# ریاضیات عالی مهندسی

دکتر محمد عثمانی بجد

۱۵ آبان ۱۳۹۹

## فرم نمائی سری فوریه

$$i^2 = -1 \to i = \sqrt{-1}$$
$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i \times i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

اعداد مختلط به صورت زوج مرتب $(x, y)$ یا $z = x + iy$ نمایش داده می‌شوند.

$$\left.\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} \cos\theta &= \tfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \tfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}\right.$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{e^{\frac{in\pi}{L}x} + e^{\frac{-in\pi}{L}x}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{in\pi}{L}x} - e^{\frac{-in\pi}{L}x}}{2i}\right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi}{L}x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{\frac{-in\pi}{L}x}\right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi}{L}x}\right] + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{\frac{in\pi}{L}x}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}}$$

$$c_n = \begin{cases} a_0 & n = 0 \\ \frac{a_n - ib_n}{2} & n > 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases}$$

**محاسبه مستقیم ضرائب سری فوریه نمائی:**

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

طرفین رابطه بالا را در $e^{\frac{-im\pi}{L}x}$ ضرب و از $-L$ تا $L$ انتگرال می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-im\pi}{L}x} \mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( c_n e^{\frac{in\pi}{L}x} \right) e^{\frac{-im\pi}{L}x} \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^{L} e^{\frac{in\pi}{L}x} e^{\frac{-im\pi}{L}x} \mathrm{d}x \\ &= 2L\, c_m \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^{L} e^{\frac{in\pi}{L}x} e^{\frac{-im\pi}{L}x} \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2L & m = n \end{cases}$$

$$c_m = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-im\pi}{L}x} \mathrm{d}x \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

مثال: تابع$f(x)$در یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف شده است و در خارج فاصله فوق متناوب است. مطلوبست بسط سری فوریه نمائی $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$T = 2\pi \Longrightarrow L = \pi$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-in\pi}{L}x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\times e^{-inx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} 1\times e^{-inx}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{-2in\pi}(e^{-in\pi}-1) = \frac{1}{2in\pi}(1-e^{-in\pi})\\
&= \frac{1-\cos n\pi + i\sin n\pi}{2in\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{2\,i\,n\,\pi} = \frac{1-(-1)^n}{2\,i\,n\,\pi}\\
&= \begin{cases} 0 & n \text{ even}\\ \frac{1}{in\pi} & n \text{ odd}\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\\
f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0\\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{1}{in\pi}e^{i\,n\,x} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty\\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{1}{in\pi}e^{i\,n\,x}
\end{aligned}
$$

مثال: تابع $f(x)$ در یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف شده است و در خارج فاصله فوق متناوب است. مطلوبست بسط سری فوریه نمائی $f(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x, \qquad |x|\leq \pi\\
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-in\pi}{L}x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-x\times\frac{e^{-inx}}{in} + \frac{e^{-inx}}{n^2}\ \Big|_{-\pi}^{\pi}\right.\\
&= \frac{i}{n}(-1)^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = 0\\
f(x) &= \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n e^{i\,n\,x}
\end{aligned}
$$

## انتگرال‌گیری از سری فوریه

اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi$ باشد و در فاصله $[-\pi, \pi]$ تکه‌ای پیوسته باشد ودر این صورت می‌توان از بسط سری فوریه جمله به جمله انتگرال گرفت.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{x} a_0 \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{x} a_0 \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) \mathrm{d}t \\ &= a_0(x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{x} \left( a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t - a_0 x$$

چون $f$ تکه‌ای پیوسته است پس $F$ هم پیوسته است

همچنین $F'(x) = f(x) - a_0$ (غیر از نقاطی که $f$ پیوسته نباشد). بنابراین $F'(x)$ در فاصله $(-\pi, \pi)$ تکه‌ای پیوسته است. همچنین $F(\pi) = a_0\pi$ و $F(-\pi) = a_0\pi$. لذا داریم:

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

که

$$A_n = -\frac{b_n}{n} \qquad B_n = \frac{a_n}{n} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

و مقدار $A_0$ بر مبنای $F(\pi) - a_0\pi$ تعیین می‌شود

مثال: با فرض این که $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$ است. سری فوریه تابع متناوب $f(x) = x^2$ با دوره تناوب $2\pi$ را بدست آورید.

