دارای ماکسیموم و

مینیموم مطلق است.

روش تعیین اکسترموم های مطلق تابع:

برای تعیین ماکسیموم و مینیموم مطلق تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ ، در صورتی که f در بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد، ابتدا به کمک آزمون مشتق اول یا آزمون مشتق دوم، ماکسیموم و مینیموم های نسبی این تابع را در بازه داده شده به دست می آوریم. سپس مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه و آنها را با ماکسیموم و مینیموم های نسبی تابع مقایسه می کنیم.

کوچکترین این مقادیر، مینیموم مطلق و بزرگترین آنها ماکسیموم مطلق تابع f خواهد بود.

به مثال زیر در این مورد توجه کنید.

۲-۶-۲۵ مثال:

ماکسیموم و مینیموم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ در بازه بسته $[0, 3]$ به دست آورید.

حل:

مشتق تابع f برابر است با: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

ریشه های معادله $f'(x) = 0$ عبارت اند از $x=1$ و $x=2$ ، و بنابراین ۱ و ۲ نقاط بحرانی تابع اند.

اکنون آزمون مشتق اول را به کار می بریم و جدول زیر را تشکیل می دهیم.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|-------|-------|---|-------|---|-------|
| f'(x) | + | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | صعودی | | نزولی | | صعودی |

ماکسیموم نسبی

مینیموم نسبی

در جدول دیده می شود که f در $x=1$ ماکسیموم نسبی و در $x=2$ مینیموم نسبی دارد.

مقادیر این ماکسیموم و مینیموم نسبی به ترتیب برابرند با:

$$f(1)=5$$

$$f(2)=4$$

مقادیر تابع در نقاط ۰ و ۳ برابرند با:

$$f(0)=0 , \quad f(3)=9$$

بنابراین داریم:

$$f(0)=0 , \quad f(1)=5 , \quad f(2)=4 , \quad f(3)=9$$

★ در نتیجه $f(0)=0$ مینیموم مطلق و $f(3)=9$ ماکسیموم مطلق تابع f است.

۶-۳-۶-۳ تقعر و تحدب و نقطه عطف نمودار تابع

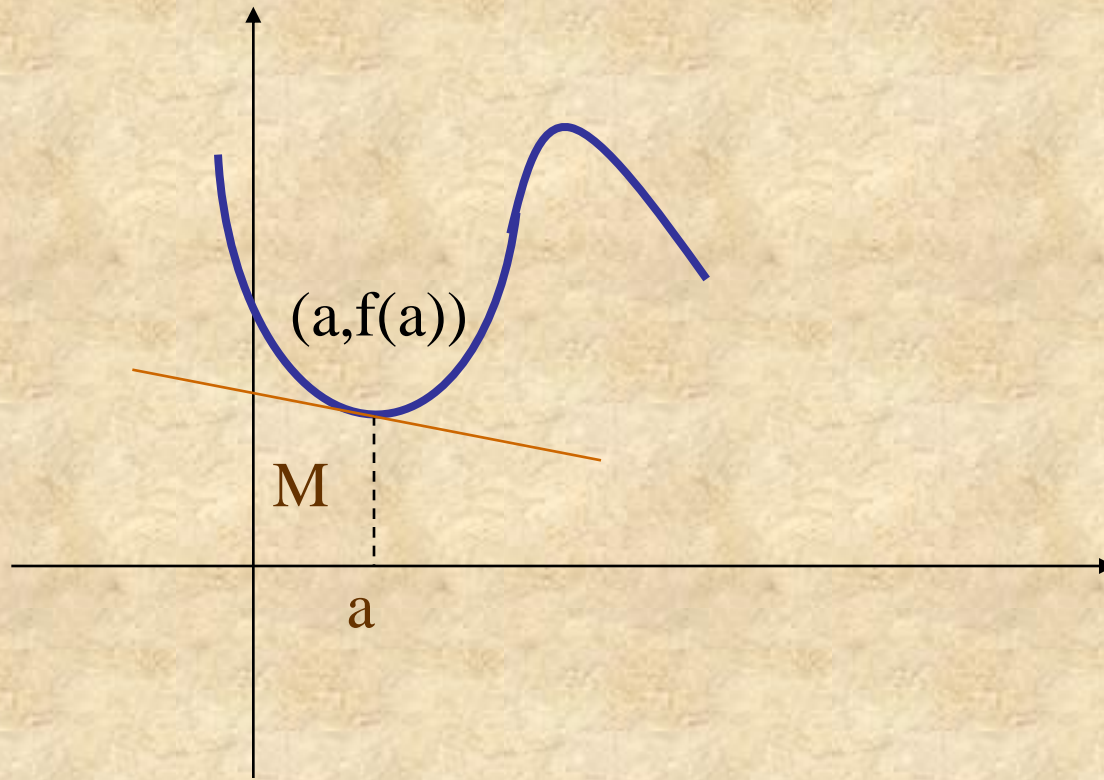
۱-۳-۶-۳-۶ تعریف: نمودار تابع $y=f(x)$ را در نقطه $(a, f(a))$ مقعر می نامیم هرگاه

(۱) $f'(a)$ موجود باشد.

(۲) نمودار تابع f در بازه بازی شامل $x=a$ در بالای خط مماس بر نمودار در این

نقطه قرار گیرد.

شکل ۱۱-۶ بخشی از نمودار یک تابع را که در نقطه M مقعر است نشان می دهد.

