امتحان میانترم ریاضی عمومی۱-دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پاسخ : **ابراهیم شاه ابراهیمی**

@EbiMath

---

۱. اثبات کنید که حداقل یک c در بازه $(\frac{۱}{۲},۲)$ وجود دارد به طوریکه: (۱۰ نمره)

$$Lnc = -c\sinh(c-۲)$$

(قضیه مقدار میانی (بولتزانو) - ساده)

$$\xrightarrow{\text{تابع کمکی}} f(x) = \ln x + x\sinh(x-2)$$

تابع $f(x)$، در بازه $[\frac{1}{2}, 2]$ پیوسته است و داریم:

$$\begin{cases} f(2) = \ln 2 + 2\cancel{\sinh(0)}^{\,0} = \ln 2 \simeq 0.7 > 0 \\ f(\frac{1}{2}) = \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sinh(-\frac{3}{2}) = -\ln 2 - \frac{1}{2}\sinh\frac{3}{2} < 0 \end{cases}$$

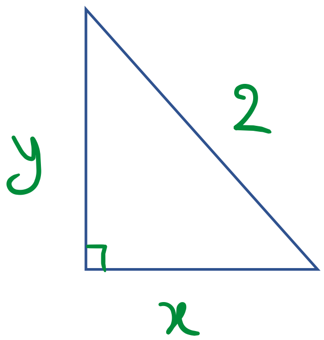
$$f(2)f(\tfrac{1}{2}) < 0 \longrightarrow \exists c \in (\tfrac{1}{2}, 2) \longrightarrow f(c) = 0$$

طبق نتیجه قضیه مقدار میانی یعنی بولتزانو با توجه به پیوستگی f و اینکه $f(2)f(\frac{1}{2})<0$ حداقل یک نقطه مانند c در بازه $(\frac{1}{2}, 2)$ وجود دارد که $f(c)=0$ شود.

$$\to \ln c + c\sinh(c-2) = 0 \longrightarrow \boxed{\ln c = -c\sinh(c-2)}$$

۲. حداکثر مقدار محیط برای مثلث های قائم الزاویه با طول وتر ۲ را بیابید. (۱۰ نمره)

(اکسترمم - ساده)



$$\xrightarrow{\text{فیثاغورث}} x^2+y^2=4 \rightarrow x=\sqrt{4-y^2}$$

$$\xrightarrow{\text{محیط}} P = x+y+2$$

$$\rightarrow P_{(x)} = x+\sqrt{4-x^2}+2$$

$$\xrightarrow{d/dx} \frac{dP_{(x)}}{dx} = 1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}+0$$

$$\xrightarrow[P'=0]{\text{اکسترمم}} 1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=1 \rightarrow x^2=4-x^2$$

$$\rightarrow 2x^2=4 \rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{2}} \xrightarrow[\text{مثبت است}]{\text{ضلع مثلث}} \boxed{x=+\sqrt{2}}$$

$P'_{(x)}$: $x=+\sqrt{2}$; $+$ ↗ | $-$ ↘ $\rightarrow$ نقطه Max تابع $P_{(x)}$

$$\rightarrow P(x=\sqrt{2}) = \sqrt{2}+\sqrt{4-2}+2 = \boxed{2\sqrt{2}+2}$$

۳. الف) فرض کنید $f:[0,1]\to[0,1]$ تابعی پیوسته، $f(0)=0$ و $f(1)=1$ باشد. اثبات کنید حداقل یک نقطه مانند c وجود دارد که $f(c)=1-c$.

(قضیه مقدار میانی - بولتزانو - ساده)

$$\xrightarrow{\text{تابع کمکی}} g(x)=f(x)+x-1$$

چون f پیوسته است ← g نیز پیوسته

$$\begin{cases} g(1)=f(1)+1-1=f(1)=1>0 \\ g(0)=f(0)+0-1=0-1<0 \end{cases}$$

$$\rightarrow g(0)g(1)<0 \rightarrow \exists c\in(0,1) \rightarrow g(c)=0$$

طبق نتیجه قضیه مقدار میانی یعنی بولتزانو، چون g پیوسته است و $g(0)g(1)<0$ حداقل یک نقطه مانند c در بازه $(0,1)$ وجود دارد که به ازای آن $g(c)=0$ شود.

$$\xrightarrow{g(c)=0} f(c)+c-1=0 \rightarrow f(c)=1-c$$

۳. ب)ثابت کنید یک a در بازه $(0,c)$ و یک b در بازه $(c,1)$ وجود دارد که $f'(a)f'(b)=1$.