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه فوق از $0$ تا $x$:

$$\int_{0}^{x} t \,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{0}^{x} \sin nt \,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{\pi^2}{6} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos nx$$

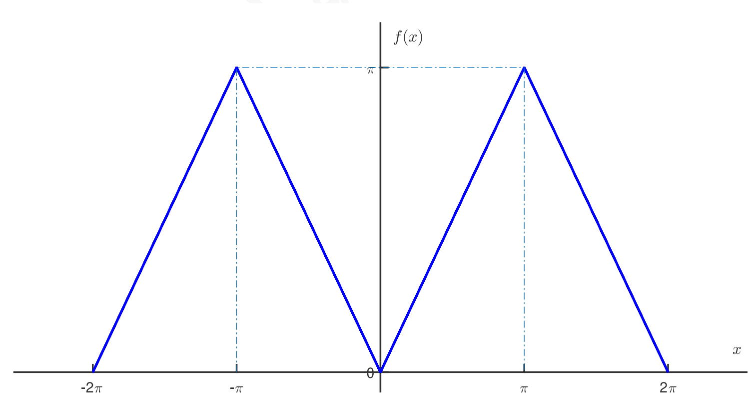
## مشتق‌گیری از سری فوریه

تابع $f(x)$ در فاصله $[-\pi,\pi]$ پیوسته و $f(-\pi)=f(\pi)$. علاوه بر این $f(x)$ در این فاصله تکه‌ای هموار باشد. در این صورت سری فوریه $f'(x)$ را می‌توان با مشتق‌گیری جمله به جمله تابع $f(x)$ بدست آورد و در هر نقطه از ناپیوستگی مقدار $f'(x)$ برابر است با میانگین حسابی $f'(x^+)$ و $f'(x^-)$

مثال:

$$f(x) = |x| \qquad |x| \leq \pi$$

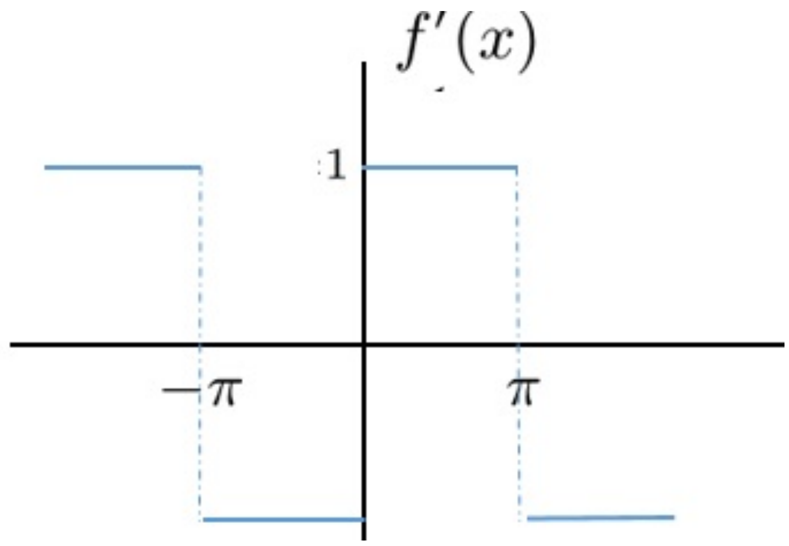
$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$




شکل ۱: تابع متناوب $f(x)=|x|$ با دوره تناوب $2\pi$

$f(x)$ تابع پیوسته و تکه‌ای هموار است. با مشتق‌گیری جمله به جمله از بسط فوق داریم:

$$f'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}$$




شکل ۲: تابع متناوب $f'(x)$ با دوره تناوب $2\pi$

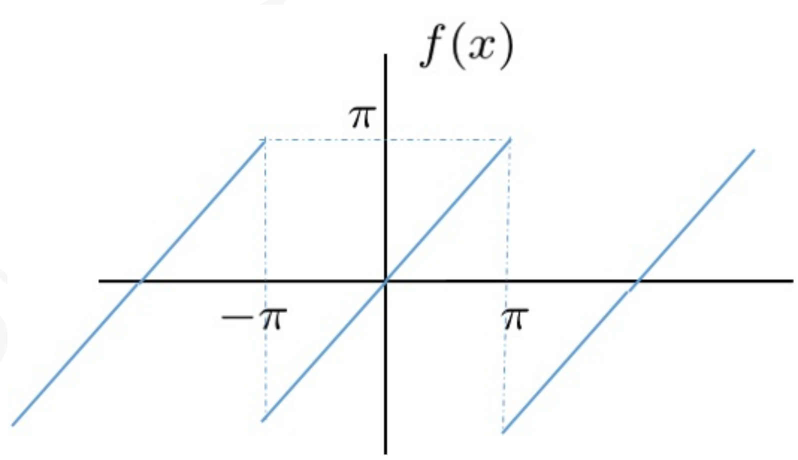
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

که بسط سری فوریه موج مربعی است.

مثال:

$$f(x) = \frac{x}{2} \qquad |x| < \pi$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$




شکل ۳: تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $2\pi$ با ناپیوستگی در نقاط $\pm\pi$

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \pm \cdots$$

رابطه فوق برای همه $x$ها، همگراست. اما با مشتق‌گیری از سمت راست رابطه فوق داریم:

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x \pm \cdots$$

رابطه فوق برای همه $x$ها، واگراست. دلیل این امر ناپیوستگی تابع $\frac{1}{2}x$ در نقاط $\pm\pi$ و $\pm 3\pi$ و $\cdots$ است.

## تقریب چند جمله‌ای مثلثاتی

در بسط سری فوریه $f(x)$، تعداد جملات سری حاصل در حالت کلی بینهایت و محاسبه مجموع در بسیاری مواقع غیر ممکن است. سوالی که مطرح است این است که تا چه تعداد جملات باید درنظر گرفته شود تا حاصل جمع تقریب مناسبی برای این مجموع باشد.

فرض کنید مجموع $N$ جمله اول از بسط سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $2\pi$ برابر $F_N(x)$ باشد.

$$F_N(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

$$|f(x) - F_N(x)| \qquad |f(x) - F_N(x)|^2$$

$$\text{خطای مربعی کل: } E = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_N(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

ثابت می‌کنیم که خطای مربعی کل $F_N(x)$نسبت به تابع $f(x)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ حداقل است اگر و تنها اگر ضرائب $F_N(x)$ با ضرائب سری فوریه $f(x)$یکسان باشد ومقدار این خطا برابر است با:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2\right)\right]$$

با فرض $f(x)$ تکه‌ای پیوسته با دوره تناوب $2\pi$:

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_N(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_N(x)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} F_N^2(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_N(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Big(A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos nx + B_n \sin nx\Big)\mathrm{d}x \\ &= \pi\Big(2a_0A_0 + \sum_{n=1}^{N} a_nA_n + b_nB_n\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} F_N^2(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos nx + B_n \sin nx\Big)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi\Big(2A_0^2 + \sum_{n=1}^{N} A_n^2 + B_n^2\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_N(x)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} F_N^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\pi\Big(2a_0A_0 + \sum_{n=1}^{N} a_nA_n + b_nB_n\Big) + \pi\Big(2A_0^2 + \sum_{n=1}^{N} A_n^2 + B_n^2\Big) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x + \pi\Big(2A_0^2 - 4a_0A_0\Big) + \pi\sum_{n=1}^{N}\Big[\Big(A_n^2 - 2a_nA_n\Big) + \Big(B_n^2 - 2b_nB_n\Big)\Big] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x + \overbrace{2\pi\Big(A_0 - a_0\Big)^2 - 2\pi a_0^2} + \pi\sum_{n=1}^{N}\Big[\Big(A_n - a_n\Big)^2 - a_n^2 + \Big(B_n - b_n\Big)^2 - b_n^2\Big]
\end{aligned}
$$

برای حداقل شدن خطا باید داشته باشیم:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= a_0 \\
A_n &= a_n \\
B_n &= b_n
\end{aligned}
$$

و حداقل مقدار خطا برابر است با:

$$
E_{\min} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right] \geq 0
$$

$$
2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x
$$

از آنجا که سمت راست نامساوی مستقل از $N$ است، می‌توان نوشت:

نامساوی بسل: $$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

رابطه پارسوال: $$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

اثبات رابطه پارسوال:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\end{aligned}$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $\pi$ داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

**حالت کلی‌تر رابطه پارسوال:**

اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

$$g(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx + B_n\sin nx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 2a_0A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nA_n + b_nB_n\right)$$

اثبات:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a_0\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= 2\pi a_0A_0 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n)\end{aligned}$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $\pi$ داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 2a_0A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nA_n + b_nB_n\right)$$

مثال: در صورتی‌که سری سینوسی فوریه تابع $f(x) = x(\pi - x)$ که در فاصله $0 \leq x \leq \pi$ تعریف شده است به صورت زیر باشد.