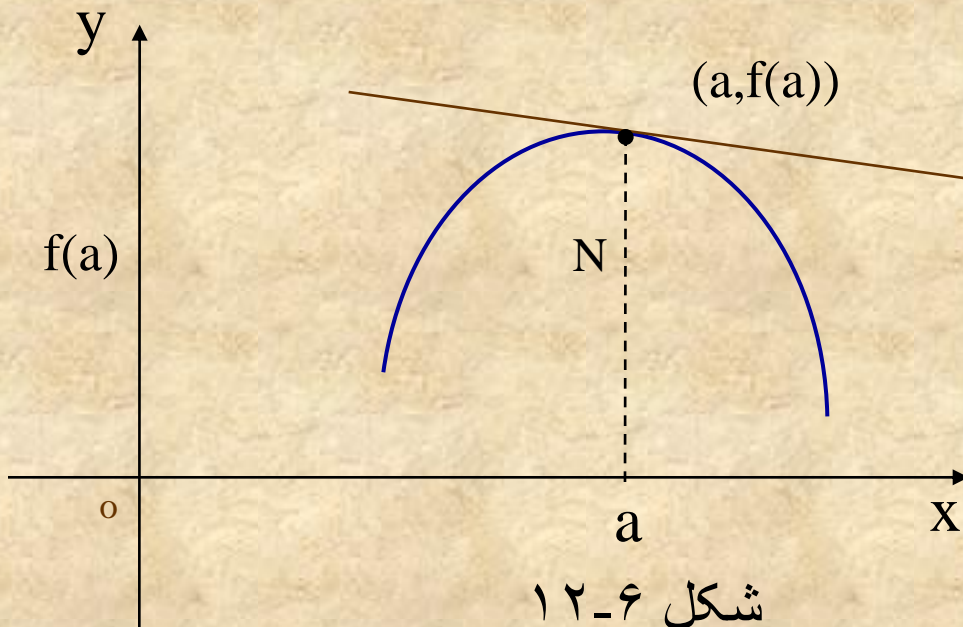


اگر نمودار تابع f در هر نقطه از بازه I مقعر باشد، می‌گوییم نمودار f روی بازه I مقعر است.

۲-۳-۶ تعریف:

نمودار تابع $y=f(x)$ را در نقطه $(a, f(a))$ **محدب** می نامیم اگر:
(۱) $f'(a)$ وجود باشد.

(۲) نمودار تابع f در بازه بازی شامل $x=a$ در پایین خط مماس بر نمودار در این نقطه واقع شود.



شکل ۱۲-۶

شکل ۱۲-۶ بخشی از نمودار

یک تابع را نشان می دهد،

که در نقطه N محدب است.

اگر نمودار تابع f در هر نقطه از بازه I محدب باشد، می‌گوییم نمودار f روی بازه I محدب است.

قضیه زیر آزمونی برای تعیین تقعر و تحدب یک منحنی به دست می‌دهد. از اثبات این قضیه صرف نظر می‌شود.

۳-۳-۶ قضیه:

فرض می‌کنیم تابع f روی بازه بازی شامل $x=c$ دارای مشتق‌های اول و دوم باشد.

(۱) اگر $f''(c) > 0$ ، آنگاه نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ مقعر است.

(۲) اگر $f''(c) < 0$ ، آنگاه نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ محدب است.

۶-۳-۴ مثال:

تعیین کنید نمودار تابع $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ در چه بازه ای محدب و در چه بازه ای مقعر است.

حل:

مشتقهای اول و دوم تابع برابر است با

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

ریشه های $f''(x) = 0$ عبارت اند از $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ و $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

| X | $-\infty$ | $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ | $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ | $+\infty$ | |
|----------|-----------|------------------------|------------------------|-----------|---|
| $f''(x)$ | + | o | - | o | + |
| $f(x)$ | مقعر | محدب | مقعر | | |

بنابراین، نمودار f در بازه های $(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{6})$ و $(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, +\infty)$ و در بازه $(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$ مثبت است.

۶-۳-۵ تعریف:

نقطه $(a, f(a))$ را نقطه عطف نمودار تابع f می نامیم اگر $f'(a)$ موجود باشد.

(۲) بازه بازی شامل a وجود داشته باشد به گونه ای که به ازای هر x از این بازه

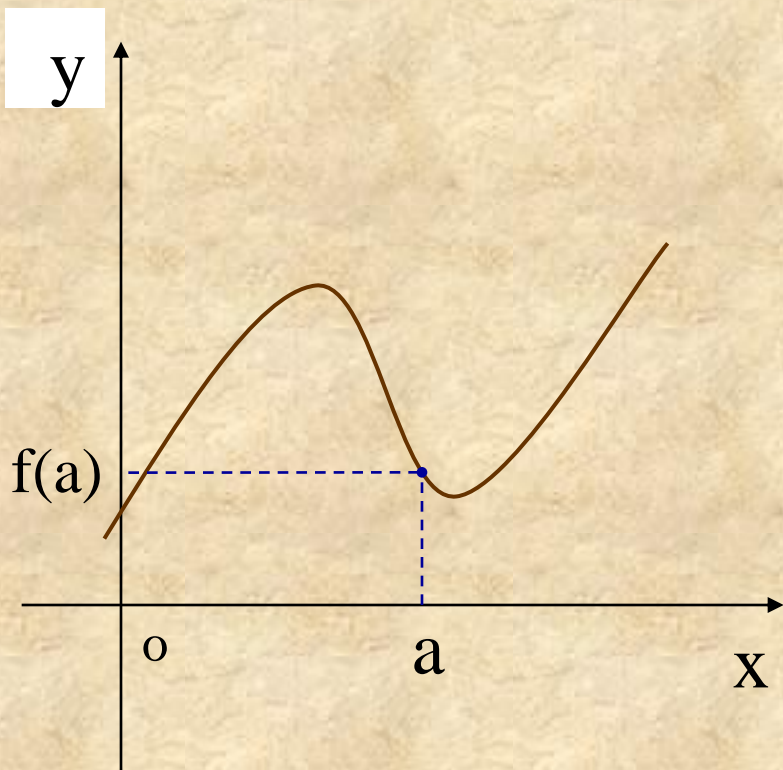
الف) اگر $x > a$ آنگاه $f''(x) < 0$ اگر $x < a$ آنگاه $f''(x) > 0$