(قضیه مقدار میانگین - متوسط)

تابع $f(x)$ بر بازه $[0,1]$ پیوسته و بر بازه $(0,1)$ مشتق‌پذیر است

بنابراین طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\xrightarrow{\exists c \in (0,c)} f'(a)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{1-c-0}{c}=\underbrace{\frac{1-c}{c}}$$

$$\xrightarrow{\exists c \in (c,1)} f'(b)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-(1-c)}{1-c}=\underbrace{\frac{c}{1-c}}$$

$$\rightarrow f'(a)\cdot f'(b)=\frac{1-c}{c}\cdot\frac{c}{1-c}=\underbrace{1}$$

۴. اگر $f(x)=\int_{\sinh x-1}^{\cosh x} \sin^{1403}(\frac{\pi}{2}t)\,dt$ باشد، مقدار $f(0/01)$ را به کمک تقریب خطی بیابید.

(تقریب خطی ـ حرفه ای ت)

$$\boxed{y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}}$$ بسط تیلور

$$\xrightarrow{\text{تقریب خطی}} \boxed{P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)} \qquad \boxed{a=0}$$

$$\to f(0)=\int_{-1}^{1}\sin^{1403}(\tfrac{\pi}{2}t)\,dt \xrightarrow[\text{بازه متقارن}]{\text{تابع فرد}} \boxed{f(0)=0}$$

$$f'(x)=\sinh x.\left(\sin^{1403}(\tfrac{\pi}{2}\cosh x)\right)-\cosh(x).\left(\sin^{1403}(\tfrac{\pi}{2}(\sinh x-1))\right)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0)=0-1(-1)=\boxed{1}$$

$$\to P_1(x)=0+1(x-0)$$

$$\to \boxed{P_1(x)=x}$$

$$\to f(1.01)\simeq P_1(1.01)=\boxed{0.01}$$

(Hop _ $\frac{0}{0}$ ...)

۵. حاصل حد زیر را بیابید:

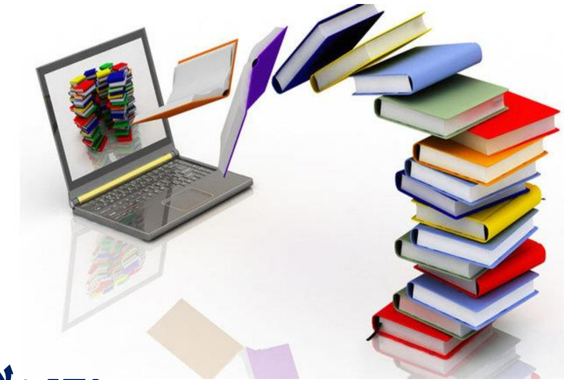
$$\lim_{x\to ۰}\frac{\int_{۰}^{\sqrt{۱۴۰۳}x^{۲}} \sin\left(\frac{t^{۲}}{۱۴۰۳}\right)dt}{\int_{۰}^{\sqrt{۲۰۲۴}x^{۲}} \tan\left(\frac{t^{۲}}{۲۰۲۴}\right)dt} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}\sqrt{1403}\cdot\cancel{x}\cdot\sin\left(\frac{\cancel{1403}\,x^4}{\cancel{1403}}\right)}{\cancel{2}\sqrt{2024}\cdot\cancel{x}\cdot tg\left(\frac{\cancel{2024}\cdot x^4}{\cancel{2024}}\right)}$$