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

نشان دهید که:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

حل: اتحاد پارسوال

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \mathrm{d}x = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^2 + b_n^2\right]$$

با جایگذاری در سمت چپ رابطه پارسوال داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{0} \left(-x(\pi + x)\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \left(x(\pi - x)\right)^2 \mathrm{d}x \right) && (۱) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{0} \left(x^2(\pi^2 + 2\pi x + x^2)\right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \left(x^2(\pi^2 - 2\pi x + x^2)\right) \mathrm{d}x \right) && (۲) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \left( \frac{\pi^2 x^3}{3} + \frac{\pi x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right|_{-\pi}^{0} + \left( \frac{\pi^2 x^3}{3} - \frac{\pi x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right|_{0}^{\pi} \right) && (۳) \\
&= \frac{\pi^4}{15} && (۴)
\end{aligned}$$

از طرف دیگر، با جایگذاری در سمت راست رابطه پارسوال داریم:

$$\begin{aligned}
2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^2 + b_n^2\right] &= \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd } n}}^{\infty} \left( \frac{8}{\pi} \frac{1}{n^3} \right)^2 && (۵) \\
&= \frac{64}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{1}{n^6} && (۶)
\end{aligned}$$

با تساوی قرار دادن طرفین رابطه پارسوال داریم:

$$\frac{64}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^4}{15} \qquad (۷)$$

و در نهایت:

$$\sum_{\substack{n=1\\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960} \tag{۸}$$

مثال: بسط نیم دامنه فرد تابع $f(x) = x(\pi - x)$ را در فاصله $(0, \pi)$ بدست آورید و نشان دهید که:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

راه حل:

$$L = \pi \longrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

جزء به جزء

$$\begin{tikzcd}
x(\pi - x) \arrow[d, "\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}"'] \arrow[dr, "+"] & \sin nx \arrow[d, "\int"] \\
\pi - 2x \arrow[d, "\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}"'] \arrow[dr, "-"] & -\frac{\cos nx}{n} \arrow[d, "\int"] \\
-2 \arrow[d, "\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}"'] \arrow[dr, "+"] & -\frac{\sin nx}{n^2} \arrow[d, "\int"] \\
0 & \frac{\cos nx}{n^3}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\Big[-x(\pi - x)\frac{\cos nx}{n} + (\pi - 2x)\frac{\sin nx}{n^2} - 2\frac{\cos nx}{n^3}\Big]_0^{\pi} \\
&= -\frac{4}{\pi n^3}\big(\cos n\pi - 1\big) = \frac{4}{\pi n^3}\big(1 - \cos n\pi\big) = \frac{4}{\pi n^3}\big(1 - (-1)^n\big) \\
&= \begin{cases} 0 & n \,\text{even} \\ \frac{8}{\pi n^3} & n \,\text{odd} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f(x) = x(\pi - x) = \sum_{\substack{n=1\\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{8}{\pi n^3}\sin nx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin(2k-1)x \qquad 0 < x < \pi$$

با جایگذاری $x = \frac{\pi}{2}$ در رابطه فوق داریم:

$$\frac{\pi}{2}(\pi - \frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

## انتگرال فوریه

مسائلی که تاکنون بررسی شده است برای دامنه‌های متناهی بوده است. اگر دامنه نامتناهی یا نیمه متناهی باشد چه اتفاقی خواهد افتاد؟ یا برای توابعی که متناوب نیستند چگونه باید عمل کرد؟

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \qquad -L < x < L$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{L}x\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi}{L}u\,\mathrm{d}u + \sin\frac{n\pi}{L}x\int_{-L}^{L} f(u)\sin\frac{n\pi}{L}u\,\mathrm{d}u\right)$$