یا

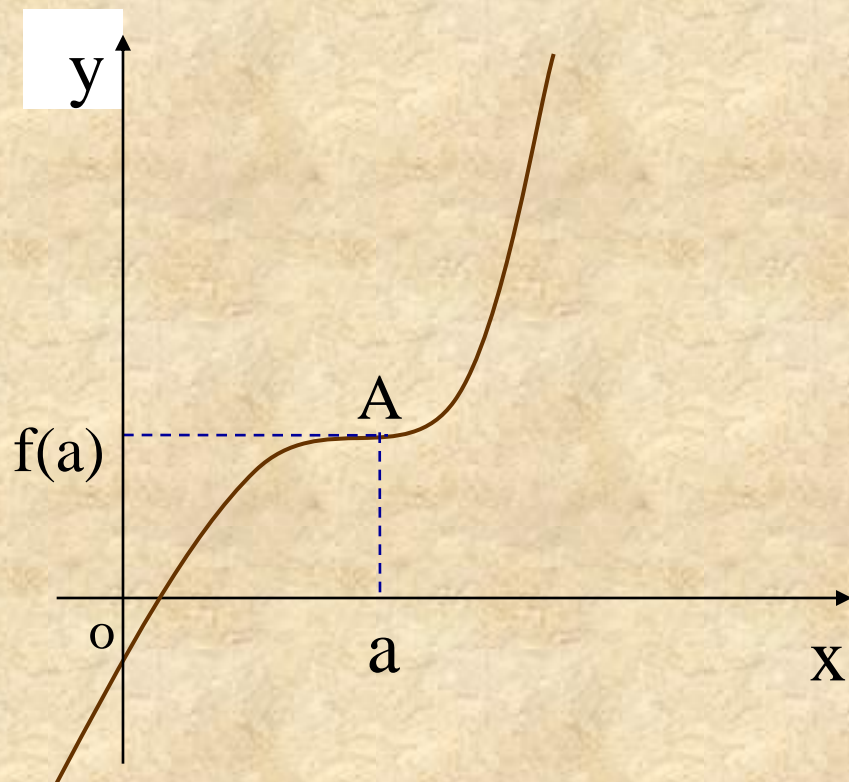
ب) اگر $x > a$ آنگاه $f''(x) > 0$ اگر $x < a$ آنگاه $f''(x) < 0$

شکل‌های ۱۳-۶ و ۱۴-۶ بخشی از نمودار تابعی را نشان می‌دهند که A یک

نقطه عطف آن است.



شکل ۱۳-۶



شکل ۱۴-۶

۶-۳-۸ مثال:

بازه هایی را که نمودار تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ در آنها مقعر

یا محدب است تعیین کنید. نقاط عطف نمودار تابع را نیز به دست آورید.

حل:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 7$$

مشتقهای اول و دوم تابع برابر است با:

$$f''(x) = 12x + 6$$

ریشه معادله $f''(x) = 0$ عبارت است از $x = -\frac{1}{2}$

| | | | |
|----------|-----------|----------------|-----------|
| X | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | محدب | نقطه عطف | مقعر |

بنابراین، نمودار تابع در بازه $(-\infty, -\frac{1}{2})$ محدب و در بازه $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ مقعر است.

نقطه $(5, -\frac{1}{2})$ نقطه عطف نمودار تابع است.

۱۱-۳-۶ قضیه:

فرض می کنیم تابع f در بازه بازی شامل a مشتق پذیر و $(a, f(a))$ نقطه عطف

نمودار تابع f باشد. اگر $f''(a) \neq 0$ وجود باشد آنگاه $f''(a) = 0$

۱۳-۳-۶ روش تعیین نقاط عطف نمودار تابع:

برای تعیین نقاط عطف احتمالی نمودار تابع f ، باید x هایی از دامنه تابع را بررسی کنیم که به ازای آنها

$$\cdot f''(x) = 0 \quad (\text{الف})$$

(ب) $f''(x)$ وجود نداشته باشد.

۴-۶ رسم نمودار یک تابع

۶-۴-۱ مقدمه:

در این بخش ابتدا خلاصه ای از مفاهیم جانب و محور تقارن و مرکز تقارن را یادآوری می کنیم و سپس روش رسم نمودار توابع را توضیح می دهیم.

۶-۴-۲ تعریف:

تابع $y=f(x)$ را در نظر می گیریم. اگر تابع f هنگامی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$

یا $x \rightarrow a$ به ∞ یا ∞ میل کند، آنگاه خط $x=a$ را جانب قائم نمودار f می نامیم.

★ در تابع $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ اگر صورت و مخرج عامل مشترکی نداشته باشند، جانب

قائم نمودار f از حل معادله $q(x)=0$ به دست می آید.