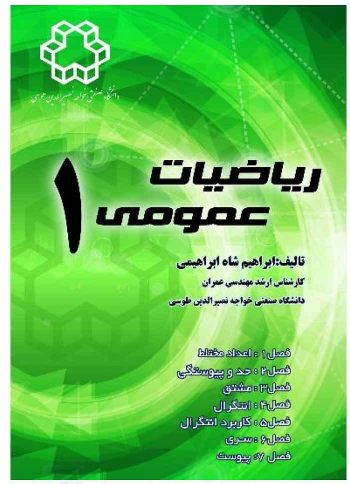
$$= \frac{\sqrt{1403}}{\sqrt{2024}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^4)}{tg(x^4)}$$

$$= \frac{\sqrt{1403}}{\sqrt{2024}}\lim_{x\to 0}\cos(x^4)$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{1403}{2024}}}$$



محصولات آموزشی مبحثی ریاضی عمومی۱ :



لینک خرید فیلم مبحثی" حد "

لینک خرید فیلم مبحثی" مشتق"

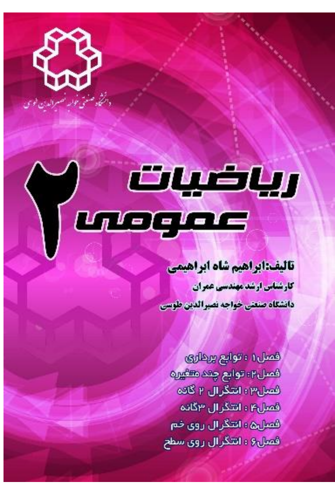
لینک خرید فیلم مبحثی" اعداد مختلط"

لینک خرید فیلم مبحثی" انتگرال"

لینک خرید فیلم مبحثی" کاربرد انتگرال "

لینک خرید فیلم مبحثی" سری"

محصولات آموزشی مبحثی ریاضی عمومی۲ :



لینک خرید فیلم مبحثی" توابع برداری و رویه ها "

لینک خرید فیلم مبحثی" توابع چندمتغیره "

لینک خرید فیلم مبحثی" انتگرال دوگانه "

لینک خرید فیلم مبحثی"انتگرال سه گانه "

لینک خرید فیلم مبحثی "انتگرال روی خم"

لینک خرید فیلم مبحثی" انتگرال روی سطح "

محصولات آموزشی مبحثی معادلات دیفرانسیل :

لینک خرید فیلم مبحثی " معادلات مرتبه اول "

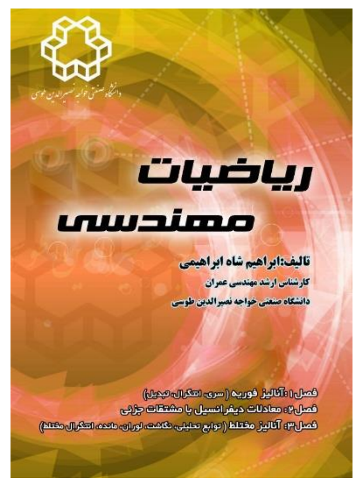
لینک خرید فیلم مبحثی " معادلات مرتبه دوم و بالاتر "

لینک خرید فیلم مبحثی " سری "

لینک خرید فیلم مبحثی " لاپلاس "

لینک خرید فیلم مبحثی " حل دستگاه "

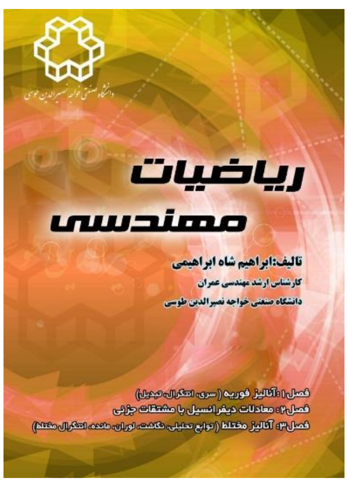
محصولات آموزشی مبحثی ریاضیات مهندسی :



لینک خرید فیلم مبحثی " آنالیز فوریه "

لینک خرید فیلم مبحثی " معادلات PDE "

لینک خرید فیلم مبحثی " آنالیز مختلط "



پک کامل محصولات آموزشی:

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی " ریاضی عمومی ۱"

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی " ریاضی عمومی۲"

لینک خرید پک کامل فیلم های آموزشی " معادلات دیفرانسیل"

امیدوارم که از این دوره لذت برده باشید.