با فرض این که تابع $f(x)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد ($\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ محدود باشد)

$$w_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{\Delta w}{\pi} = \frac{1}{L}$$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos w_n x\int_{-L}^{L} f(u)\cos w_n u\,\mathrm{d}u + \sin w_n x\int_{-L}^{L} f(u)\sin w_n u\,\mathrm{d}u\right)\Delta w$$

$$L \longrightarrow \infty \Longrightarrow \Delta w \longrightarrow 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(u)\big|\,\mathrm{d}u \ \text{ is limit}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big(\cos wx\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos wu\,\mathrm{d}u+\sin wx\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin wu\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}w$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos wu\,\mathrm{d}u$$
$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin wu\,\mathrm{d}u$$
$$\boxed{f(x)=\int_0^{\infty}\Big(A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\Big)\,\mathrm{d}w}$$

در بعضی منابع:

$$A(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos wu\,\mathrm{d}u$$
$$B(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin wu\,\mathrm{d}u$$
$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big(A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\Big)\,\mathrm{d}w$$

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big(\cos wx\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos wu\,\mathrm{d}u+\sin wx\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin wu\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\Big(\cos wx\,\cos wu+\sin wx\sin wu\Big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos w(x-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

**قضیه**: اگر تابع $f(x)$ در هر بازه محدود تکه تکه پیوسته باشد و دارای مشتقات سمت چپ و راست در هر نقطه باشد و همچنین $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ محدود باشد، می‌توان تابع $f(x)$ را به صورت انتگرال فوریه نشان داد. در هر نقطه که $f(x)$ ناپیوسته باشد مقدار انتگرال فوریه برابر متوسط حد چپ و راست در آن نقطه می باشد.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x<\pi\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ را به صورت انتگرال فوریه نوشته و با استفاده از آن نشان دهید که

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}A(w)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos wx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\cos wx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1+\cos\pi w}{\pi(1-w^2)}\end{aligned}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\ \sin wx\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\sin \pi w}{\pi(1-w^2)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx\,(1+\cos \pi w) + \sin wx\ \sin \pi w}{1-w^2}\ \mathrm{d}w$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx + \cos w(x-\pi)}{1-w^2}\ \mathrm{d}w$$

بخش دوم: در رابطه انتگرال فوریه، $x = \frac{\pi}{2}$ را جایگذاری و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2}w + \cos w(\frac{\pi}{2}-\pi)}{1-w^2}\ \mathrm{d}w = f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2\cos \frac{\pi}{2}w}{1-w^2}\ \mathrm{d}w = f(\frac{\pi}{2}) = \pi$$

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2}w}{1-w^2}\ \mathrm{d}w = \frac{\pi}{2}}$$

مثال:مطلوبست محاسبه

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos wx \,\mathrm{d}x$$

روش جزء به جزء $\qquad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[d, "\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}"'] \arrow[dr, "+"] & \mathrm{d}v \arrow[d, "\int"] \\
\mathrm{d}u \arrow[r, "-"] & v
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-kx}\cos wx \,\mathrm{d}x &= \left(e^{-kx}\frac{\sin wx}{w} - ke^{-kx}\frac{\cos wx}{w^2}\right|_0^\infty \\
&\quad - \int_0^\infty k^2 e^{-kx}\frac{\cos wx}{w^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{k}{w^2} - \frac{k^2}{w^2}\int_0^\infty e^{-kx}\cos wx\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
e^{-kx} \arrow[d, "\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}"'] \arrow[dr, "+"] & \cos wx \arrow[d, "\int"] \\
-ke^{-kx} \arrow[d, "\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}"'] \arrow[dr, "-"] & \frac{\sin wx}{w} \arrow[d, "\int"] \\
k^2e^{-kx} \arrow[r, "+"] & -\frac{\cos wx}{w^2}
\end{tikzcd}$$

با انتقال جمله دوم در سمت راست رابطه فوق به سمت چپ داریم:

$$\left(1+\frac{k^2}{w^2}\right)\int_0^\infty e^{-kx}\cos wx \,\mathrm{d}x = \frac{k}{w^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos wx \,\mathrm{d}x = \frac{k}{k^2+w^2}$$