۳-۴-۶ مثال:

مجانبه‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x-3}{(x^2-1)(x+2)}$ تعیین کنید.

حل:

ریشه‌های معادله $(x^2-1)(x+2)=0$ عبارت اند از ۱، -۱، -۲. در نتیجه

بنابر تعریف ۲-۴-۶ مجانبه‌های قائم نمودار f عبارت اند از خط‌های

$$x=1, x=-1, x=2$$

۵-۴-۶ تعریف:

تابع $y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم. اگر حد تابع f هنگامی که $x \rightarrow +\infty$ یا x

$x \rightarrow -\infty$ مساوی عدد حقیقی b باشد، آنگاه، خط $y=b$ را جانب افقی

نمودار f می‌نامیم.

۶-۴-۶ مثال: مجانب افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 1}{2x^2 + 5x + 7}$ را تعیین کنید.

حل:

داریم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 3x - 1}{2x^2 + 5x + 7}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x - 1}{2x^2 + 5x + 7} = 2$$

در نتیجه، بنابر تعریف ۶-۴-۵، خط $y=2$ مجانب افقی نمودار f است.

۶-۴-۸ تعریف:

تابع $y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم. اگر حد تابع f وقتی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$

به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، ممکن است نمودار تابع f دارای خط مجانب

مایلی با معادله $y=ax+b$ باشد.

برای تعیین این خط مجانب مایل به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم.

۱) ابتدا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ را محاسبه می‌کنیم و آن را a می‌نامیم. سپس $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

را محاسبه می‌کنیم و آن را b می‌نامیم. معادله $y=ax+b$ معادله خط مجانب

مایلی نمودار f است.

حالت $x \rightarrow -\infty$ نیز کاملاً مشابه حالت $x \rightarrow +\infty$ است.

۲) در مورد تابع گویای $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ، اگر درجه تابع صورت یک واحد بیشتر از

درجه تابع مخرج باشد، از تقسیم کردن صورت بر مخرج به دست می آوریم.

$$y = ax + b + \frac{r(x)}{q(x)}$$

که در آن درجه $r(x)$ از درجه $q(x)$ کمتر است. در این صورت معادله

$y = ax + b$ معادله خط مجانب مایل نمودار f خواهد بود.

۶-۴-۱ تعریف:

معادله $f(x,y)=0$ را در نظر می گیریم.

۱) اگر با تبدیل y به $(-y)$ معادله تغییر نکند، محور x ها محور تقارن نمودار معادله $f(x,y)=0$ است.

۲) اگر با تبدیل x به $(-x)$ معادله تغییر نکند، محور y ها محور تقارن نمودار معادله $f(x,y)=0$ است.

۳) اگر با تبدیل x به y و y به x معادله تغییر نکند، خط $y=x$ محور تقارن نمودار معادله $f(x,y)=0$ است.

۴) اگر با تبدیل x به $(-x)$ و y به $(-y)$ معادله تغییر نکند، مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار معادله $f(x,y)$ است.

۵) خط $x=a$ محور تقارن نمودار معادله $f(x,y)$ است اگر:

$$f(2a - x, y) = f(x, y)$$

۶) خط $y=b$ محور تقارن نمودار معادله $f(x,y)$ است اگر:

$$f(x, 2b - y) = f(x, y)$$

۷) نقطه (a,b) مرکز تقارن نمودار معادله $f(x,y)$ است اگر:

$$f(2a - x, 2b - y) = f(x, y)$$

۶-۴-۱ مثال:

الف) با تبدیل y به $(-y)$ معادله $2x + y^2 = 1$ تغییر نمی کند، زیرا:

$$2x + (-y)^2 = 2x + y^2 = 1$$

پس محور x ها محور تقارن نمودار معادله است.

ب) با تبدیل x به $(-x)$ معادله $2x^2 - 5$ تغییر نمی کند، زیرا:

$$2(-x)^2 - 5 = 2x^2 - 5 = y$$

در نتیجه محور y ها محور تقارن نمودار معادله است.

پ) با تبدیل x به y و y به x معادله $xy = 3$ تغییر نمی کند زیرا

$$yx = xy = 3$$

بنابراین، خط $y = x$ محور تقارن نمودار معادله است.

ت) با تبدیل x به $(-x)$ و y به $(-y)$ معادله $y = x^3$ تغییر نمی کند زیرا از

$$-y = (-x)^3 = -x^3$$

نتیجه می شود $y = x^3$ ، در نتیجه مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار معادله است.

(ث) خط $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ است زیرا

$$f\left(-\frac{b}{a} - x\right) = a\left(-\frac{b}{a} - x\right)^2 + b\left(-\frac{b}{a} - x\right) + c$$

$$= a\left(\frac{b^2}{a^2} + 2\frac{b}{a}x + x^2\right) - \frac{b^2}{a} - bx + c$$

$$= ax^2 + bx + c$$

(ج) محل تلاقی مجانبهای قائم و افقی نمودار $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ، یعنی نقطه

$\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ مرکز تقارن نمودار f است زیرا:

$$f\left(\frac{-2d}{c} - x\right) = \frac{a\left(\frac{-2d}{c} - x\right) + b}{c\left(\frac{-2d}{c} - x\right) + d}$$

$$= \frac{-2ad - acx + bc}{-2cd - c^2x + cd}$$

$$= \frac{2ad + acx - bc}{c(cx + d)}$$

$$= \frac{2ad + 2acx - acx - bc}{c(cx + d)}$$

$$= \frac{2a(cx + d) - c(ax + b)}{c(cx + d)}$$

$$= \frac{2a}{c} - \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$= \frac{2a}{c} - f(x)$$

$$= \frac{2a}{c} - y$$

۶-۴-۱۵ رسم نمودار توابع

برای رسم نمودار تابع صریح $y = f(x)$ یا تابع ضمنی (معادله) $f(x; y) = 0$

به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱) دامنه تابع را تعیین می کنیم.

۲) محورهای تقارن و مرکز تقارن نمودار تابع را در صورت وجود به دست می آوریم.

۳) مجانبهای نمودار تابع را در صورت وجود تعیین می کنیم.

۴) بازه هایی را که نمودار تابع در آنها صعودی یا نزولی است تعیین می کنیم.

۵) نقاط اکستریموم ماکسیموم و مینیموم نسبی و مطلق تابع را به دست می آوریم.

۶) نقاط عطف نمودار تابع را در صورت وجود پیدا می کنیم.

۷) بازه هایی را که نمودار تابع در آنها مقعریا محدب است تعیین می کنیم.

۸) اطلاعات حاصل را در یک جدول می نویسیم.

۹) با اختیار کردن چند نقطه دلخواه (کمکی) از تابع، منحنی همواری

از نقاط به دست آمده رسم می کنیم.

۶-۴-۱۴ مثال:

نمودار تابع $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$ رسم کنید.

حل:

مشتقهای اول و دوم تابع f برابرند با

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$$

$$f''(x) = 6x + 10$$

از $f'(x) = 0$ نتیجه می شود $x = -\frac{1}{3}$ و $x = -3$.

از $f''(x) = 0$ نتیجه می شود $x = -\frac{5}{3}$.

| | | | | | |
|----------|------------|------------|----------------|----------------|-----------|
| X | $-\infty$ | -3 | $-\frac{5}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | - | - | 0 | + | + |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | صعودی محدب | نزولی محدب | نزولی مقعر | صعودی مقعر | |

ماکسیموم نسبی

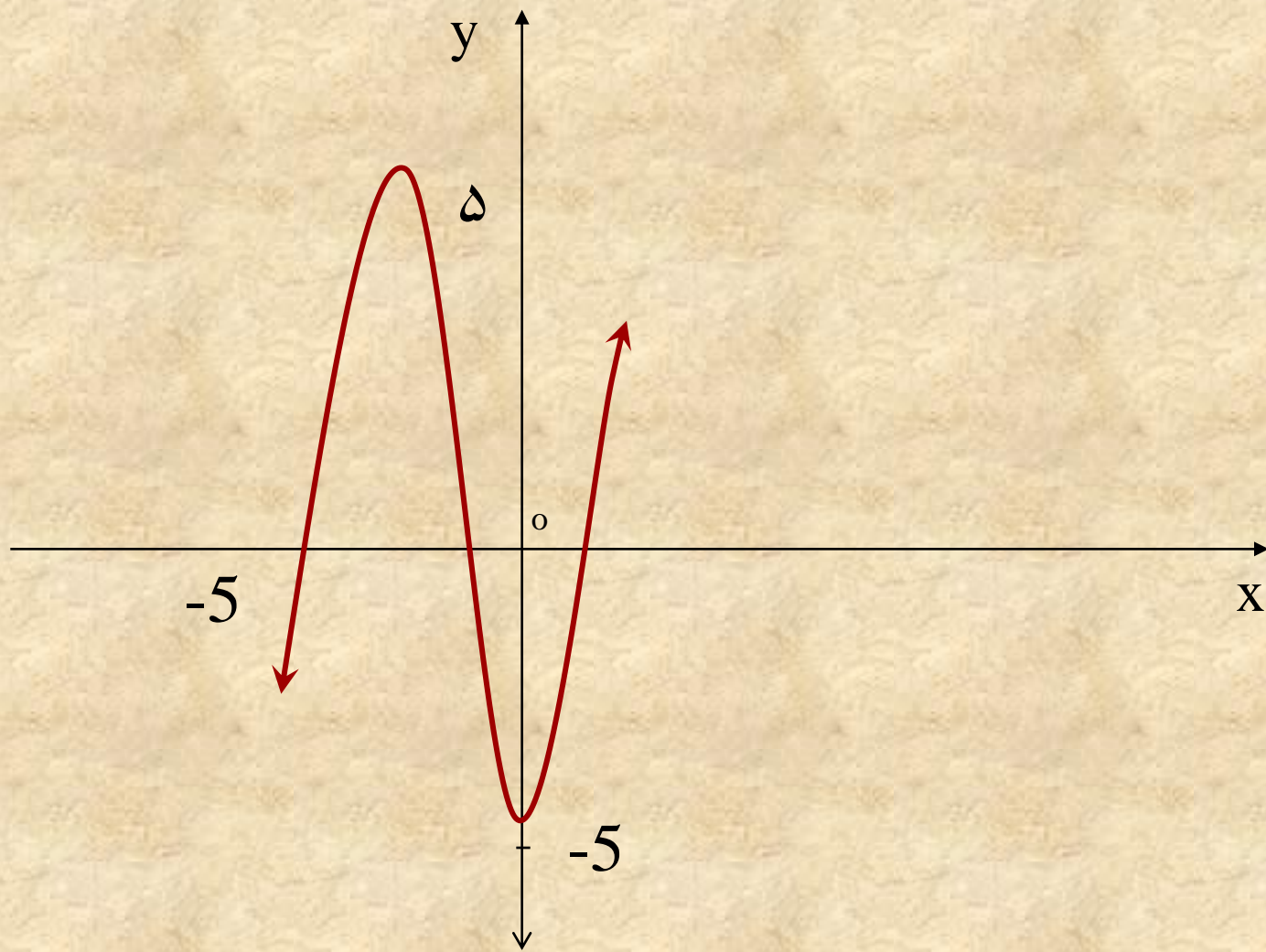
5

نقطه عطف

$\frac{7}{27}$

مینیموم نسبی

$\frac{-121}{27}$



شکل ۱۵-۶

۶-۴-۱۷ مثال:

نمودار تابع $f(x) = 9x + \frac{1}{x}$ را رسم کنید.

حل:

$$f'(x) = 9 - \frac{1}{x^2} = \frac{9x^2 - 1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

مشتقهای اول و دوم تابع f برابرند با:

| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | o | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|----------|--------------|----------------|--------------|---------------|--------------|
| $f''(x)$ | | - | وجود ندارد | + | + |
| $f'(x)$ | + | o | وجود ندارد | o | + |
| $f(x)$ | صعودی و محدب | صعودی و محدب | نزولی و محدب | نزولی و محدب | صعودی و مقعر |
| | | ماکسیموم نسبی | | مینیموم نسبی | |

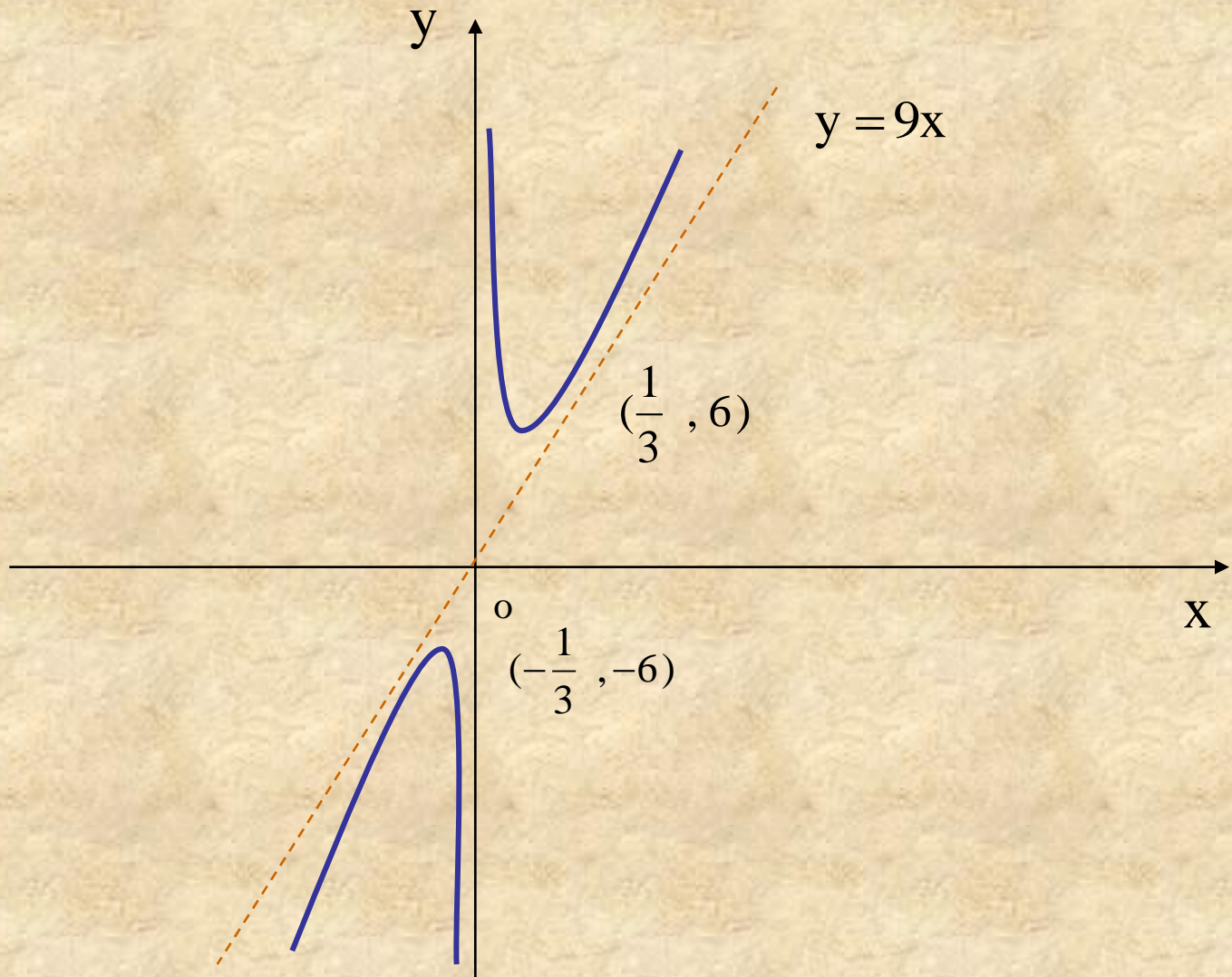
روشن است که خط $y = 9x$ مجانب مایل نمودار $f(x) = 9x + \frac{1}{x}$ است.

از طرفی داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(9x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(9x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

پس $x=0$ یعنی محور y ها مجانب قائم نمودار f است.



شکل ۶-۱۶

۶-۴-۱۸ مثال:

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2 & x \leq 2 \\ (2-x)^3 & x > 2 \end{cases}$ رسم کنید.

حل:

مشتق‌های اول و دوم f برابرند با

$$f'(x) = \begin{cases} 6(x-2) & x < 2 \\ -3(2-x)^2 & x > 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6 & x < 2 \\ 6(2-x) & x > 2 \end{cases}$$

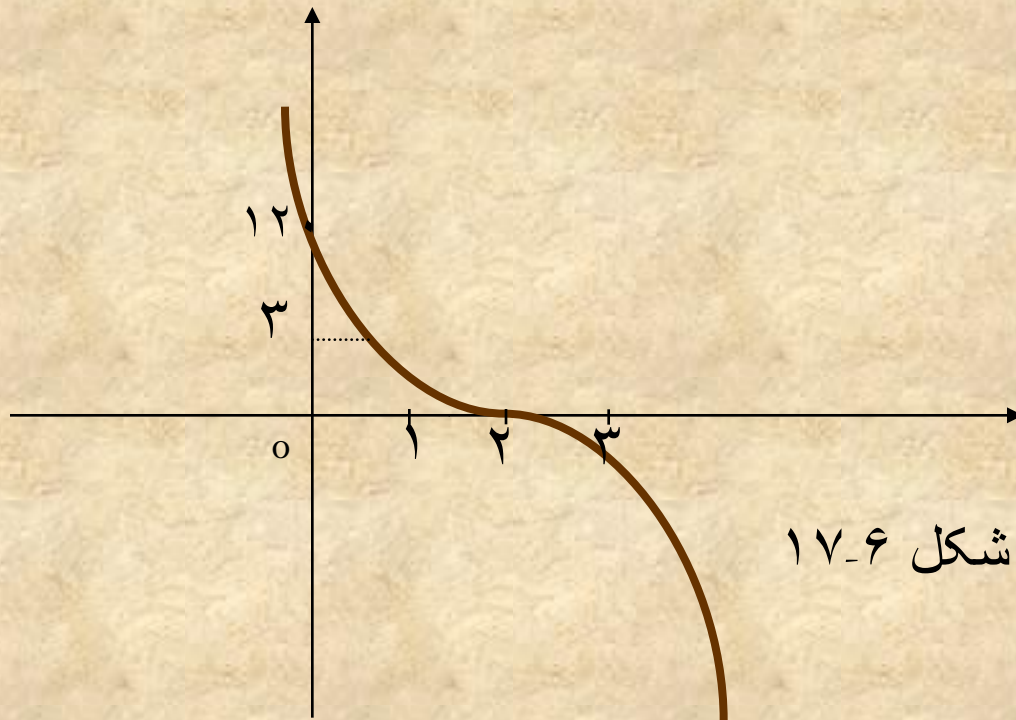
از $f'(x) = 0$ دست می‌آوریم $x=2$. مشتق‌های چپ و راست f در 2 برابرند با

$$f'_-(2) = 0 \quad \text{بنابراین} \quad f'_+(2) = 0, \text{ یعنی تابع در } 2 \text{ وجود}$$

دارد ولی $f''(x)$ در 2 وجود ندارد زیرا $f''_+(2) = 0$ و $f''_-(2) = 6$

| | | | |
|----------|--------------|------------|--------------|
| X | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | + | وجود ندارد | - |
| $f'(x)$ | - | 0 | - |
| $f(x)$ | مقعر و نزولی | | محدب و نزولی |

نقطه عطف



شکل ۶-۱۷

برای رسم دقیق نمودار تابع،
از چند نقطه دلخواه
(۱۲, ۰)، (۱, ۳)، (۳, -۱)
کمک گرفتیم.

۵-۶ صورتهای مبهم

۶-۵-۱ مقدمه:

ممکن است هنگام محاسبه حد بعضی از توابع با صورتهایی

مانند $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0 \times \infty$ ، $\infty - \infty$ ، 0^0 ، 0^{∞} و مواجهه شویم. این صورتهارا

صورتهای مبهم یا نامعین می نامیم. در این بخش باروش رفع ابهام از

این صورتهای مبهم آشنا می شویم.

۶-۵-۲ تعریف:

اگر در مورد توابع f و g داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه

به صورت مبهم $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ می آید. برای رفع ابهام از این صورت

مبهم، قضیه زیر را به کار می بریم.

۳-۵-۶ قضیه (قاعده هویپیتال): فرض می کنیم توابع f و g در بازه

بازی شامل نقطه a مانند I ، جز احتمالاً در خود a ، مشتق پذیر باشند.

همچنین فرض می کنیم به ازای هر $x \neq a$ در I داشته باشیم $g'(x) \neq 0$

در این صورت، اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داشته باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۴-۵-۶ مثال:

حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 5}$ را محاسبه کنید.

حل:

چون

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 3) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 5) = 0$$

و شرایط قضیه ۴-۵-۶ نیز برقرار است، می توانیم قاعده هوییتال را به

کار ببریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 2}{4x + 3} = \frac{4}{7}$$

۹-۵-۶ قضیه (قاعده هویپیتال):

فرض می کنیم دو تابع f و g به ازای هر $x > N$ ، که N عدد ثابت مثبتی است،

مشتق پذیر باشند.

به علاوه فرض می کنیم برای هر $x > N$ داشته باشیم $g'(x) \neq 0$ این

صورت اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ و اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قضیه در حالتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

۶-۵-۱۰ مثال:

حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left[\frac{3}{x}\right]}{\frac{2}{x}}$ را در صورت وجود، محاسبه کنید.

حل:

چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left[\frac{3}{x}\right] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x}\right] = 0$ ، نابرقضیه ۶-۵-۹ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{3}{x}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{3}{x^2} \cos \frac{3}{x}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cos\left[\frac{3}{x}\right]}{2} = \frac{3}{2}$$

۶-۵-۱۲ صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$

اگر در مورد توابع f و g داشته باشیم $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ به صورت مبهم} \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

درمی آید برای رفع ابهام از اینگونه صورتهای مبهم از قضیه زیر استفاده

می کنیم.

۶-۵-۱۳ قضیه (قاعده هویپیتال):

فرض می کنیم توابع f و g در بازه بازی شامل نقطه a مانند I ، جز احتمالاً در a ،

مشتق پذیر باشند و به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم $g'(x) \neq 0$

صورت اگر: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ و اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ داشته

باشد، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قضیه در حالتی که همه حدها، حدهای راست یا حدهای چپ باشند نیز برقرار است.

۶-۵-۱۶ قضیه (قاعده هوییتال):

فرض می کنیم توابع f و g به ازای هر $x > N$ که N عدد ثابت مثبتی است،

مشتق پذیر باشند و به ازای هر $x > N$ داشته باشیم $g'(x) \neq 0$ در این صورت

اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty$ و اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قضیه در حالتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

۶-۵-۱۷ مثال:

حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{e^x + 5x}$ در صورت وجود بیابید.

حل:

چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x - 4) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 5x) = +\infty$ با استفاده از

قاعده هسپیتال به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{e^x + 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{e^x + 5}$$

اما چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} [4x + 3] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 5x) = +\infty$ ، یک بار دیگر از قاعده

هوپیتال استفاده می کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{e^x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x} = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{e^x + 5x} = 0$$

۶-۵-۱۹ صورت مبهم $0 \cdot \infty$

اگر در مورد توابع f و g داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ ، آنگاه حد

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ به صورت مبهم $\infty \cdot 0$ می آید. برای رفع ابهام، تابع

حاصلضرب $f(x) \cdot g(x)$ را به یکی از دو صورت :

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{یا} \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

می نویسیم.

به این ترتیب حد مورد نظربه یکی از صورتهای مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می شود که در هر دو حالت می توانیم قاعده هوییتال را به کار ببریم.

در صورتی که به جای عدد حقیقی a یکی از نمادهای ∞ یا ∞ را داشته باشیم نیز می توانیم همین روش را برای رفع ابهام به کار ببریم.

۶-۵-۲۰ مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[1 - e^{\frac{1}{x}} \right] \text{ محاسبه کنید.}$$

حل:

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 - e^{\frac{1}{x}} \right] = -\infty$ نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 - e^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

حد سمت راست به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است، پس قاعده هوییتال را به کار می بریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-e^{\frac{1}{x}} \right] = -\infty$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 - e^{\frac{1}{x}} \right] = -\infty$$

۶-۵-۲۲ صورت مبهم $\infty - \infty$

اگر در مورد توابع f و g داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] \quad \text{به صورت مبهم} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

درمی آید. برای رفع ابهام از این صورت مبهم، آن را به یکی از دو صورت مبهم

$$\frac{0}{0} \quad \text{یا} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

تبدیل می کنیم.

در صورتی که به جای عدد حقیقی a ، یکی از نمادهای 0 یا ∞ داشته

باشیم، نیز به همین ترتیب عمل می کنیم. در دو مثال زیر روش رفع ابهام از این

گونه صورتهای مبهم توضیح داده شده است.

۶-۵-۲۳ مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$$

محاسبه کنید.

حل:

این حد به صورت مبهم $\infty - \infty$ است. ابتدا مخرج مشترک می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x[e^x - 1]}$$

حد اخیر به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابر قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x[e^x - 1]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1}$$

این حد نیز به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است، پس یکبار دیگر قاعده هوییتال را به کار می بریم.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

در نتیجه به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}$$

۶-۵-۲۴ مثال:

حد $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \cot x \right]$ محاسبه کنید.

حل:

این حد به صورت مبهم $\infty - \infty$ است. می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \cot x \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - x}{x \tan x}$$

حد سمت راست به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. از قاعده هوییتال استفاده می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sec^2 x - 1}{\tan x + x \sec^2 x}$$

این حد نیز به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابر قاعده هوییتال داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sec^2 x - 1}{\tan x + x \sec^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sec^2 x \tan x}{2\sec^2 x + 2x \sec^2 x \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{1 + x \tan x} = 0\end{aligned}$$

در نتیجه به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \cot x \right] = 0$$

۶-۵-۲۶ صورتهای مبهم توانی:

فرض کنیم $y = f(x)^{g(x)}$ عددی حقیقی یا یکی از نمادهای $+\infty$ $-\infty$

باشد، در این صورت

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ به صورت مبهم 0^0 در می آید.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ به صورت مبهم ∞^0 در می آید.

پ) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ به صورت مبهم 1^∞ در می آید.

صورتهای مبهم بالا را صورتهای مبهم توانی می نامیم.

برای رفع ابهام از این گونه صورتهای مبهم، از دو طرف تساوی $y = f(x)^{g(x)}$ لگاریتم طبیعی می گیریم، به دست می آوریم

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x)$$

سپس از دو طرف تساوی اخیر هنگامی که $x \rightarrow a$ حد می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$

حد سمت راست تساوی اخیر به صورتی است که می توان قاعده هویپیتال را

برای رفع ابهام آن به کار برد. در مثالهای زیر روش رفع ابهام از صورتهای

مبهم توانی توضیح داده شده است.